RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
«Mathématiques»

Option :
«Analyse Fonctionnelle et Application»

Présenté Par :
Kacem Fatima Zohra
Khalbaz Youcef

Sous L'intitulé :

Équations différentielles fractionnaires implicites d'ordre variable basé sur la technique Kuratowski MNC

Soutenu publiquement le 12 / 06 / 2024
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Souid Mohamed Said	Prof	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Président
Mr Mokhtari Mokhtar	MCA	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Examinateur
Mr Bouazza Zoubida	MCA	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Encadreur

Année universitaire : 2023/2024

Table des matières

REMERCIEMENTS

Nos remerciements avant tout le Dieu tout-puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.
Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur Madame Bouazza
pour m'avoir donné la chance de travailler tout le long de la réalisation de ce mémoire et qui n'a pas cessé de nous donner ses conseils et remarques.
Nous remerciements s'adressent aussi aux membres de jury, pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger ce travail.
Merci à vous M. Souid mohammed said, d'avoir accepté de présider le jury.
Merci à vous M. Mokhtari mokhtar pour faire l'honneur d'accepter d'examiner ce travail.
Nos remerciements vont également à tous les professeurs et enseignants du département mathématique qui ont suivi toute au long de notre cycle d'étude.
Nous exprimons nos profondes gratitudes à nos parents pour leurs encouragements, leur soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré. Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont aidés de près ou de loin à élaborer et réaliser ce mémoire.
Et un grand merci à nos familles ainsi que nos amis et collègues pour leurs encouragements.

DÉDICACES

Après de longues années d'études et de travail, nous dédions ce modeste travail :
À mes très chers parents, que Dieu les bénisse et les protège pour leur soutien moral et financier, pour leurs encouragements et les sacrifices qu'ils ont endurés.
À mes frères et mes sœurs.
À l'esprit de mes grands-mères.
À tous mes oncles, tantes et cousins. À toute ma grande famille. À tous mes fidèles amis.
À mes enseignants qui nous ont dirigé et aidé et surtout soutenu pour être un jour un cadre en mathématique.
À tous ceux qui nous connaissent de près ou de loin.
Nous tenons enfin de dédier ce travail à tous mes amis d'étude de AFA et mes collègues et mes voisins.
À tous les proches qu'ils sont mentionnés et les autres qu'ils sont oubliés veuillez nous excuser.

Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc $[8, 11, 15]$. Dans ce mémoire, nous allons nous inspirer des articles de $[1, 2, 3, 4]$ pour faire le point surtoutes ces études endonnant plusieurs résultats d'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire, moyennant la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville dans des espaces de Banach. Cette étude se fera principalement à l'aide de théorème de point fixe de Darbo combiné avec la technique de la mesure de non compacité de Kuratowski. Ce mémoire comprend trois chapitres. Le premier chapitre intitulé "Préliminaire", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.
Le deuxième chapitre intitulé "L'existence de solutions d'un problème implicite aux limites ", on traitera l'existence des solutions pour le problème suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\varphi(s)}y(s) + h\left(s, y(s), D_{0^+}^{\varphi(s)}y(s)\right) = 0, s \in \Upsilon := [0, K], \\ y(0) = 0, y(K) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Où $1 < \varphi(s) \leq 2$, la fonction $h : \Upsilon \times \Lambda \times \Lambda \to \Lambda$ est continue, Λ est un espace de Banach réel (ou complexe) et $D_{0^+}^{\varphi(s)}$est la dérivée fractionnaire de

Riemann-Liouville d'ordre variable $\varphi(s)$.

Le troisième chapitre intitulé "Stabilité Hyers-Ulam-Rassias", nous étudierons la stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias pour notre problème traité et donnerons un exemple pour illustrer nos résultats.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous présentons des définitions et quelques propriétés pour deux fonctions spéciales (la fonction Gamma et Bêta). Ainsi, les définitions d'integrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et differents types de stabilité.

1.1 Fonctions spéciales

Dans ce pragraphe, on présente des fonctions spéciales qui sont très utilisées dans l'intǵration fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

Pour généraliser la factorielle d'un entier naturel à la factorielle d'un nombre non-entier, le mathématicien suisse Leonhard Euler introduit la fonction Gamma en 1729. Cette fonction a été étudiée par plusieurs mathématicien comme Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Christof Gudermann (1798-1852) et Joseph Liouveille (1809-1882). La fonction Gamma apparâit dans plusieurs domaines comme la théorie des nombres, les séries hyper-géométriques et l'intégration définie.

Définition 1.1. *La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt; \qquad (pour \quad z \in \mathbb{C}), \quad Re(z) > 0.$$

Théorème 1.1.

Pour tout réel $x > 0$, la fonction Gamma est bien définie.

Preuve 1.1.

On peut écrire la fonction Gamma comme suit :

$$\Gamma(x) = I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \int_0^1 t^{x-1} \exp(-t)dt$$

et

$$I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)dt.$$

Puisque la fonction $\exp(-t)$ est décroissante sur $[0.1]$, on a

$$\int_0^1 t^{x-1} \exp(-t)dt < \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}, x \in]0. + \infty[.$$

Donc I_1 est converge pour réel $x > 0$. D'autre part, on a

$$1 \leq t \Longrightarrow t^{x-1} \exp(-t) \leq \exp(\frac{-t}{2}) \Longleftrightarrow t^{x-1} \leq \exp(\frac{t}{2}) \Longleftrightarrow \frac{t^{x-1}}{\exp(\frac{t}{2})} \leq 1.$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)dt \leq \int_1^{+\infty} \exp(\frac{-t}{2})dt = 2\exp(\frac{-1}{2}).$$

Par conséquence I_2 est convergé pour $x > 0$. D'où , la fonction Gamma est convergente pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Proposition 1.1.

1. Relation fonctionnelle : une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante, pour tout nombre réelle, strictement positive x on a :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

2. Lien avec la fonction factorielle : la fonction Gamma prolonge (généralise) la notion de la factorielle car on a :

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ et pour $n = 0$ on obtient $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
4. La fonction Gamma est continue sur $]0, +\infty[$.
5. La fonction Gamma est strictement convexe sur $]0, +\infty[$.
6. La fonction Gamma est de class C^∞ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

7. $\exists x_0 \in]1.2[$ où la fonction Gamma est strictement décroissante sur $]0, x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

Preuve 1.2.

1. Par une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t) dt \\
&= \Big[-t^x \exp(-t) \Big]_{t=0}^{t=+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt \\
&= x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

2. De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et puisque $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)dt = 1$, on déduit,

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!. \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!. \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!.
\end{aligned}$$

alors, par récurrence on obtient

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n!.$$

3. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl}\Gamma(n+\frac{1}{2}) & = & (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) \\ & = & \frac{2n-1}{2} \times \frac{2n-3}{2} \times ... \times \dfrac{1}{2} \times \Gamma(\dfrac{1}{2}) \\ & = & \frac{(2n)(2n-1)...3\times 2}{2^n(2n)(2n-2)...3\times 2}\sqrt{\pi} \\ & = & \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.\end{array}$$

Donc, pour $n = 0$. On trouve

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Pour la démonstration d'autres points voir [11].

1.1.2 Fonction Bêta

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

Définition 1.2. *([5])*

La fonction Bêta $\beta(x, y)$ est définie pour $x, y \in \mathbb{C}$ par :

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt; \quad avec \quad Re(x), Re(y) > 0.$$

Propriétés de la fonction bêta :

Proposition 1.2.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tel que $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$, on a les propriétés suivantes :

1. $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.
2. $\beta(x, y) = \beta(x + 1, y) + \beta(x, y + 1)$.
3. $\beta(x, y + 1) = \dfrac{y}{x}\beta(x + 1, y) = \dfrac{y}{x + y}\beta(x, y)$.

1.1.3 La relation entre les fonctions gamma et bêta

La relation bêta est liée à la fonction gamma par la formule :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \qquad Re(x), Re(y) > 0.$$

1.2 L'intégral et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Dans cette section, nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.2.1 L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre constant

Définition 1.3. *([7])*

L'intégrale fractionnaire d'ordre $\varphi \in \mathbb{R}_+$ de la fonction $h \in \mathrm{L}^1\left([\mathrm{a,b}], \mathbb{R}_+\right)$ est défini par :

$$I_a^{(\varphi)}h(t) = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_a^t (t-s)^{\varphi-1} h(s) ds, \quad t > a. \tag{1.1}$$

où $\Gamma(.\ )$ *est la fonction Gamma.*

Exemple 1.2.1.

