RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle et application »

Présenté Par :
SERSOU Abdellah et DAHNAT Naceur

Sous L'intitulé :

Espace de Hilbert à noyau reproduisant

Soutenu publiquement le .. / 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mme BOUAZZA Zoubida	MCA	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Président
Mme YOUBI Fatima	MCB	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Encadreur
Mme KHELIFA Hizia	MCB	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2023/2024

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à note encadreur, Miss, fatima youbi, pour ses conseils avisés et son soutien tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie également les deux professeurs khelifa Hizia et Bouaaza Zoubida d'avoir accepté d'étudier et de discuter de notre travaille. Enfin, je dédie ce travail à ma famille, pour leur amour et leur soutien inconditionnels.

Dédicace

Je remercie Dieu de m'avoir accordé le succès dans la réalisation de ce travail, que je dédie

À mon cher père, Mhammad et ma chère mère, Mbarka, que les mots ne parviennent pas à remercier.

À mon frère unique, Khair al-Din et son épouse, et mes deux chères sœurs.

À mon amie, ma tante, ma sœur et ma deuxième mère, « Maghnia » et son fils "Mohammed Djabo " .

À mes filles, Soumaya et Rehab.

À tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé pendant la période de ssa préparation.

À la plupart des enseignants, en particulier à l'artiste ZIANE Mohamad et les professeurs :" Larabi, Sanoussi, Ouardani, Halim et Benia".

À mon partenaire dans la réalisation de ce travail, mon frère Abdullah.

À mon ami "Oussama Dekkiche . "

À ma petite professeur , Sœur Najat Mansour.

À ma fiancée . . .

À mes frères Ahmed Belharache, Raja, Madiha, Khalafallah... et les autres.

À qui a ecrit les derniers lettres de ce mémoire . « Yassmine benabedesselam ."

À tous ceux qui m'ont laissé tomber et à tous ceux qui ont fait obstacle à la réalisation de mes rêves ...Tu étais mon meilleur facteur de motivation.. je donne de bonnes nouvelles.. ce n'est que le début

- Avec tout ma reconnaissance, **[Nas Sro L]**.

.

إهداء

الحمد لله رب العالمين له الكمال وحده والصلاة والسلام على سيدنا محمد نبيه ورسوله الأمين وعلى سائر الأنبياء والمرسلين

أحمده الله تعالى الذي بارك لي في اتمام بحثي هذا واتقدم بجزيل الشكر وخالص الإمتنان الى والدي فلولاهما لما وجدت في هذه الحياة:

إلى أبي :رابح

و إلى أمي: فغولي خيرة

وإلى إخوتي: محمد ونصرالدين وياسين

وإلى إخوتي خاصة إبنة أخي مروى

و إلى عائلتي من قريب وبعيد

و إلى أساتذتي الأفاضل الذين كان لهم كل الفضل في سلوكي هذا الدرب خاصة الأستاذ الكريم زيان محمد.

إلى كل زملائي وزميلاتي بالجامعة.

ودون ان أنسى زميلي في المذكرة «نصرو»

وإلى كل من مد لي يد العون الخارجي هذا يرقى إلى المستوى المطلوب إن شاء الله

Résumé

Un EHNR est un espace de fonctions qui possède une fonction speciale appellée noyau reproduisant. Le noyau reproduisant permet de calculer la valeur d'une fonction a un point donné à l'aide de produit scalaire. En illustrant leur importance et leur utilité à travers l'étude des espaces de Hardy. Nous espérons que ce travail contribuera à une meilleure compréhension de ces espaces et de leurs applications.

Abstract

A RKHS is a function space that has a special function called a reproducing kernel. The reproducing kernel allow to calculate the value of a function at a given point using the inner product. By illustrating their impotance and their usefulanees through the study of Hardy spaces. We hope that this work contribute to a better understanding of these spaces and thier applications.

Table des matières

Notations

$\mathbb{K}$:	le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
H	espace de Hilbert.
$\langle \, , \, \rangle$	Le produit scalaire.
$K(x,y)$	fonction définie positive.
$N(.,y)$	Noyau reproduisant.
$\mathcal{H}$	espace de Hilbert à noyau reproduisant.
$\mathcal{H}(K)$	espace de Hilbert à noyau reproduisant correspondant à la fonction définie positive K.
$EHNR$	Espace de Hilbert à noyau reproduisant.

