

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master
Spécialité : Génie Civil
Option : Structures

Présenté par :

CHETTAH Madani

BARKATT Amina

Sujet du mémoire

**ÉTUDE DE L'ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES DE
PLAQUES COMPOSITES STRATIFIÉES A PLIS CROISÉS A
L'AIDE D'UNE THÉORIE SIMPLIFIÉE**

Soutenu publiquement le ... /06/2023 devant le jury composé de :

Mr. M. MIMOUNI

Président

Mr. I. KLOUCHE D.

Rapporteur

Mr. B.A. BENYAMINA

Examineur

Mr. G. ABADA

Examineur

PROMOTION : 2022/2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

*La présentation de ce modeste travail m'offre
l'occasion d'exprimer notre profonde gratitude à
Monsieur **KLOUCHE IBRAHIM** qui a bien voulu
diriger ce travail pendant toute la durée de l'étude et la
mise en forme du document final*

Ses nombreux conseils ne m'ont jamais fait défaut.

*Nous sommes heureux de lui exprimer ici notre
respectueuse reconnaissance*

*Nous remercierons également Monsieur Mimouni,
Monsieur Abada et Monsieur Benyamina, D'abord
pour toutes les facilités accordées et d'avoir bien voulu
accepter de présider le jury et d'examiner le travail.*

Sans oublier Notre Chef de Département

*Monsieur **K. Bouakkaz***

Dédicace

Je dédie ce travail particulièrement à :

*Mon père Mohammed (Paix à son âme) ma source de
volonté et d'espoir, qui toujours a cru en moi et n'a pas
cessé de m'inciter et de m'encourager sans limites*

Un grand merci :

*Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son
amour, son soutien, pour tous ses sacrifices consentis et
ses précieux conseils, son assistance et sa présence
dans ma vie, Un grand mérite*

*Je tiens à remercier au profond mes meilleurs amis et
amies de la FAC*

A toute la famille CHETTAH d'une façon générale

MADANI

Dédicace

*Tout d'abord, je tiens à remercier Allah de m'avoir
donné la force et le courage de mener à bien ce
modeste travail*

*Je tiens à dédier cet humble travail A deux des
personnes les plus importantes de ma vie il est
maintenant temps de les remercier tous les deux mon
très cher père **TAYEB** et A ma chère mère*

*De me faire confiance, de m'aider pour tout depuis
que je suis née jusqu'à aujourd'hui.*

*Merci, de m'avoir enseigné les valeurs matérielles et
immatérielles, de me permettre d'être fière de vous
avoir comme parents*

*Merci au fond de mon cœur A mes meilleures sœurs
Mes meilleur Amis de la FAC*

*A toute la famille **BARKATT** et **AMRANDI** d'une
façon générale*

AMINA

Résumé

Dans la présente étude, une simple théorie raffinée de déformation du cisaillement d'ordre n est utilisée pour déterminer les fréquences naturelles de vibration des plaques composites stratifiées. Le champ de déplacement proposé est basé sur une nouvelle cinématique qui inclut des termes intégraux indéterminés et ne contient que quatre inconnues, contre cinq ou plus dans le cas d'autres théories d'ordre supérieur.

La théorie actuelle tient en compte les effets de la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque, de même elle satisfait les conditions aux limites des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, par conséquent, il n'exige pas de facteur de correction de cisaillement.

Les équations de mouvement sont dérivées du principe d'Hamilton et résolues par l'approche de Navier pour obtenir des solutions. Les résultats numériques des fréquences naturelles obtenues en utilisant la présente théorie seront comparés à ceux disponibles dans la littérature pour vérifier la validité des solutions actuelles.

Ces résultats sont comparés avec d'autres modèles trouvés dans la littérature pour prouver l'efficacité et la précision de la théorie proposée.

MOTS-CLÉS : théorie nième d'ordre supérieur ; vibration libre ; composites stratifiées; principe d'Hamilton.

Abstract

In this present study, a simple refined nth-higher-order shear deformation theory is used to determine the natural vibration frequencies of laminated composite plates. The proposed displacement field is based on a novel kinematic in which include the undetermined integral terms and contains only four unknowns, as against five or more in case of other higher-order theories.

The present theory accounts for adequate distribution of the transverse shear strains through the plate thickness and satisfies the shear stress-free boundary conditions on the top and bottom surfaces of the plate, therefore, it does not require problem dependent shear correction factor.

The governing equations of motion are derived from Hamilton's principle and solved via Navier-type to obtain closed form solutions. The numerical results of non-dimensional natural frequencies obtained by using the present theory are presented and compared with those of other theories available in the literature to verify the validity of present solutions.

The results obtained by this theory are compared with other previously published results.

KEY WORDS: nth-higher-order theory; free vibration; laminated composite; Hamilton's principle.

في العمل الحالي، تم تطبيق نظرية إجهاد القص من الدرجة المصقولة البسيطة لتحليل الاهتزاز الحر للألواح المركبة متباينة الخواص. تمت الإزاحة المقترحة على حركيات جديدة تتضمن مصطلحات متكاملة غير محددة وتحتوي على أربعة مجاهيل فقط، مقارنة بخمس أو أكثر في حالة نظريات أخرى ذات رتبة أعلى.

تشرح النظرية الحالية التوزيع المناسب لسلاطات القص المستعرض من خلال سماكة الصفيحة وتفي بإلغاء إجهادات القص على الأسطح العلوية والسفلية للوحة، وبالتالي، فهي لا تتطلب عامل تصحيح للقص.

تُشتق معادلات الحركة من مبدأ هاملتون ويتم حلها من خلال نهج نافير للحصول على حلول. سيتم مقارنة النتائج العددية للترددات الطبيعية التي تم الحصول عليها باستخدام النظرية الحالية مع تلك المتوفرة في الأعمال المنشورة للتحقق من صحة الحلول الحالية.

لإثبات دقة وكفاءة النظرية، تتم مقارنة النتائج المتحصل عليها مع نتائج نظريات أخرى.

تتم مقارنة هذه النتائج مع النماذج الأخرى الموجودة في الأبحاث لإثبات فعالية ودقة النظرية المقترحة.

الكلمات المفتاحية: نظرية ذات درجة عليا- اهتزاز حر- الطبقات المركبة- مبدأ هاملتون

Table des matières

Liste des figures
Liste des tableaux
Liste des abréviations
Introduction

Table des matières

Introduction Générale

Introduction générale.....1

Chapitre I Rappel sur les matériaux composites

I.1.Introduction4

I.2.Définition 4

I.3.Les constituants des matériaux composites.....5

 I.3.1.Les renforts5

 I.3.2.Les fibres 6

I.3.3.Les matrices.....9

 I.3.3.1.Matrice Organique (CMO) 10

I.4.Les charges 144

I.5.Les additifs (Catalyseurs, accélérateurs, colorants, ...) 155

I.6.Les structures composites (GENDRE)..... 166

 I.6.1.Les monocouches 166

 I.6.2.Composites stratifiés..... 188

 I.6.3.Structure en sandwich..... 20

I.7.Domaine d’application des matériaux composites..... 21

I.8.Les avantages et les inconvénients des matériaux composites 22

 I.8.1.Les avantages : (solutions composites) (isomatex.com) 22

 I.8.2.Les inconvénients 23

I.9.Conclusion..... 23

Chapitre II Généralités sur la théorie des plaques

II.1. Introduction.....	21
II.2. Historique des théories des plaques	21
II.3. Définition d'une plaque	22
II.4. Les différents types de plaques	22
II.4.1. Les plaques isotropes	23
II.4.2. Les plaques orthotropes.....	23
II.4.3. Les plaques anisotropes.....	23
II.5. Domaine d'utilisation	24
II.6. Les différentes théories des plaques	24
II.6.1 Approche monocouche équivalente	24
II.6.2 Approche par couche.....	31
II.6.3. Approcher par développement asymptotique	34
II.7. La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT).....	34
II.8. Conclusion	35

Chapitre III Analyse vibratoire des plaques

III.1. Introduction.....	37
III.2. Contexte recherché	37
III.3. formulation Mathématique	Erreur ! Signet non défini. 38
III.3.1. Le champ de déplacement.....	38
III.3.2 Relations constitutives	41
III.3.3 Equations gouvernantes (Equations d'équilibre ou équations de mouvement) Equations d'équilibre de la plaque composite en vibration libre.....	42
III.4. Conditions aux limites et solution de Navier.....	47
III.5. Conclusion	46

Chapitre IV	Exploitation des Résultats numériques	
IV.1. Discussions des Résultats.....		49
Conclusion Générale		57
Bibliographie et références bibliographiques		60

Liste des Abréviations

-HS	Haute Résistance / module standard, le grade le plus courant
-IM	Module Intermédiaire
-HM	Haut Module
-UHM	Très Haut module
-MPa	Méga Pascal
-CPT	La théorie classique des plaques
- FSDT	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
- HSDT	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé
- RPT	La théorie des plaques raffinée
- ESLM	Approche monocouche équivalente
- CMO	Composites à matrice organique
-TD	Matrices thermodurcissables
- TP	Matrices thermoplastiques

Liste des Abréviations

<i>Notation</i>	
E	Module de Young
E_i	Module de Young dans la direction i
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
u, v, w	Les déplacements suivant les directions x, y et z
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la Plaque
G_{ij}	Module de cisaillement
σ_{ij}	Contraintes de cisaillement
ϵ_{ii}	Déformation normales
ϵ_{ij}	Déformations de cisaillement
γ_i	Déformations angulaires (distorsions)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normal
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Déformations dans les directions x et y et z
δ	Opérateur de variation
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Déformations de distors
$f(z)$	Fonction de cisaillement transverse (Fonction de gauchissement)
Q_{ij}	Tenseur de rigidité de plaque
$\theta(x,y)$	Rotations autour des axes x, y
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
M_{xb}, M_{yb}, M_{xyb}	Moments supplémentaires de flexion (les termes du second ordre)
M_{xs}, M_{ys}, M_{xys}	Moments supplémentaires du au cisaillement transverse
$\{ \}$	Vecteur
$[]$	Matrice
i, j	Nombre naturel
w_b	Composante de la flèche due à la flexion

Liste des Abréviations

w_s	Composantes de la flèche due au cisaillement
γ°_{xz}	Les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.
$g(z)$	Dérivée de la fonction de gauchissement
A', B'	Coefficients qui dépendent de la solution employée

Liste des figures

Figure 1 : schéma représente un matériau composite	4
Figure 2: schéma des renforts.....	Erreur ! Signet non défini.
Figure 3: fibre en verre.....	6
Figure 4:fibre en carbone	8
Figure 5: un matériau composite aéronautique	8
Figure 6: renforcement de béton en matériau composite	9
Figure 7: schéma des matrices	9
Figure 8:mélange de polymères post-consommation utilisées comme matrice (a) avant uniformisation et (b) après uniformisation. (GENDRE).....	10
Figure 9:structure d'un composite tissé: fibre (regroupées en fils) et matrice (intra et inter fils).Image de Martin Genet (GENDRE)	17
Figure 10:exemple de tissus plan courants .Image (2) (GENDRE)	17
Figure 11: Exemple de tissus tridimensionnels:(a) tissu tri-orthogonal(b) tissu <<D>> (les renforts sont orientés selon les quatre diagonales d'un cube).Image de (Lauret, 2008).....	18
Figure 12 : disposition possible des fibres dans un pli:(a)tissu plan (ici non équilibrée), (b) mat, (c)unidirectionnel. (GENDRE)	19
Figure 13: exemple de stratifiés à bases de plis unidirectionnels. Les nombres entre crochets désignent l'angle de chaque pli (en degrés par rapport à une direction de référence .Image Laurent Gorent (GENDRE)	19
Figure 14 : exemples de multi-matériaux stratifiés:(a)contreplaque, (b) GIARE (aluminium et composite verre\époxy-Image (3) (GENDRE)	20
Figure 15:une structure en sandwich (image NASA) et ses constituants. Image (2) (GENDRE)	21
Figure 16: comparaison des caractéristiques mécanique en flexion (rigidité et résistance et des masses de trois structures: une plaque et deux sandwiches. Image (2) (GENDRE).....	21
Figure 17: Géométrie des plaques.....	22
Figure 18: Schéma d'une plaque homogène isotrope	23
Figure 19: Domaine de l'utilisation des plaques	24

Liste des figures

Figure 20: Cinématique de Love-Kirchhoff.....	25
Figure 21: Cinématique de Reissner-Mindlin	27
Figure 22: Cinématique de la théorie d'ordre élevé.....	28
Figure 23: Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre (V.T, 2004).....	33
Figure 24: Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevé (Carrera.E, 2003).	33
Figure 25: Système de coordonnées et géométrie d'une plaque stratifiée	38

Liste des tableaux

Tableau 1: caractéristiques des résines thermoplastique (Lauret, 2008)..... 11

Tableau 2: caractéristiques des résines thermoplastiques (Lauret, 2008) 13

Tableau 3: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des stratifiés carrés antisymétriques à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) simplement appuyés**Erreur ! Signet non défini.**

Tableau 4: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des stratifiés carrés croisés symétriques à quatre couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement appuyés... **Erreur ! Signet non défini.**

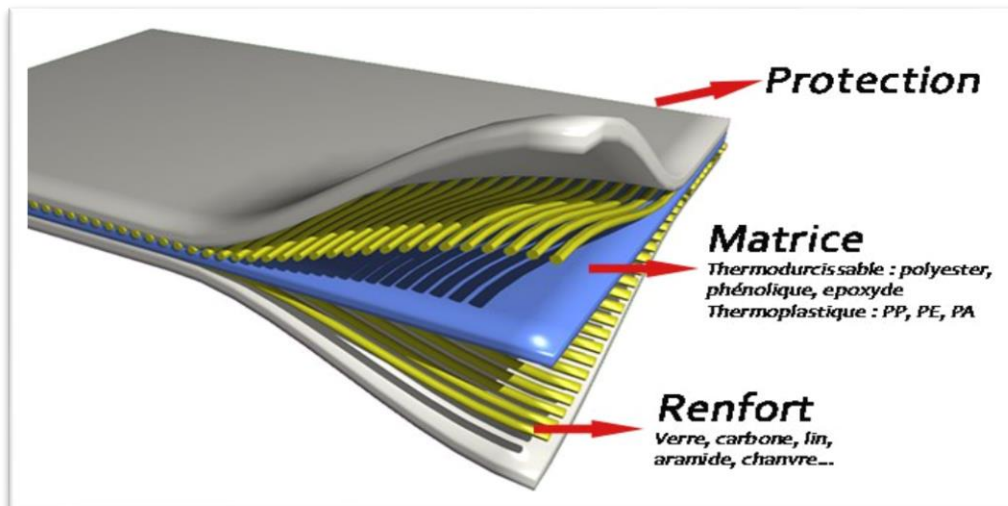
Tableau 5: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des stratifiés carrés antisymétriques à huit couches ($0^\circ/90^\circ$)₄ simplement appuyés.....**Erreur ! Signet non défini.**

Tableau 6: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles des stratifiés carrés antisymétriques équilibrés à deux couches ($45^\circ/-45^\circ$) simplement appuyés. . **Erreur ! Signet non défini.**

Tableau 7: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles des stratifiés carrés antisymétriques équilibrés à huit couches ($45^\circ/-45^\circ$)₄ simplement appuyés..... 50

Tableau 8: Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des stratifiés carrés antisymétriques équilibrés à plusieurs couches ($\theta^\circ/-\theta^\circ$)_n simplement appuyés, ($a/h = 10$).. 51

Introduction Générale



Introduction générale

La réussite d'un projet qu'entreprend l'homme pour ses différents besoins repose sur un élément essentiel : des matériaux appropriés. L'évolution humaine et notre niveau de vie ont été influencés par nos choix de matériaux dans les différents domaines tels que la construction, l'industrie, etc.

Beaucoup des matériaux utilisés depuis des siècles ont été améliorés et sont encore employés aujourd'hui (acier, métal, bois, ...). Chaque matériau est conçu pour répondre à un besoin technologique spécifique. Les plaques en matériaux composites sont largement utilisées dans les applications structurelles en raison de leurs propriétés avantageuses (désirables) telles que la rigidité élevée et le rapport résistance/poids. Les principaux points faibles des plaques composites sont la flexion, la vibration et le flambement. Contrairement à toute autre plaque isotrope et homogène, l'analyse de la vibration libre d'une plaque composite est plus compliquée en raison de sa nature anisotrope. Ainsi, une analyse précise des vibrations libres des plaques composites est une partie importante de la conception structurelle.

Un matériau composite est formé par la combinaison de deux matériaux constitutifs ou plus avec des propriétés physiques ou chimiques significativement différentes pour former un nouveau matériau, dont les propriétés et les performances sont conçues comme le résultat est supérieur à ceux des matériaux constitutifs agissant de façon indépendante. Le composite stratifié, l'un des types de matériaux composites, se compose de plusieurs couches orthotropes de différents matériaux qui sont collés ensemble avec de l'adhésif, pour donner plus de résistance, rigidité, résistance à la corrosion, ou un autre avantage, ces matériaux offrent des avantages définis par rapport aux matériaux plus traditionnels que l'acier ou l'aluminium.

