



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de
Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

OUAKEL Nadia

MAZOUZI Fatma Rola

Sujet du mémoire

**Etude du comportement des poutres E-FGM
sous des charges paraboliques par la théorie
de l'élasticité**

Soutenu publiquement, 25/06/2023, devant le jury composé de :

M .R.BENFERHAT

Président

M. A.HADJ HENNI

Rapporteur

M. L. HADJI

Examineur

PROMOTION : **2022/2023**

REMERCIEMENTS

*Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant de m'avoir donné la force la patience et le courage nécessaire pour mener à bien ce travail.*

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements :

*A mon promoteur Monsieur **A.HADJ HENNI** de m'avoir encadré, mais aussi pour ses conseils et sa patience, aux cours des séances, qu'il trouve ici l'expression de ma sincère gratitude.*

*Mes vifs sincères remerciements à Monsieur **M.AIT AMEUR MEZIANE**, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury. Mes vifs remerciements à Monsieur **R.BENFERHAT** et Monsieur **L.HADJI**, d'avoir accepté d'examiner et juger ce travail.*

Mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à mener à bien ce travail.

Mes remerciements à toute la promotion Génie Civil.

Dédicace

Tout d'abord,

De m'avoir donné la force et le courage de mener

à bien ce modeste travail.

Je tiens à dédier cet humble travail à :

A mon mon cher papa et à ma reine, ma joie ma maman

A mes précieuses sœurs, Ilham, Amel, Ikram

A mes chers frères AEK, Ahmed Amine

A Adam le fils de ma sœur

A ma meilleure amie mon binôme : Roula

**A tous ceux qui nous
aidé à mener à bien le travail**

Nadia

Dédicace

Tout d'abord,

De m'avoir donné la force et le courage de mener

à bien ce modeste travail.

Je tiens à dédier cet humble travail à :

**A mon roi ma raison de vivre mon cher papa et à ma reine, ma
joie ma maman**

A ma précieuse sœur, ma vie :Racha

A mon âme sœur,mon cher mari :Massali

A ma fille ma petite princesse :Racha

**A l'âme de mon grand-père (hadj Abed) et a l'âme de mon oncle
(Hakim)**

A ma meilleure amie mon binôme : Nadia

Tous ceux qui m'aiment et que j'aime

Roula

Résumé

L'objectif de ce travail consiste à trouver une solution analytique celle d'élasticité basée sur une modélisation mathématique plus avancée à l'étude du comportement des poutres simplement appuyées caractérisées par des rapports de module de l'élasticité fonctionnellement gradués (E-FGM) à travers d'épaisseur de poutre. Dans ce cadre, nous utilisons les d'équations de compatibilité relatives aux problèmes des poutres en flexion soumis à des charges du deuxième degré (parabole) et en même temps sont satisfaisantes aux conditions de chargement sur les faces supérieur et inférieur i de la poutre. Dans notre formulation on s'est basé sur la proposition de la fonction de contrainte verticale correspondante au chargement et les autres composantes sont déterminées en vérifiant les équations d'équilibre.

Une partie du calcul numérique est consacrée à prédire et d'analyser la distribution des contraintes à travers l'épaisseur de la poutre sous une charge paraboliquement répartie comme mentionné précédemment.

Mots clés : Matériau fonctionnellement Gradués (E-FGM), contrainte, , charge parabolique , poutre simplement appuyée , compatibilité, équilibre .

Abstract

The objective of this work is to find an analytical solution that of elasticity based on a more advanced mathematical modeling to the study of the behavior of simply supported beams characterized by functionally graded modulus of elasticity ratios (E-FGM) through beam thickness. In this framework, we use the compatibility equations relating to the problems of beams in bending subjected to loads of the second degree (parabola) and at the same time satisfy the loading conditions on the faces of the beam. In our formulation, we based ourselves on the proposal of the vertical stress function corresponding to the loading and the other components are determined by checking the equilibrium equations.

Part of the numerical calculation is devoted to predicting and analyzing the stress distribution through the thickness of the beam under a parabolically distributed load as mentioned before.

Keywords: Functionally Graded Material (E-FGM), stress, parabolic load, simply supported beam, compatibility, equilibrium

ملخص

الهدف من هذا العمل هو إيجاد حل نظرية للمرونة يعتمد على نمذجة رياضية أكثر تقدمًا لدراسة سلوك الحزم المدعومة ببساطة والتي تتميز بمعامل متدرج وظيفيًا لنسب المرونة (E-FGM) من خلال سماكة الحزمة. في هذا الإطار ، نستخدم معادلات التوافق المتعلقة بمشاكل الحزم في الانحناء المعرضة لأحمال من الدرجة الثانية (القطع المكافئ) وفي نفس الوقت نلبي شروط التحميل على أوجه الحزمة. في صيغتنا ، اعتمدنا على اقتراح دالة الإجهاد الرأسي المقابلة للتحميل ويتم تحديد المكونات الأخرى عن طريق التحقق من معادلات التوازن.

جزء من الحساب العددي مكرس للتنبؤ وتحليل توزيع الضغط من خلال سماكة الحزمة تحت الحمل الموزع

مكافئًا كما ذكرنا سابقًا.

الكلمات الرئيسية: المواد المصنفة وظيفيًا (E-FGM) ، الإجهاد ، الحمل المكافئ ، الحزمة المدعومة ببساطة ، التوافق ، التوازن.

Table des matières

Remerciements	I
Dédicaces	II
Résumé.....	IV
Table des matières.....	VII
Liste des figures	X
Liste des tableaux	XII
Notations	XII
Introduction Générale	1

Chapitre I

Généralité sur les matériaux à gradients de propriété

I.1. Introduction.....	4
I.2. Définition.....	5
.3. Histoire de la gradation fonctionnelle des matériaux	5
I.4.Méthodes d'élaboration des FGM	6
I.4.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	7
I.4.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting).....	8
I.4.3. Compaction Sèche des Poudres.....	9
I.4.4. Dépôt par Electrophorèse	9
I.4.5. Projection Plasma.....	9
I.4.7. Frittage et Infiltration.....	10
I.4.8. Frittage Laser Différentiel.....	10
I.4.9. Implantation Ionique (Sputtering).....	11
I.4.10. Dépôt par Centrifugation	
11I.5.Domains d'application des matériaux à gradients évalués FGM.....	11
I.6. Concept des matériaux FGM	12
I.7. Propriétés effectives des matériaux fonctionnellement gradués.....	14
I.8. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM.....	16

I.8.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM	17
I.8.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	17
I.8.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM	17
I.9.Conclusion	18