Introduction

Les espaces de Hilbert à noyau reproduisant (EHNR) jouent un rôle fondamental en analyse fonctionnelle et trouvent des applications dans divers domaines tels que la théorie des opérateurs et la géométrie des espaces de Banach. Ce type d'espace constituent une classe importante d'espaces de Hilbert en raison de leurs propriétés particulières et de leurs applications variées. Leur caractéristique distinctive est la présence d'un reproduisant, une fonction qui permet de représenter les évaluations ponctuelles comme des produits scalaires dans l'espace. Cette propriété confère aux EHNR une structure riche et polyvalente, facilitant l'analyse et la résolution des problèmes dans de nombreux domaines de la mathématique appliquée et théorique. Ce mémoire est organisé en trois chapitres principaux :

Chapitre 1 : Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présenterons les notions de base et les résultats préliminaires nécessaires à la compréhension des concepts développés ultérieurement. Nous aborderons les définitions et propriétés fondamentales des espaces de Hilbert, les opérateurs linéaires et les concepts de noyaux de reproduction.

Chapitre 2 : Espaces de Hilbert à Noyau Reproduisant

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie des noyaux reproduisant. Après avoir donné la définition générale d'un noyau reproduisant, nous établissons les principales propriétés des noyaux reproduisant en tant que fonctions de deux variables. Ensuite, nous définissons les espaces de Hilbert à noyau reproduisant et étudions leurs propriétés à travers plusieurs théorèmes. De plus, nous décrivons la construction d'un espace de Hilbert à noyau reproduisant à partir d'une fonction définie positive. Nous concluons ce chapitre par quelques opérations sur les espaces de Hilbert à noyau reproduisant, telles que la complexification, les sommes et les différences de noyaux reproduisant.

Chapitre 3 : Espace de Hardy dans le Disque Unité.

Dans le dernier chapitre, nous nous concentrerons sur les espaces de Hardy, un exemple classique et important de EHNR, dans le contexte du disque unité. Nous examinerons leurs propriétés spécifiques, les fonctions qui les composent, et les applications pertinentes. Ce chapitre illustrera comment les concepts généraux des EHNR se spécialisent dans le cadre des espaces de Hardy.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes concernant l'analyse fonctionnelle et l'espace de Hilbert qui sont utilisés dans ce mémoire.

1.1 Espace de Banach

Définition 1. *(La norme) :*

Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application : $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes

(1) $\forall x \in E$ non nul, on a $\|x\| \neq 0$.

(2) $\forall x \in E$ et tout $\lambda \in K$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(3) $\forall x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, (inégalité triangulaire).

Définition 2. *(Espace vectoriel norme) :*

Une espace vectoriel normé est espace vectoriel Esur $\mathbb{K}$ muni d'une norme$\|.\|$.

Définition 3. *(La convergence) :*

Une suite de fonctions $(f_n), n \in \mathbb{N}$ *de* I *dans* $\mathbb{K}$ *converge simplement vers la fonction* f *si pour tout* $x \in I$*, la suite numérique* $(f_n(x)), n \in \mathbb{N}$ *converge vers* $f(x)$ *,on note* $f_n(x) \to f(x)$.

Proposition 1. *Si la suite* $(F_n), n \in N$ *converge uniformément alors, sa limite est unique.*

Définition 4. *(La continuité) :*

Soient $(E, \|.\|)$ *et* $(E^{'}, \|.\|^{'})$*deux espace normés, et* $f : E \mapsto E^{'}$*une application ,on dit que* f *est continue en* $x_0 \in E$ *si :* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X \in E : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

c-a-d :

$$\lim_{X \to X_0} f(x) = f(x_0).$$

Définition 5. *(Suite de Cauchy) :*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ *un espace normé,* $U_n : \mathbb{N} \to E$*. La suite* $(U_n), n \in \mathbb{N}$ *est dit suite de Cauchy si :*

$\forall \varepsilon > 0$*,* $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, n, m > n_0$*, on dit* $\|u_m - u_n\| < \varepsilon$.

Proposition 2. *Tout suite convergente est de Cauchy .*

Définition 6. *(Espace complet) :*

On dit que l'espace vectoriel normé (X, d) *est complet si toute suite de Cauchy converge.*

Définition 7. *(Espace de Banach) :*

Un espace de Banach est un espace vectoriel norme $(E, \|\|)$*, qui est complet pour la distance associe a la norme.*

Définition 8. *(Opérateur linéaire) :*

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels sur le même corps des scalaires .*

une application $T : E \to F$ est dite linéaire si :

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + Ty \ \ x, y \in E, \alpha \epsilon \mathbb{K}. \tag{1.1.1}$$

T est aussi appelée opérateur linéaire ou transformation linéaire.