Compte tenu de l'importance croissante dans l'application des stratifiés dans les structures d'ingénierie, une variété de théories stratifiées a été développées afin d'étudier le comportement statique et dynamique des plaques composites stratifiées

Plusieurs études ont été menées sur les problèmes de flexion, de vibration et de flambement des plaques composites isotropes, orthotropes et stratifiées et divers chercheurs ont fait la modélisation mathématique de ces différentes structures en utilisant la théorie classique

des plaques et la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre. Il convient de noter que la théorie classique des plaques (CPT) développée par Kirchhoff (1850) est la théorie la plus simple applicable pour les plaques composites stratifiées minces, mais inexacte pour la plaque épaisse en raison de la négligence de l'effet de déformation du cisaillement transversal.

Pour surmonter les limites du CPT et incorporer avec précision les effets de déformation du cisaillement transversal pour les plaques modérément épaisses ou épaisses, Reissner (1945) et Mindlin (1951) ont proposé la théorie de déformation du cisaillement de premier ordre (FSDT) dans laquelle nécessite un facteur de correction de cisaillement pour corriger la variation incorrecte de la contrainte de cisaillement et la déformation en cisaillement à travers l'épaisseur et afin de satisfaire la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la structure.

Les limites de la CPT et de la FSDT ont forcé le développement de théories de déformation du cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) afin d'éviter l'utilisation de facteur de correction du cisaillement, d'inclure un gauchissement (une distorsion) transversal correct et d'obtenir la variation réelle des déformations transversales de cisaillement et contraintes à travers l'épaisseur des structures.

Par conséquent, beaucoup de théories à six et cinq variables ont été développées pour l'analyse des plaques. Reddy (1984a) a développé une théorie bien connue de déformation du cisaillement d'ordre supérieur en tenant compte des fonctions polynomiales en termes de coordonnées d'épaisseur pour l'analyse des plaques composites stratifiées.

Au cours des dernières années, une nouvelle classe de théories des plaques a été développée par des chercheurs dans lesquels le champ de déplacement implique seulement quatre inconnues sans inclure l'effet d'étirement de l'épaisseur et cinq inconnues dans lesquelles la déformation due au cisaillement et l'effet d'étirement de l'épaisseur sont inclus.

Notre mémoire débute par une introduction générale, s'articule ensuite autour de quatre chapitres et s'achève par une conclusion générale et des perspectives. Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites, leurs caractéristiques mécaniques et les différents types des constituants, à savoir les résines, les renforts (fibres) et les additifs, et en

discutant sur le domaine d'application et la diffusion de ces matériaux dans les différents secteurs de construction.

Dans le deuxième chapitre nous présenterons les différentes théories des plaques, permettant de mettre leur champ de déplacement, de déformation et leur comportement, ensuite nous décrivons selon une synthèse historique récente, les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories des plaques correspondantes.

Dans le troisième chapitre, une simple théorie raffinée de déformation du cisaillement d'ordre élevé utilisant des termes intégral indéterminés dans le champ de déplacement est appliquée pour développer la solution analytique pour l'analyse de vibration libre des plaques composites. La théorie actuelle n'a que quatre inconnues et quatre équations gouvernantes, satisfait la condition de nullité des contraintes de cisaillement à la surface supérieure et inférieure des plaques sans utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Les équations gouvernantes de mouvement sont dérivées du principe d'Hamilton. Une solution pour les plaques simplement appuyées est obtenue en utilisant une technique de série double trigonométrique développée par Navier.

Les résultats numériques des fréquences naturelles de vibration obtenues en utilisant la théorie actuelle sont présentés dans le chapitre 4 et seront comparés à ceux de la théorie classique des plaques (CPT), de la théorie des plaques de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) et d'autres théories des plaques de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDTs) disponibles dans la littérature.



Chapitre I

Rappel sur les matériaux
Composites

I.1.Introduction

Les matériaux composites disposent d'éventualités importantes par rapport aux matériaux traditionnels. Ils possèdent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes. Les matériaux composites (à matrice métallique, élastomère, polymère ou céramique) offrent aux industriels et aux designers des possibilités nouvelles d'associer des fonctions (forme et matériaux), alors des systèmes de plus en plus performants. (Lauret, 2008)

I.2.Définition

Un matériau composite est un matériau composé d'au moins deux matériaux non miscible (mais ayant une forte capacité d'adhésion). Le matériau a des propriétés mécaniques supérieures à ses composants individuels. Un composite est défini comme un matériau résistant appelé renfort, noyé dans une matrice à résistance mécanique beaucoup plus faible. (Cluster Méca)

Il est généralement constitué de deux composants, une ossature appelée renfort qui assure la tenue mécanique et d'une protection appelée matrice qui assure la cohésion de la structure et le transfert des charges entre les renforts. A ces deux composants principaux peuvent s'ajouter des additifs qui permettent de modifier l'aspect, ou les caractéristiques du matériau. Peuvent être incorporés pour améliorer la résistance au feu, diminuer le retrait, modifier la couleur...etc.

Les additifs possibles sont encore plus nombreux. Une classe d'additifs que l'on rencontre systématiquement est celle des agents d'interface, que l'on dépose sur les fibres pour les faire adhérer à la matrice. On rencontre également :

- ✓ Lubrifiants et agents de démoulage
- ✓ Pigments et colorants
- ✓ Agents anti-retraits
- ✓ Agents ultraviolets

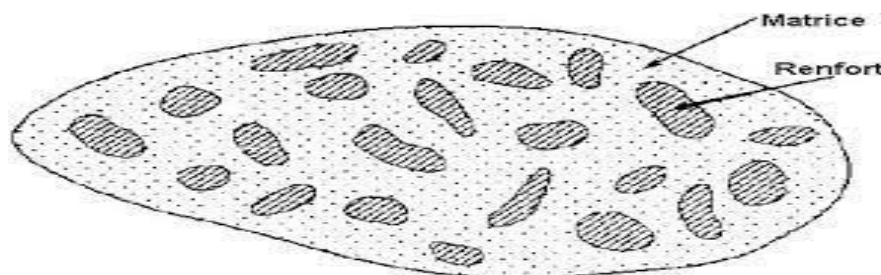


Figure 1 : Structure d'un matériau composite

I.3. Les constituants des matériaux composites

I.3.1. Les renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes :

Linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus).

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure 2

Les matériaux de renfort garantissent des composites et de nombreuses propriétés mécaniques grâce aux nombres des fibres qu'il est continent. Il existe les types suivants : plastiques renforcés de fibres, Linéaire (fil, noyau), tissu (tissu, mat), multidirectionnel (lame, tissu), Organisation tridimensionnelle complexe ou plus. Ils permettent la production de composites légers et durables utilisés dans des industries exigeantes telles que l'aviation et le sport. (Lauret, 2008)

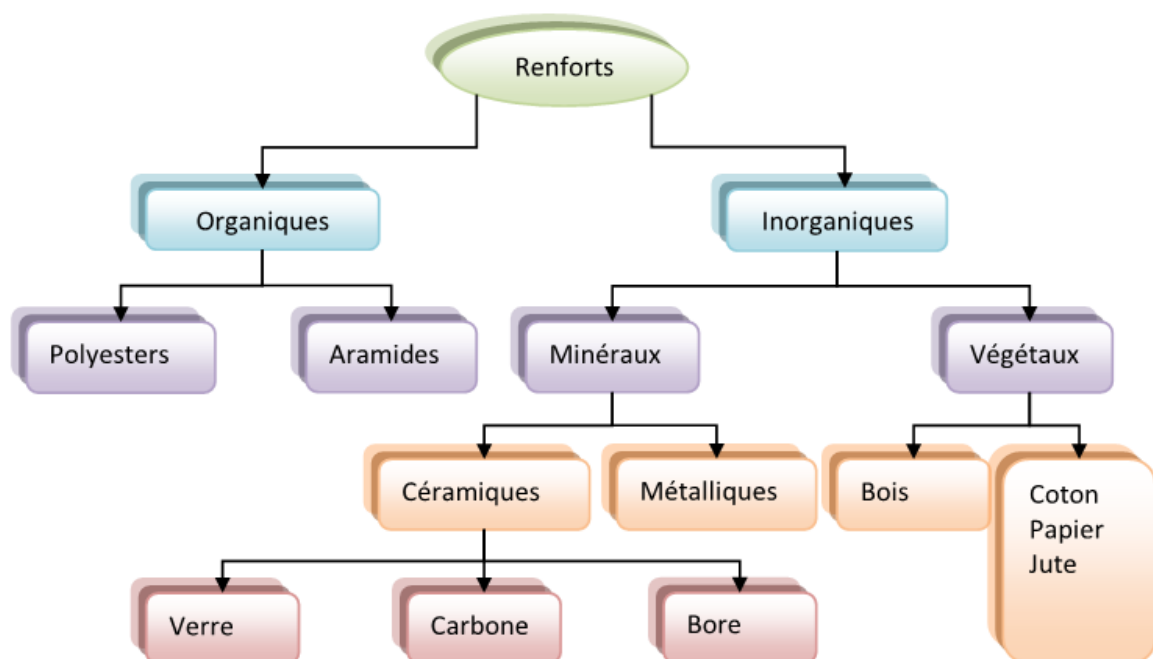


Figure 2: Principaux matériaux de renforts

I.3.2. Les fibres

Selon leur taille, ils peuvent être divisés en plusieurs catégories : courts, longs, continus. Ils sont incorporés de manière aléatoire dans la matrice et jouent le rôle de charges renforçantes. Si non il peut être placé selon un ou plusieurs axes prioritaires les plus sollicités mécaniquement (les barres sont placées selon un axe précis, comme dans le béton armé). (maxicours)

I.3.2.1. Les fibres de verre

Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion (GD). Elles sont les plus anciennes (1940) et les moins chères des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage (figure 4). Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 95% des matériaux composites



Figure 3: fibre en verre

Elles sont obtenues à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en Fusion à 1250°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. Suivant les applications auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

- Fibres E pour les composites grandes diffusions (GD) ;
- Fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;
- Fibres R pour les composites hautes performances (HP).

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevées.

I.3.2.2. Fibre de carbone

C'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances en aéronautique, en construction industrielle et dans les sports et loisirs. Très fortement orientées, les microstructures des fibres de carbone donnent une importante rigidité et résistance des fibres dans la direction longitudinale que dans la direction transversale.

La fibre de carbone se compose des fibres extrêmement fines, d'environ 5 à 10 μm de diamètre, et elle est composée principalement d'atomes de carbone. Ceux-ci sont agglomérés dans des cristaux microscopiques qui sont alignés plus ou moins parallèlement à l'axe long de la fibre. L'alignement des cristaux rend la fibre extrêmement résistante pour sa taille. Plusieurs milliers de fibres de carbone sont enroulées ensemble pour former un fil, qui peut être employé tel quel est ou tissé

Pour obtenir le matériau composite, les fibres de carbone sont généralement imprégnées d'une matrice organique (« résine ») puis moulées dans un moule chauffant avec la forme de pièce souhaitée.

Il existe différents grades de fibres de carbone :

- Haute Résistance / module standard (HS), le grade le plus courant
- Module Intermédiaire (IM)
- Haut Module (HM)
- Très Haut module (UHM)

Leur module de traction va de 230 GPa pour les fibres haute résistance à base de PAN, jusqu'à 900 GPa pour les fibres à Très Haut Module fabriquées à partir de brai.

La contrainte de traction des fibres de carbone peut aller de 2 500 MPa à 7 000 MPa

Ces fibres sont fabriquées pour atteindre de plus hautes résistances en traction, mais ceci est fait au dépend de leurs capacités de déformations faibles. Les fibres de carbone peuvent aussi être très conductrices de chaleur et d'électricité, ce qui peut être un avantage ou un désavantage, selon le point de vue du concepteur.

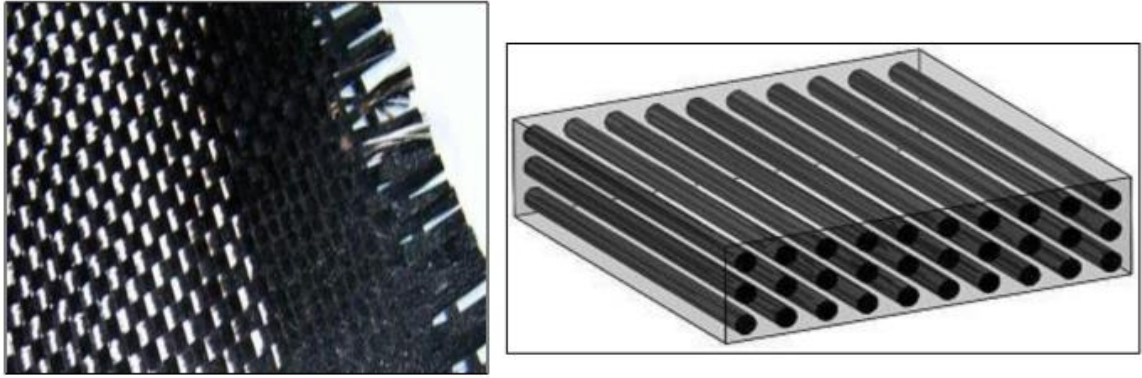


Figure 4: fibre en carbone

Quelques exemples d'applications

Maintenant considérons quelques réalisations en composites de propriétés structurales, principalement dans les domaines suivants :

- ✚ Structure de support aéronautique.
- ✚ Renforcement structurel du béton. (isomatex.com)
- ✚ Isolation des câbles dans le compartiment moteur
- ✚ Structure de support structurel en milieu marin (éolienne ou construction navale)
- ✚ Bouclier
- ✚ Vêtements ignifuges



Figure 5: un matériau composite aéronautique



Figure 6: renforcement de béton en matériau composite

- Armes balistiques (cellules progénitrices)
- Bouclier ignifuge en transit
- Réservoir d'essence
- Oléoducs et conduites de pétrole à températures extrêmes
- Filtre chimique haute température
- Textiles médicaux
- Renforcement structurel des pneus et des bandes transporteuses (isomatex.com)

I.3.3. Les matrices

La matrice permet de lier les fibres de renforts, de répartir les contraintes, d'apporter la tenue chimique de la structure et de donner la forme désirée au produit final. Les différentes familles de Matrice sont présentées par l'organigramme suivant :

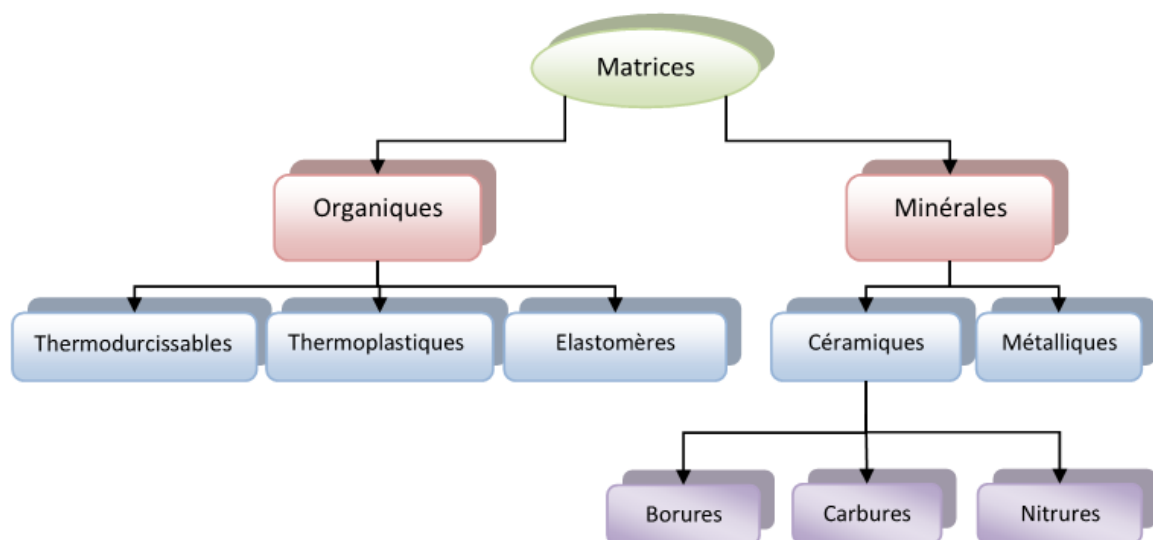


Figure 7: Les différentes familles de matrices

I.3.3.1. Matrice Organique (CMO)

Les composites à matrice organique (CMO) sont des composites, les plus courantes qui existent, viennent ensuite la famille des Composites à Matrice Métallique (CMM) et les Composites à Matrice Céramique (CMC). (futur science)

Utilisation des CMO : Aviation, Sports, Industrie.

Un très grand nombre, de matériau plastique peut être utilisé comme matrice dans les matériaux composites. Elles peuvent aussi bien appartenir à la famille des résines « Thermodurcissables » qu'à celles des résines « Thermoplastiques ».