Chapitre II

Rappel sur la théorie de l'élasticité

II. Rappel d'élasticité	20
II .1. Introduction	21
II.2. Contraintes.....	22
II.2.1 Etat des contraintes en un point	22
II.2.2 Vecteur contrainte en un point pour une direction n^{\rightarrow} :	22
II.2.3 Contrainte normale et tangentielle	22
II.2.4 Contraintes principales et directions principales.....	23
II.2.5 Etats de contraintes particulières :	25
a) Etat de contrainte uni axiale :	25
b) Etat de cisaillement simple.....	25
c) Etat de contrainte dans une section droite de poutre	26
II.2.6 Cercles de Mohr :	27
II.2.6.1 Cercles de Mohr des contraintes :	27
II.2.6.2 Cercles de Mohr en contraintes planes :	27
II.1.6.3 Construction de Mohr :	29
II.2.7 Etat des contraintes autour d'un point sur la surface d'un Solide :	29
II.3 Déplacements – Déformations.....	31
II.3.1 Champ des déplacements q^{\rightarrow} :	31
II.3.2 Etat des déformations au voisinage d'un point :	31
II.3.3 Glissement. Distorsion :	32
II.3.2 Etat des déformations au voisinage d'un point :	32

II.3.4 Déformations principales et directions principales :	32
II.3.5 Etat de déformations planes :.....	32
II.3.6 Loi de comportement :.....	33
II.4 Critères de limite élastique :.....	34
II.4.1 Critère de Tresca ou du cisaillement maximal :.....	34
Conclusion :	37
II.4.2 Critère du plus grand travail de distorsion.	38
Critère de Von Mises :	38
II.4.3 Critères exprimés dans le cas de contraintes planes :.....	38
II.4.3.1 Critère de Tresca.....	39
II.4.3.2 Critère de Von Mises	39
II.5 Types particuliers de problème d'élasticité :.....	40
II.5.1 Contraintes planes du plan (x1, x2) :.....	40
II.5.2 Déformations planes :	40
II.5.3 Problèmes axisymétriques méridiens :.....	41

Chapitre III

La modélisation mathématique et résultat numérique de la poutre en E- FGM

III.1 Introduction :	43
III.2. Equations de base et conditions aux limites :.....	43
III.2 Position du problème :	43
III.3 Formulation analytique :	44
CONCLUSION GENERALE	52
Références bibliographiques	53

Liste des figures

Chapitre I

Généralité sur les matériaux à gradients de propriété

Figure. I.1 : Principe de la méthode coulage en bande.	8
Figure.I.2 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.	11
Figure I.3 : Géométrie d'une poutre FGM.	13
Figure I.4 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient de propriétés.	15
Figure I.5 : La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.	16
Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM.	17
Figure I.7 : Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.	18

Chapitre II

Rappel sur la théorie de l'élasticité

Figure II. 1 : contrainte autour du point A	22
Figure II.2 : contrainte normale σ et tangentielle τ en un point A.....	23
Figure II.3 : Faces et contraintes principales en M.....	24
Figure II. 4 a : Tricercle de Mohr	27
Figure II. 4b : Tricercle de Mohr en contraintes planes.....	28
Figure II. 5 : Construction de Mohr	28
Figure II. 6 : Point A sur la surface d'un solide.	30
Figure II. 7 : Déformation au voisinage d'un point A	32
Figure II. 8 : Tricercle de Mohr et contrainte tangentielle maximale.....	35.
Figure II. 9 : Traction uniaxiale	35
Figure II. 10 : Etat de contraintes planes	36
Figure II. 11 : σ_1 et σ_2 de même signe	37
Figure II. 12 : σ_1 et σ_2 de signes différents	
Figure II. 13 : Polygone de Tresca.....	38
Figure II. 14 : Représentation graphique des critères de limite élastique	39

Chapitre III
La modélisation mathématique et résultat numérique
de la poutre en E- FGM

Figure III.1 : Poutre sous charge parabolique.....44

Figure III.2. Distribution du module de Young a travers l'épaisseur de la poutre E-FGM pour différentes valeurs de l'indice k.49

Figure III.3. Contrainte normale (σ_x/q) adimensionnelle pour différents rapport de la poutre E-FGM simplement appuyée à $x= L/2$50

Figure III. 4 Contrainte tangentielle (τ_{xy}/q) adimensionnelle par différents rapports de la poutre en simplement appuyée E-FGM à $x= L/2$50

Liste des tableaux
Généralité sur les matériaux à
gradients de propriété

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal. 14

Liste des notations

FGM : Functionally graded material (matériau fonctionnellement gradué)

E-FGM FGM : avec fonction exponentielle

P-FGM FGM : avec fonction polynomiale

S-FGM FGM : avec fonction sigmoïde

$E(z)$: module de Young effective

h : hauteur de la poutre

$V(z)$: fraction volumique de la matière constituant

K : paramètre matériel

E_1 : module de Young du 1er matériau (fibre inférieur)

E_2 : module de Young du 2eme matériau (la fibre supérieur)

V_1 : fraction volumique du 1er matériau

V_2 : fraction volumique du 2eme matériau

d : diamètre du nanotube

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Contraintes normales

τ_{xy}, τ_{yy} : Contraintes de cisaillement

S : surface plane de la poutre

G : centre de gravité de la poutre

M : moment de flexion

ν : Coefficient de poisson

Introduction Générale

Le monde industriel est en perpétuelle évolution et en quête obsessionnelle de la perfection. Cette évolution et cette perfection ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs de développements industriels.

Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base un matériau, et innover dans cette discipline c'est révolutionner le monde de l'industrie. Depuis la nuit des temps, le moteur de la découverte de nouveaux matériaux a plus ou moins obéi à une double démarche. Cette double démarche est associée aux problèmes que l'homme doit résoudre pour sa vie matérielle d'une part et à son besoin intellectuel de connaître et de comprendre le monde qui l'entoure d'autre part. Il y a donc des matériaux qui ont été conçus pour répondre à un besoin technologique spécifique. Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquées et soumises à des contraintes de plus en plus complexes, les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites. Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément.

Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très important. Depuis la nuit des temps, le moteur de la découverte de nouveaux matériaux a plus ou moins obéi à une double démarche. Cette dernière est associée aux problèmes que l'homme doit résoudre pour la vie matérielle d'une part et à son besoin intellectuel de connaître et de comprendre le monde qui l'entoure d'autre part. Il y a donc des matériaux qui ont été conçus pour répondre à un besoin technologique spécifique [A.MAHI,2012].

Un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans une ou plusieurs directions pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes, leur utilisation et leur progression croissante dans les domaines de l'aéronautique de l'aérospatial où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, de l'électricité, du nucléaire, etc. L'analyse des structures en FGM a connu un essor en utilisant des méthodes numériques notamment la méthode des éléments finis.