Définition 9. *(Opérateur linéaire borné) :*

Soit E et F deux espaces normés $T : E \to F$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$, telle que :

$$\|Tx\| \leq M\|x\|; \forall x \in E, \tag{1.1.2}$$

pour tout $\phi \in E$

Théorème 1. *Soit T un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F. Alors les assertions suivantes sont équivalents .*

a) T est borné

b) T est continu sur E.

c) T est continu à l'origine.

Définition 10. *(la densité) :*

Soit A un sous-ensemble d'un espace normé $(X, \|.\|)$.

A est dense dans X si :

$\overline{A} = X$ ou $\overline{A}$ désignée l'adhérence de A .

1.2 Espace de Hilbert

Définition 11. *(Produit Scalaire) :*

Soit H un espace vectoriel.

Un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ est une forme linéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{C}$, définie positive, notée $\langle ., .\rangle$ telle que pour tout x, y, z dans H et λ dans $\mathbb{C}$ on a :

$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, z\rangle}$

$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$

Définition 12. *(Espace Pré-hilbertien) :*

Un espace pré-hilbertien est un espace sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire .

Définition 13. *(Espace de Hilbert) :*

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H, muni d'un produit scalaire$\langle u, u\rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Théorème 2. *(inégalité de Cauchy-Schwartz) :*

soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace pré-hilbertien réel. Soit $\|.\|$ la norme euclidienne associée a $(\langle ., .\rangle)^2$ alors

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\| \tag{1.2.1}$$

Définition 14. *On dit fonctionnelle linéaire(fonction d'évaluation) L_x la fonction définie sur E par $L_x(f) = f(x)$; tq : $E' \to \mathbb{R}$; $E' = \{f \ tqf : E \to \mathbb{R}\}$.*

Définition 15. *(Espace dual) :*

Si X est un espace linéaire normé, alors son espace dual est l'ensemble des formes linéaires continues dans X.l'espace dual est généralement noté par X' en d' autres termes

$$X' = T : X \to \mathbb{R}, T \text{ est continue.} \tag{1.2.2}$$

Théorème 3. *(représentation de Riesz)*

Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$ et l dans H', alors il existe un et un seul élément x dans H, tel que

$$\begin{aligned} &l(y) = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H \text{ de plus} \\ &\|l\|_H = \|x\|_H. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Définition 16. *(Orthogonalité) :*

Soit H un espace de Hilbert, et soient $x, y \in H$, on dit que les vecteurs x et y sont orthogonaux, si $\langle x, y \rangle = 0$, et on note alors $x \perp y$ soient A un sous-ensemble de H et $x \in H$, on dit que x est orthogonale à A si pour tout $a \in A$ on a $\langle x, a \rangle = 0$, et on écrit $x \perp A$.

Soient A et B deux sous-ensemble de H. On dit que A et B sont orthogonaux si pour tout vecteur $x \in A$ et tout vecteur $y \in B$ on a $\langle x, y \rangle = 0$, et on écrit $A \perp B$.

Définition 17. *Soit $A \subset H$. On appelle complément orthogonale de la partie A l'ensemble, noté $A^{\perp}$,constitué des vecteurs de H orthogonaux à tous les vecteurs de A*

$$A^{\perp} = \{x \in H | \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$$

Théorème 4. *Si M est une partie non vide d'un espace de Hilbert H, alors l'espace engendré par M est dense dans H si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$.*

Chapitre 2

Espace de Hilbert à noyau reproduisant

Soit F une classe des fonctions finies (réelles ou complexes), définies dans un ensemble abstrait X. Supposons que cette classe forme un espace de Hilbert.

2.1 Noyaux reproduisant

Définition 18. *soit X un ensemble et soit $K : X\times\ X \to \mathbb{C}$ une fonction de deux variables. Ensuite,K est appelée fonction définie positive si pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}$, et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, on a*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_i}\alpha_k K(x_i, x_k) \geqslant 0.$$

Définition 19. *Noyau reproduisant :*

Nous dirons qu'une fonction $N(x; y)$, définie pour tous x et y de E, est un noyau reproduisant pour la classe F

si :

(1) pour tout y fixe, $N(x,y)$, en tant que fonction de x,appartient à la classe F ;

(2) pour tout fonction f de F, $N\langle x,y\rangle$ reproduit cette fonction ,c'est a dire que l'on a

$$f(y) = \langle f, N_y \rangle \tag{2.1.1}$$

supposons qu'il existe pour la classe F un noyau reproduisant $N(x,y)$, nous allons démontrer les propriétés suivantes de ce noyau reproduisant :

1. $N(y,z) = \langle N(x,z), N(x,y)\rangle$ pour tous $x, y \in E$
2. $N(x,y) = \overline{N(y,x)}$, pour tous $x, y \in E$
3. $N(x,y) \leq \sqrt{N(x,x)}\sqrt{N(y,y)}$ pour tous $x, x \in E$.
4. Soit $y \in E$, alors le suivant sont équivalant
   i. $N(y,y) = 0$.
   ii. $N(x.y) = 0$ pour tout $x \in E$.
   iii. $f(y) = 0$ pour tout $f \in F$.

preuve : 1. $N(y,y) \geqslant 0$.