Considérons la fonction $h(x) = (x-a)^{\beta}$, alors :

$$I_a^{\varphi}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_a^x (x-t)^{\varphi-1}(t-a)^{\beta} dt$$

Pour évaluer cette intégrale, on utilise la définition de la fonction Bêta et on pose le changement de variable $t = a + (x-a)k$, d'où :

$$\begin{aligned}
I_k^{\varphi}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)}\int_a^1 [(x-a)(1-k)]^{a-1}[(x-a)k]^{\beta}(x-a)dk \\
&= \frac{(x-a)^{\varphi+\beta}}{\Gamma(\varphi)}\int_0^1 (1-k)^{\varphi-1}k^{\beta}dk \\
&= \frac{(x-a)^{\varphi+\beta}\Gamma(\varphi)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\varphi)\Gamma(\varphi+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\varphi+\beta+1)}(x-a)^{\varphi+\beta},
\end{aligned}$$

Pour : $a = 0, \varphi = 0.5, \beta = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_0^{0.5}(x) &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}x^{1.5} \\
&= \frac{\sqrt{x^3}}{\Gamma(2.5)}.
\end{aligned}$$

Pour : $\alpha = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_a^1(x-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(x-a)^{\beta+1} \\
&= \frac{\beta!}{(\beta+1)!}(x-a)^{\beta+1} \\
&= \frac{1}{\beta+1}(x-a)^{\beta+1}.
\end{aligned}$$

Définition 1.4. *([7])*

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Lioville d'ordre $\varphi > 0$ de la fonction $h \in \mathrm{L}^1([a,b],\mathbb{R}_+)$, est donnée par :

$$\left(D_{a+}^{\varphi}h\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\varphi)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\varphi-1}h(s)ds. \tag{1.2}$$

Où $n = [\varphi]+1$ et $[\varphi]$ désigne la partie entière de φ.

Exemple 1.2.2. - *Reprenons l'exemple de la fonction h(t) telle que :*

$h(t) = (t-a)^{\beta}$.

$$\begin{aligned}
D_a^{\varphi} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\varphi)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\beta-\varphi} \int_0^1 (1-s)^{n-\varphi-1} s^{\beta} ds \\
&= \frac{\Gamma(n+\beta-\varphi+1) B(n-\varphi, \beta+1)}{\Gamma(n-\varphi)\Gamma(\beta-\varphi+1)} (t-a)^{\beta-\varphi} \\
&= \frac{\Gamma(n+\beta-\varphi+1)\Gamma(n-\varphi)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\varphi)\Gamma(\beta-\varphi+1)\Gamma(n+\beta-\varphi+1)} (t-\varphi)^{\beta-\varphi} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\varphi+1)} (t-a)^{\beta-\varphi}.
\end{aligned}$$

Pour $\varphi = 0.5, \beta = 0.5$ et $a = 0$, on aura :

$$D^{0.5} t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

1.2.2 L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable

Définition 1.5. *([12]-[13]) Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et $\varphi(t) : [a,b] \mapsto [0, +\infty[$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable $\varphi(t)$ de la fonction $h(t)$ est définie par :*

$$I_{a^+}^{\varphi(t)} h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{\varphi(s)-1}}{\Gamma(\varphi(s))} h(s) ds, \quad t > a. \tag{1.3}$$

Définition 1.6. *([12]-[13]) Soit $-\infty < a < b < +\infty, n \in \mathbb{N}, \varphi(t) : [a,b] \mapsto (n-1, n)$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable $\varphi(t)$ de la fonction $h(t)$ est définie par :*

$$D_{a^+}^{\varphi(t)} h(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n-\varphi(t)} h(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\varphi(s)-1}}{\Gamma(n-\varphi(s))} h(s) ds, \quad t > a. \tag{1.4}$$

1.2.3 Quelques propriétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Si h est continue pour $t > a$, alors l'intégration fractionnaire d'ordre réel arbitraire possède la propriété suivante :

$$I_{a+}^{\varphi}(I_{\varphi+}^{\beta}h(t)) = I_{a+}^{\varphi+\beta}h(t), \ (\varphi > 0, \beta > 0),$$

évidemment, on peut changer α et β on forme :

$$I_{a+}^{\varphi}(I_{a+}^{\beta}h(t)) = I_{a+}^{\beta}(I_{a+}^{\varphi}h)(t) = I_{a+}^{\varphi+\beta}h(t), \ (\varphi > 0, \beta > 0).$$

La propriété la plus importante de la dérivée fractionnaire au sens de R-L, pour $\varphi > 0$ et t>a est :

$$D_{a+}^{\varphi}I_{a+}^{\varphi}h(t) = h(t),$$

$$D_{a+}^{\beta}I_{a+}^{\varphi}h(t) = I_{a+}^{\varphi-\beta}h(t)$$

presque partout sur $[a, b]$, où
$L^p[a, b] = \{g : [a, b] \to \mathbb{R}\,;$ h est mesurable dans $[a, b]$ et $\displaystyle\int_a^b |h(t)|^p dt < \infty\}$.
En particulier, si $\beta = k \in \mathbb{N}$. et $\alpha > k$, alors :

$$D_{a+}^{k}I_{a+}^{\alpha}h(t) = I_{a+}^{\alpha-k}h(t),$$

Soient $\alpha \geqslant 0, m \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{d}{dt}$. Si les deux dérivées fractionnaires $D_{a+}^{\alpha}h(t)$, $D_{a+}^{m}h(t)$ existent, on a :

$$D_{a+}^{m}D_{a+}^{\alpha}h(t) = D_{a+}^{\alpha+m}h(t).$$

Remarque 1.1. *([15])* ***La propriété de semi-Group*** *est satisfaite pour les intégrales fractionnaires de Rimanne-liouville avec les ordres constantes, mais pas* *pour celles avec des ordres variables. En d'autres termes,*

$$I_{a^+}^{v(t)} I_{a^+}^{v(t)} y(t) \neq I_{a^+}^{u(t)+v(t)} y(t).$$

Exemple : Soit

$$u(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0,1], \\ 1, & t \in]1,3], \end{cases}$$
$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 2, & t \in]1,3], \end{cases}$$

et $h(t) = t,\ t \in [0,3]$.

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} h(t) &= \int_0^1 \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(\tau)-1}}{\Gamma(v(\tau))} h(\tau) d\tau ds \\
&+ \int_1^t \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(\tau)-1}}{\Gamma(v(\tau))} h(\tau) d\tau ds \\
&= \int_0^1 \frac{(t-s)^1}{\Gamma(2)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^0}{\Gamma(1)} \tau d\tau ds \\
&+ \int_1^t \frac{(t-s)^0}{\Gamma(1)} \left[\int_0^1 \frac{(s-\tau)^0}{\Gamma(1)} \tau d\tau + \int_1^s \frac{(s-\tau)^1}{\Gamma(2)} \tau d\tau \right] ds \\
&= \int_0^1 \frac{(t-s)s^2}{2\Gamma(2)} ds + \int_1^t \frac{s^3}{6} - \frac{s}{2} ds
\end{aligned}$$

et

$$I_{0^+}^{u(t)+v(t)} h(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{u(s)+v(s)-1}}{\Gamma(u(s)+v(s))} h(s) ds,$$

on sait que,

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^{u(t)} I_{a^+}^{v(t)} h(t)\Big|_{t=2} &= \int_0^1 \frac{(2-s)s^2}{2\Gamma(2)} ds + \int_1^2 \frac{s^3}{6} - \frac{s}{2} + \frac{5}{6} ds, \\
&= \frac{5}{24} + \frac{17}{24} = \frac{22}{24}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^{u(t)+v(t)} h(t)\Big|_{t=2} &= \int_0^1 \frac{(2-s)^{2+1-1}}{\Gamma(2+1)} s ds + \int_1^2 \frac{(2-s)^{1+2-1}}{\Gamma(1+2)} s ds, \\
&= \frac{11}{24} + \frac{5}{24} = \frac{16}{24}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} h(t)\Big|_{t=2} \neq I_{0^+}^{u(t)+v(t)} h(t)\Big|_{t=2}.$$

1.3 Fonction constante par morceaux :

Définition 1.7 (**L'intervalle généralisé**). *([2]) : Un intervalle généralisé, noté I, est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$*, cet ensemble peut prendre trois formes :*
- Un intervalle, représenté sous forme : $[\alpha_1, \alpha_2],]\alpha_1, \alpha_2[, [\alpha_1, \alpha_2[,]\alpha_1, \alpha_2]$.
- Un point unique $\{a\}$.
- L'ensemble vide ϕ.