Les poutres et les coques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier est porté, pour bien comprendre leur comportement sous diverse sollicitations est une étape cruciale dans l'analyse structurale.

Dans ce travail de recherche une solution analytique a été effectuée par proposition d'une fonction inconnue de contrainte correspondante au chargement dans l'analyse statique des poutres en FGM.

Ce travail est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre un aperçu détaillé sur les matériaux fonctionnellement gradués est exposé .

Le second chapitre décrit la théorie de l'élasticité et leurs équations de base

Le troisième chapitre on représente la modélisation mathématique et résultat numérique de la poutre en E- FGM basée sur la théorie de l'élasticité

En fin ce travail se termine par une conclusion générale .

CHAPITRE I

Généralités sur les matériaux à gradients de propriétés

I.1. Introduction

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort. Les propriétés physiques d'un matériau composite sont complètement différentes de celles de leurs composantes.

La matrice a Généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort, elle joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Mais l'optimisation locale des propriétés de ce mélange, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface.

Depuis le début du vingtième siècle, l'usage des matériaux composites sous la forme de plaques et de poutres s'est considérablement développé. Que ce soit dans l'industrie automobile, la construction, et plus récemment en aéronautique. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme et durée de vie prolongée [Bessaim.2013].

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace pose le problème de l'interface, par exemple une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température. La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration. Une technique pour surmonter ces effets nuisibles et d'utiliser un matériau à gradient évalué (de l'anglicisme FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (FGM)).

Ces dernières années, les matériaux à gradient évalués ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et sont capables de résister aux températures les plus chaudes.

Au début les FGM ont été conçus en tant que matériaux de barrière dans les applications et les réacteurs, c'est par suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, automobile, biomédicale l'industrie des semi-conducteurs et toutes utilisations dans un environnement à haute température.

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériau fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière.

I.2. Définition

Les matériaux FGM sont des matériaux fonctionnellement gradué, microscopiquement non homogènes. Ils sont fabriqués généralement à partir d'un mélange de métal et de céramique. On les considère comme le produit des matériaux composites en changeant sans interruption, les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur. Ce changement allège les zones les plus chargées et conduit à trouver des solutions optimales d'un point de vue économique et mécanique.

Ce type de matériaux, a suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la différence dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques résiduelles. Ils sont considérés comme l'un des plus prometteurs pour l'avenir des composites dans de nombreux secteurs tels que l'aérospatiale, la défense, et plus récemment, le secteur médical et le domaine de génie civil.

I.3. Histoire de la gradation fonctionnelle des matériaux

Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique.

En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la

surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermo élastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux.

L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel (functionally graded material FGM).

En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables.

Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil.

I.4.Méthodes d'élaboration des FGM

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie

d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention à tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux a gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

I.4.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. I.3). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité .Les liants (Plastifiants et dé flocculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

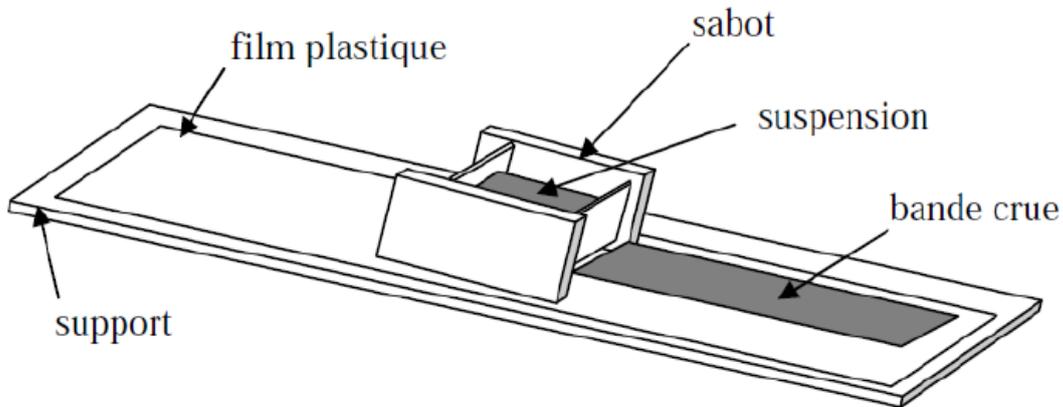


Figure. I.1 : Principe de la méthode coulage en bande.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt. En 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés (Reddy.1984). Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$. On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ($BaTiO_3$ principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par (MISTLER.1973).
- Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (Reddy.1984).

I.4.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage s'effectue en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ;ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Compaction Sèche des Poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop.1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.4. Dépôt par Electrolyse

Le dépôt par électrolyse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [Abdizadeh H.1999].

I.4.5. Projection Plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules

des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffes.H.D.1990).

I.4.6. C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

I.4.7. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.4.8. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure. I.4 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

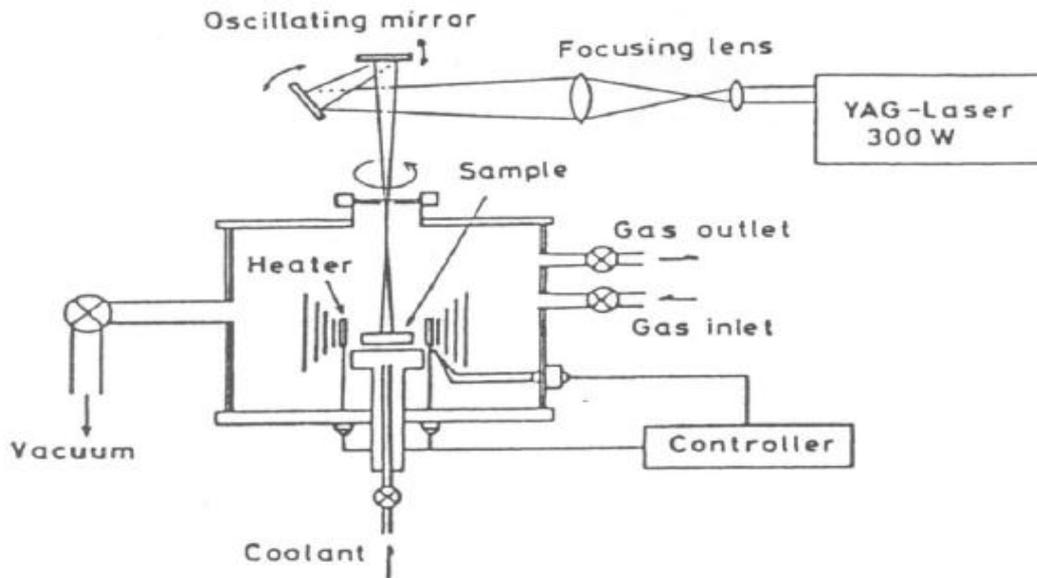


Figure.I.2 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.