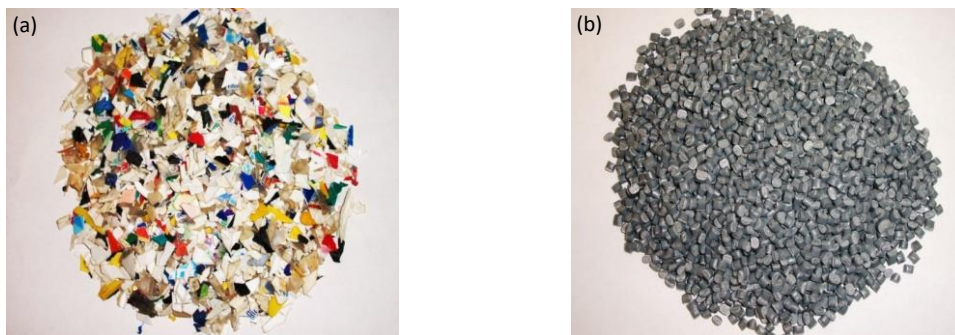


Figure 8: mélange de polymères post-consommation utilisées comme matrice (a) avant uniformisation et (b) après uniformisation. (GENDRE)

I.3.3.1.1. Thermoplastiques TP

Renforcés avec des fibres courtes (et parfois, avec des fibres longues) se développe fortement. Les polymères thermoplastiques ont une structure linéaire ; ils sont mis en forme par chauffage (les chaînes se plient), et durcissent au cours du refroidissement (les chaînes se bloquent). La transformation est réversible.

Tableau 1: caractéristiques des résines thermoplastique (Lauret, 2008)

Matrices TP	Masse Volumique (kg/m ³)	Résistance à la traction (MPa)	Module d'Young (MPa)	Allongement à la Rupture (%)
Polypropylène "PP"	900	30	30	20-400
Polysulfure de phényles "PPS"	1300	65	65	100
Polyamide "PA"	1100	70	70	200
Polyéther sulfone "PES"	1350	85	85	60
Polyéther imide "PEI"	1250	105	105	60
Polyéther-éther-cétone "PEEK"	1300	90	90	50

I.3.3.1.2. Thermodurcissable TD

En général ces résines sont associées avec des fibres longues. Les polymères thermodurcissables ont la forme d'un réseau tridimensionnel ; au cours de la polymérisation, ce réseau se pont (double liaison de polymérisation) et durcit de façon définitive lors du chauffage selon la forme souhaitée. La transformation est irréversible.

- **Polyesters insaturés**

C'est la résine la plus utilisée dans l'application composite de grande distribution. La résine de polyester insaturé contenant un monomère (généralement le styrène) est réticulée à température ambiante par addition d'un catalyseur de type peroxyde organique et d'un accélérateur. Elle passe successivement de l'état liquide visqueux initial à l'état de gel, puis à l'état de solide infusible. La réaction est exothermique et la température de la résine augmente progressivement depuis le gel jusqu'à un maximum pour redescendre ensuite lentement à la température ambiante. Le durcissement sera d'autant plus rapide ou, si l'on préfère, le temps nécessaire dans le moule sera d'autant plus court que la courbe de température en fonction du temps se rapprochera davantage de la verticale. La réaction de durcissement dépend de la réactivité de la résine, de la forme de l'objet fabriqué (épaisseur, etc.), de la nature et du dosage du système catalytique.

Il existe différents types de résines :

- Ortho phtalique : la plus courante ;
- Iso phtalique : qui donne une meilleure tenue à l'humidité ;
- Chlorée : apportant une auto extingüibilité ;
- Bisphénol : possédant de bonnes caractéristiques chimiques et thermiques.

• **Vinylesters**

On peut la considérer comme une variante des polyesters produite à partir d'acides acryliques. Elles possèdent une bonne résistance à la fatigue et un excellent comportement à la corrosion, mais demeure combustible.

• **Phénoliques**

Elles sont issues de la polycondensation du phénol et du formol et se caractérisent par une bonne tenue au feu, sans fumée. Elles restent fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à colorer et à mettre en œuvre.

• **Epoxydes**

Elles résultent de la polyaddition de l'épichlorhydrine sur un polyalcool et constitue la résine type des composites hautes performances HP. On distingue deux classes de résines en fonction : - Du durcissement à chaud ou à froid ; - De la tenue en température (120-130 °C, ou 180-200 °C).

• **Polyuréthannes et polyurées**

Dans la fabrication de pièces composites, on utilise surtout des formules élastomériques dont la faible viscosité permet un bon remplissage du moule. Les constituants sont livrés à l'état de prépolymères liquides :

- Polyols + polyisocyanates = polyuréthannes ;
- Polyéthers + polyamines = polyurées.

Tableau 2: caractéristiques des résines thermoplastiques (Lauret, 2008)

Matrices TD	Masse Volumique (kg/m ³)	Résistance à la traction (MPa)	Module D'Young (MPa)	Allongement à la Rupture (%)
Polyester	1200	80	4000	2.5
Epoxyde	1200	130	4500	2.5
Polyimide	1400	70	4000	1
Phénolique	1300	70	3000	2.5
Vinylester	1150	75	3300	4
Silicone	1100	35	2200	/

I.3.3.1.3. Les Résines thermostables

Polymère présentant des caractéristiques mécaniques stables sous des pressions et des températures élevées (>200°C) appliquées de façon continue. Cette propriété est mesurée en déterminant la température que peut supporter la résine durant 2000h sans perdre la moitié de ses caractéristiques mécaniques.

I.3.3.1.4. Les élastomères thermoplastiques

Les matériaux élastomères thermoplastiques sont des matières premières que l'on peut traiter dans l'ensemble des machines de processus plastiques grâce à ses particularités fonctionnelles comme la faible densité ne nécessitant pas de vulcanisation à part leurs forces comme les mêmes que les caoutchoucs vulcanisés, une large gamme de dureté, la résistance à l'environnement extérieur et à la température, la faible déformation permanente et la facilité de recyclage. Tout ceci leurs permettent d'assurer un faible coût de production et d'investissement aux utilisateurs avec son gain de haut processus dans le secteur du plastique.

I.3.3.1.5. Les matrices métalliques

L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 3000°C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sien d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

I.3.3.1.6. Les matrices carbonées

Sont fabriquées par décomposition d'une matière organique à haute température. La matière peut être un liquide (imprégnation en phase liquide), ou un hydrocarbure gazeux

(décomposition chimique en phase vapeur). Le second procédé est plus rapide que le premier, qui peut durer plusieurs mois pour obtention d'une densification suffisante, mais moins reproductible. Le carbone se dépose en grains sur les fibres, assurant leur bonne liaison. Il est possible par exemple d'obtenir un composite carbone-carbone dont la densité est égale à celle du carbone massif.

I.3.3.1.7. Les matrices céramiques

Sont particulièrement intéressantes en raison de leur caractère réfractaire. Elles sont utilisées dans des pièces qui doivent subir sans dommage de très hautes températures (tuiles de protection thermique, brûleurs). Le point faible des céramiques, à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction, est partiellement masquée par l'insertion de fibres dans la matrice. Les techniques de fabrication les plus courantes sont l'imprégnation en phase liquide (SiC-SiC par exemple) ou le dépôt plasma (par exemple dépôt de silicium puis nitruration à l'aide d'un traitement sous azote à 1450°C, qui produit une augmentation de volume et favorise la densification).

I.4. Les charges

De manière générale, les charges et additifs jouent un rôle essentiel dans l'obtention des propriétés des polymères, qu'ils soient utilisés seuls ou comme matrices de composites ; il en existe de très nombreux types. Les charges sont des particules solides que l'on disperse au sein de la matrice. Elles peuvent être minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques, et s'utilisent grosso modo de la même façon que dans les plastiques "traditionnels". On peut par exemple rencontrer :

- ✓ Des microbilles de verre creuses, ajoutées en plus des renforts principaux, qui améliorent la tenue en compression tout en allégeant la matrice ;
- ✓ Du noir de carbone utilisé à la fois comme pigment noir, comme barrière anti-UV et comme antioxydant ;
- ✓ Des particules de silice pour rendre la matrice plus isolante (thermiquement, électriquement et acoustiquement), diminuer son retrait au moulage... ;
- ✓ Des poudres ou paillettes métalliques pour rendre la matrice conductrice de l'électricité et de la chaleur, pour améliorer son usinabilité, sa résistance aux chocs ou à l'abrasion... ;
- ✓ Des billes thermoplastiques ajoutées dans les matrices thermodurcissables, pour améliorer leur ductilité et donc leur résistance à la fissuration... ;

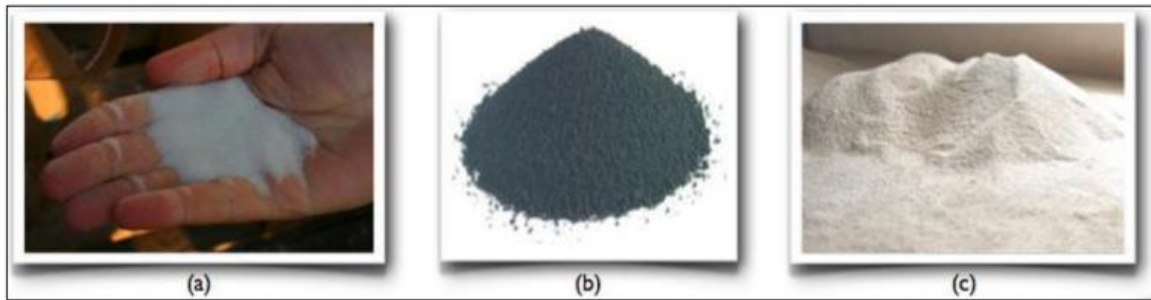


Figure I.9 : Exemples de différentes charges :
(a) microbilles de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.

Les charges ont pour rôle :

- Réduction des coûts de produit.
- Modifier la viscosité de la résine.
- Réduire l'exothermie.
- Modifier la contraction.
- Améliorer l'état de surface. (solide player)

I.5. Les additifs (Catalyseurs, accélérateurs, colorants, ...)

Il s'agit de la substance ajoutée avec une faible quantité quelque pourcentage en masse à la résine pour modifier ou améliorer le comportement rhéologique ou les propriétés du produit fini :

- Le catalyseur apporte de la chaleur ou provoque la polymérisation par l'action d'un accélérateur.
- Les accélérateurs permettent un durcissement à température ambiante et modifient la durée de vie de la résine. (solide player)
- Accélérateurs et catalyseurs de polymérisation ;
- Diluants ;
- Plastifiants ou flexibilisateurs ;
- Tensioactifs ;
- Pigments et colorants ;
- Antioxydants, anti UV, anti-ozones ;

Les charges et additifs ; sont incorporés dans un matériau composite pour :

- ❖ Modifier la couleur ;
- ❖ Modifier sensiblement les propriétés mécaniques ou thermiques ;
- ❖ Réduire le coût ;
- ❖ Résister au feu ;
- ❖ Diminuer le retrait ;
- ❖ Faciliter le démoulage ;
- ❖ Améliorer la résistance au vieillissement ;
- ❖ Modifier la densité du matériau.

I.6. Les structures composites (GENDRE)

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc. Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

1. Les monocouches ;
2. Les stratifiées ;
3. Les sandwiches.

I.6.1. Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles 1D, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

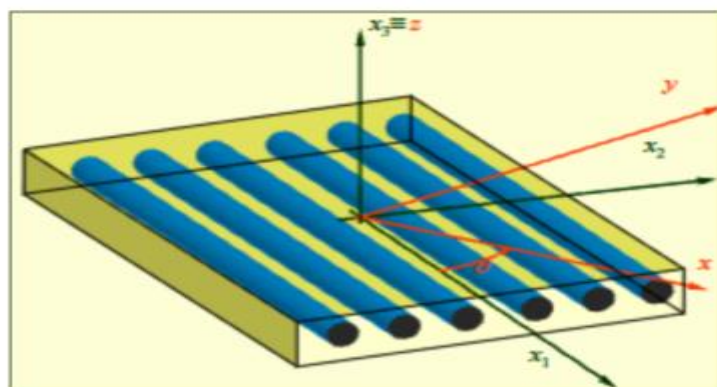


Figure 9-1: composite monocouche

Un "câble" appelé toron ou simplement un fil. Chacun contient des centaines ou des milliers de fibres. Ces fils sont tissés selon un motif plus ou moins complexe. Comme le montre

la figure 09, la matrice est présente à deux niveaux une fois le moulage terminé. Dans le fil (c'est-à-dire entre les fibres) et dans le tissu (c'est-à-dire entre les fils).

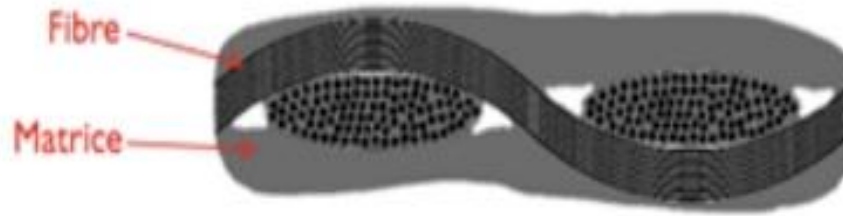


Figure 9-2: structure d'un composite tissé : fibre (regroupées en fils) et matrice (intra et inter fils). Image de Martin Genet (GENDRE)

Les motifs de tissus peuvent être déversés. De nombreux tissus sont plats (Figure 10) et une seule couche de fil. L'épaisseur de la pièce est ensuite obtenue en cousant plusieurs couches ensemble ou en les empilant sur un stratifié (voir ci-dessous). Le tissu de la figure 10 est équilibré. Autrement dit qu'ils un comportent autant de fils dans les deux directions de tissage. Par conséquent, notez que ces deux directions ont la même résistance et la même rigidité, mais pas de mouvement isotrope. Il résiste a priori aux contraintes dans le sens du fil plutôt qu'aux contraintes à 45° ou au cisaillement interne.

De plus, le rapport des filets dans les deux directions peut être modifié pour affecter cette anisotropie. C'est le cas lorsque la contrainte sur la pièce le justifie. Le tissu résultant est dit déséquilibré (voir Figure 12a). (GENDRE)

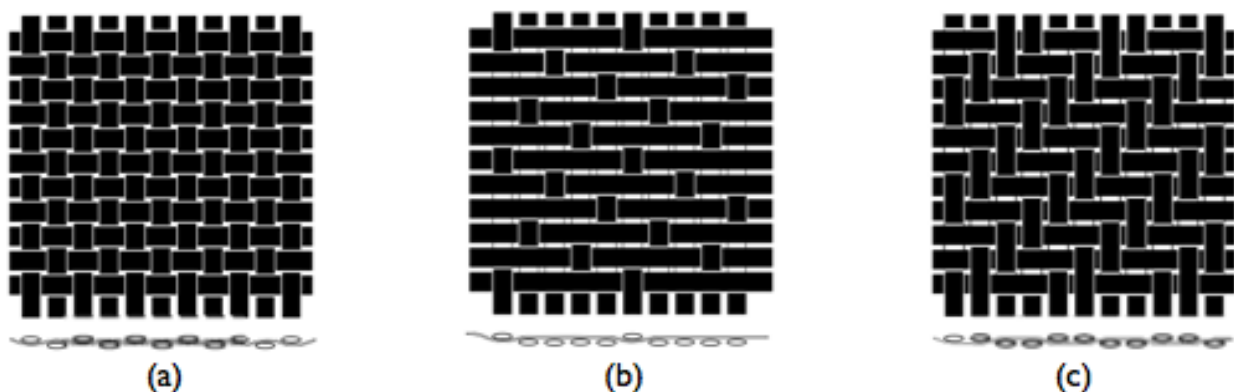


Figure 10: exemple de tissus plan courants. Image (2) (GENDRE)

D'autres tissus sont tridimensionnel set possèdent des fils dans plusieurs directions non Coplanaires (figure11). Ces tissus permettent de réaliser directement des pièces d'épaisseur

variable et, par rapport aux assemblages de tissus plans, résistent mieux à l'arrachement, moyennant une fabrication plus complexe. (GENDRE)

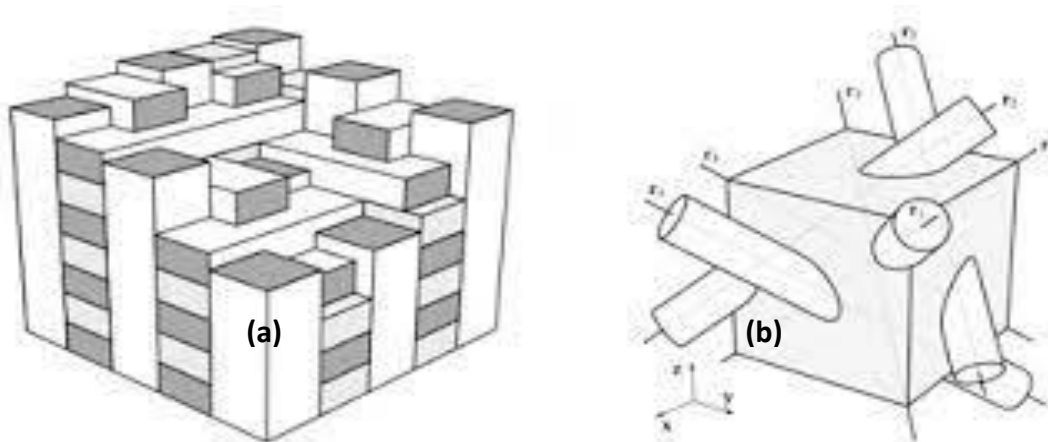


Figure 11: Exemple de tissus tridimensionnels:(a) tissu tri-orthogonal(b) tissu <<D>> (les renforts sont orientés selon les quatre diagonales d'un cube). Image de (Lauret, 2008)

I.6.2. Les stratifiées

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

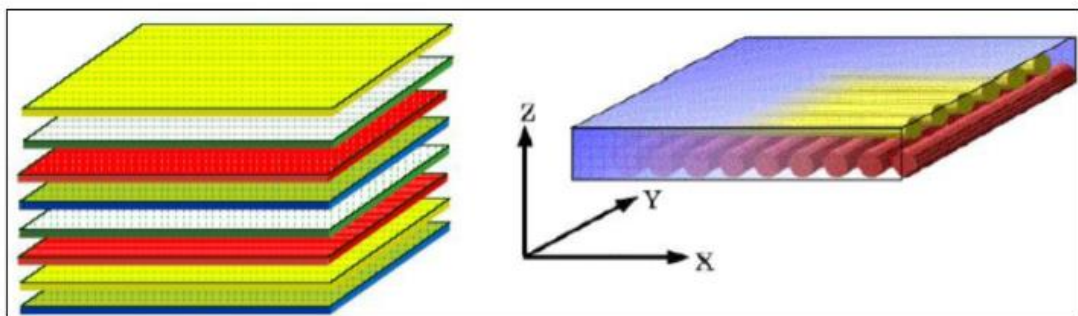


Figure 11- a : composite stratifié

La stratification est une autre structure couramment rencontrée dans les pièces composites. Dans un stratifié, les fibres sont agencées en couches fines (quelques dixièmes de millimètre) nommées plis, qui sont empilées les unes sur les autres ; après la mise en forme ces couches seront liées entre elles par l'intermédiaire de la matrice. Au sein d'un pli, les renforts peuvent avoir n'importe quel type de disposition, pourvu qu'elle soit plane :

-Soit l'un des tissus plans décrits ci-dessus (figure12a), ce qui donne un comportement plus ; ou moins anisotrope selon la proportion de fils dans les deux directions. (GENDRE)

-Soit un mat : les fibres sont disposées « en vrac » sans orientation privilégiée sur quelque couches (figure 12b), ce qui donne un comportement quasi-isotrope dans le plan.