Définition 1.8 (**la partition**). *([2]) : Soit I un intervalle généralisé, une partition de I est un ensemble fini P d'intervalles généralisé contenus dans I, tels que pour tout x appartenant à I se trouve exactement dans l'un des intervalles généralisés E dans P.*

Exemple 1.3.1. *L'ensemble* $P = \{[2,5], \{5\}, \{6\}, [6,9]\}$ *d'intervalles généralisés, c'est une partition de* $[2,9]$.

Définition 1.9 (**la fonction constante par morceau**). *([2]) : Soit I un intervalle généralisés, soit* $g : I \to \mathbb{R}$ *une fonction, et soit P une partition de la fonction I. g est dite constante par morceaux par rapport à P si pour tout* $E \in P$*, g est constant sur E .*

Exemple 1.3.2. *Soit la fonction I :* $[0,5] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$I(x) = \begin{cases} 3, & si \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 8, & si \quad x = 1, \\ 1, & si \quad 1 < x < 3, \\ 7, & si \quad x = 3, \\ 5, & si \quad 3 < x \leqslant 5. \end{cases}$$

La fonction I est constante par morceaux par rapport à la partition $\{[0,1[,\{1\},]1,3[,\{3\},]3,5]\}$ *de* $[0,5]$.

1.4 La mesure de non compacité au sens de Kuratowski

Nous présentons dans cette section quelques propriétés fondamentales de la mesure de non compacité au sens de Kuratowski.

Définition 1.10. *([1])*
La mesure de non compacité au sens de Kuratowski est l'application $\vartheta : \Omega_\Lambda \rightarrow [0,\infty]$ *définie par*

$$\vartheta(\Delta) = \inf\left\{\epsilon > 0 : (\Delta \in \Omega_\Lambda) \subseteq \cup_{\iota=1}^{n} \Delta_\iota, diam\left(\Delta_\iota\right) \leq \epsilon\right\},$$

où

$$diam\left(\Delta_\iota\right) = \sup\left\{\|x-y\| : x, y \in \Delta_\iota\right\}.$$

Proposition 2.1.([1]) La mesure de non compacité au sens de Kuratowski satisfait les propriétés suivants
1. Δ est relativement compact $\Longleftrightarrow \vartheta(\Delta) = 0$.
2. $\vartheta(\emptyset) = 0$.
3. $\vartheta(\Delta) = \vartheta(\bar{\Delta}) = \vartheta(\operatorname{conv}\Delta)$.
4. $\Delta_1 \subset \Delta_2 \Longrightarrow \vartheta\left(\Delta_1\right) \leq \vartheta\left(\Delta_2\right)$.
5. $\vartheta\left(\Delta_1 + \Delta_2\right) \leq \vartheta\left(\Delta_1\right) + \vartheta\left(\Delta_2\right)$.
6. $\vartheta(\Pi\Delta) = |\Pi|\vartheta(\Delta), \Pi \in R$. 7. $\vartheta\left(\Delta_1 \cup \Delta_2\right) = \operatorname{Max}\left\{\vartheta\left(\Delta_i\right), i = 1,2\right\}$.
8. $\vartheta\left(\Delta_1 \cap \Delta_2\right) = \operatorname{Min}\left\{\vartheta\left(\Delta_i\right), i = 1,2\right\}$.
9. $\vartheta\left(\Delta + x_0\right) = \vartheta(\Delta)$ pour toute $x_0 \in \Lambda$.

Lemme 1.1. *([1]) soit* Λ *est un espace de Banach. Si* χ *est un sous-ensemble borné et équicontinu de l'espace* $C(\Upsilon, \Lambda)s$*, alors* *(i)* $\vartheta(\chi(s))$ *est une fonction continue pour* $s \in \Upsilon$*, et*

$$\widehat{\vartheta}(\chi) = \sup_{s\in\Upsilon} \vartheta(\chi(s)).$$

(ii) $\vartheta\left(\int_0^K x(\theta)d\theta : x \in \chi\right) \leq 2\int_0^K \vartheta(\chi(\theta))d\theta$,
où

$$\chi(\alpha) = \{x(\alpha) : x \in \chi\}, \alpha \in \Upsilon.$$

1.5 Théorèmes de point fixe :

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.

1.5.1 Concepts essenstiels :

Définition 1.11 (Le point fixe). *Un point fixe est une valeur dans un certain domaine qui reste inchangée sous l'application d'une fonction donnée. En d'autres termes, si* $f(x) = x$*, alors* x *est un point fixe de la fonction* f.

Définition 1.12 (La continuté). *Soit E et F deux espaces de Banach, un opérateur* $S : E \to F$ *est dit continu si pour toute suite* $(x_n)_{n\in N}$ *dans* E *tel que* $(x_n)_{n\in N}$ *converge vers* x *dans* E*, la suite* $(Sx_n)_{n\in N}$ *converge vers* Sx.

Définition 1.13 (La compacité). *Soit E et F deux espaces de Banach, un opérateur* $S : E \to F$ *est dit compact si pour tout ensemble borné B dans E, l'image de B (i.e S(B)) est un ensemble relativement compact dans F. Cela signifie que la fermeture de S(B) est compact .*

Définition 1.14 (Complètement continue). *Soit* E*,* F *deux espaces de Banach, soit* $S : E \longrightarrow F$*, on dit que :*
S est un opérateur complètement continue s'il transforme tout borné de E *en un relativement compact de* F.

1.5.2 Théorème d'Arzèla-Ascoli

Théorème 1.2. *Soit A un sous-ensemble de $C(\Upsilon, E)$. A est relativement compact dans $C(\Upsilon, E)$ si et selement si les conditions suivantes sont vérifiées :*
i) *L'ensemble A est* ***uniformément borné*** *: i.e il existe une constante $k > 0$, tel que :*

$$\|f(x)\| \leq k,$$

pour tout $x \in \Upsilon$ et tout $f \in A$.
ii) *L'ensemble A est* ***equicontinue*** *: i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$\|t_1 - t_2\| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon,$$

pour tout $t_1, t_2 \in \Upsilon$ et tout $f \in A$.

1.5.3 Théorème de contraction de Banach

Théorème 1.3. *Dans un espace de Banach E, un opérateur $S : E \to E$ est considère comme* ***une contraction****, s'il existe un $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $k < 1$ et*

$$\|S(x) - S(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

Selon la théorie de la contraction. Si S est une contraction dans E, alors il possède un unique point fixe (c-à-d : un point x tel que $S(x) = x$).

1.5.4 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.4. *Soit E un espace de Banach, Q est un sous-ensemble non-vide convexe et fermé de E, et soit $S : Q \to Q$ un opérateur complètement continu, alors S possède an moins un point fixe dans Q, d'autres terme il exist au moins un élément $x \in Q$ tq $S(x) = x$.*

1.5.5 Théorème du point fixe de Darbo

Théorème 1.5. *Soit Υ un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach Λ, et supposons que $S : \Upsilon \longrightarrow \Upsilon$ est un opérateur continu vérifie*

$$\vartheta(S(\chi)) \leq l\vartheta(S), (S \neq \emptyset) \subset \Upsilon, l \in [0,1),$$

i.e., S est une contractions. Par conséquent, S admet au moins un point fixe dans Υ.