I.4.9. Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh H.1997).

I.4.10. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Abdizadeh H.1997).

I.5. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.
- **Aéronautique** : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.
- **Chimique** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- **Électronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.
- **Optique** : fibres optiques, lentilles.
- **Conversion d'énergie** : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.
- **Matières biologiques** : implants, peau artificielle,
- **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

I.6. Concept des matériaux FGM

Le matériau à gradient propriétés a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Nino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit :

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;

- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs Thermiques) ;
- faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

Bonne résistance mécanique ;

Conductivité thermique élevée,

Très bonne ténacité.

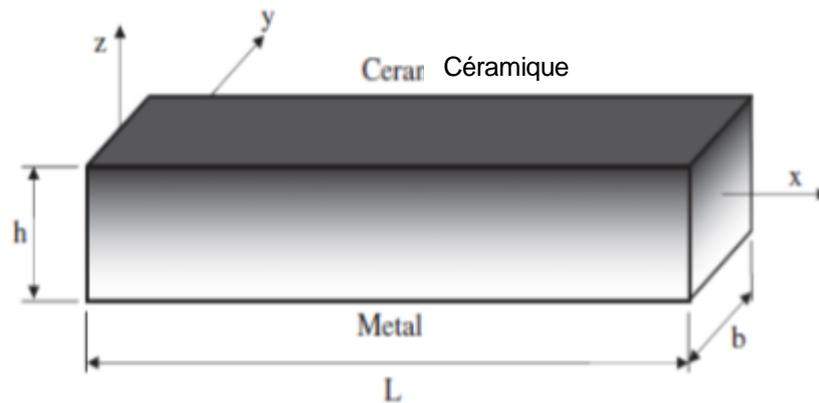


Figure I.3 : Géométrie d'une poutre FGM.

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Phase	Caractéristiques mécaniques
Céramique La face à haute température	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation, .Faible conductivité thermique -
Céramique-métal Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	- Élimination des problèmes de l'interface - Relaxer les contraintes thermiques.
Métal La face à basse température	- Bonne résistance mécanique - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité.

En conséquence, les FGM possèdent un certain nombre d'avantages excédant les composés stratifiés :

- ✓ Comprend une réduction potentielle de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur,
- ✓ Tendance d'efforts,
- ✓ Absente ou sévèrement réduite de décollement,
- ✓ Un effort résiduel amélioré,
- ✓ Propriétés thermiques augmentées,
- ✓ Une dureté plus élevée de rupture,
- ✓ Réduit facteurs d'intensité d'effort.

I.7. Propriétés effectives des matériaux fonctionnellement gradués

Généralement les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace ; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes.

Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique.

Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 1.2 a) ;

Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure 1.2 b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).

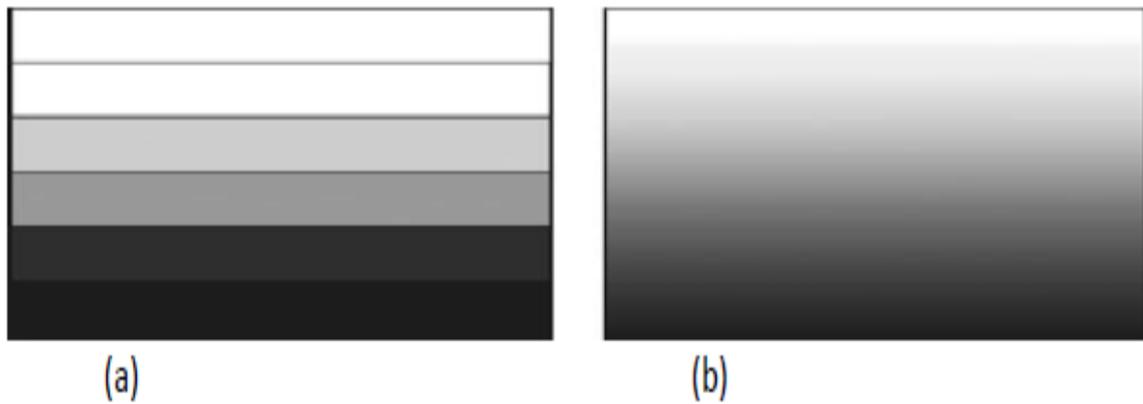


Figure I.4 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient de propriétés.

I.8. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM

I.8.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = g(z)E_1 + [1 - g(z)]E_2 \quad (\text{I.2})$$

Où E_2 et E_1 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée dans (Figure I.5), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

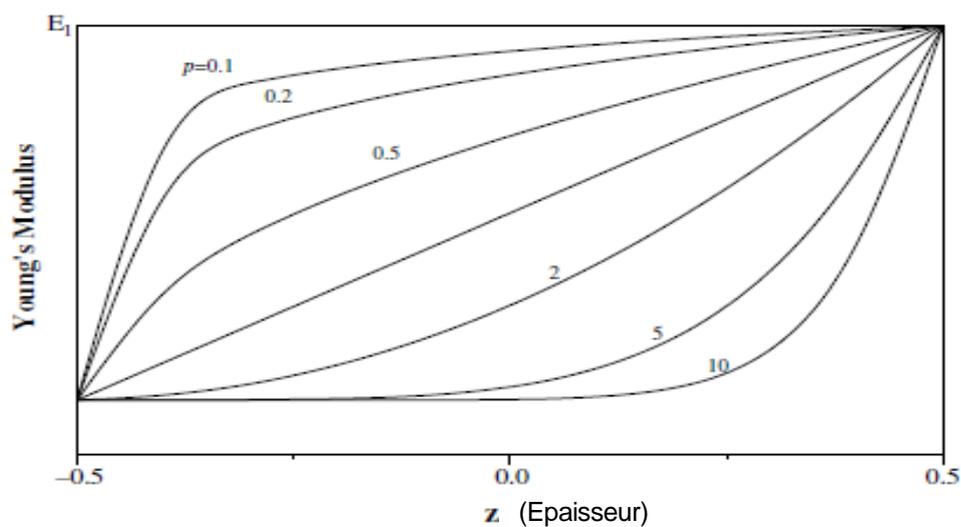


Figure I.5 : La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.

I.8.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Dans le cas d'ajouter une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = v_1(z)E_1 + [1 - v_1(z)]E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.3}$$

$$E(z) = v_2(z)E_1 + [1 - v_2(z)]E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.4}$$

La figure I.6 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.3) et (I.4) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S-FGM).