$N(y,y) = N_y(y) = \langle N_y, N_y\rangle = \|N_y\|^2 \geqslant 0$.

2. $N(x,y) = \overline{N(y,x)}$.

$N(x,y) = N_y(x) = \langle N_y, N_x\rangle = \overline{\langle N_x, N_y\rangle} = \overline{N_x(y)} = \overline{N(y,x)}$.

3. $|N(x,y)| \leqslant N(x,x)N(y,y)$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$|N(x,y)| = |\langle N_y, N_x\rangle| \leqslant \|N_y\|^2\|N_x\|^2 = \langle N_y, N_y\rangle\langle N_x, N_x\rangle$.

4. $N(x,y) \leq \sqrt{N(x,x)}\sqrt{N(y,y)}$ pour tous $x, x \in E$.

   $N(x,y) = N_y(x) = \langle N_y, N_x \rangle \leqslant \|N_y\|\|N_x\| \leqslant \sqrt{\langle N_y, N_y \rangle}\sqrt{\langle N_x, N_x \rangle} = \sqrt{N_y(y)}\sqrt{N_x(x)} = \sqrt{N(y,y)}\sqrt{N(x,x)}$.

□

2.2 Espace de Hilbert à noyau reproduisant

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 20. *Un espace de Hilbert H des fonctions définie sur un ensemble X à valeurs complexes est un espace de Hilbert à noyau reproduisant si H possédée un noyau reproduisant.*

Théorème 5. *Soit H un espace de Hilbert de fonctions définie sur une ensemble X à valeurs dans $\mathbb{K}$, H est dite un espace de Hilbert à noyau reproduisant si et seulement si $\forall x \in X$, la fonctionnelle dévaluation E_x définie sur H par $Ex(f) = f(x)$ est bornée.*

preuve : Supposons que N est un noyau reproduisant de H, alors par la propriété reproductrice et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a pour tout $x \in X$

$$|E_x(f)| = |f(x)| = |\langle f, N_x \rangle| \leqslant \langle N_x, N_x \rangle^{\frac{1}{2}} \|f\| = N(x,x)^{\frac{1}{2}} \|f\|,$$

Alors $\forall x \in X$, E_x est bornée.

Inversement, Supposons que pour tout $x \in X$ la fonctionnelle linéaire Φ définie sur H est bornée, alors par la représentation de Riesz, pour tout $x \in X$ il existe une fonction $g_x \in H$

tel que

$$f(x) = \langle f, g_x \rangle$$

Si on mette N_x au lieu de g_x, alors pour tout $y \in X$ on a $N_x(y) = g_x(y)$, par consonance N est un noyau reproduisant pour H. $\square$

Théorème 6. *Le noyau reproduisant $N(y, x)$ d'un espace de Hilbert à noyau reproduisant H est une fonction définie positive .*

preuve : On a

$$0 \leqslant \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_{y_i} \|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_{y_i}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j N_{y_j} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle N_{y_i}, N_{y_j} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} N(y_j, y_i)$$

Par conséquent

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} N(y_j, y_i) \geqslant 0$$

$\square$

Théorème 7. *soit H un espace de Hilbert des fonctions définie sur un ensemble X à valeur dans $\mathbb{K}$, si H admet un noyau reproduisant $N(x, y)$,alors N est unique .*

preuve : Soit H un espace de Hilbert définie sur l'ensemble X, on suppose que $N(x, y)$ et $N'(x, y)$ sont deux noyaux reproduisant de l'espace H

on a :

$$\begin{aligned}
\|N_y - N'_y\| &= \langle N_y - N'_y, N_y - N'_y \rangle \\
&= \langle N_y - N'_y, N_y \rangle - \langle N_y - N'_y, N'_y \rangle \\
&= (N_y - N'_y)(y) - (N_y - N'_y)(y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Alors $N_y = N'_y$, cela signifie que $N_y(x) = N'_y(x), \forall x \in E$, par conséquent on a

$N(x,y) = N'(x,y), \forall x, y \in E$ □

Exemple 1. *Soit X un ensemble non-vide quelconque et soit $l^2(x)$ un espace définie par*

$$l^2(x) = \{f : X \mapsto \mathbb{C}; \sum_{x \in X} |f(x|^2 < \infty\}$$

Pour tout $f, g \in l^2(x)$ on définie un produit scalaire sur $l^2(x)$ par

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in X} f(x)\overline{g(x)}.$$