1.6 Type de stabilité

1.6.1 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers

Définition 1.15. *([9]) L'équation (1) est stable au sens d'Ulam-Hyres s'il existe un nombre réel $\lambda_\psi > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $z \in C^1(\Upsilon, \mathbb{R})$ de l'inégalité :*

$$\mid D^\varphi z(s)) + h\left(s, z(s), D^\varphi_{K^+_{\iota-1}} z(s)\right) \mid \leq \varepsilon, \;\; s \in \Upsilon,$$

il existe une solution $y \in C^1(\Upsilon, \mathbb{R})$ de l'équation (1) vérifiant :

$$\mid z(s) - y(s) \mid \leq \lambda_\psi, \;\; s \in \Upsilon.$$

1.6.2 Stabilité au sens d'Ulam-Hyres généralisée

Définition 1.16. *([9]) L'équation (1) est stable au sens d'Ulam-Hyres généralisée, s'il existe une fonction $\psi_h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $\psi_h(0) = 0$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $z \in C^1(\Upsilon, \mathbb{R})$ de l'inégalité :*

$$\mid D^\varphi z(s)) + h\left(s, z(s), D^\varphi_{K^+_{\iota-1}} z(s)\right) \mid \leq \varepsilon, \;\; s \in \Upsilon,$$

il existe une solution $y \in C^1(\Upsilon, \mathbb{R})$ de l'équation (1) vérifiant :

$$| z(s) - y(s) | \leq \psi_h(\varepsilon), \; s \in \Upsilon.$$

1.6.3 Stabilité au sens d'Ulam-Hyres-Rassias

Définition 1.17. *([10]) L'équation (1) est stable au sens d'Ulam-Hyres-Rassias par rapport à $\psi \in C(\Upsilon, \mathbb{R}_+)$, s'il existe un nombre réel $\lambda_\psi > 0$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $z \in C^1(\Upsilon, \mathbb{R})$ de l'inégalité :*

$$| D^\varphi z(s) + h\left(s, z(s), D^\varphi_{K^+_{\iota-1}} z(s)\right) | \leq \varepsilon\psi, \; s \in \Upsilon, \tag{1.5}$$

il existe une solution $y \in C^1(\Upsilon, \mathbb{R})$ de l'équation (1) vérifiant :

$$| z(s) - y(s) | \leq \lambda_\psi \varepsilon \psi(s), \; s \in \Upsilon.$$

Chapitre 2

L'existence de solutions d'un problème implicite aux limites

2.1 Présentation du problème

On considère le problème implicite aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\varphi(s)} y(s) + h\left(s, y(s), D_{0^+}^{\varphi(s)} y(s)\right) = 0, s \in \Upsilon := [0, K], \\ y(0) = 0, y(K) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $1 < \varphi(s) \leq 2$, la fonction $h : \Upsilon \times \Lambda \times \Lambda \to \Lambda$ est continue, Λ est un espace de Banach réel (ou complexe) et $D_{0^+}^{\varphi(s)}$est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable $\varphi(s)$.

2.2 Existence de solutions

Supposons les hypothèses suivantes :

(H1) Soit $\beta = \{\Upsilon_1 := [0, K_1], \Upsilon_2 := (K_1, K_2], \Upsilon_3 := (K_2, K_3], \ldots \Upsilon_n := (K_{n-1}, K]; n \in \mathbb{N}\}$ représente une partition de l'intervalle Υ, et soit $\varphi(t) : \Upsilon \to (1, 2]$ une fonction constante par morceau par rapport à β, c'est-à-dire,

$$\varphi(s)=\sum_{\iota=1}^{n}\varphi_\iota I_\iota(s)=\begin{cases}\varphi_1, & \text{si } s\in\Upsilon_1,\\ \varphi_2, & \text{si } s\in\Upsilon_2,\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \varphi_n, & \text{si } s\in\Upsilon_n,\end{cases}$$

où $1<\varphi_\iota\leq 2$ sont des constantes et I_ι est l'indicateur de l'intervalle $\Upsilon_\iota:=(K_{\iota-1},K_\iota]\,,\iota=1,2,\ldots,n$, (avec $K_0=0,K_n=K$) tel que

$$I_\iota(s)=\begin{cases}1, & \text{pour } s\in\Upsilon_\iota\\ 0, & \text{pour ailleurs}\end{cases}$$

(H2) Soit $s^\delta h:\Upsilon\times\Lambda\times\Lambda\rightarrow\Lambda$ une fonction continue $(0\leq\delta\leq\min_{s\in\Upsilon}|(\varphi(s))|)$, il existe deux constants $\gamma_1,\gamma_2>0$ tel que

$$s^\delta\left\|h\left(s,\pi_1,\varsigma_1\right)-h\left(s,\pi_2,\varsigma_2\right)\right\|\leq\gamma_1\left\|\pi_1-\pi_2\right\|+\gamma_2\left\|\varsigma_1-\varsigma_2\right\|,$$

pour tout $\pi_1,\pi_2,\varsigma_1,\varsigma_2\in\Lambda$.

Remarque 3.1([1]) : On peut facilement montrer que la condition (H2) et l'inégalité suivante

$$\vartheta\left(t^\delta\left\|h\left(s,D_1,D_2\right)\right\|\right)\leq\gamma_1\vartheta\left(D_1\right)+\gamma_2\vartheta\left(D_2\right),$$

sont équivalents pour tout ensemble borné $D_1,D_2\subset\Lambda$ et chaque $s\in\Upsilon$.

De plus, nous définissons $\varphi:\Upsilon\rightarrow\Lambda$ pour un ensemble donné de fonctions χ indiqué par

$$\chi(s)=\{x(s),x\in\chi\},s\in\Upsilon,$$

et

$$\chi(\Upsilon)=\{\chi(s):x\in\chi,s\in\Upsilon\}.$$

Maintenant, en utilisant les concepts de mesure de non compacité au sens de Kuratowski et Théorème du point fixe de Darbo, nous pouvons montrer qu'il existe une solution d'un problème (2.1).
On note par $\Xi_\iota = C(\Upsilon_\iota, \Lambda)$, l'espace de Banach des fonctions continues $y : \Upsilon_\iota \to \Lambda$ pour chaque $\iota \in \{1, 2, \ldots, n\}$ muni de la norme :

$$\|y\|_{\Xi_\iota} = \sup_{s\in\Upsilon_\iota} \|y(s)\|.$$

Nous commençons par analyser le problème (2.1). D'après (1.6), l'équation de problème (2.1) peut s'écrire

$$\frac{d^2}{ds^2}\int_0^s \frac{(s-\alpha)^{1-\varphi(s)}}{\Gamma(2-\varphi(s))} y(\alpha)d\alpha + h\left(s, y(s), D_{0^+}^{\varphi(s)} y(s)\right) = 0, \quad s \in \Upsilon. \tag{2.2}$$

D'après $(H1)$, l'équation (2.2) peut être présentée comme suite :

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\int_0^{K_1} \frac{(s-\alpha)^{1-\varphi_1}}{\Gamma(2-\varphi_1)} y(\alpha)d\alpha + \ldots + \int_{K_{\iota-1}}^s \frac{(s-\alpha)^{1-\varphi_\iota}}{\Gamma(2-\varphi_\iota)} y(\alpha)d\alpha\right) + h\left(s, y(s), D_{0^+}^{\varphi_\iota} y(s)\right) = 0, \quad s \in \Upsilon_\iota \tag{2.3}$$

Définition 2.1. *Problème(2.1) admet une solution, s'il existe des fonctions $y_\iota, \iota = 1, 2, \ldots, n$, telles que, $y_\iota \in C([0, K_\iota], \Lambda)$ satisfaisant l'équation (2.3) et $y_\iota(0) = 0 = y_\iota(K_\iota)$.*
Pour $0 \le s \le K_{\iota-1}$, nous prenons $y(s) \equiv 0$, alors (2.3) s'exprime comme

$$D_{K_{\iota-1}^+}^{\varphi_\iota} y(s) + h\left(s, y(s), D_{K_{\iota-1}^+}^{\varphi_\iota} y(s)\right) = 0, \quad s \in \Upsilon_\iota.$$

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{K_{\iota-1}^+}^{\varphi_\iota} y(s) + h\left(s, y(s), D_{K_{\iota-1}^+}^{\varphi_\iota} y(s)\right) = 0, s \in \Upsilon_\iota, \\ y(K_{\iota-1}) = 0, y(K_\iota) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Pour l'existence de solutions du problème (2.4), nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

Lemme 2.1. *La solution y de (2.4) s'écrit sous la forme de l'équation intégrale suivante*

$$y(s)=\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha) h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) y(\sigma) d\sigma, y(\alpha)\right) d\alpha, \tag{2.5}$$

où $D_{K_{\iota-1}^{+}}^{\varphi_\iota} y(s)=y(s), G_\iota(s,\alpha)$ *est la fonction de Green, défini comme suit :*

$$G_\iota(s,\alpha)=\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)}\left[\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{1-\varphi_\iota}\left(s-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota-1}\left(K_\iota-\alpha\right)^{\varphi_\iota-1}-(s-\alpha)^{\varphi_\iota-1}\right], \\ \hfill K_{\iota-1} \leq \alpha \leq s \leq K_\iota, \\ \hfill \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)}\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{1-\varphi_\iota}\left(s-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota-1}\left(K_\iota-\alpha\right)^{\varphi_\iota-1}, \\ \hfill K_{\iota-1} \leq s \leq \alpha \leq K_\iota, \end{cases}$$

ou $\iota=1,2,\ldots,n$.