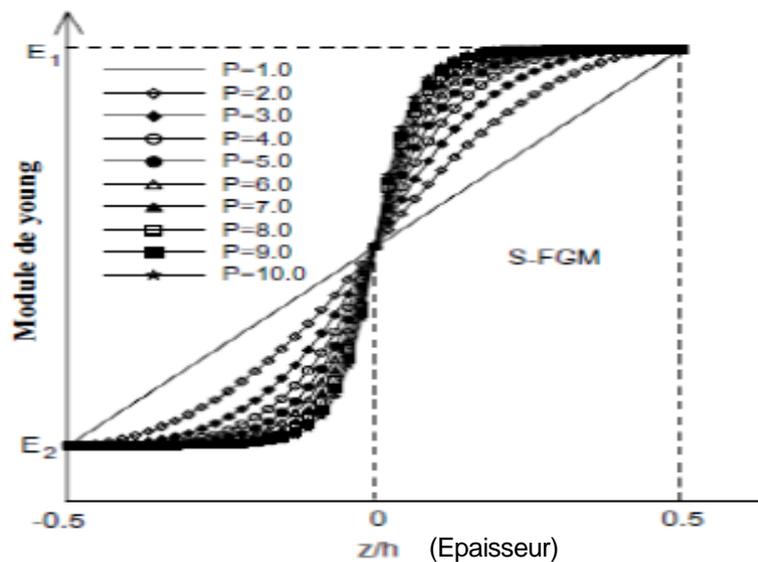


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM.

I.8.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = A \cdot e^{B(z + \frac{h}{2})} \quad (I.5)$$

Avec

$$A = E_2 \text{ et } B = (1/h) \cdot \ln(E_1/E_2) \quad (I.6)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans (Figure I.7).

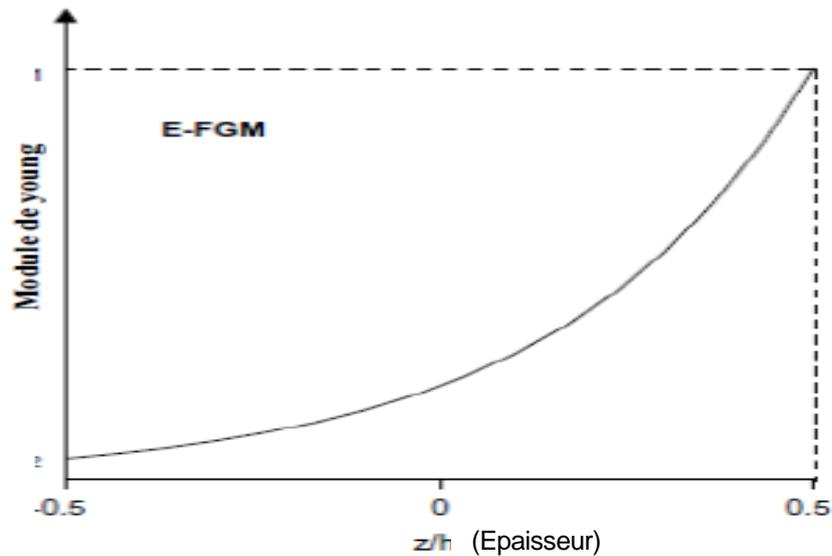


Figure I.7 : Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.

I.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu sur les matériaux à gradients évalués «FGM» : leur développement, leur concept, leurs propriétés, leurs principales étapes de fabrication ainsi que les différentes lois qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles (Module de Young).

Les avancées significatives dans les techniques de fabrication et de transformation au cours de la dernière décennie ont permis de produire les FGM en utilisant des procédés qui permettent d'offrir une grande latitude dans la confection de la microscopie et la composition matérielle.

Dans l'avenir, les FGM avec des formes et des propriétés complexes, y compris deux et trois dimensions de gradient, seront produits à l'aide de la fabrication avec une technique

qui nécessite l'ordinateur. Ce potentiel signifie que le concepteur ne se limite plus à une palette de matériaux homogènes existants, bien que beaucoup de recherches se soient intéressées à l'analyse de ce matériau, les ingénieurs et autres professionnels sont engagés dans le processus de conception des FGM.

CHAPITRE II

Rappel sur la théorie de l'élasticité

II. Rappel d'élasticité

II .1. Introduction

La théorie de l'élasticité est la théorie des petites déformations continues et réversibles des milieux isotropes élastiques. Elle donne, en principe et moyennant certaines hypothèses, la solution théorique complète des problèmes posés en résistance des matériaux, dont elle tend de plus en plus à se rapprocher après en être restée tout d'abord indépendante. Les calculs auxquels cette théorie conduit ne peuvent être explicités que dans des cas relativement simples ; dans les autres cas, on les simplifie en recherchant une première approximation de la solution mathématique rigoureuse (théorie des liaisons élastiques parfaites entre solides supposés indéformables, par exemple). Enfin, on fait appel à l'expérience soit pour vérifier les résultats des méthodes théoriques précédentes et les préciser lorsque leur approximation est insuffisante, soit pour les suppléer lorsqu'elles sont impuissantes, et, de toute façon, pour déterminer les caractéristiques élastiques intrinsèques des matériaux utilisés.

La théorie de l'élasticité suppose que les matériaux étudiés possèdent les trois propriétés suivantes :

- Tout d'abord, ils sont parfaitement élastiques (si les forces extérieures qui provoquent leur déformation ne dépassent pas une certaine limite, celle-là disparaît en même temps que la force qui lui a donné naissance). Les matériaux possèdent cette propriété à un degré variable en pratique.
- Ensuite, ils sont homogènes et distribués uniformément dans tout le volume qu'ils occupent, de telle sorte que le plus petit élément détaché d'un corps donné possède les mêmes propriétés physiques que le corps tout entier.
- Enfin, ils sont isotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes leurs directions. Les matériaux utilisés dans les constructions ne satisfont pas en général, dans leur ensemble, à cette dernière hypothèse ; ils sont en effet constitués souvent de cristaux (acier par exemple) de formes diverses et différemment orientés.

II.2. Contraintes

II.2.1 Etat des contraintes en un point

On démontre dans le cours d'élasticité que, compte tenu des hypothèses physiques, l'état de contrainte en un point A (figure 1. 1) est caractérisé par le tenseur des contraintes. C'est un tenseur du second ordre symétrique. Dans une base orthonormée il est représenté par la matrice des contraintes qui s'écrit :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \text{sym} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

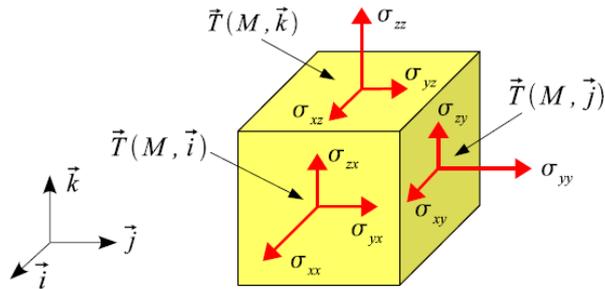


Figure II. 1 : Contrainte autour du point A

Dans cette notation du tenseur des contraintes, le premier indice indique la direction de la normale à la facette, le deuxième : la direction de la contrainte.