Alors $l^2(x)$ devient un espace de Hilbert des fonctions définie sur X

Si on fixe un point $y \in X$, et on $e_y \in l^2(x)$ la fonction donné par

$$e_x(y) := \begin{cases} 1 \ si \ y = x \\ \\ 0 \ si \ y \neq x \end{cases}$$

C'est clair que $\{e_y\}y \in X$ est un base orthonormal de $l^2(x)$ et de plus pour tout $y \in X$ on a :

$$\langle f, e_y \rangle = \sum_{x \in X} f(x)\overline{e_y(x)} = f(y)$$

Donc pour tout $y \in X$, e_y est un noyau reproduisant de $l^2(x)$, et on peut écrit

$$N(x,y) = \begin{cases} 1, \ si \ x = y; \\ \\ 0, \ si \ x \neq y. \end{cases}$$

Proposition 3. *Soit $\mathcal{H}$ un EHNR sur l'ensemble X avec le noyau N, alors espace engendré par les combinaisons linéaire des fonctions $N_y(.) = N(., y)$ est dense en $\mathcal{H}$*

preuve : Soit $M = vect\{N_y;\, y \in X\}$, et $f \in M^{\perp}$, alors pour tout $y \in X$ on a

$\langle f, N_y\rangle = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0$, d'où $f = 0$ alors $M^{\perp} = \{0\}$.

Donc M est dense dans $\mathcal{H}$. □

Lemme 1. *Soit $\mathcal{H}$ un EHNR sur X et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{H}$.*

si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$,alors $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

preuve : On a $|f_n(x) - f(x)| = |\langle f_n - f, N_x\rangle| \leqslant \|f_n - f\|\|N_x\| \longrightarrow 0$ □

Proposition 4. *Soit $H_i, i = 1, 2$ des $EHNR$ sur X avec noyaux $K_i, i = 1, 2$,soit $\|.\|_i$ denote la norme sur l'espace H_i,si $K_1(x, y) = K_2(x, y)$ pour tout $x, y \in X$, alors $H_1 = H_2$ et $\|f\|_1 = \|f\|_2$ pour tout f*

2.2.2 La construction d'un espace de Hilbert à noyau reproduisant

Théorème 8. *(Moore-Aronszajn)*

Soit X une ensemble et soit $K : X \times X \mapsto \mathbb{K}$ une application, si K est une fonction définie positive, alors il existe un espace de Hilbert à noyau reproduisant $\mathcal{H}$ des fonctions sur X tel que K est le noyau reproduisant de l'espace $\mathcal{H}$.

preuve : Soit $k_y : X \mapsto \mathbb{K}$ est la fonction définie par $k_y(x) = K(x, y)$ pour tout $x \in X$,

Définissons l'ensemble des combinaisons linéaires finies des fonctions k_y comme suit :

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_{y_i} \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{K}, y_i \in X \right\}$$

Soit $B : W \times W \mapsto \mathbb{K}$ un application définie par :

$$B(f,g) = B(\sum_j \alpha_j k_{y_j}, \sum_i \beta_i k_{y_i}) = \sum_{i,j} \alpha_j \overline{\beta_i} K(y_j, y_i)$$

où $\alpha_j, \beta_i \in \mathbb{K}$

Les représentations de f et g ne sont pas uniques á priori dans W, on montre que l'application B ne dépend pas de cette représentation. En effet :

$$B(f,g) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_i} \beta_j K(y_j, y_i) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j K(y_j, y_i) \right) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha_i} f(y_i)$$

Donc l'application B ne dépendra qu'aux valeurs prises par f aux points y_j et non prises aux β_j. Le raisonnement est identique pour g.

Alors B est bien définie.

Il est facile de virifier que B est une forme equilinéaire. Puisque K est dṕinie positive, alors pour tout $f = \sum_j \alpha_j y_j$, on a $B(f,f) = \sum_i \sum_j \alpha_j \overline{\alpha_i} K(y_i, y_j) \geqslant 0$, Donc B est définie positive.

Par conséquent B définie un produit scalaire sur W. Ça veut dire que W muni de B est un espace pré-hilbertien.

On note par $\mathcal{H}$ l'espace complet de W, alors $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert , on note sa produit scalaire par $\langle ., . \rangle_{\mathcal{H}}$.

On définie l'ensemble

$$\widehat{\mathcal{H}} = \{\widehat{h} : \widehat{h}(x) = \langle h, k_x \rangle_{\mathcal{H}}; h \in \mathcal{H}\}$$

Alors $\widehat{\mathcal{H}}$ est un ensemble de fonctions définie sur X .