Preuve :

Nous supposons que $y \in \Xi_\iota$ est la solution de problème (2.4), et nous prenons $D_{K_{\iota-1}^{+}}^{\varphi_\iota} y(s)=y(s)$. En appliquant l'opérateur $I_{K_{\iota-1}^{+}}^{\varphi_L}$ aux deux côtés de (2.4), nous trouvons (voir Lemme(2.1)),

$$y(s)=\omega_1\left(s-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota-1}+\omega_2\left(s-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota-2}-I_{K_{\iota-1}^{+}}^{\varphi_\iota} y(s), s \in \Upsilon_\iota .$$

En raison de l'hypothèse de la fonction h avec $y\left(K_{\iota-1}\right)=0$, nous concluons que $\omega_2=0$. Soit $y(s)$ satisfaisant $y\left(K_\iota\right)=0$. Ainsi, nous observons que

$$\omega_1=\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{1-\varphi_\iota} I_{K_{\iota-1}^{+}}^{\varphi_\iota} y\left(K_\iota\right).$$

Ensuite, on observe

$$y(s)=\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{1-\varphi_\iota}\left(s-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota-1} I_{K_{\iota-1}^{+}}^{\varphi_\iota} y\left(K_\iota\right)-I_{K_{\iota-1}^{+}}^{\varphi_\iota} y(s), s \in \Upsilon_\iota .$$

Alors la solution du problème (2.4) est donnée par :

$$\begin{aligned}
y(s) &= (K_\iota - K_{\iota-1})^{1-\varphi_\iota} (s - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota - 1} \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)} \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} (K_\iota - \alpha)^{\varphi_\iota - 1} y(\alpha) d\alpha \\
&- \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)} \int_{K_{\iota-1}}^{s} (s-\alpha)^{\varphi_\iota - 1} y(\alpha) d\alpha, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)} \left[\int_{K_{\iota-1}}^{s} \left((K_\iota - K_{\iota-1})^{1-\varphi_\iota} (s - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota - 1} (K_\iota - \alpha)^{\varphi_\iota - 1} - (s-\alpha)^{\varphi_\iota - 1} \right) y(\alpha) d\alpha \right. \\
&+ \left. \int_{s}^{K_\iota} (K_\iota - K_{\iota-1})^{1-\varphi_\iota} (s - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota - 1} (K_\iota - \alpha)^{\varphi_\iota - 1} y(\alpha) d\alpha \right],
\end{aligned}$$

par la continuité de la fonction de Green, nous avons :

$$y(s) = \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha) h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) y(\sigma) d\sigma, y(\alpha)\right) d\alpha.$$

Inversement, soit $y \in \Xi_\iota$ une solution de l'équation intégrale (2.4), puis par la continuité de la fonction $s^\delta h$ et le lemme (2.1), nous pouvons facilement vérifiant que y est la solution du problème (2.4).

La proposition suivante sera nécessaire.

Proposition 3.1. : ([1]) Supposons que $s^\delta h : \Upsilon \times \Lambda \times \Lambda \to \Lambda, (0 \leq \delta \leq \min_{s\in\Upsilon} |(\varphi(s))|)$ est une fonction continue, $\varphi(s) : \Upsilon \to (1, 2]$ satisfaite $(H1)$. Alors, la fonction de Green du problème aux limites (2.4) vérifiée les propriétés suivantes :

(1) $G_\iota(s,\alpha) \geq 0, \forall K_{\iota-1} \leq s, \alpha \leq K_\iota$,

(2) $\max_{s\in\Upsilon_\iota} G_\iota(s,\alpha) = G_\iota(\alpha,\alpha), \alpha \in \Upsilon_\iota$,

(3) $G_\iota(\alpha,\alpha)$ admet un maximum unique donné par :

$$\max_{\alpha\in\Upsilon_\iota} G_\iota(\alpha,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)} \left(\frac{K_\iota - K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota - 1},$$

où $\iota = 1, 2, \ldots, n$.

Le premier résultat d'existence est basé sur le théorème du point fixe de Darbo.

Théorème 2.1. *Supposons les hypothèses (H1)-(H2) sont satisfaites, et si*

$$\frac{(K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota - 1}\left(K_\iota^{1-\delta} - K_{\iota-1}^{1-\delta}\right)}{(1-\delta)4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)}\left(\frac{\gamma_1 (K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)} + \gamma_2\right) < 1. \tag{2.6}$$

Alors le problème (2.4) admet au moins une solution sur Υ.

Preuve : Considérons l'opérateur

$$S : \Xi_\iota \to \Xi_\iota$$

Défini par

$$Sy(s) = \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha) y(\alpha) d\alpha, \quad s \in \Upsilon_\iota, \tag{2.7}$$

où

$$y(\alpha) = h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) y(\sigma) d\sigma, y(\alpha)\right).$$

L'opérateur S définit par (2.7) est bien défini à partir de la continuité de la fonction $s^\delta h$ et les propriétés des intégrales fractionnaires.
Soit

$$R_\iota \geq \frac{\frac{h^\star (K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)}}{1 - \frac{(K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota-1}\left(K_\iota^{1-\delta} - K_{\iota-1}^{1-\delta}\right)}{(1-\delta)4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)}\left(\frac{\gamma_1 (K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)} + \gamma_2\right)},$$

avec

$$h^\star = \sup_{s \in \Upsilon_\iota} \|h(s,0,0)\|.$$

On considère l'ensemble

$$B_{R_\iota} = \left\{ y \in \Xi_\iota, \|y\|_{\Xi_\iota} \leq R_\iota \right\}.$$

Il est clair que B_{R_ι} non vide, bornée, fermé et convexe.
Nous allons maintenant montrer que le théorème (1.6) est satisfait. La preuve sera donnée en quatre étapes.
ÉTAPE 1 : $S(B_{R_\iota}) \subseteq (B_{R_\iota})$.

Par la proposition (3.1) et (H2), on a

$$\|Sy(s)\| = \left\|\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha)y(\alpha)d\alpha\right\|$$

$$\leq \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha)\|y(\alpha)\|d\alpha$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)}\left(\frac{K_\iota - K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1}\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota}\|y(\alpha)\|d\alpha,$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)}\left(\frac{K_\iota - K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1}\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota}\left\|h\left(\alpha,\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma)y(\sigma)d\sigma, y(\alpha)\right)\right\|d\alpha,$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)}\left(\frac{K_\iota - K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1}\int_{K_{L-1}}^{K_\iota}\left\|h\left(\alpha,\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma)y(\sigma)d\sigma, y(\alpha)\right)-h(\alpha,0,0)\right\|d\alpha$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)}\left(\frac{K_\iota - K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1}\int_{K_{L-1}}^{K_\iota}\|h(\alpha,0,0)\|d\alpha,$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)}\left(\frac{K_\iota - K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1}\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota}\alpha^{-\delta}\left(\gamma_1\left\|\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma)y(\sigma)d\sigma\right\|+\gamma_2\|y(\alpha)\|\right)d\alpha$$

$$+\frac{h^\star\left(K_\iota - K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)},$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)}\left(\frac{K_\iota - K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1}\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota}\alpha^{-\delta}\left(\frac{\gamma_1\left(K_\iota - K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)}\|y\|_{\Xi_\iota}+\gamma_2\|y\|_{\Xi_\iota}\right)d\alpha$$

$$+\frac{h^\star\left(K_\iota - K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)},$$

$$\leq \frac{\left(K_\iota - K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota-1}\left(K_\iota^{1-\delta}-K_{\iota-1}^{1-\delta}\right)}{(1-\delta)4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)}\left(\frac{\gamma_1\left(K_\iota - K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)}+\gamma_2\right)R_\iota+\frac{h^\star\left(K_\iota - K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)}$$

$$\leq R_\iota,$$

ce qui signifie que $S\left(B_{R_\iota}\right) \subseteq B_{R_\iota}$.

ÉTAPE 2 : S est continu.

Soit (y_n) une suite telle que $y_n \to y$ dans Ξ_ι, on démontre que $\|(Sy_n)-(Sy)\|_{\Xi_\iota} \to 0$.