II.2.2 Vecteur contrainte en un point pour une direction n[→] :

Soit un point A d'un solide, et une direction repérée par un vecteur n[→] (normale extérieure à la matière).

Soit une facette infiniment petite d'aire dS de normale n[→]. Le vecteur contrainte au point A pour la direction n[→] s'écrit :

$$\vec{T}(A, \vec{n}) = \tilde{\sigma}(A)\vec{n} \tag{II.1}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{bmatrix} \tag{II.2}$$

II.2.3 Contrainte normale et tangentielle

Le vecteur contrainte en un point A et pour la direction n (figure I. 2) peut être projeté :

- sur la normale, on obtient la contrainte normale :

$$\sigma = \vec{T}(A, \vec{n}) \cdot \vec{n} = {}^t\vec{n} \tilde{\sigma}(A) \vec{n} \tag{II.3}$$

$$\sigma = [n_1 \quad n_2 \quad n_3] \begin{bmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1(\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3) \\ n_2(\sigma_{21}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{23}n_3) \\ n_3(\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3) \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

- sur le plan tangent, on obtient la contrainte tangentielle τ telle que:

$$\tau^2 = |\vec{T}(A, \vec{n})|^2 - \sigma^2 \quad (\text{II.5})$$

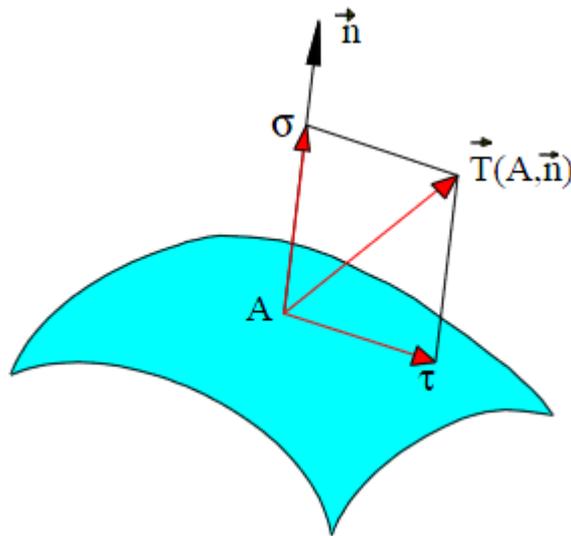


Figure I.2 : Contrainte normale σ et tangentielle τ en un point A

II.2.4 Contraintes principales et directions principales

Mathématiquement on démontre : le tenseur des contraintes étant réel symétrique, il est diagonalisable, c'est à dire qu'il existe un réel σ_i et une direction \vec{X}_i telle que:

$$\vec{\sigma}(A) \vec{X}_i = \sigma_i \vec{X}_i \quad (\text{II.6})$$

- les trois valeurs propres σ_i sont réelles (distinctes ou confondues) ; \vec{X}_i
- si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres correspondants \vec{X}_i sont orthogonaux.

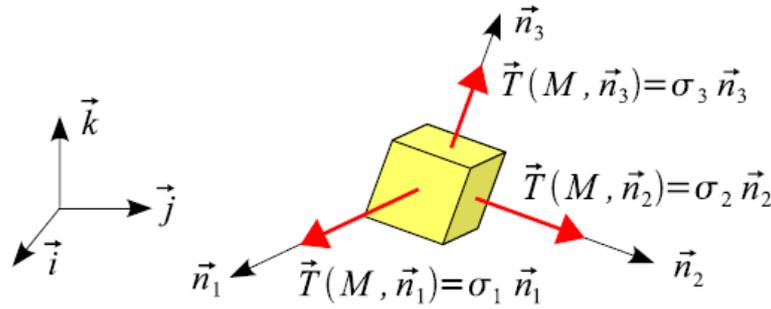


Figure I.3 : Faces et contraintes principales en M

Traduction mécanique : si les trois contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 sont distinctes, il existe

trois directions principales orthogonales correspondantes \vec{X}_1 , \vec{X}_2 et \vec{X}_3 .

Ainsi pour une telle direction \vec{X}_i le vecteur contrainte :

$$\vec{T}(A, \vec{X}_i) = \sigma_i \vec{X}_i \text{ est colinéaire à la direction } \vec{X}_i .$$

En d'autres termes, la contrainte tangentielle pour cette direction est nulle. Dans cette direction on a donc affaire, soit à une sollicitation de traction ($\sigma_i > 0$), soit à une sollicitation décompression ($\sigma_i < 0$).

Dans le repère principal la matrice des contraintes s'écrit alors :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix} (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3) \tag{II.7}$$

Détermination des contraintes principales et des directions principales (figure 1. 3)

- Les contraintes principales sont déterminées en écrivant que le déterminant suivant est nul :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma - \sigma_{12}\sigma_{21} & \sigma_{12}\sigma - \sigma_{13}\sigma_{31} \\ \sigma_{21}\sigma - \sigma_{22}\sigma_{21} & \sigma_{22}\sigma - \sigma_{23}\sigma_{32} \\ \sigma_{31}\sigma - \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{32}\sigma - \sigma_{33}\sigma_{32} \end{bmatrix} = 0 \tag{II.8}$$

On aboutit à l'équation caractéristique : $-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + \sigma I_3 = 0$

Dans cette équation I_1 , I_2 et I_3 sont les trois invariants du tenseur des contraintes (quantités indépendantes de la base dans laquelle est exprimé le tenseur). Dans une base quelconque ils ont pour expression :

$$I_1 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{33} \text{ Trace de } \sigma(A)$$

$$I_2 = (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) + (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}^2)$$

$$I_3 = \det[\sigma(A)]$$

et, dans la base principale :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \text{ trace de } \sigma(A)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$

$$I_3 = \det[\sigma(A)]$$

La direction principale \vec{X} correspondant à la contrainte principale σ est déterminée en écrivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Le déterminant de la matrice $\sigma(A) - \sigma\delta_{ij}$ étant nul, on ne dispose plus que de deux équations indépendantes (par exemple les deux premières). On ne peut donc déterminer qu'une direction et non un vecteur (l'une des composantes est arbitraire), c'est pourquoi l'on parle de direction principale.