Maintenant on définie l'opérateur $T : \mathcal{H} \mapsto \widehat{\mathcal{H}}$ par $T(h) = \widehat{h}$, c'est clair que T est un opérateur linéaire et $\widehat{\mathcal{H}}$ est un espace vectoriel.

L'oprérateur T est injective, en effet :

$T(h) = 0 \Rightarrow \widehat{h} = 0 \Rightarrow \langle h, k_x\rangle_{\mathcal{H}} = 0$, ce qui implique que $h \perp k_x,\ \forall x \in X$, et par suite $h \perp W$, puisque W est dense dans $\mathcal{H}$ on a $h = 0$, alors l'opérateur T est injective.

L'opérateur T est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ vers $\widehat{\mathcal{H}}$ d'où $\widehat{\mathcal{H}}$ est un espace de Hilbert, on définie le produit scalaire sur $\widehat{\mathcal{H}}$ par $\forall \widehat{h}_1, \widehat{h}_2 \in \widehat{\mathcal{H}},\ \langle \widehat{h}_1, \widehat{h}_2\rangle_{\widehat{\mathcal{H}}} = \langle h_1, h_2\rangle_{\mathcal{H}}$.

Il reste à montrer que $\widehat{\mathcal{H}}$ est un EHNR pour cela il suffet de montrer que $\forall x \in X$ la fonctionnelle , d'évaluation E_x définie sur $\widehat{\mathcal{H}}$ est bornée, en effet :

$$|E_x(\widehat{h})| = |\widehat{h}(x)| = |\langle h, k_x\rangle_{\mathcal{H}}| = |\langle \widehat{h}, \widehat{k_x}\rangle_{\widehat{\mathcal{H}}}| \leqslant \|\widehat{h}\|_{\widehat{\mathcal{H}}}\|\widehat{k_x}\|_{\widehat{\mathcal{H}}}.$$

Alors pour tout $x \in X$ la fonctionnelle E_x est bornée.

On remarque que $\widehat{h}(x) = \langle h, k_x\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \widehat{h}, \widehat{k_x}\rangle_{\widehat{\mathcal{H}}}$, alors $\widehat{k_x}$ est un noyau reproduisant de $\widehat{\mathcal{H}}$, de plus on a $\widehat{k_x} = k_x$.

Par conséquent $\widehat{\mathcal{H}}$ est un EHNR de fonctions définie sur X et $\widehat{k_x} = \langle k_x, k_y\rangle_{\mathcal{H}} = K(x, y)$ est leur noyau reproduisant.

$\square$

Remarque 1. *Étant donné une fonction définie positive $K : X \times X \mapsto \mathbb{K}$, nous notons $\mathcal{H}(K)$ l'unique espace de Hilbert à noyau reproduisant correspondant à la fonction définie positive K.*

2.3 Operation sur noyaux reproduisants

2.3.1 La complexification

La complexification d'un espace de Hilbert à noyau reproduisant est un concept intéressant qui permet de traiter des fonctions à valeurs complexes même si l'espace original est défini sur à valeurs réelles.

Soit $\mathcal{H}$ un EHNR de fonctions définie sur un ensemble X à valeurs réelles avec un noyau reproduisant N.

Soit $S = \{f_1 + if_2 : f_1, f_2 \in \mathcal{H}\}$, qui est un espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes sur X .

Si on défini

$$\langle f_1 + if_2, g_1 + ig_2 \rangle_S = \langle f_1, g_1 \rangle_{\mathcal{H}} + i\langle f_2, g_1 \rangle_{\mathcal{H}} - i\langle f_1, g_2 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle f_2, g_2 \rangle_{\mathcal{H}}$$

alors il est facile de vérifier que cela définie un produit scalaire sur S ,avec la norme associés,

$$\|f_1 + if_2\|_S^2 = \|f_1\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f_2\|_{\mathcal{H}}^2.$$

par conséquent S est un espace de Hilbert et puisque

$\langle f_1 + if_2, N_y \rangle_S = \langle f_1, N_y \rangle + i\langle f_2, N_y \rangle_S = f_1(y) + if_2(y)$,

nous avons que S équipé de ce produit scalaire est un ENHR de fonctions à valeurs complexes sur X avec le même noyau reproduisant N. Nous applons cela la complexification de $\mathcal{H}$.