-Soit un tissu unidirectionnel : les fibres sont disposées parallèlement les unes aux autres Sur quelques couches (figure12c) et uniquement maintenues dans cette disposition par quelques fils de trame, ce qui donne un comportement fortement anisotrope. (GENDRE)

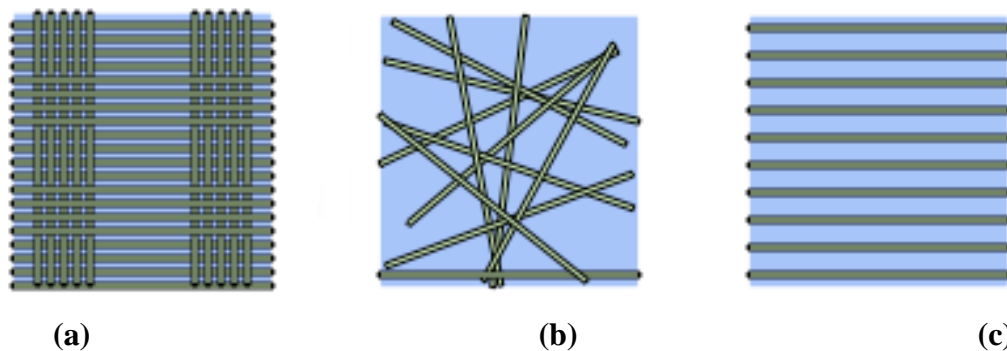


Figure 12 : disposition possible des fibres dans un pli:(a) tissu plan (ici non équilibrée), (b) mat, (c)unidirectionnel. (GENDRE)

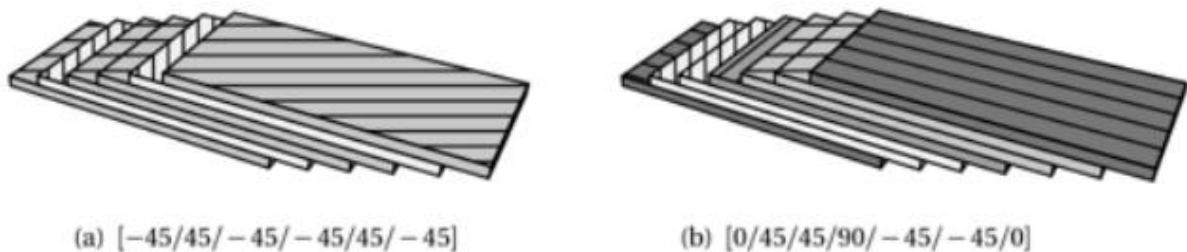


Figure 13: exemple de stratifiés à bases de plis unidirectionnels. Les nombres entre crochets désignent l'angle de chaque pli (en degrés par rapport à une direction de référence. Image Laurent Gorent (GENDRE)

En jouant sur l'ordre et l'orientation des plis (figure13), il est possible d'adapter finement les propriétés mécaniques du stratifié aux sollicitations extérieures, et donc d'atteindre un haut niveau d'optimisation en mettant la matière là où elle est le plus utile .L'échelle de la structure ,les comportements mécaniques ainsi obtenus peuvent être très

complexes, et vont du quasi-isotrope à une anisotropie marquée lorsque l'application le nécessite (voir ressource: Modélisation du comportement des composites: les poutres stratifiées). Les stratifiés sont globalement moins coûteux à fabriquer que les tissus 3D: en contrepartie, ils sont sujet soudé laminage (c'est-à-dire que les plis peuvent se décoller les uns des autres, lorsque la matrice qui les relie fissure). (GENDRE)

Notons que là encore, cette structure n'est pas spécifique aux composites modernes : les dérivés du bois comme le contre-plaqué possèdent souvent une structure stratifiée (figure 14a). Il existe également des stratifiés hybrides tels que le GLARE (GLASSREINFORCED) utilisé dans l'A380, constitué d'un empilement de fines feuilles d'aluminium alternées avec des plis unidirectionnels de fibres de verre et matrice époxy (figure 14b). (GENDRE)

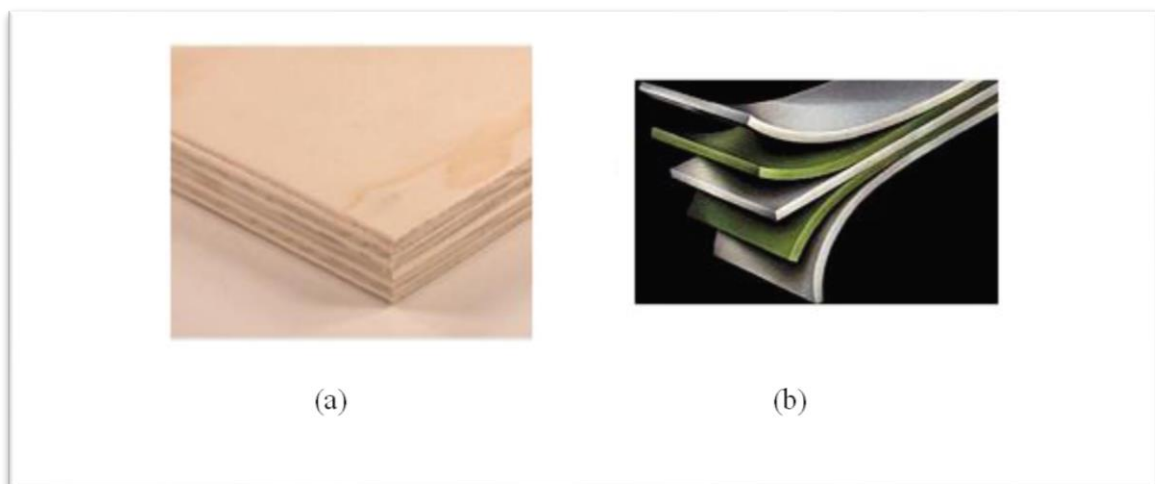


Figure 14 : exemples de multi-matériaux stratifiés:(a) contreplaqué, (b) GLARE (aluminium et composite verre\époxy-Image (3) (GENDRE)

Les pièces composites tissée sous stratifiées sont généralement minces. Par conséquent, elles ne résistent efficacement qu'aux sollicitations en membrane, c'est-à-dire dans leur plan, et résistent mal aux sollicitations hors plan (flexion et torsion). Pour concevoir des pièces rigides en flexion et en torsion, une technique couramment employée est celle des structures en sandwich, constituées de deux peaux (généralement stratifiées) collées sur une âme épaisse mais légère, comme une mousse de polymères ou un nid d'abeilles, à l'aide d'adhésifs (figure 15). (GENDRE)



Figure 15:une structure en sandwich (image NASA) et ses constituants. Image (2) (GENDRE)

L'intérêt de cette disposition est encore une fois de mettre la matière là où elle est nécessaire : lors qu'un tel « sandwich » est sollicité en torsion ou en flexion, les peaux travaillent essentiellement en membrane.

Tandis que l'âme travaille essentiellement en cisaillement hors plan (et à des niveaux de contrainte bien plus faibles). Il est ainsi possible d'obtenir des pièces ultra légères, résistantes et rigides en flexion et en torsion, comme le montre le tableau comparatif de la figure16. (GENDRE)

Rigidité relative	1.0	7.0	37.0
Résistance relative	1.0	3.5	9.2
Masse relative	1.0	1.03	1.06

Figure 16: comparaison des caractéristiques mécanique en flexion (rigidité et résistance et des masses de trois structures : une plaque et deux sandwiches. Image (2) (GENDRE)

I.7.Domaine d'application des matériaux composites

Les matériaux composites en raison de leur composition unique peuvent être utilisés dans une variété de domaines :

- Dans le domaine de l'aviation dans la production de pièces d'avions et de moteurs.
- Technologie aérospatiale pour produire des structures porteuses pour véhicules qui chauffés.
- L'industrie automobile pour créer des carrosseries, des jantes, des panneaux et des ailes légers.
- L'industrie minière dans la production d'outils de forage. (kayaba parts)
- Génie civil pour créer des espaces de pont et des éléments structuraux préfabriqués dans des immeubles de grande hauteur.

L'utilisation de matériaux composites permet d'augmenter la puissance des moteurs et des centrales électriques tout en réduisant le poids des machines et des équipements, selon des représentants de l'industrie russe. Il est prévu que les volumes de production locale de produits de l'industrie composite augmentent d'ici 2020. Des projets expérimentaux visant à développer la nouvelle génération de matériaux composites sont déjà mis en œuvre dans les pays. L'utilisation de matériaux composites est pratique dans une variété de domaines, mais est plus efficace dans les industries associées à la haute technologie.

Par exemple, aujourd'hui, pas un seul avion n'est créé sans l'utilisation de composites et certains utilisent environ 60% de composites polymères.

En raison de la possibilité de combiner divers éléments et matrices de renforcement, il est possible d'obtenir une composition avec un certain ensemble de propriétés. Cela permet à son tour d'utiliser ce matériau dans une variété de domaines. (kayaba parts)

I.8. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites

I.8.1. Les avantages (solutions composites) (isomatex.com ; kayaba parts)

- Propriétés mécaniques très élevées.
- Faible densité (donc facile à transporter, à manipuler et à installer).
- Excellente isolation thermique.
- Isolation électrique (3-20 kV/mm).
- Faible expansion.
- Excellente résistance aux agressions extérieures (corrosion chimique, rayonnement IR ou UV, et même graffiti).
- La transparence des ondes électromagnétiques.
- Il est coloré en grande quantité sans frais supplémentaires.
- Qualité esthétique spécifique.
- Grande capacité d'absorption de chocs.
- Bilan écologique très favorable.
- Pas toxiques ni pour l'Homme ni pour l'environnement.
- Peu de ressources primaires rares pour leur fabrication. Aucuns entretiens.
- Excellente durabilité (certains de nos produits sont utilisés depuis 40 ans).
- Économie d'énergie pendant le fonctionnement (isolation, faible densité, etc.).
- Recyclable.

I.8.2. Les inconvénients (kayaba parts)

- Très cher.
- Fibres difficiles à imprégner de résine époxy.
- Sensibilité à l'usure par impact mécanique.
- Le rayon de courbure est petit.
- Rigidité de l'enroulement filamentaire.
- La difficulté à tourner.

I.9. Conclusion

En fin en a terminé ce chapitre qui représenté des généralités sur les matériaux composites Leur différents constituent et leurs propriétés mécaniques combinés d'une manière qui permet au matériau de rester distinct et identifiable. Les deux ingrédients ; matrice et renforts ajoutent de la force à un complexe à cause de leurs propriétés mécanique très élevé et la formule compense souvent les faiblesses des ingrédients individuels. Ça permet d'utiliser ce matériau dans des différents domaines d'application actuellement mais avec tous ces propriétés ce dernier reste très cher.



Chapitre II

Généralités sur la théorie des
plaques

II.1. Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie sous-marine, aérospatial, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments, etc.), dans le domaine de l'énergie, et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique... etc.), et même dans le monde du vivant (artères, bronches).

Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue de contrôler ou d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit ...).

En générale, la plupart des modèles utilisés sont linéaires et fournissent une bonne approximation, au premier ordre, du comportement des plaques. L'objet de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Ce qui a poussé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structurel en s'inspirant de la théorie des poutres. On distingue quatre équations, dans un modèle de mécanique des solides, comportant :

1. Les équations du mouvement.
2. Relations déformations-déplacements.
3. Loi de comportement, les relations de contrainte-déformations.
4. Et les équations de compatibilité.

On verra dans ce chapitre les différentes théories des plaques développés dans la littérature

II.2. Historique des théories des plaques

En 1888, Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff pour fonder une théorie des plaques minces également appelée théorie classique (CLPT) ou théorie de Kirchhoff-Love (G.Kirchhoff, 1950). À l'aide des travaux de Rayleigh (Rayleigh, 1877), Timoshenko (Timoshenko, 1921), Reissner (Reissner, 1945) (E.Reissner, 1945) et Kapania (Kapania, 1989), Mindlin (R.D.Mindlin, 1951), a présenté une théorie des plaques semi-épaisses appelée théorie des déformations du premier ordre (FSDT). La limite des théories classiques et du premier ordre (applicables pour les plaques minces et semi-épaisses) a mené au développement de théories d'ordre élevé qui sont venues pour améliorer l'évaluation de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

II.3. Définition d'une plaque

Une plaque est une pièce dont l'épaisseur est faible par rapport aux autres dimensions.

Une plaque est un solide délimité par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces (Fig. II.1). On définit :

- ✓ Le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- ✓ Le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan (O, x, y) , d'équation ; $z = 0$
- ✓ Une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .

On appelle h l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

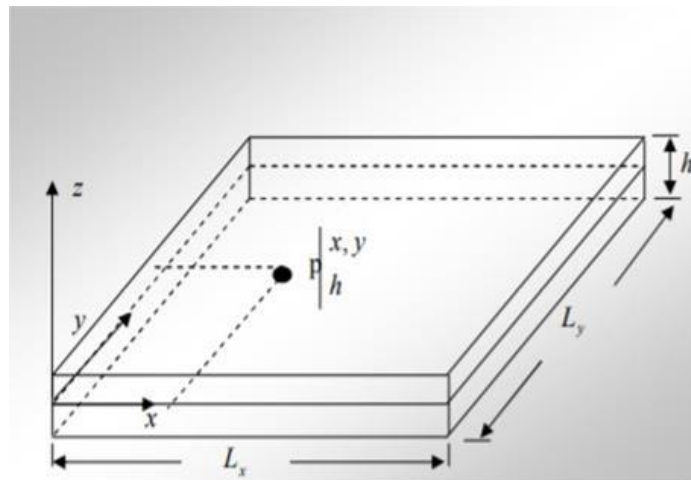


Figure 17: Géométrie des plaques

II.4. Les différents types de plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section Transversale, on peut classer les plaques en trois catégories

II.4.1. Les plaques isotropes

Généralement elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (E et ν :

respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art...etc.).