II.2.5 Etats de contraintes particulières :

a) Etat de contrainte uniaxiale :

Dans le repère principal, le tenseur des contraintes se réduit à :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)} \quad (\text{II.10})$$

Traction simple si $\sigma_1 > 0$, compression simple si $\sigma_1 < 0$

b) Etat de cisaillement simple

Soit un repère orthonormé (A ; $X^{\rightarrow}_1, X^{\rightarrow}_2, X^{\rightarrow}_3$), l'état de contraintes en A est un état de cisaillement simple par rapport aux directions X^{\rightarrow}_1 et X^{\rightarrow}_2 si le tenseur des contraintes

se réduit à :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)} \quad (\text{II.11})$$

Les contraintes principales sont égales à :

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = \tau, \sigma_3 = 0. \quad (\text{II.12})$$

Dans le repère principal, le tenseur des contraintes admet la forme suivante :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \quad (\text{II.13})$$

c) Etat de contrainte dans une section droite de poutre

En tout point A d'une section droite, l'état de contrainte peut se représenter dans la base locale classique de la théorie des poutres ($X_1 \vec{}, X_2 \vec{}, X_3 \vec{}$) :

- $X_1 \vec{}$ tangent à la ligne moyenne ;

- $X_1 \vec{}$ et $X_3 \vec{}$ dans le plan de section droite et axes principaux de la section.

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

Traction (compression) simple :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

Flexion pure :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

Flexion simple :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

Torsion avec sections circulaires :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

II.2.6 Cercles de Mohr :

II.2.6.1 Cercles de Mohr des contraintes :

Supposons connues les trois contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 au point M. On peut montrer que, dans le plan (σ_1, τ) (appelé plan de Mohr), l'extrémité des vecteurs contraintes $T^{\rightarrow}(M, n^{\rightarrow})$.

Admissibles, n^{\rightarrow} tournant autour du point M, est la surface ombrée de la figure 1. 4.

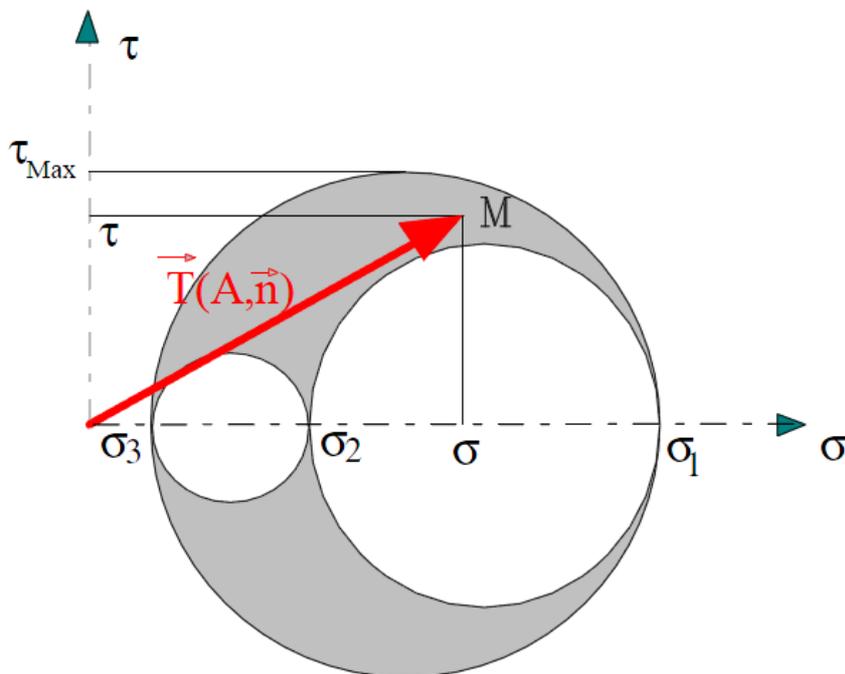


Figure I. 4 a : Tricerclé de Mohr

Cas particulier important : Dans le cas où le vecteur n^{\rightarrow} décrit un plan principal, par exemple $(X_1^{\rightarrow}, X_2^{\rightarrow})$, l'extrémité du vecteur $T^{\rightarrow}(M, n^{\rightarrow})$ décrit, dans le plan (σ_1, τ) , un cercle centré sur l'axe $O\sigma$ et ayant pour diamètre le segment σ_1, σ_2 . C'est notamment le cas en contraintes planes.

II.2.6.2 Cercles de Mohr en contraintes planes :

En contraintes plane $\sigma_3 = 0$ ainsi la figure ci-dessus devient :

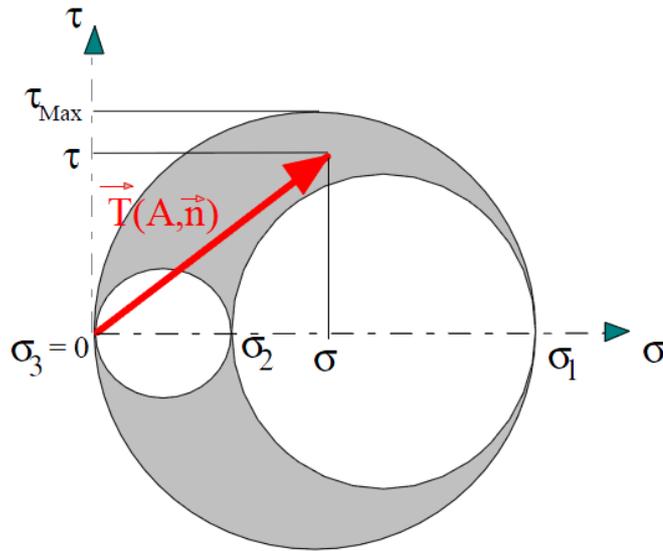


Figure II. 4b : Tricercle de Mohr en contraintes planes.

Plaçons-nous dans le plan principal $(A, X_1 \vec{,} X_2 \vec{,})$.

Considérons une facette dont la normale $n \vec{,}$ fait un angle de θ par rapport à l'axe principal $X_1 \vec{,}$.