En effet pour $s \in \Upsilon_\iota$, d'après la proposition (3.1) et (H2), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(S y_n\right)(s)-(S y)(s)\right\| \leq \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s, \alpha)\left\|y_n(\alpha)-y(\alpha)\right\| d \alpha, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(\varphi_\iota\right)}\left(\frac{K_\iota-K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1} \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota}\left\|y_n(\alpha)-y(\alpha)\right\| d \alpha, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(\varphi_\iota\right)}\left(\frac{K_\iota-K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1} \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} \| h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s, \sigma) y_n(\sigma) d \sigma, y_n(\alpha)\right) \\
&\text{- } h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s, \sigma) y(\sigma) d \sigma, y(\alpha)\right) \| d \alpha, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(\varphi_\iota\right)}\left(\frac{K_\iota-K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1} \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} \alpha^{-\delta}\left(\gamma_1\left\|\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s, \sigma) y_n(\sigma) d \sigma-\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s, \sigma) y(\sigma) d \sigma\right\|\right. \\
&\left.+\gamma_2\left\|y_n(\alpha)-y(\alpha)\right\|\right) d \alpha, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(\varphi_\iota\right)}\left(\frac{K_\iota-K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1} \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} \alpha^{-\delta}(\gamma_1 \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s, \sigma)\left\|y_n(\sigma)-y(\sigma)\right\| d \sigma \\
&+\gamma_2\left\|y_n(\alpha)-y(\alpha)\right\|) d \alpha, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(\varphi_\iota\right)}\left(\frac{K_\iota-K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota-1} \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota{}^1} \alpha^{-\delta}\left(\frac{\gamma_1\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1} \Gamma\left(\varphi_\iota\right)}\left\|y_n-y\right\|_{\Xi_\iota}+\gamma_2\left\|y_n-y\right\|_{\Xi_\iota}\right) d \alpha, \\
&\leq \frac{\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota-1}\left(K_\iota^{1-\delta}-K_{\iota-1}^{1-\delta}\right)}{(1-\delta) 4^{\varphi_\iota-1} \Gamma\left(\varphi_\iota\right)}\left(\frac{\gamma_1\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1} \Gamma\left(\varphi_\iota\right)}+\gamma_2\right)\left\|y_n-y\right\|_{\Xi_\iota},
\end{aligned}
$$

i.e., on a

$$\left\|\left(S y_n\right)-(S y)\right\|_{\Xi_\iota} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty .$$

Par conséquent, S est un opérateur continu.

ÉTAPE 3 : S est compact.

On démontre que $S\left(B_{R_\iota}\right)$ est relativement compact, ce qui signifie que S est compact. Clairement $S\left(B_{R_\iota}\right)$ est uniformément borné car à l'étape 1, nous avons $S\left(B_{R_\iota}\right)=\left\{S(y): y \in B_{R_\iota}\right\} \subset B_{R_\iota}$ ainsi pour chaque $y \in B_{R_\iota}$ on a $\|S(y)\|_{\Xi_\iota} \leq R_\iota$, ce qui signifie que $S\left(B_{R_\iota}\right)$ est uniformément borné. Il reste à montrer que $S\left(B_{R_\iota}\right)$ est équicontinu.

Pour $s_1, s_2 \in \Upsilon_\iota, s_1 < s_2$ et $y \in B_{R_\iota}$, on a :

$$\|(Sy)(s_2) - (Sy)(s_1)\| = \left\| \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s_2,\alpha)\, y(\alpha) d\alpha - \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s_1,\alpha)\, y(\alpha) d\alpha \right\|,$$

$$\leq \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} \|(G_\iota(s_2,\alpha) - G_\iota(t_1,\alpha))\, y(\alpha)\|\, d\alpha,$$

$$\leq \int_{K_\iota-1}^{K_\iota} \|G_\iota(s_2,\alpha) - G_\iota(s_1,\alpha)\|\, h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) y(\sigma) d\sigma, y(\alpha)\right) \|d\alpha,$$

$$\leq \int_{K_{\kappa-1}}^{K_\iota} \|G_\iota(s_2,\alpha) - G_\iota(s_1,\alpha)\| \left(\left\| h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) y(\sigma) d\sigma, y(\alpha)\right) - h(\alpha,0,0) \right\| \right.$$

$$\left. + \|h(\alpha,0,0)\| \right) d\alpha$$

$$\leq \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} \|G_\iota(s_2,\alpha) - G_\iota(s_1,\alpha)\| \left[\alpha^{-\delta} \left(\gamma_1 \left\| \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) y(\sigma) d\sigma \right\| + \gamma_2 \|y(\alpha)\| \right) + h^\star \right] d\alpha,$$

$$\leq \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} \|G_\iota(s_2,\alpha) - G_\iota(s_1,\alpha)\| \left[\alpha^{-\delta} \left(\frac{\gamma_1 (K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota - 1}\Gamma(\varphi_\iota)} \|y\|_{\Xi_\iota} + \gamma_2 \|y\|_{\Xi_\iota} \right) + h^\star \right] d\alpha,$$

$$\leq \left(\frac{\gamma_1 (K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota} (K_{\iota-1})^{-\delta}}{4^{\varphi_\iota - 1}\Gamma(\varphi_\iota)} + \gamma_2 (K_{\iota-1})^{-\delta} \right) \|y\|_{\Xi_\iota} \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} \|G_\iota(s_2,\alpha) - G_\iota(s_1,\alpha)\|\, d\alpha$$

$$+ h^\star \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} \|G_\iota(s_2,\alpha) - G_\iota(s_1,\alpha)\|\, d\alpha,$$

d'après la continuité de la fonction de Green. Ainsi $\|(Sy)(s_2) - (Sy)(s_1)\|_{E_\iota} \to 0$ quand $|s_2 - s_1| \to 0$. Cela implique que $S(B_{R_\iota})$ est équicontinu.
En conséquence de l'étape 1 à l'étape 3 avec le théorème d'Ascoli-Arzéla, on résult que S est complètement continu.
ÉTAPE 4 : S est une contraction.
Si $\chi \in B_{R_\iota}, s \in \Upsilon_\iota$, on a :

$$\begin{aligned} \vartheta(S(\chi)(s)) &= \vartheta((Sy)(s), y \in \chi) \\ &\leq \left\{ \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha) \vartheta h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) y(\sigma) d\sigma, y(\alpha)\right) d\alpha, y \in \chi \right\}. \end{aligned}$$

Alors, d'après la remarque 3.1, on a :

$$\begin{aligned}\vartheta(S(\chi)(s)) &\leq \left\{\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha)\alpha^{-\delta}\left[\gamma_1\vartheta\left(\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma)y(\sigma)d\sigma\right)+\gamma_2\vartheta(y(\alpha))\right]d\alpha, y\in\chi\right\},\\ &\leq \left\{\frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)}(\frac{K_\iota-K_{\iota-1}}{4})^{\varphi_\iota-1}\left[\frac{\gamma_1\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma\left(\varphi_\iota\right)}\widehat{\vartheta}(\chi)\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota}\alpha^{-\delta}d\alpha\right.\right.\\ &\left.\left.+\gamma_2\widehat{\vartheta}(\chi)\int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota}\alpha^{-\delta}d\alpha\right], y\in\chi\right\},\\ &\leq \frac{\left({K_\iota}^{1-\delta}-{K_{\iota-1}}^{1-\delta}\right)\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota-1}}{4^{\varphi_\iota-1}(1-\delta)\Gamma\left(\varphi_\iota\right)}\left(\frac{\gamma_1\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma\left(\varphi_\iota\right)}+\gamma_2\right)\widehat{\vartheta}(\chi).\end{aligned}$$

Donc

$$\widehat{\vartheta}(S\chi)\leq \frac{\left(K_\iota^{1-\delta}-{K_{\iota-1}}^{1-\delta}\right)\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota-1}}{4^{\varphi_\iota-1}(1-\delta)\Gamma\left(\varphi_\iota\right)}\left(\frac{\gamma_1\left(K_\iota-K_{\iota-1}\right)^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma\left(\varphi_\iota\right)}+\gamma_2\right)\widehat{\vartheta}(\chi).$$

D'après (2.5), nous concluons que S est une contraction.
D'après le théorème (1.6), le problème (2.4) admet au moins une solution $\widetilde{y_\iota}$ dans B_{R_ι} définie par :

$$y_\iota=\begin{cases}0, & s\in[0,K_{\iota-1}]\\ \widetilde{y_\iota}, & s\in\Upsilon_\iota.\end{cases}\tag{2.8}$$

On sait que $y_\iota\in C\left([0,K_\iota],\Lambda\right)$ défini par (2.7) satisfait l'équation

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\int_0^{K_1}\frac{(s-\alpha)^{1-\varphi_1}}{\Gamma\left(2-\varphi_1\right)}y_\iota(\alpha)d\alpha+\ldots+\int_{K_{\iota-1}}^{s}\frac{(s-\alpha)^{1-\varphi_\iota}}{\Gamma\left(2-\varphi_\iota\right)}y_\iota(\alpha)d\alpha\right)+h\left(\alpha,y_\iota(\alpha),D_{0^+}^{\varphi_\iota}y_\iota(\alpha)\right)=0,$$

pour $s\in\Upsilon_\iota$, ce qui signifie que y_ι est une solution de (2.3) avec $y_\iota(0)=0, y_\iota\left(K_\iota\right)=\widetilde{y_\iota}\left(K_\iota\right)=0$.
En conséquence, nous obtenons que le problème aux limites (2.1) admet au moins

une solution définie par :

$$y(s) = \begin{cases} y_1(s), \quad s \in \Upsilon_1, \\ y_2(s) = \begin{cases} 0, & s \in \Upsilon_1, \\ \widetilde{y}_2, & s \in \Upsilon_2 \end{cases} \\ . \\ . \\ y_n(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, K_{\iota-1}], \\ \tilde{y}_\iota, & s \in \Upsilon_\iota. \end{cases} \end{cases}$$

Il constitue une solution de problème (2.1).