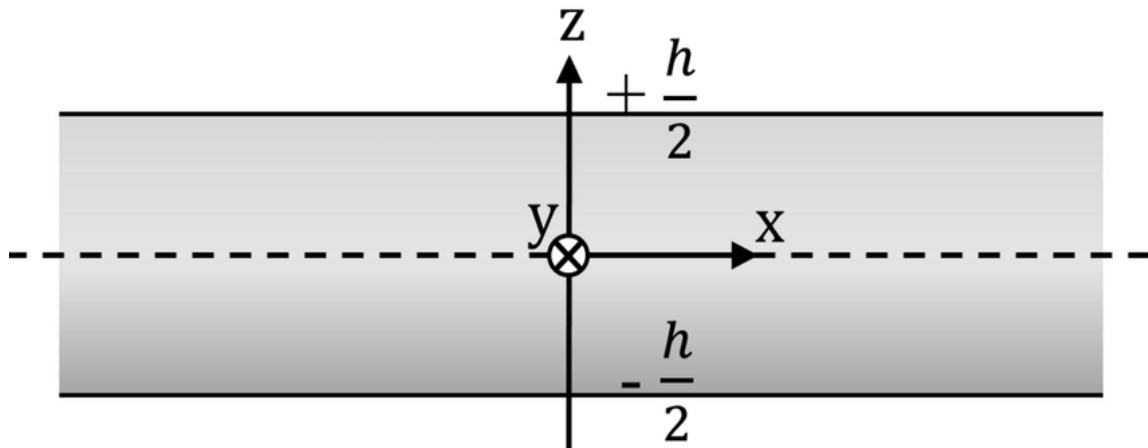


Figure 18: Schéma d'une plaque homogène isotrope

II.4.2. Les plaques orthotropes

Une plaque en matériau orthotrope est une structure caractérisée par neuf constants élastiques indépendants, si les plans de symétries sont connus.

Les propriétés élastiques des plaques orthotropes sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art

II.4.3. Les plaques anisotropes

Dans ce type des plaques les propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale

II.5. Domaine d'utilisation

Les plaques sont utilisées dans tous les domaines, en particulier dans le domaine du génie civil. On les utilise dans les constructions simples (habitation) où les ouvrages d'art et elles existent sous formes différentes (circulaires et rectangulaires...etc.) selon la forme de l'ouvrage.



Figure 19: Domaine de l'utilisation des plaques

II.6. Les différentes théories des plaques

L'utilisation des plaques isotrope et les plaques composites dans diverses industries, particulièrement dans les domaines l'aéronautique, et de la construction navale, a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural.

II.6.1 Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, dans cette approche, la plaque multicouche hétérogène complexe est homogénéisée et considérée comme une seule couche statiquement équivalente. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de **Love-Kirchhoff** et de **Reissner-Mindlin**, de nombreux auteurs ont développé des théories des plaques à partir des champs de déplacement où les champs de contraintes plus raffinés.

Ces théories sont très intéressantes dans l'étude des plaques et des coques, car celles-ci s'affranchissent ainsi de la discrétisation dans la direction de l'épaisseur, faisant ainsi ressortir le caractère bidimensionnel de la structure. Cependant, en considérant une approximation du déplacement unique dans toute l'épaisseur de la plaque, cette classe de théories assure la continuité des déformations entre les diverses strates, mais ne permet pas de modéliser la continuité des contraintes aux interfaces des couches. Ainsi, les contraintes inter-laminaires ne peuvent généralement pas être déterminées avec précision à l'aide de ces seules méthodes, ce qui implique donc souvent l'utilisation d'autres théories pour effectuer une correction a posteriori

des contraintes. Dans cette catégorie, on considère généralement trois déclinaisons de cette approche dans ce qui suit (Bourada.Fouad, 2018).

II.6.1.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement (L/h).

Cette théorie se base sur les hypothèses de (G.Kirchhoff, 1950), selon lesquelles :

- Une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (Figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation de cisaillement transverse ($\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$)
- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions, en conséquence les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles $\sigma_z = 0$
- Le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal des points du plan neutre.

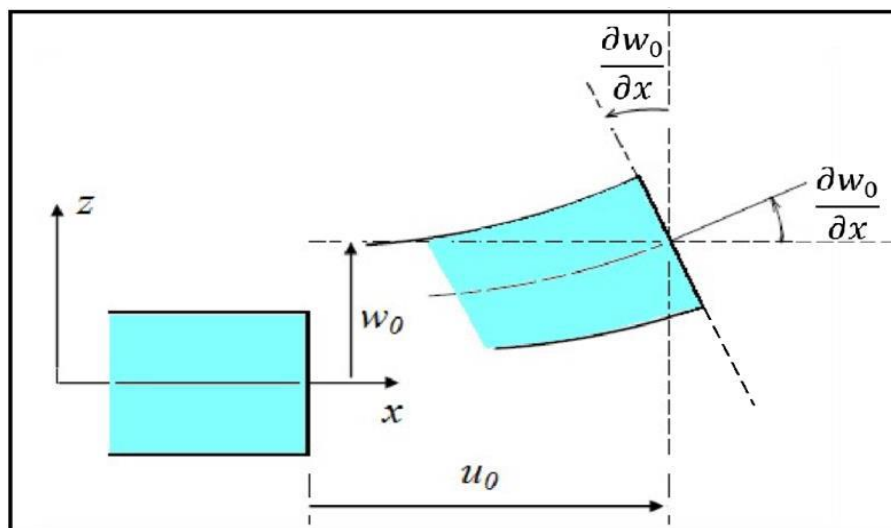


Figure 20: Cinématique de Love-Kirchhoff

- Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$u_0(x, y)$ et $v_0(x, y)$: Les déplacements de membrane dans les directions x et y respectivement

$w_0(x, y)$: La flèche de la plaque

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$: Les rotations dues à la flexion (sans cisaillement)

II.6.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans (E.Reissner, 1945)et (R.D.Mindlin, 1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que (J.N.Reddy, Wang, & Lee, 1997)et (J.N.Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates, 1999).

Cette théorie se base sur les hypothèses deReissner-Mindlin selon lesquelles :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.
- La contrainte normale est négligeable devant les autres composantes. (σ_z)
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

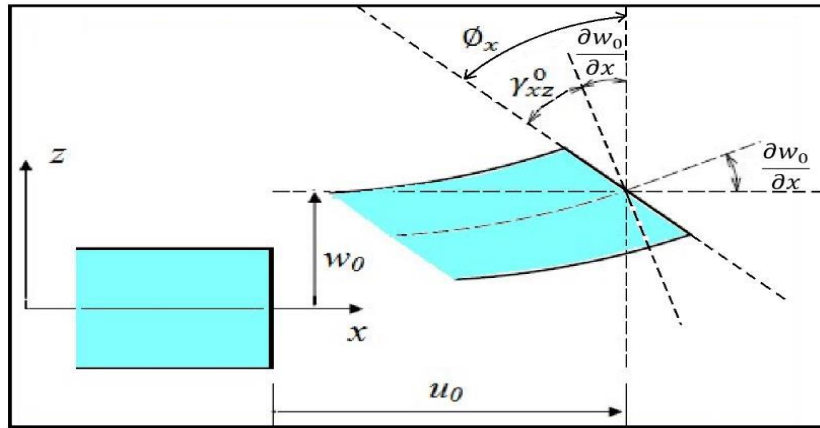


Figure 21: Cinématique de Reissner-Mindlin

➤ Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_o(x, y) - z\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_o(x, y) - z\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_o(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

Avec :

ϕ_x et ϕ_y : Les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x et y

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement,

$$\phi_x = -\frac{\partial w_o}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_o}{\partial y}
 \tag{II.3}$$

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_{xz}

Sont constantes en "z". Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (J.M. Whitney, 1973). Les résultats obtenus dépendent

essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique

II.6.1.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé(HSDT)

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques épaisses ou poutres courtes, où la déformation transverse joue un rôle prédominant. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur (figure 22). Par conséquent on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (F.B.Hilderbrand, E, & G.G, 1949)et (T.Kan & K , 2002)

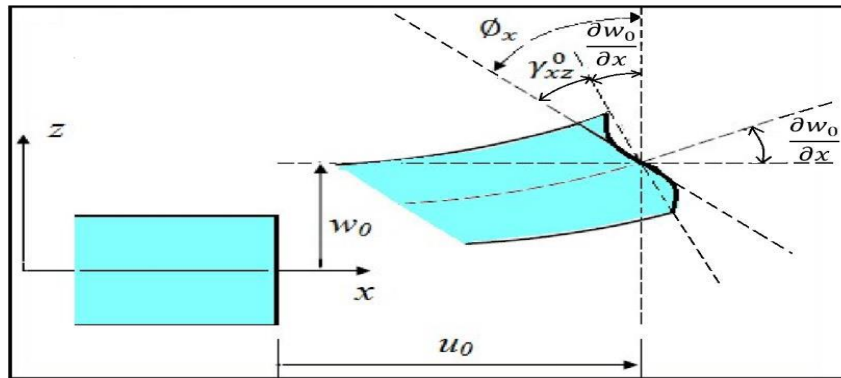


Figure 22: Cinématique de la théorie d'ordre élevé

➤ Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CLPT) sont obtenus en prenant,

$$f(z) = 0$$

Alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par :

$$f(z) = z$$

Cependant, plusieurs fonctions de cisaillement ont été utilisées dans les modèles d'ordre Supérieur sont :

- L'approche de (E.Reissner, 1945)est exprimée par :

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left\{ 1 - \frac{4z^2}{3h^3} \right\} \quad (\text{II.5})$$

- L'approche de (S.A.Ambartsumayan, 1969), peut être définie sous forme :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left[\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right] \quad (\text{II.6})$$

L'approche de [Reddy 1984], représente la fonction de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT) "Third-ordre shear déformation théorie" Dans ce modèle de , le champ de déplacement membranaire est cubique, ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle Duong , la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur, les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites donnée par la forme suivante :

$$f(z) = z \left[1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right] \quad (\text{II.7})$$

- L'approche de (M.V.V.Murthy, 1981) avec :

$$f(x) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{z}{h} \right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus", il utilisé une fonction trigonométrique Sinusoïdale pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(x) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{z}{h} \right) = \frac{z}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left(\frac{\pi z}{h} \right)^{2n+1} = z \left[1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right] \quad (\text{II.9})$$

- L'approche de (Analyse vibratoire de poutres laminées à plis croisés avec condition aux limites générales par la méthode de Ritz), avec :

$$f(z) = za^{\frac{-2(\frac{z}{h})^2}{\ln(a)}} \quad (\text{II.10})$$

- La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory (HSDPT)) développée par (Ait.Atmane, H, A, & Adda) est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cos(\pi/2)}{[\cos(\pi/2)-1]^z} - \frac{h/\pi \cos(\pi/2)}{[\cos(\pi/2)-1]} \quad (\text{II.11})$$

- L'approche de (Grover.N, Maiti, & Singh, 2013) avec :

$$f(z) = \left[1 + \frac{6}{h\sqrt{13}} \right] - \sin h^{-1} \left[\frac{3z}{h} \right] \quad (\text{II.12})$$

- L'approche de (Meksi.R & al, 2017) avec :

$$f(z) = \frac{h \sin h(10z/h)}{10 \cos h(5)} + \frac{h}{10} \quad (\text{II.13})$$

- L'approche de (.N, Tounsi, Ziane , & Mechab, 2011) avec :

$$f(z) = \frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi)}{\cos h(\pi/2-1)} + \frac{h}{10} \quad (\text{II.14})$$

- L'approche (Shimpi.R, 2002) avec :

$$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z^3}{h} \right) \right] \quad (\text{II.15})$$

II.6.1.4. La théorie de déformation des plaques quasi-3D

En divisant le déplacement transversal on plusieurs composantes dont la flexion, le cisaillement et en prenant en considération l'effet de d'étirement de l'épaisseur de la plaque, (Thai & Kim, 2013) ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D a cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT), contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé, (Tounsi, Houari, Benyoucef , & Adda, 2013), (Hamidi.A, Houari.M.S.A, Mahmoud.S.R, & Tounsi, 2015), (Thai.H.T & Nguyen.T.K, 2014), (Bessaim.A, Houari.M.S, Tounsi.A, & Mahmoud.S, 2013) et Bennoun (Bennoun.M, Houari, & Tounsi, 2014)Ont proposé à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D, En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables que Zenkour a proposer une nouvelle

théorie quasi-3D a quatre-variables pour les plaques FGM , les plaques sandwich (AM.n, 2013) et des plaques composites stratifiées (AM., 2017). (JL, Granados , Hinostrroza, & Guede , 2014) (JL & Soares, 2014) ont aussi proposé une théorie quasi-3D simples à quatre variables pour des plaques fonctionnellement gradués en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique. le champ de déplacement est exprimé sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = u_o(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_o(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y) \end{array} \right. \quad (\text{II.16})$$

Où (u_o, v_o) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque.

(w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, φ est un déplacement supplémentaire φ qui prend en considération l'effet de la Contrainte normale (l'effet d'étirement $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse Avec:

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{II.17})$$

II.6.2 Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés par Reddy (J.N.Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates , 1999), Nguyen (V.T, 2004), (Carrera.E, 2003), (Sciua.M, 1987) . Le multicouche est subdivisé en sous structures correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches on applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches (Bourada.Fouad, 2018).

Dans la modélisation des effets locaux, l'inclusion de la déformation normale transverse est importante pour deux raisons : premièrement, la contrainte normale transverse est une contrainte

généralement significative dans ces régions, si ce n'est pas la dominante. Deuxièmement, les modèles par-couche qui négligent la déformation normale transverse ne satisfont pas les conditions aux limites en traction concernant les contraintes du cisaillement transverse au niveau des bords libres du composite orthotropes. Un examen des conditions aux limites naturelles pour les équations différentielles de mouvement développées dans les références (pour le cas des théories par-couche qui négligent la déformation normale transverse) révèle que les contraintes en cisaillement transverse satisfont les conditions aux limites en traction au bord libre de la structure, dans le sens intégral uniquement et non pas dans le sens local (malgré le niveau de raffinement suivant l'épaisseur).

Les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- ✦ Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches
- ✦ Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces

II.6.2.1 Les modèles zig-zag

En 1987, (Sciuva.M, 1987) a proposé un modèle de théorie de zig-zag du premier ordre. Dans ce modèle, la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre (**FSDT**) et d'une fonction zig-zag, la fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue à travers l'épaisseur mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (**Figure 23**). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

La bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée est l'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité. Plusieurs chercheurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Carrera [37]) en se basant sur le concept de (Sciuva.M, 1987). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements.

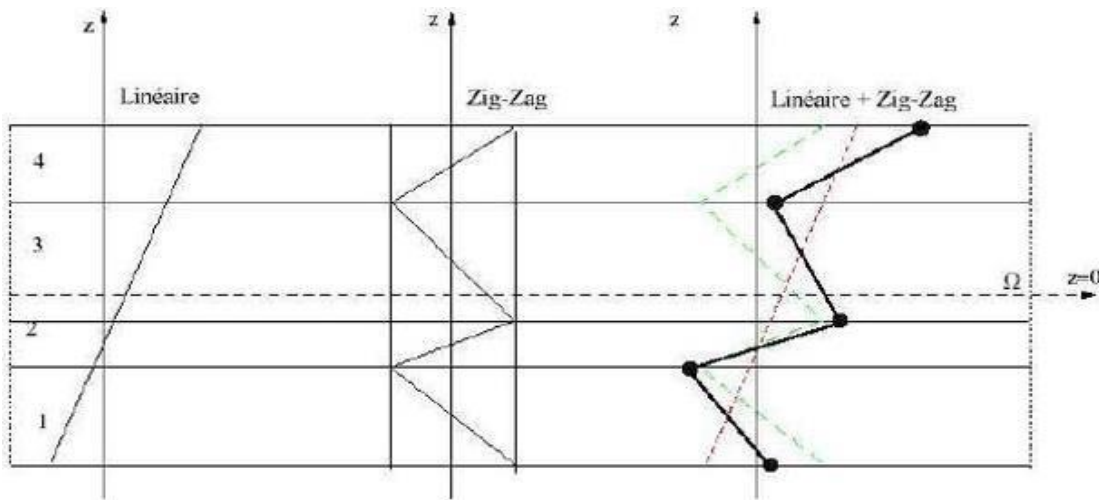


Figure 23: Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre (V.T, 2004).

On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (Figure 24). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres

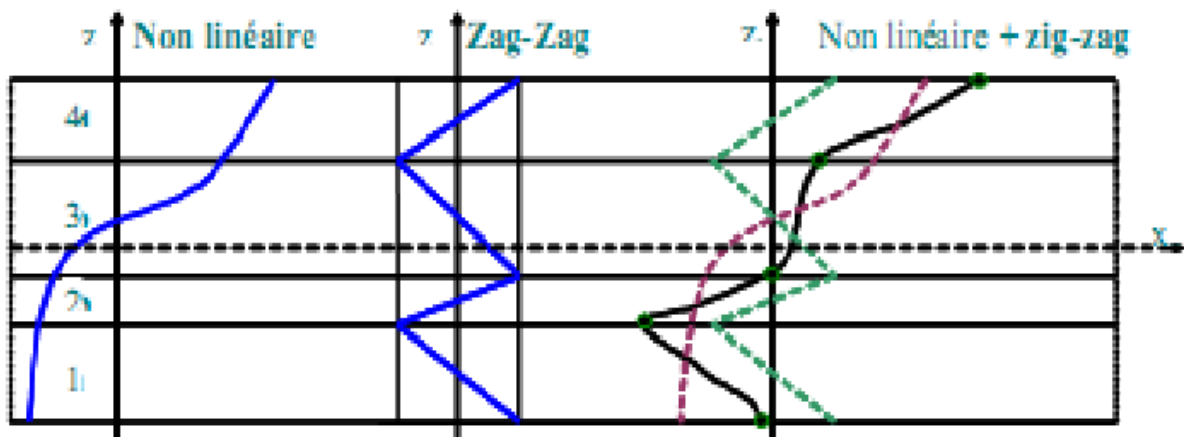


Figure 24: Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevé (Carrera.E, 2003).