2.3.2 Somme et différence de noyaux reproduisants

Théorème 9. *(Théoreme des sommes de noyaux d' Aronszajn)*

Soit $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ des EHNR de fonctions définie sur l'ensemble X avec des noyaux reproduisants N_1 et N_2 respectivement, et soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ les normes correspondantes aux $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, si on prend $N = N_1 + N_2$ alors

$$\mathcal{H}(N) = \{f_1 + f_2 : f_i \in \mathcal{H}_i, i = 1, 2\}$$

Si $\|.\|$ dénote la norme sur $\mathcal{H}(N)$,alors pour $f \in \mathcal{H}(N)$ on a

$$\|f\|^2 = \min\{\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_1^2 : f = f_1 + f_2 : f_i \in H_i, i = 1, 2\}$$

Définition 21. *Soient H_i, $i = 1, 2$ deux espaces de Hilbert, avec normes $\|.\|_i, i = 1, 2$ respectivement, nous dire que H_1 est contractivement contenu dans H_2 à condition que H_1 soit un sous-espace de H_2 (pas nécessairement fermé) et pour $h \in H_1, \|h\|_2 \leq \|h\|_1$.*

Théorème 10. *Soit $H_i, i = 1, 2$,soient des EHNR dans l'ensemble X avec des noyaux reproduisants $N_i, i = 1, 2$ respectivement,alors H_1 est contractivement contenu dans H_2 si et seulement si $N_2 - N_1$ est une fonction définie positive.*

Chapitre 3

Espace de Hardy

Les espaces H^2 ont un grand nombres de propriétes intéressantes .

Définition 22. *Fonctions holomorphes :*

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, f est une fonction holomorphe dans $D \Leftrightarrow f$ dérivable en tout point de D.

3.1 Espaces de Hardy dans le disque unité

Soit $U = \{z \in \mathbb{C} : |Z| < 1\}$ le disque unité ouvert.Notons par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans U.

Théorème 11. *Soit $f \in H(U)$ défini pour $r : 0 \leq r < 1$;*

$$M_p(f,r) = \{\frac{1}{2\Pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\}^{\frac{1}{p}}, (0 < p <\propto). \tag{3.1.1}$$

Les fonctions M_p sont croissantes par rapport à la variable r dans $[0,1]$.

ce théoreme suggére la définition suivante :

Définition 23. *Soit* $f \in H(U)$ *et* $0 < p < \infty$ *.posons :*

$\|f\|_p$ *ou* $M_p(f,r)$ *est définie au théoreme(11), la classe* $H_p(U)$*,est définie comme l'ensemble des fonctions* $f \in H(U)$ *pour lesquelles* $\|f\|_p < \infty$.

Remarque 2. *Comme les fonctions* M_p *sont croissantes par rapport à la variable* r *dans* $[0,1[$ *,si* $f \in H(U)$ *alors* $\|f\| =$

Théorème 12. *pour* $1 \leq p <\propto$ *;l'espace* $(H(U), \|.\|_p)$ *est un espace de Banach.*

Définition 24. *(Inégalité de Jenssen) :*

Soit u *une mésure positive sur* $\sigma-$*algébre* $,M$ *sur un ensemble* Ω *telle que* $u(\Omega) = 1$*. soit* f *une fonction à valeurs réeles ; appartenant a* $L^1(u)$ *; telle que* $a < f(x) < b$ *;*

pour toute $x \in \Omega$*.Si* φ *est une fonction convexe sur* $[a,b]$ *;*

on a l'inégalité

$$\varphi(\int_\Omega^{max} f du) \leq \int_\Omega^{max} (\varphi o f) du. \tag{3.1.2}$$

Remarque 3. *Les cas* $a \equiv -\infty$ *et* $b = \infty$ *ne sont pas exclues .*

Il ne peut que $\varphi o f$ *n'appartiennent pas à* $L^1(u)$.

3.2 Fonction de Szegö associées au disque unité

Définition 25. *Fonction de Szegö associées au disque unité .*

les fonctions de szegö rentrent dans le cadre général de representation des fonctions positives.

Soit $F \in H^2(u)$ *et* F^* *sa limite non tangentielle .Si l'on pose*

$f(\theta) = |F^*(e^{i\theta})|$.*Alors* $f \in L^2(T)$,*et on montre que* $log(f) \in L^1(T)$.

réciproquement étant donnée une fonction $f \in L^2, f$ *presque partout positive et* $log(f) \in L^1(T)$,*on montre qu'il existe une infinté de fonctions* F *de la classe* $H^2(u)$ *tel que*

$$f(0) = |F^*(e^{i\theta})|$$

presque partout pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$.*On s'intérésse à une fonction particuliére* f *de la classe dérícte auparavant ,dite fonction de szegö,qui l'objet du théoréme suivant .*

Théorème 13. *soit* f *une fonction non négaiive inteégrable au sens de lebesgue sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$ *et vérifiant la condition de Szegö*

$$\int_{-\pi}^{\pi} logf(\theta)d\theta > -\infty. \tag{3.2.1}$$

alors la fonction défine par :

$$D_f(z) = exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log(f(\theta))\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}d\theta\right\}\ (|z| < 1). \tag{3.2.2}$$

dite fonction de szegö associée à U*et à la fonctoin poids* f, *posséde les propriétes suivantes :*

1)$D_f \in H^2(u)$.