Chapitre 3

Stabilité Ulam-Hyers-Rassias

3.1 Stabilité Ulam-Hyers-Rassias

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses (H1), (H2), (2.5) soient vérifiées et*
(H3) Soit $\psi \in C(\Upsilon_\iota, \Lambda)$ *est une fonction croissante, et s'il existe* $\lambda_\psi > 0$ *tel que*

$$I^{\varphi_\iota}_{K_{\iota-1}+}\psi(s) \leq \lambda_{\psi(s)}\psi(s), \text{ pour toute } s \in \Upsilon_\iota.$$

Alors, l'équation de problème (1) est Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à ψ.

Preuve : Soit $z \in C(\Upsilon_\iota, \Lambda)$ est une solution de l'inégalité suivante :

$$\left\| D^{\varphi_\iota}_{K_{\iota-1}+}z(s) + h\left(s, z(s), D^{\varphi_\iota}_{K_{\iota-1}+}z(s)\right)\right\| \leq \epsilon\psi(s), s \in \Upsilon_\iota. \tag{3.1}$$

Soit $y \in C(\Upsilon_\iota, \Lambda)$ est une solution du problème posé

$$\begin{cases} D^{\varphi_\iota}_{K_\iota+1}y(s) + h\left(s, y(s), D^{\varphi_\iota}_{K_{\iota-1}+}y(s)\right) = 0, s \in \Upsilon_\iota, \\ y(K_{\iota-1}) = 0, y(K_\iota) = 0. \end{cases}$$

En utilisant le lemme (2.1), on a :

$$y(s) = \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha)h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma)y(\sigma)d\sigma, y(\alpha)\right)d\alpha.$$

Par l'intégration de (3.1) et à partir de (H3), on obtient

$$\left\| z(s) + \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha) h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) z(\sigma) d\sigma, z(\alpha)\right) d\alpha \right\| \leq \epsilon \int_{K_{\iota-1}}^{s} \frac{(s-\alpha)^{\varphi(\iota)-1}}{\Gamma(\varphi(\iota))} \psi(\alpha) d\alpha$$
$$\leq \epsilon \lambda_{\psi(s)} \psi(s).$$

D'autre part, d'après la proposition (3.1), nous avons, pour chaque $s \in \Upsilon_\iota$

$$\begin{aligned}
\|z(s)-y(s)\| \leq & \left\| z(s) - \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha) h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) z(\sigma) d\sigma, z(\alpha)\right) d\alpha \right\| \\
& + \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha) \left\| h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) z(\sigma) d\sigma, z(\alpha)\right) - h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) y(\sigma) d\sigma, y(\alpha)\right) \right\| d\alpha, \\
\leq & \left\| z(s) + \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha) h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) z(\sigma) d\sigma, z(\alpha)\right) d\alpha \right\| \\
& + \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\alpha) \left\| h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) z(\sigma) d\sigma, z(\alpha)\right) - h\left(\alpha, \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) y(\sigma) d\sigma, y(\alpha)\right) \right\| d\alpha, \\
\leq & \lambda_{\psi(s)} \epsilon \psi(s) \\
& + \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)} \left(\frac{K_\iota - K_{\iota-1}}{4}\right) \int_{K_{\iota-1}}^{\varphi_\iota - 1} \alpha^{-\delta} \left(\gamma_1 \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} G_\iota(s,\sigma) \|z(\sigma)-y(\sigma)\| d\sigma + \gamma_2 \|z(\alpha)-y(\alpha)\|\right) d\alpha, \\
\leq & \lambda_{\psi(s)} \epsilon \psi(s) \\
& + \frac{1}{\Gamma(\varphi_\iota)} \left(\frac{K_\iota - K_{\iota-1}}{4}\right)^{\varphi_\iota - 1} \int_{K_{\iota-1}}^{K_\iota} \alpha^{-\delta} \left(\gamma_1 \frac{(K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota - 1}\Gamma(\varphi_\iota)} \|z-y\|_{\Xi_\iota} + \gamma_2 \|z-y\|_{\Xi_\iota}\right) d\alpha, \\
\leq & \lambda_{\psi(s)} \epsilon \psi(s) + \frac{(K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota - 1} \left(K_\iota^{1-\delta} - K_{\iota-1}^{1-\delta}\right)}{(1-\delta) 4^{\varphi_\iota - 1} \Gamma(\varphi_\iota)} \left(\frac{\gamma_1 (K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota - 1}\Gamma(\varphi_\iota)} + \gamma_2\right) \|z-y\|_{\Xi_\iota}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|z-y\|_{E_\iota} \left[1 - \frac{(K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota - 1} \left(K_\iota^{1-\delta} - K_{\iota-1}^{1-\delta}\right)}{(1-\delta) 4^{\varphi_\iota - 1} \Gamma(\varphi_\iota)} \left(\frac{\gamma_1 (K_\iota - K_{\iota-1})^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota - 1}\Gamma(\varphi_\iota)} + \gamma_2\right)\right] \leq \lambda_{\psi(s)} \epsilon \psi(s).$$

Alors, pour tout $s \in \Upsilon_\iota$

$$\|z-y\|_{\Xi_\iota} \leq \left[1-\frac{(K_\iota-K_{\iota-1})^{\varphi_\iota-1}\left(K_\iota^{1-\delta}-K_{\iota-1}^{1-\delta}\right)}{(1-\delta)4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)}\left(\frac{\gamma_1(K_\iota-K_{\iota-1})^{\varphi_\iota}}{4^{\varphi_\iota-1}\Gamma(\varphi_\iota)}+\gamma_2\right)\right]^{-1}\lambda_{\psi(s)}\epsilon\psi(s)$$
$$:= c_g\epsilon\psi(s).$$

Par conséquent, l'équation de problème (1) est Ulam-Hyers-Rassias stable.

3.2 Exemple

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\varphi(s)}y(s)+\frac{|y(s)|+\left|D_{0^+}^{\varphi(s)}y(s)\right|}{(s+1)^{\frac{1}{2}}(9+e^s)(1+y^2(s))}=0, \quad s\in\Upsilon:=[0,2], \\ y(0)=0, \quad y(2)=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Soit

$$h(s,\pi,z)=\frac{\pi+z}{(s+1)^{\frac{1}{2}}(9+e^s)(1+\pi^2)}, (s,\pi,z)\in[0,2]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty).$$
$$\varphi(s)=\begin{cases}\frac{9}{8}, & s\in\Upsilon_1:=[0,1],\\ \frac{7}{4}, & s\in\Upsilon_2:=]1,2].\end{cases} \tag{3.3}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} s^{\frac{1}{2}}\left|h(s,\pi_1,\varsigma_1)-h(s,\pi_2,\varsigma_2)\right| &\leq \frac{1}{9+e^t}\left|\frac{\pi_1+\varsigma_1}{1+\pi_1^2}-\frac{\pi_2+\varsigma_2}{1+\pi_2^2}\right| \\ &\leq \frac{1}{10}\left|(\pi_1+\varsigma_1)-(\pi_2+\varsigma_2)\right| \\ &\leq \frac{1}{10}|\pi_1-\pi_2|+\frac{1}{10}|\varsigma_1-\varsigma_2|. \end{aligned}$$