II.6.2.2 Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale

En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets **2D**) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Pour les modèles couches discrètes particulières et les modèles multi particulières, le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans Pagano (Pagano.N.J, 1978). Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle de Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en (x, y) , n étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du deuxième ordre qui n'ont pas un sens physique très clair. Toutefois, la formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet (Cluster Méca).

II.6.3. Approche par développement asymptotiques

Le développement asymptotique intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité "les équations constitutives et de mouvements". L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique "très petite". Un deuxième type d'intégrales, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords est également construit (Fredeichs.K & Dressler.R.F, 1961), (Goldennveizer.A.L, 1961). Le travail le plus complet et intéressant semble celui de (Ladevese.P, 1988). Dans un premier temps, ils utilisent les résultats de la théorie **CPT**. Puis, au voisinage du bord, ils posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs "contraintes et déplacements" correcteurs. Ce problème est décomposé en problème bidimensionnels "couches limites perpendiculaires au bord". Ensuite, on fait une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par exemple, par des développements en séries de Fourier. L'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces sont pris en compte (Pagano.N.J, 1978).

II.7. La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi a pu développer en 2002 un modèle raffiné pour les plaques isotropes qu'on a nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory) (Shimpi.R.P, 2002). Cette méthode propose des caractéristiques très intéressantes tel que la non nécessité d'un coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. La fiabilité de cette méthode a été démontrée par (Kim.S.E, Tounsi.A, Mechab.I, & Adda, 2010) pour le cas de la flexion statique et pour le cas du

flambage d'une plaque composite. Récemment (Thai.H & Kim.S.E, 2011)et (Hadji, Atmane, Adda, & Tounsi, 2011) ont adapté la RPT avec succès au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration

Libre des plaques stratifiées et sandwiches respectivement. Cette théorie propose le champ de déplacement suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = u_o(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_o(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{array} \right. \quad (\text{II.18})$$

Où (u_o, v_o) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque.

(w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal et $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse.

II.8. Conclusion

Dans ce chapitre on a cité les différentes théories des plaques pour simplifier les problèmes rencontrés, une comparaison des théories classiques, du premier ordre et d'ordre élevé à été faite pour décrire la déformation de cisaillement des plaques.

En général, il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite anisotrope, isotrope, stratifié, sandwich ...) et aux différents phénomènes étudiés (statique, dynamique, flambement, flexion...), et qui serait en plus simple et facile et ne coûte pas trop en temps de calcul, car chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formulations qui diffèrent selon le domaine d'application.



Chapitre III

Analyse vibratoire des
plaques

III.1. Introduction

Le composite stratifié est un type particulier de matériaux composites structuraux qui se compose de deux matériaux ou plus, généralement il est défini par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié.

Les problèmes de vibrations des structures composites sont devenus l'une des préoccupations actuelles dans plusieurs domaines (aéronautique, construction navale, automobile et le génie civil). Vu l'augmentation de l'application du stratifié dans les structures d'ingénierie, une variété de théories des plaques stratifiées a été développée pour analyser leur comportement. Ces théories peuvent être classées comme des théories à approche monocouche équivalente « Equivalent Single Layer ESL » et peuvent être divisées en trois catégories principales, la théorie classique des plaques CPT, la théorie FSDT et les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT s).

Au cours des dernières années, une nouvelle classe de théories des plaques a été développée par des chercheurs dans lesquels le champ de déplacement implique seulement quatre inconnues sans inclure l'effet d'étirement de l'épaisseur et cinq inconnues dans lesquelles la déformation due au cisaillement et l'effet d'étirement de l'épaisseur sont inclus. Thai et al. (2010) ont mis au point une théorie des plaques raffinée à deux variables pour l'analyse libre des vibrations des stratifiés antisymétriques à plis croisés et équilibrés, afin d'étendre la théorie des plaques raffinée (RPT) développée par Kim et al. (2009) pour l'analyse statique en flexion et le flambement des plaques composites stratifiées.

Ainsi la vibration des plaques composites stratifiées utilisant la théorie raffinée (RPT) dont le champ de déplacement proposé est basé sur une nouvelle cinématique qui inclut des termes intégrales indéterminés et ne contient que quatre inconnues n'a pas été encore étudiée dans la littérature.

III.2. Contexte recherché

Dans ce présent travail, une simple théorie HSDT à quatre variables, récemment développée pour les plaques en matériaux à gradient de propriétés, est évaluée dans cette étude pour analyser le comportement dynamique des plaques composites stratifiées.

Cette théorie raffinée de déformation du cisaillement d'ordre élevé utilisant des termes intégral indéterminés dans le champ de déplacement est appliquée pour développer la solution analytique pour l'analyse de vibration libre des plaques composites stratifiées. La théorie actuelle n'a que quatre inconnues et quatre équations gouvernantes, satisfait la condition de nullité des contraintes de cisaillement à la surface supérieure et inférieure des plaques sans utiliser des

facteurs de correction de cisaillement. Les équations gouvernantes de mouvement sont dérivées du principe d'Hamilton. Une solution pour les plaques simplement appuyées est obtenue en utilisant une technique de série double trigonométrique développée par Navier. Les résultats numériques des fréquences naturelles de vibration obtenues en utilisant la théorie actuelle sont présentés et comparés à ceux de la théorie classique des plaques (CPT), de la théorie des plaques de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) et d'autres théories des plaques de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT s) disponibles dans la littérature pour confirmer la validité de la théorie.

III.3. Formulation Mathématique

Considérons une plaque composite stratifiée de longueur a , largeur b et une épaisseur constante h le long de la direction z comme indiqué dans la fig.1. Le système de coordonnées (x, y, z) choisi et les paramètres de coordination sont tels que $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h/2 \leq z \leq h/2$. La plaque est supposée être construite d'un nombre arbitraire, N , de couches orthotropiques élastiques linéaires.

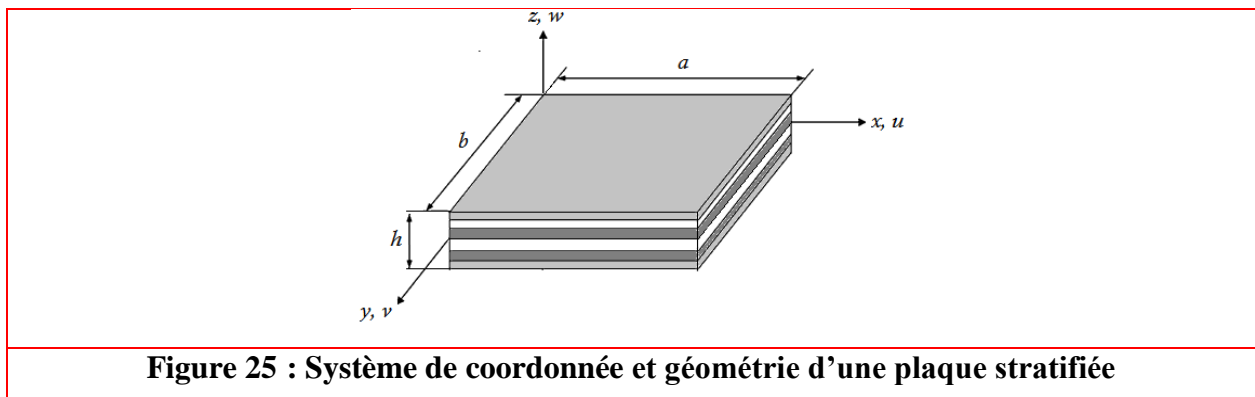


Figure 25 : Système de coordonnées et géométrie d'une plaque stratifiée

III.3.1. Le champ de déplacement

La théorie actuelle de déformation de cisaillement d'ordre supérieur a un nouveau champ de déplacement qui inclut des termes intégral indéterminés et contient seulement quatre inconnus, contre cinq dans le cas d'autres théories de déformation de cisaillement. Le champ de déplacement à un point situé à (x, y, z) dans la plaque peut être écrit sous une forme plus simple (Besseglier *et al.* 2017; El-Haina *et al.* 2017; Menasria *et al.* 2017; Zineet *et al.* 2018; Bouradaet *et al.* 2018)

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Où $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$ and $\theta(x, y)$ sont les quatre fonctions inconnues de la surface médiane de la plaque. Le champ de déplacement plan utilise la fonction polynomiale d'ordre n en termes de coordonnées d'épaisseur pour inclure l'effet de déformation du cisaillement transversal. Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. La fonction de forme $f(z)$ choisie pour satisfaire les conditions aux limites de nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque obtenue en mettant ($n=3,5,7,\dots$) et est donnée comme (Sayyad and Ghugal 2015; Xiang and Liu 2016; Becheriet al 2017)

$$f(z) = -\frac{1}{n} \left(\frac{z}{h} \right)^{n-1} z^n + z
 \tag{2}$$

Les déformations infinitésimales associées au champ de déplacement dans l'Eq. (1) sont obtenues en utilisant la relation déformation-déplacement à partir de la théorie linéaire de l'élasticité

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix},
 \tag{3a}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}
 \tag{3b}$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (4a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad (4b)$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (5)$$

Les intégrales utilisées dans les relations ci-dessus doivent être résolues par une solution Navier et peuvent être exprimées par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx &= A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \\ \int \theta dx &= A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \quad (6)$$

Où les paramètres A' et B' sont définis en fonction du type de solution utilisée, dans ce cas via Navier. Par conséquent, A' et B' sont exprimés par

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (7)$$

Où les paramètres α et β sont définis par

$$\alpha = r\pi/a, \quad \beta = s\pi/b \quad (8)$$

III.3.2 Relations constitutives

Les composites stratifiés sont généralement construits à partir de couches orthotropiques contenant des fibres unidirectionnelles incorporées dans un matériau matrice. Généralement, dans un sens macroscopique, le lamina est supposé se comporter comme un matériau orthotrope homogène. La relation constitutive d'une couche orthotrope élastique linéaire dans le système de coordonnées locales est dérivée de la loi de Hooke pour un état de contrainte plane par

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Dans lesquelles, $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}^{Tr}$ et $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^{Tr}$ sont les contraintes et les vecteurs de déformation par rapport au système de coordonnées de la plaque. Les constantes matérielles Q_{ij} sont définies en fonction des propriétés matérielles de la couche orthotrope comme

:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13} \end{aligned} \quad (10)$$

Le stratifié est généralement fait de plusieurs couches orthotropiques avec leurs axes matériels orientés arbitrairement en ce qui concerne les coordonnées stratifiées. Chaque couche doit être transformée en système de coordonnées stratifiées (x, y, z) . Les relations contraintes-déformations dans les coordonnées stratifiées d'une k_{th} couche sont

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (11)$$

Où \bar{Q}_{ij} sont les constantes matérielles transformées, exprimées comme

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11}^k &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k \\
&\quad + Q_{22} \sin^4 \theta_k \\
\bar{Q}_{12}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k \\
&\quad + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \\
\bar{Q}_{16}^k &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k \\
&\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k \\
\bar{Q}_{22}^k &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k \\
&\quad + Q_{22} \cos^4 \theta_k \\
\bar{Q}_{26}^k &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k \\
&\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos \theta_k + \sin^3 \theta_k \\
\bar{Q}_{66}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k \\
&\quad + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \\
\bar{Q}_{44}^k &= Q_{44} \cos^2 \theta_k + Q_{55} \sin^2 \theta_k \\
\bar{Q}_{45}^k &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta_k \sin \theta_k \\
\bar{Q}_{55}^k &= Q_{55} \cos^2 \theta_k + Q_{44} \sin^2 \theta_k
\end{aligned} \tag{12}$$

Où θ_k est l'angle des axes matériels avec les axes de coordonnées de référence de chaque couche et Q_{ij} sont les coefficients de rigidité contraintes planes -réduits définis dans l'Eq. (10).

III.3.3 Equations gouvernantes (Equations d'équilibre ou équations de mouvement)

Equations d'équilibre de la plaque composite en vibration libre

Le principe d'Hamilton est utilisé pour trouver l'ensemble compatible d'équations gouvernantes et de conditions aux limites pour les contraintes et les déformations données associées à la théorie actuelle. Le principe peut être énoncé sous une forme analytique comme (Zemriet *al.* 2015; Arani and Kolahchi 2016; Kolahchiet *al.* 2016ab; Bilouei *al.* 2016; Zamanian *al.* 2017; Zidi *et al.* 2017; Klouche *et al.* 2017; Amniehet *al.* 2018; Youcef *et al.* 2018; Adda Bedia *al.* 2019; Chaabane *et al.* 2019; Karamiet *al.* 2019c).

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \tag{13}$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δV est la variation du travail effectué par la charge externe appliquée à la plaque ; et δK est la variation de l'énergie cinétique. Elles peuvent être exprimées comme

$\delta U = \int_V \left\{ \begin{aligned} &\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \\ &+ \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \end{aligned} \right\} dV$	(14)
$\delta V = - \int_A q \delta w dA$	(15)
$\delta K = \int_V \rho(z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV$	(16)

Où A est la surface supérieure et q est la charge transversale répartie. Remplacer les Eqs. (1), (3) et (11) dans l'Eq. (13) et l'intégration à travers l'épaisseur de la plaque, l'Eq. (13) peut être réécrite comme

$\begin{aligned} &\int_A \left\{ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta \varepsilon_x^1 + M_y^b \delta \varepsilon_y^1 \right. \\ &+ M_{xy}^b \delta \gamma_{xy}^1 + M_x^s \delta \varepsilon_x^2 + M_y^s \delta \varepsilon_y^2 + M_{xy}^s \delta \gamma_{xy}^2 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 \\ &+ S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 - q \delta w_0 - I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) \\ &+ I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &- I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \\ &- I_3 \left[k_1 A' \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + k_2 B' \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right] \\ &+ I_4 k_1 A' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \\ &+ I_4 k_2 B' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \\ &\left. - I_5 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right\} dA = 0 \end{aligned}$	(17)
--	------

Où les contraintes résultant (N , M^b , M^s , S^s) et les constantes d'inertie I_i ($i=0,1,2,3,4,5$) sont définies par les équations suivantes

$$\begin{aligned}
 (N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz, \\
 (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz, \\
 (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f(z) dz, \\
 (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \\
 (I_0, I_1, I_2) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} (1, z, z^2) dz \\
 (I_3, I_4, I_5) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} (f(z), z f(z), [f(z)]^2) dz
 \end{aligned} \tag{18}$$

Substituer les expressions aux contraintes et aux déformations de la présente théorie dans le principe d'Hamilton et intégrer l'Eq. (17) par parties et la collecte des coefficients δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$, les équations différentielles gouvernantes en termes de contraintes résultant sont obtenues comme suit

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' I_3 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' I_3 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 & + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + q = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + k_1 A' I_4 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' I_4 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \\
 \delta \theta : \quad & k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} \\
 & - k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} - k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = -I_3 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & + I_4 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 & - I_5 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{19}$$

Remplacer les relations contraintes–déformations par l’Eq. (11) dans l’Eq. (18) et l’intégration à travers l’épaisseur, les équations suivantes sont obtenues

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & E_{21} & E_{22} & E_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & E_{61} & E_{62} & E_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & F_{21} & F_{22} & F_{26} \\ B_{61} & A_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & F_{61} & F_{62} & F_{66} \\ E_{11} & E_{12} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{26} & F_{21} & F_{22} & F_{26} & H_{21} & H_{22} & H_{26} \\ E_{61} & E_{62} & E_{66} & F_{61} & F_{62} & F_{66} & H_{61} & H_{62} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \\ \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Et

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Où $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ et A_{ij}^s sont la rigidité de la plaque définie par

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \\ (E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(f(z), z, f(z), [f(z)]^2) dz \end{aligned} \quad (22a)$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} [g(z)]^2 dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (22b)$$

III.4. Conditions aux limites et solution de Navier

La méthode Navier est applicable pour obtenir les solutions des équations différentielles partielles dans l’Eq. (19) pour plaques rectangulaires simplement appuyées.

Les conditions aux limites le long des bords pour les plaques peuvent être exprimées comme

at edges $(y=0, b): u_0 = w_0 = N_y = M_y^b = M_y^s = \theta = 0$	(23a)
---	-------

at edges $(x=0, a): v_0 = w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = \theta = 0$	(23b)
---	-------

Les conditions aux limites dans l'Eq. (23) sont satisfaites par les développements suivants

$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{rs} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{rs} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{rs} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \Phi_{rs} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix}$	(24)
---	------

Où α et β sont définis dans l'Eq. (8), U_{rs}, V_{rs}, W_{rs} et Φ_{rs} sont les coefficients inconnus des développements respectives de Fourier, et ω est la fréquence naturelle du système. Substituant cette forme de solution donnée par Eq. (24) et prendre la charge transversale q égale à zéro dans les équations différentielles gouvernantes Eq. (19) résultats dans un système des équations algébriques qui peuvent être écrits sous forme de matrice comme suit

$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\}$	(25)
---	------

Où $[K]$, $[M]$ et $\{\Delta\}$ sont respectivement la matrice de rigidité, la matrice de masse et le vecteur d'amplitude.