2)$D_z(z) \neq 0\ \ \forall z \in U$.

3)$|D_f^*(eix)| = f(x)$ *presque partout sur* $[-\pi\pi]$.*ou* D_f^* *est la limite non tangentielle de* D_f .

4)$D_f(0) > 0$.

Définition 26. *Fonctions holomorphes :*

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$

f est une fonction holomorphe dans $D \Leftrightarrow f$ dérivable en tout point de D .

Proposition 5. *Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$,avec $z = x + iy$,*

alors f est une fonction holomorphe si et seulement si $u(x,y)$ et $v(x,y)$ ont leurs premiéres dérivés partielles continues et satisfaisant les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.2.3}$$

preuve : Construction de D_F

Considérons l'integrale de poisson associée à la fonction $\log(f)$ qu'on note par :

$$u(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log(f(\theta))\frac{1-r^2}{1-2rcos(x-\theta)r^2}d\theta. \tag{3.2.4}$$

La fonction u est harmonique dans le disque unité puisque $\log(f) \in L^1([-\pi,\pi],d\theta)$.

Considérons maintenant la fonction holomorphes $h(z)$ dont $u(r,x)$ est la partie réele et éxigeons que $h(0)$ soit réele pour avoir l'unicité de h , la fonction cherchée sera donc

$$g(z) = e\{\frac{1}{2}h(z)\}$$

On montre facilement que :

$$ReD_f(z) = Reg(z); (z = re^{i\theta}, 0 \le r < 1).$$

Alors

$D_f(z) = g(z)$.

1)Montrons que :

$$\exists c > 0 tel\ que : \forall r : 0 \le r < 1; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_f(re^{ix})|^2 dx \le c. \tag{3.2.5}$$

En effet

$$\begin{aligned} |D_f(z) = & |e\{\frac{1}{2}(Reh(z) + Imh(z))\}| = e\{\frac{1}{2}Reh(z)\} \\ = & e\{\frac{1}{2}u(r,x)\}. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

$$z = re^{ix}, 0 \le r < 1, ona :$$

$$|D_f(re^{ix})|^2 = e\{u(r,x)\}$$

$$\begin{aligned} Par suit; pour \quad & = e\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log(f(\theta))\frac{1-r^2}{1-2rcos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\} \\ & \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\frac{1-r^2}{1-2rcos(x-\theta)+r^2}d\theta \text{ (inégalité de jenssen).} \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$\square$

En inégrant par raport à x obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d_f(re^{ix})|^2dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(0)\frac{1-r^2}{1-2rcos(x-\theta)+r^2}d\theta\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\int -\pi^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2rcos(x-\theta)+r^2}\right)d\theta \tag{3.2.8}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta) = C.\ 0 \leq r < 1.$$

1)Ce que donne le point .

2)Est évident .

3)$D_f \in H^2(u)$, notons par D_f^* la limite non tangentielle de D_f ; et comme :

$$|D_f(re^{ix})|^2 = exp\left\{\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}log(f(\theta))\frac{1-r^2}{1-2rcos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\};$$

il vient :

$$|D_f^*(e^{ix})|^2 = \lim_{r\to 1}|D_f(re^{ix}|^2$$

$$= exp\left\{\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}log(f(\theta))\frac{1-r^2}{1-2rcos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\} \tag{3.2.9}$$

$$= elogf(x), p.p\ sur[-\pi,\pi];$$

4)$D_f(0) = e\left\{\frac{1}{2}h(0)\right\} > 0.$

($H(0)$ est réel construction)

Bibliographie

[1] E Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, volume 17, John Wiley and Sons, 1991.

[2] H Brezis, *Analyse fonctionnelle. Theorie et applications*, 1983.

[3] N Aronszajn, *La theorie des noyaux reproduisants et ses applications premiere partie*, In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, volume 39, pages 133-153. Cambridge University Press, 1943.

[4] N Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Transactions of the American mathematical society, 68(3) :337-404, 1950.

[5] V I Paulsen, M Raghupathi, *An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces*, volume 152, Cambridge university press, 2016.

[6] koossis.p , " Introduction to H^p Spaces ", London Math.Soc.Lecture Notes Series .Vol 40 .Cambridge Univ.Press,Cambridge(1980).