D'où la condition (H2) est satisfaite avec $\delta=\frac{1}{2}, \gamma_1=\gamma_2=\frac{1}{10}$.
Par (3.3) l'équation du problème (3.2) est décomposée en deux expressions comme

suit :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{9}{8}} y(s) + \frac{|y(s)|+\left|D_{0^+}^{\frac{9}{8}} y(s)\right|}{(s+1)^{\frac{1}{2}}(9+e^s)(1+y^2(s))} = 0, & s \in \Upsilon_1, \\ D_{1^+}^{\frac{7}{4}} y(s) + \frac{|y(s)|+\left|D_{1^+}^{\frac{7}{4}} y(s)\right|}{(s+1)^{\frac{1}{2}}(9+e^s)(1+y^2(s))} = 0, & s \in \Upsilon_2. \end{cases}$$

Pour $s \in \Upsilon_1$, le problème(3.2) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{9}{8}} y(s) + \frac{|y(s)|+\left|D_{0^+}^{\frac{9}{8}} y(s)\right|}{(s+1)^{\frac{1}{2}}(9+e^s)(1+y^2(s))} = 0, \quad s \in \Upsilon_1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Nous vérifions que la condition (2.5) est satisfaite

$$\begin{aligned} \frac{(K_1 - K_0)^{\varphi_1 - 1}\left(K_1^{1-\delta} - K_0^{1-\delta}\right)}{(1-\delta)4^{\varphi_1 - 1}\Gamma(\varphi_1)} \left(\frac{\gamma_1 (K_1 - K_0)^{\varphi_1}}{4^{\varphi_1 - 1}\Gamma(\varphi_1)} + \gamma_2\right) &= \frac{(1)^{\frac{1}{8}}\left(1^{\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{2}4^{\frac{1}{8}}\Gamma\left(\frac{9}{8}\right)} \left(\frac{\frac{1}{10}(1)^{\frac{9}{8}}}{4^{\frac{1}{8}}\Gamma\left(\frac{9}{8}\right)} + \frac{1}{10}\right) \\ &\simeq 0.3380 < 1. \end{aligned}$$

Soit $\psi(s) = s^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{\varphi_1}\psi(t) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{8}\right)} \int_0^s (s-\alpha)^{\frac{1}{8}} \alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha \\ &\leq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{8}\right)} \int_0^s (s-\alpha)^{\frac{1}{8}} d\alpha \\ &\leq \frac{8}{9\Gamma\left(\frac{9}{8}\right)} \psi(s). \end{aligned}$$

Ainsi la condition (H3) est satisfaite avec $\psi(s) = s^{\frac{1}{2}}$ et $\lambda_{\psi(s)} = \frac{8}{9\Gamma\left(\frac{9}{8}\right)}$.
D'après le théorème (2.1), le problème (3.4) admet une solution $y_1 \in \Xi_1$, et d'après le théorème (3.1), l'equation de problème (3.4) est Ulam-Hyers-Rassias stable.
Pour $s \in \Upsilon_2$, le problème (3.2) peut-être formulé comme suit :

$$\begin{cases} D_{1^+}^{\frac{7}{4}} y(s) + \frac{|y(s)|+\left|D_{1^+}^{\frac{7}{4}} y(s)\right|}{(s+1)^{\frac{1}{2}}(9+e^s)(1+y^2(s))} = 0, \quad s \in \Upsilon_2, \\ y(1) = 0, \quad y(2) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Ainsi que

$$\frac{(K_2-K_1)^{\varphi_2-1}\left(K_2^{1-\delta}-K_1^{1-\delta}\right)}{(1-\delta)4^{\varphi_2-1}\Gamma(\varphi_2)}\left(\frac{\gamma_1(K_2-K_1)^{\varphi_2}}{4^{\varphi_2-1}\Gamma(\varphi_2)}+\gamma_2\right)=\frac{(1)^{\frac{3}{4}}\left(2^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{2}4^{\frac{3}{4}}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}\left(\frac{\frac{1}{10}(1)^{\frac{7}{4}}}{4^{\frac{3}{4}}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}+\frac{1}{10}\right)$$
$$\simeq 0.0441<1.$$

Alors, la condition (2.5) est satisfaite, et

$$\begin{aligned}
I_{1^+}^{\varphi_2}\psi(s)&=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}\int_1^s(s-\alpha)^{\frac{3}{4}}\alpha^{\frac{1}{2}}d\alpha,\\
&\leq\frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}\int_1^s(s-\alpha)^{\frac{3}{4}}d\alpha,\\
&\leq\frac{4\sqrt{2}}{7\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}\psi(s):=\lambda_{\psi(s)}\psi(s).
\end{aligned}$$

Par conséquent, (H3) est satisfait par $\psi(s)=s^{\frac{1}{2}}$ et $\lambda_{\psi(s)}=\frac{4\sqrt{2}}{7\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}$.
D'après le théorème (2.1), le problème (3.5) admet une solution $\widetilde{y}_2\in\Xi_2$ définie par :

$$y_2(s)=\begin{cases}0, & s\in\Upsilon_1,\\ \widetilde{y}_2(s), & s\in\Upsilon_2.\end{cases}$$

Par conséquence, le problème aux limites (3.2) admet une solution

$$y(s)=\begin{cases}y_1(s), & s\in\Upsilon_1,\\ y_2(s)=\begin{cases}0, & s\in\Upsilon_1,\\ \widetilde{y}_2(s), & s\in\Upsilon_2.\end{cases}\end{cases}$$

De plus, d'après le théorème (3.1), l'équation de (3.2) est Ulam-Hyers-Rassias stable.

Conclusion

Notre but principal, dans ce mémoire, est de présenter l'existence et stabilité des solutions de notre problème. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de Darbo combiné avec la mesure de non compacité de Kuratowski.
D'après notre analyse, il clair que les résultats obtenus est une généralisation lorsque $u(t)$ est une fonction constante, c'est-à-dire nous avons converti le problème fractionnaire d'ordre variable en un problème équivalente d'ordre constant.

Par conséquent, tous les résultats de ce travail montrent un grand potentiel pour être appliqué dans diverses applications des sciences.

Bibliographie

References

[1] A. Benkerrouche, D. Baleanu, M. S. Souid, A. Hakem, M. Inc, *Boundary Value Problem for Nonlinear Fractional Differential Equations of Variable Order via Kuratowski Mnc Technique*, Advances in Difference Equations (2021) 2021 :365, 19 pages.

[2] A. Benkerrouche, M. S. Souid, S. Chandok, A. Hakem, Existence and Stability of a Caputo Variable-Order Boundary Value Problem, Journal of Mathematics (2021) Article ID 7967880, 16 pages.

[3] Z. Bouazza, S. Etemad, M. S. Souid, S. Rezapour, F. Martinez, M. K. A. Kaabar, *A Study on the Solutions of a Multiterm Fractional Boundary Value Problem of Variable Order*, Journal of Function Spaces (2021), Article ID 9939147, 9 pages.

[4] Z. Bouazza, M. S. Souid, H. Günerhan, *Multiterm Boundary Value Problem of Caputo Fractional Differential Equations of Variable Order*, Advances in Difference Equations (2021) 2021 :400, 17 pages.

[5] C. F. M. Coimbra, Mechanics with Variable-Order Differential Operators, Annalen der Physik 12(2003), 692–703.

[6] S. Djebali, Problèmes aux limites Associés aux E, D, O, du second ordre. 17-19 .

[7] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[8] A. Razminia, A. F. Dizaji, V. J. Majd, Solution Existence for Nonautonomous Variable-Order Fractional Differential Equations, Mathematical and Computer Modelling 3(2012), 1106–1117.

[9] A. Refice ;M. S. Souid ; I. Stamova, On the boundary value problems of Hadamard fractional differential equations of variable order via Kuratowski MNC technique, Mathematics 9(2021), 1-16.

[10] I. A. Rus, Ulam Stabilities of Ordinary Differential Equations in a Banach Space, Carpathian Journal of Mathematics 1(2010), 103-107.

[11] S. G. Samko, B. Boss, *Integration and Differentiation to a Variable Fractional Order*, Integral Transforms and Special Functions 1(1993), 277–300.

[12] S. G. Samko, Fractional Integration and Differentiation of Variable Order, Analysis Mathematica 21(1995), 213–236.

[13] D. Valerio, J. S. Costa, Variable-Order Fractional Derivatives and Their Numerical Approximations, Signal Process 3(2011), 470–483.

[14] A. Yakar, M. E. Koksal, Existence Results for Solutions of Nonlinear Fractional Differential Equations, Abstract and Applied Analysis (2012) Article ID 267108, 12 pages.

[15] S. Zhang, Existence of Solutions for Two Point Boundary Value Problems With Singular Differential Equations of Variable Order, Electronic Journal of Differential Equations 245(2013), 1-16.