III.5. Conclusion

Ce chapitre nous permis à d'établir les formulations mathématiques de la présente théorie à trois variables. C'est une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de la vibration libre des plaques en matériaux composites La théorie proposée n'exige pas de facteur de correction de cisaillement. Le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

Ensuite, les solutions sont obtenues en utilisant la technique de Navier. Les résultats présentés dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les solutions analytiques des autres théories.



Chapitre IV

Exploitation des Résultats
numériques

IV.1. Discussions des résultats :

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés pour vérifier la validité et l'efficacité de la présente "nth-HSDT" en prédisant les réponses de vibration libre des plaques composites orthotropes simplement appuyées. Les résultats numériques obtenus pour les fréquences naturelles seront comparés et discutés avec ceux obtenus par la CPT, FSDT et HSDTs disponibles en littérature. Les propriétés matérielles suivantes sont prises en compte pour les différents exemples de la présente étude.

- Matériau : Plaque orthotrope ou orthotropique

$$E_1 = 20.83 \text{ Pa}, E_2 = 10.94 \text{ Pa}, E_3 = 10 \text{ Pa}, G_{12} = 6.10 \text{ Pa}, \\ G_{13} = 3.71 \text{ Pa}, G_{23} = 6.19 \text{ Pa}, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.44, \nu_{23} = 0.23$$

Les résultats numériques selon la présente étude sont présentés et discutés dans les tableaux 1 à 6 comme des termes adimensionnels des fréquences naturelles.

La première partie de l'analyse est consacrée à l'étude du comportement de vibration libre dans le cas de plaques composites stratifiées carrées à plusieurs couches simplement appuyées. La forme adimensionnelle utilisée lors de la présentation du résultat numérique des fréquences naturelles est $\bar{\omega} = (\omega a^2 / h) / \sqrt{\rho / E_2}$, où la constante est apparue ici peut être déterminée comme $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$.

Ces fréquences naturelles adimensionnelles de plusieurs plaques composites stratifiées à plis croisés et équilibrés simplement appuyées sont obtenues et comparées aux autres théories, compte tenu des effets du rapport d'épaisseur (a/h), l'angle d'orientation de fibre (θ) et le nombre de couches (N) avec la même épaisseur.

Les fréquences naturelles obtenues en utilisant la théorie actuelle des plaques carrées antisymétriques à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) sont indiquées dans le Tableau 1. Afin de vérifier avec un autre type de stratifiés, les fréquences naturelles adimensionnelles des plaques carrées croisées symétriques à quatre couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sont démontrées dans le Tableau 2. Ces 02 tableaux montrent les fréquences naturelles adimensionnelles des plaques carrées pour différentes valeurs de rapport d'épaisseur (a/h).

Tableau 1 : Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des stratifiés carrés antisymétriques à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) simplement appuyés.

a/h	CPT ^(b)	FSDT ^(a)	HSDT ^(a)	SHSDT ^(b)	Present			
					$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$
2	8.606	5.191	5.699	5.717	5.7170	5.4833	5.429	5.4182
4	10.424	7.975	8.294	8.354	8.3546	8.2247	8.2023	8.2037
5	10.720	8.757	9.010	9.087	9.0871	8.9872	8.9717	8.9744
10	11.153	10.355	10.449	10.567	10.5680	10.5329	10.5287	10.5309
12.5	11.208	10.622	10.686	10.813	10.8135	10.7900	10.7871	10.7887
20	11.269	10.941	10.968	11.105	11.1051	11.0953	11.0942	11.095
25	11.283	11.020	11.037	11.176	11.1768	11.1704	11.1697	11.1702
50	11.302	11.127	11.132	11.275	11.2751	11.2734	11.2733	11.2734
100	11.306	11.155	11.156	11.300	11.3001	11.3000	11.3000	11.3000

^(a) Taken from Reddy (1985)

^(b) Taken from Senthilnathan *et al.* (1988)

On peut voir que les valeurs de fréquence obtenues en utilisant la théorie actuelle sont en bon accord avec celles obtenues par d'autres théories disponibles dans la littérature.

Il convient de noter que les résultats actuels sont en excellent accord avec les solutions de la HSDT, en particulier lorsque le paramètre n th-order (n) de la fonction de forme de déformation transversale $f(z)$ proposée dans cette analyse est égale à 3.

Tous les résultats obtenus dans cette section sont comparés aux valeurs correspondantes de la théorie de déformation du cisaillement de premier ordre FSDT et la théorie de la déformation du cisaillement d'ordre supérieur HSDT qui sont inclus dans la référence de Reddy (1985), et les résultats numériques donnés par Senthilnathan *et al.* (1988) sur la base de la théorie simplifiée des plaques de déformation de cisaillement d'ordre supérieur SHSDT pour prédire les réponses de vibration des plaques composites stratifiées simplement appuyées et les résultats générés par la théorie classique des plaques CPT.

Il convient de noter que la " n th-HSDT" considérée comporte quatre variables indépendantes contre cinq dans le cas de la FSDT et HSDT, par conséquent, la théorie actuelle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement.

Tableau 2 : Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des stratifiés carrés croisés symétriques à quatre couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement appuyés.

a/h	CPT ^(b)	FSDT ^(a)	HSDT ^(a)	SHSDT ^(b)	Present			
					$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$
2	15.902	5.492	5.576	6.0017	6.0017	5.8765	5.8876	5.9180
4	17.989	9.369	9.497	10.230	10.2032	10.2119	10.2816	10.3440
5	18.298	10.820	10.989	11.770	11.7710	11.8020	11.8776	11.9418
10	18.737	15.083	15.270	15.940	15.9405	15.9792	16.0317	16.0733
12.5	18.792	16.120	16.276	16.828	16.8288	16.8598	16.8998	16.9313
20	18.852	17.583	17.668	17.993	17.9938	18.0096	18.0289	18.0440
25	18.866	17.991	18.050	18.301	18.3010	18.3118	18.3249	18.3350
50	18.885	18.590	18.606	18.738	18.7381	18.7410	18.7445	18.7473
100	18.889	18.751	18.755	18.852	18.8526	18.8534	18.8543	18.8550

^(a) Taken from Reddy (1985)^(b) Taken from Senthilnathan *et al.* (1988)

Ici, on peut clairement voir que tous les types de plaques stratifiées épaisses (a/h est pris de 2 à 5) ; la FSDT sous-estime les fréquences naturelles par rapport à la HSDT et SHSDT, mais peut généralement être considéré comme acceptable pour les plaques stratifiées modérément épaisses.

On observe également que le CPT surestime les fréquences naturelles des plaques stratifiées en raison de la négligence de l'effet de déformation de cisaillement transversal pour les plaques minces.

On peut remarquer aussi dans notre cas que l'augmentation du rapport d'épaisseur a un effet significatif sur le comportement de la vibration libre des plaques composites laminées carrées car il peut considérablement augmenter les fréquences naturelles adimensionnelles.

Tableau 3 : Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des stratifiés carrés antisymétriques à huit couches ($0^\circ/90^\circ$)₄ simplement appuyés.

a/h	CPT ^(b)	FSDT ^(a)	HSDT ^(a)	SHSDT ^(b)	Present			
					$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$
2	15.441	5.623	5.9263	5.9263	5.9263	5.8274	5.8519	5.8896
4	17.585	9.9843	10.080	10.080	10.0800	10.1091	10.1892	10.2576
5	17.903	11.565	11.618	11.618	11.6183	11.6668	11.7512	11.8204
10	18.351	15.681	15.673	15.673	15.6735	15.7203	15.7766	15.8201
12.5	18.407	16.541	16.530	16.530	16.5303	16.5670	16.6096	16.6423
20	18.469	17.657	17.649	17.649	17.6496	17.6679	17.6884	17.7039
25	18.483	17.949	17.944	17.944	17.9441	17.9565	17.9703	17.9807
50	18.502	18.363	18.362	18.361	18.3622	18.3656	18.3693	18.3721
100	18.507	18.472	18.471	18.470	18.4717	18.4725	18.4735	18.4742

^(a) Taken from Reddy (1985)^(b) Taken from Senthilnathan *et al.* (1988)

Toutefois, l'analyse des Tableaux 1, 2 & 3 révèle que les résultats obtenus en utilisant la théorie actuelle sont en excellent accord avec la SHSDT proposée par Senthilnathan *et al.* (1988) pour diverses valeurs de rapport d'épaisseur (a/h) lorsque le paramètre n th-order (n) de la fonction de forme $f(z)$ prend une valeur de 3.

Pour prouver la crédibilité et la précision de la théorie actuelle, un autre exemple est ajouté dans cette deuxième partie pour une gamme de plaques composites stratifiées équilibrées simplement appuyées pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur (a/h). Les résultats des fréquences naturelles adimensionnelles sont présentés dans les Tableaux 4 et 5 pour les deux stratifiés, à deux couches ($45^\circ/-45^\circ$) et à huit couches ($45^\circ/-45^\circ$)₄ antisymétriques carrés équilibrés, respectivement. Toutes les couches individuelles ont une épaisseur égale. Les résultats obtenus sont également comparés à ceux proposés par Senthilnathan *et al.* (1988) à l'aide des théories SHSDT et CPT et celles données par Reddy (1985) à l'aide des théories de la FSDT et de la HSDT.

Il est constaté que les résultats actuels sont en bon accord avec les résultats fournis par HSDT de Reddy et Senthilnathan *et al.* (1988) utilisant la SHSDT pour toutes les valeurs du rapport d'épaisseur.

Tableau 4 : Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des stratifiés carrés antisymétriques équilibrés à deux couches ($45^\circ/-45^\circ$) simplement appuyés.

a/h	CPT ^(b)	FSDT ^(a)	HSDT ^(a)	SHSDT ^(b)	Present			
					$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$
2	6.882	5.520	6.283	6.337	6.3368	5.9386	5.8326	5.8021
4	13.505	9.168	9.759	9.759	9.7593	9.5004	9.4444	9.4367
5	13.885	10.335	10.840	10.839	10.8398	10.6285	10.5855	10.5818
10	14.439	13.044	13.263	13.263	13.2631	13.1772	13.1621	13.1629
12.5	14.509	13.550	13.704	13.704	13.7040	13.6444	13.6342	13.6350
20	14.587	14.179	14.246	14.246	14.2463	14.2206	14.2164	14.2169
25	14.605	14.338	14.383	14.382	14.3828	14.3660	14.3632	14.3636
50	14.629	14.561	14.572	14.572	14.5723	14.5680	14.5673	14.5674
100	14.635	14.618	14.621	14.621	14.6212	14.6201	14.6200	14.6200

^(a) Taken from Reddy (1985)

^(b) Taken from Senthilnathan *et al.* (1988)

Tableau 5 : Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des stratifiés carrés antisymétriques équilibrés à huit couches $(45^\circ/-45^\circ)_4$ simplement appuyés.

a/h	CPT ^(b)	FSDT ^(a)	HSDT ^(a)	SHSDT ^(b)	Present			
					$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$
2	6.882	5.848	6.283	6.314	6.3140	6.0598	6.0417	6.0648
4	13.765	10.842	10.991	10.990	10.9905	10.9644	11.0486	11.1293
5	17.207	12.892	12.972	12.971	12.9720	12.9956	13.1007	13.1927
10	25.052	19.289	19.266	19.265	19.2660	19.3446	19.4480	19.5294
12.5	25.128	20.196	20.888	20.888	20.8885	20.9586	21.0443	21.1108
20	25.212	23.259	23.239	23.238	23.2388	23.2800	23.3269	23.3626
25	25.231	23.924	23.909	23.909	23.9091	23.9384	23.9711	23.9960
50	25.257	24.909	24.905	24.904	24.9046	24.9131	24.9224	24.9294
100	25.264	25.176	25.174	25.174	25.1745	25.1767	25.1791	25.1809

^(a) Taken from Reddy (1985)

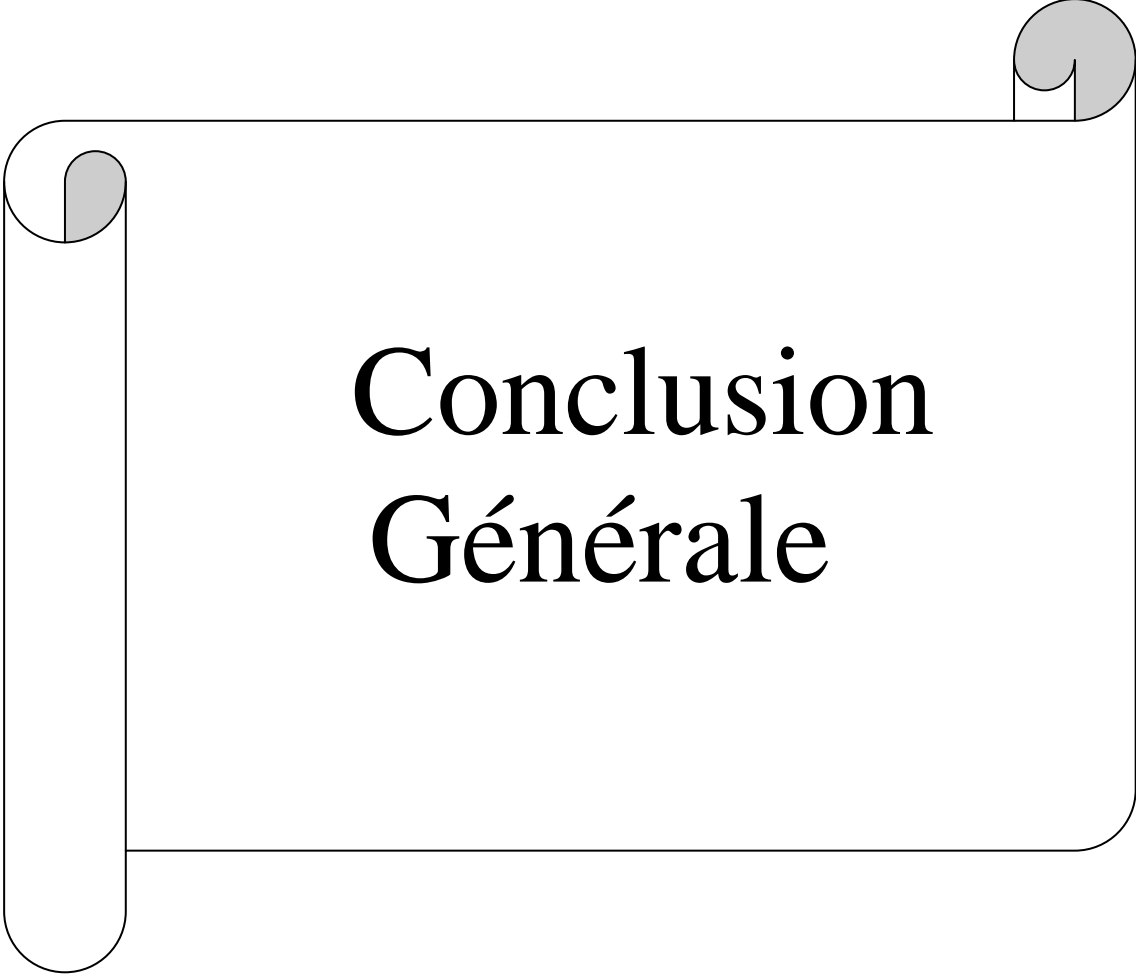
^(b) Taken from Senthilnathan *et al.* (1988)

Dans le dernier exemple, une comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles avec le rapport d'épaisseur $a/h=10$ est indiqué dans le tableau 6 pour une plaque composite stratifiée carrée simplement appuyée antisymétrique équilibrée pour un nombre différent de couches, avec le régime de lamination $(45^\circ/-45^\circ)$ & $(30^\circ/-30^\circ)$. Les résultats obtenus à partir de la méthode actuelle sont comparés aux autres théories d'ordre supérieur prédites par Reddy (1979), Bert et Chen (1978) et Maiti et Sinha (1996). Il est également souligné, d'après les résultats numériques présentés au Tableau 6, que la théorie actuelle n th-order dans le cas particulier où $(n = 3)$, prédit de bonnes valeurs de fréquences naturelles par rapport à celle obtenue par Bert et Chen (1978).

Tableau 6 : Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des stratifiés carrés antisymétriques équilibrés à plusieurs couches $(\theta^\circ/-\theta^\circ)_n$ simplement appuyés, $(a/h = 10)$.

Configuration	Theory	Number of layers		
		2	4	6
$(45^\circ/-45^\circ)_n$	Ref ^(a)	15.714	18.609	18.295
	Ref ^(b)	13.040	18.460	19.290
	Ref ^(c)	14.482	17.411	18.326
	Present $n = 3$	13.2631	18.3221	19.0248
	Present $n = 5$	13.1772	18.4757	19.1207
	Present $n = 7$	13.1621	18.5895	19.2314
	Present $n = 9$	13.1629	18.6681	19.3148
$(30^\circ/-30^\circ)_n$	Ref ^(a)	15.001	17.689	18.002
	Ref ^(b)	12.680	17.630	18.230
	Ref ^(c)	13.941	16.642	11.471
	Present $n = 3$	12.9283	17.6618	18.3353
	Present $n = 5$	12.8578	17.7972	18.4218
	Present $n = 7$	12.8476	17.8981	18.5205
	Present $n = 9$	12.8502	17.9679	18.5948

^(a) Taken from Reddy (1979), ^(b) Taken from Bert and Chen (1978), ^(c) Taken from Maiti and Sinha (1996)



Conclusion Générale

Conclusion Générale

Le développement théorique pour l'analyse des plaques constitue l'un des axes de recherches les plus importants de la modélisation des solides et structures. Avec le progrès rapide de l'utilisation des matériaux orthotropes comme un élément de résistance aux chocs et vibrations dans les domaines de l'industrie, il est nécessaire de mettre en évidence une théorie adéquate permettant d'analyser le comportement des plaques en matériaux orthotropes avec une haute précision sous les différentes configurations géométriques et matérielles et soumises aux différentes conditions de chargement (mécaniques, thermiques, hygrothermiques, ...etc.), ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie, tels que l'aéronautique, aérospatiale, mécanique, civil, navale, matériel de sport et militaire.

Nous avons, dans le cadre de ce travail, développé une simple théorie de déformation de cisaillement de cisaillement d'ordre supérieur raffinée qui implique les lois de comportement de la théorie de l'élasticité linéaire déformations-déplacements et contraintes-déformations pour analyser la vibration libre des plaques en matériaux composites, simplement appuyées. Elles sont pour la plupart basées sur des théories d'ordre élevés (HSDTs) qui permettent en effet de modéliser des structures en matériaux composites sans recourir aux facteurs de correction de cisaillement.

L'approche utilisée dans ce travail implique quatre inconnues, mais tient en considération l'effet de la déformation de cisaillement à travers l'épaisseur, tout en respectant les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les équations de mouvement sont dérivées du principe des travaux virtuels et résolues analytiquement en utilisant la technique de Navier pour traiter les problèmes de vibration libre des plaques composites simplement appuyées. Les résultats numériques des fréquences naturelles de vibration obtenus par la présente théorie sont comparés avec les différentes théories connues dans la littérature scientifique.

Les résultats des fréquences naturelles obtenues par la théorie actuelle sont comparés à ceux obtenus par d'autres théories disponibles dans la littérature. À travers tous les problèmes étudiés, Il est clair que le modèle proposé est non seulement précis, mais fournit également une approche élégante et efficace pour le comportement vibratoire des plaques composites stratifiées. On peut conclure que la présente "*n*th-HSDT" théorie donne les mêmes résultats numériques des fréquences naturelles par rapport à HSDT, SHSDT théories et même avec les résultats étudiés par Bert and Chen (1978).

L'utilisation des hypothèses simplifiées dans la théorie proposée a un impact minimal sur la précision des résultats pour le problème considéré, mais elle peut améliorer un paramètre très important, c'est le temps de calcul en raison de la réduction du nombre d'inconnus et les équations différentielles d'équilibre. Toutefois les principaux points suivants peuvent être tirés de la présente étude :

1. Les résultats obtenus par la présente théorie sont en excellent accord avec la théorie HSDT présentée par Reddy (1984) et la théorie SHSDT proposée par Senthilnathan *et al.* (1988) pour le cas des plaques composites épaisses avec ($a/h = 5$) ;

2. La théorie proposée comporte quatre inconnues, mais donne des résultats comparables à ceux prévus par les autres théories existantes dans la littérature ayant un plus grand nombre d'inconnues cinq ou six.

3. La théorie proposée converge précisément par rapport aux autres théories de déformation de cisaillement (HSDT) surtout lorsque le paramètre de la fonction de gauchissement $n=3$;

5. L'effet déformation de cisaillement à travers l'épaisseur est plus prononcé pour les plaques épaisses et doit être pris en compte dans la modélisation des structures.

En perspectives à ce travail, nous envisagerons d'utiliser cette théorie pour les cas suivants :

→ Analyse du comportement vibratoire et la stabilité des plaques orthotropes par la présente théorie pour les différentes conditions d'appuis,

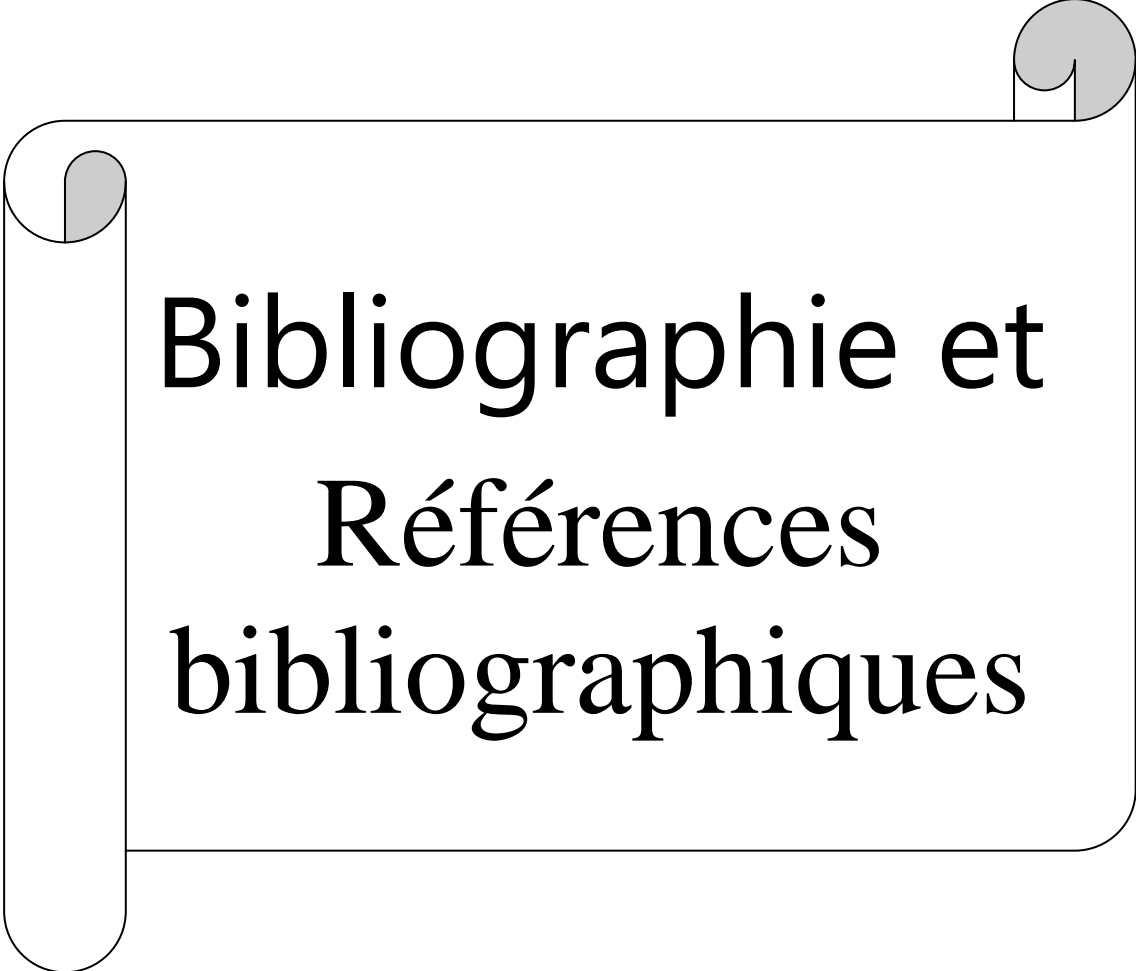
→ Application la présente théorie pour d'autres types de matériaux et/ou structures comme par exemple les plaques, poutres et coques en composites stratifiés, en matériaux sandwichs et en matériaux composites avancés (FGM),

→ Application la présente théorie pour d'autres conditions de chargement, thermiques, thermomécaniques ou hygrothermiques,

→ Valider le présent modèle analytique avec d'autre solution numérique en utilisant un autre moyen de calcul, telle que la méthode des éléments finis, car cette dernière permettra de traiter des problèmes plus complexes comparativement à la méthode analytique.

Finalement, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre université Ibn Khaldoun de Tiaret dans le domaine de la science des matériaux composites et

précisément leur comportement dynamique de stabilité en tenant compte des propriétés matérielles des matériaux.



**Bibliographie et
Références
bibliographiques**

Références bibliographiques

- Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2018), "A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates", *Compos. Struct.*, **184**, 688–697.
- Ait.Atmane, H, T., A, M., & Adda, B. (s.d.). Analyse vibratoire libre des plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondation élastiques à l'aide d'une nouvelle théorie de déformamtion par cisaillements . *Int J Mech Mater Des* , 113-121.
- AM., Z. (2017). Thermal bending of layered composite plates resting on elastic fondations using fourunknown shear and normal deformation theory. 122-260-70.
- AM.n, Z. (2013). Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformation theory. *J.Sandwich Struct Mater*, *15*(6), 629-56.
- Analyse vibratoire de poutres laminées à plis croisés avec condition aux limites générales par la méthode de Ritz . (s.d.). *International Journal of Mechanical sciences* , 1740-1755.
-
- Bennoun.M, Houari, M., & Tounsi, A. (2014). A nouvel five variable refined plate theory for vibration analysis offunctionally graded sandwich plates.
- Bessaim.A, Houari.M.S, Tounsi.A, & Mahmoud.S. (2013). A new higer ordre shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets . *J, Sandwich, strict Mater*, 671-703.
- Bourada.Fouad. (2018). Etude de la stabilité des plaques coposites épaissies en utilisant des théories des déformamtion d'ordre élèves. Ain Témouchent.
-
- Carrera.E. (2003). Théories and finite éléments for multilayered plates and Shells : a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *10*.
Cluster Méca. (s.d.). Consulté le 02 21, 2022, sur <https://cluster-meca.fr/qu.est.ce.qu.un.materiau.composite-364500-5-41-45.php>
-
- E.Reissner. (1945). The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates. *J.Appel.Mech*, *12*, 69-77.
- F.B.Hilderbrand, E, R., & G.G, T. (1949). Notes on the foundation of Theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA Technical*.
- Fredeichs.K, & Dressler.R.F. (1961). A boundary layer theory for elastic plates . *Comm on pure Applied Mathematics*, 1-33.
- futur science.* (s.d.). Consulté le 02 28, 2022, sur <https://www.futura-sciences.com/sciences/definitions/physique-composite-matrice-organique-15246/>
-
- G.Kirchhoff. (1950). Sur l'équilibre et le mouvement d'un anneau élastique. *journal mathématiques pures et appliquées*, *40*, 51-88.
- GENDRE, L. (s.d.). Matériaux composites et structure composites. 6-9. 05.
- Goldennveizer.A.L. (1961). Dérivation of an approximate theory of bending of plate by the method of asymotic intégration of the equation of the theory of elasticity . *Prik Mat Mech* , 668-686.
- Grover.N, Maiti, D., & Singh, B. (2013). Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique inverse pour la statique et le flambement ,analyse des plaques composites et sandwich stratifiées. *95*, 667-675.
-

Références bibliographiques

Hadji, L., Atmane, H., Adda, B., & Tounsi, A. (2011). Free vibration of functionally graded sandwich plates using four variable refined plate theory . *J Applied Mathematics and Méchanics* , 925-94.

Hamidi.A, Houari.M.S.A, Mahmoud.S.R, & Tounsi. (2015). A sinusoidal plate theory with 5 unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Steel Comps, strict, Int, J, 18(1)*, 235-253.

isomatex.com . (s.d.). Consulté le 02 23, 2022, sur <https://www.isomatex.com/fr/categorie/domaines-d-application.html>

J.M.Whitney. (1973). Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads. *J.Applied Mechanics*, 40, 302-304.

J.N.Reddy. (1999). Theory and Analysis of Elastic plates .

J.N.Reddy, wang , C., & Lee, K. (1997). Relation ships between bending solution of classical and shear deformation beam theories. *International Journal of Solide Structures*, 34(26), 3373-3384.

JL, M., & Soares, G. (2014). A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates .

JL, M., Granados , E., Hinostrroza, M., & Guede , S. (2014). Modelling avanced composite plates resting on elastic foundation using a quasi-3D hybrid type HSDT. 188-455-71.

Kim.S.E, Tounsi.A, Mechab.I, & Adda, B. (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on winkler Pasternak elastic foundation using a new shear deformation theory . *Int J Mech Mater Design* , 113-121.

Ladevèse.P. (1988). Les modèles classiques et leurs extentions pour le calcul des plaques .

Lauret, G. (2008). Généralités sur les matériaux composites. 43, p. 1. Récupéré sur <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00470296v1>.

M.V.V.Murthy. (1981). *An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate* . Rapport technique ,NASA.

Maxicours. (s.d.). Consulté le 02 23, 2022, sur <https://www.maxicours.com/se/cours/les-materiaux-composites/>

Meksi.R, & al. (2017). Une solution analytique pour les réponse de flexion , de flambement et de vibration des plaques sandwich FGM. *Journal of Sandwich Structures and materials*, 1-31.

Pagano.N.J. (1978). Stress feilds in composite laminates. *International Journal of solide and structures*, 14, 385.

R.D.Mindlin. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18, 31-38.

Reissner, E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates". *J Appl Mech, Trans ASME*, 12(2), 69–77.

S.A.Ambartsumayan. (1969). Theory of anistropic plate.

Sciuva.M, D. (1987). An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, 54, 589-596.

Shimpi.R. (2002). Théorie des plaques raffinée et ses variantes. *AIAA Journal*, 137-146.

Shimpi.R.P. (2002). Refined plate theory and its variants . *AIAA journal* , 137-146.

- Solutions composites*. (s.d.). Consulté le 02 24, 2022, sur <https://solutionscomposites.fr/les-composites/avantages-des-composites/>
- Sayyad, A.S., Shinde, B. M. and Ghugal, Y.M., (2016), "Bending, Vibration and Buckling of Laminated Composite Plates Using a Simple Four Variable Plate Theory". *Latin American Journal of Solids and Structures*, **13**, 516–535.
- Senthilnathan, NR, Lim SP., Lee KH, Chow ST. (1988), "Vibration of orthotropic laminated plates using a simplified higher-order deformation theory". *Compos Struct*, **10**, 211–229.
- Sahoo, S.S., Panda, S.K., Mahapatra, T.R. (2016), "Static, free vibration and transient response of laminated composite curved shallow panel – An experimental approach", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **59**, 95-113.
- Sahoo, S.S., Panda, S.K., Singh, V.K. (2017), "Experimental and numerical investigation of static and free vibration responses of woven glass/epoxy laminated composite plate", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: *Journal of Material and Design*, **231**(5), 463-478.
- Sahoo, S.S., Hirwani, C.K., Panda, S.K., Sen, D. (2018), "Numerical analysis of vibration and transient behaviour of laminated composite curved shallow shell structure: An experimental validation", *Scientia Iranica*, **25**(4), 2218-2232.
- Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M., (2015), "A nth-order shear deformation theory for composite laminates in cylindrical bending", *Curved and Layer. Struct.*, **2**, 290–300.
- Sayyad, A.S., Shinde, B. M. and Ghugal, Y.M., (2016), "Bending, Vibration and Buckling of Laminated Composite Plates Using a Simple Four Variable Plate Theory". *Latin American Journal of Solids and Structures*, **13**, 516–535.
- Shimpi, R.P. and Ghugal Y.M. (2000), "A layerwise shear deformation theory for two-layered cross-ply laminated plates", *Mech. Adv. Mater.Struct.*, **7**, 331–353.
- Shinde, B. M., Sayyad, A.S. and Ghumare, S. M. (2015), "A refined shear deformation theory for bending analysis of isotropic and orthotropic plates under various loading conditions". *Journal of Materials and Engineering Structures*, **2**, 3–15.
- Soldatos, K.P. (1992), "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates", *Acta Mech.*, **94**, 195–220.
- Srinivas, S., Rao, AK. (1970), "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates", *Int J Solids Struct*, **6**, 1464–1481.
- Thai, HT., Kim, SE. (2010), "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory" *International Journal of Mechanical Sciences*, **52**, 626–633.
- Touratier, M. (1991), "An efficient standard plate theory". *Int. J. Eng. Sci.* **29**(8), 901–916.
-
- Zenkour, A.M. (2001), "Buckling and free vibration of elastic plates using simple and mixed shear deformation theories", *Acta Mech*, **146**, 183–197.
- Zenkour, A. M. (2004), "Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermo-mechanical loading", *Composite Structures*, **65**, 367–379.
- Zine, A., Tounsi, A., Draiche, K., Sekkal, M., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells", *Steel and Composite Structures*, **26**(2), 125-137.
- Zine, A., Tounsi, A., Draiche, K., Sekkal, M., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells", *Steel and Composite Structures*, **26**(2), 125-137.