Soit un vecteur unitaire $t \vec{,}$ tangent à la facette, obtenu par rotation de $(-\pi/2)$ de $X_2 \vec{,}$.

$$n \vec{,} = \cos \theta X_1 \vec{,} + \sin \theta X_2 \vec{,}$$

$$t \vec{,} = \cos \theta X_1 \vec{,} - \sin \theta X_2 \vec{,}$$

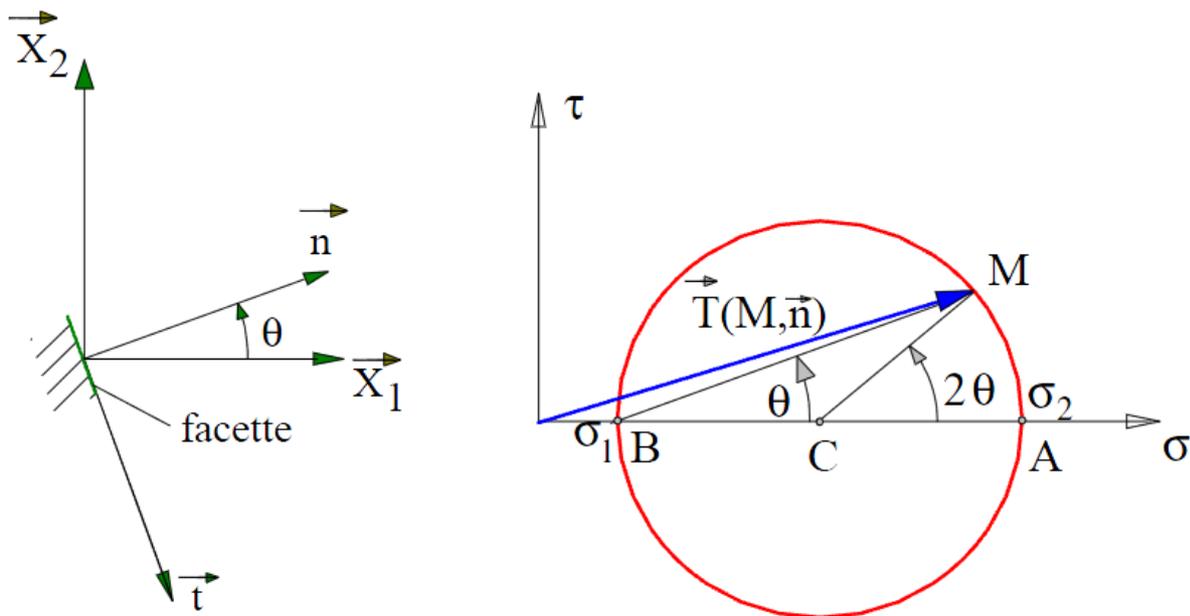


Figure II. 5 : Construction de Mohr.

Le vecteur contrainte admet pour expression :

$$t^{\rightarrow}(A, n^{\rightarrow}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \sigma_1 \cos \theta X_1^{\rightarrow} + \sigma_2 \sin \theta X_2^{\rightarrow}$$

la contrainte normale est : $\sigma = T^{\rightarrow}(A, n^{\rightarrow}) \cdot n^{\rightarrow} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta$

et la contrainte tangentielle définie ici par :

$\tau = T^{\rightarrow}(A, n^{\rightarrow}) \cdot t^{\rightarrow} = \sigma_1 \cos \theta \sin \theta - \sigma_2 \cos \theta \sin \theta$ en passant en arc double, il vient :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Lorsque la facette orientée par la normale extérieure n^{\rightarrow} tourne, l'angle θ varie. Il lui correspond le point figuratif M (figure I. 5)

Dans le plan de Mohr, le lieu de M lorsque θ varie est un cercle de centre :

$$C \left| \begin{array}{l} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ \tau = 0 \end{array} \right. \text{ et de rayon } \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

II.2.6.3 Construction de Mohr :

Convenons de classer les contraintes principales dans l'ordre suivant :

$$\sigma_1 > \sigma_2$$

Dans le plan de Mohr (Figure I. 5) l'axe horizontal est gradué en contrainte normale σ et l'axe vertical en contrainte tangentielle τ .

$$\text{Le point A} \rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \sigma = \sigma_1 \\ \tau = 0 \end{cases} \quad \text{Le point B} \rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \sigma = \sigma_2 \\ \tau = 0 \end{cases}$$

Le point M est le point courant. Il correspond à une facette qui a tourné de θ par rapport à l'axe X_1^{\rightarrow} . L'angle au centre ($CA^{\rightarrow}, CM^{\rightarrow}$) est alors de 2θ .

Remarque : Ne pas oublier que $\sigma_3 = 0$. Il y a donc trois cercles de Mohr.

II.2.7 Etat des contraintes autour d'un point sur la surface d'un Solide :

Considérons un point A sur la surface d'un solide. Soit un repère (A; $X_1^{\rightarrow}, X_2^{\rightarrow}, X_3^{\rightarrow}$) tel que :

X_1^{\rightarrow} et X_2^{\rightarrow} soient situés dans le plan tangent ;

X_3^{\rightarrow} est dirigé suivant la normale

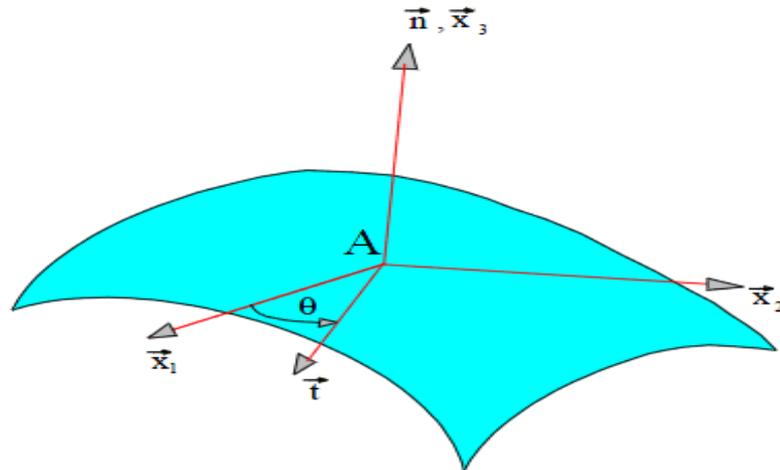


Figure 1I. 6 : Point A sur la surface d'un solide.

Supposons qu'en A il n'y a pas de chargement. C'est donc que le vecteur chargement extérieur est nul : $Q^{\rightarrow}(A) = 0^{\rightarrow}$

Les conditions aux limites sur le chargement imposent : $T^{\rightarrow}(A, X_3^{\rightarrow}) = Q^{\rightarrow}(A)$ alors :

$$T^{\rightarrow}(A, X_3^{\rightarrow}) = 0^{\rightarrow} \dots\dots\dots (1)$$

Projetons la relation (1) sur la tangente t^{\rightarrow} définie par θ et sur la normale.

$$T^{\rightarrow}(A, X_3^{\rightarrow}) \cdot t^{\rightarrow} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$T^{\rightarrow}(A, X_3^{\rightarrow}) \cdot X_3^{\rightarrow} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

Signification de la relation (2) :

$$T^{\rightarrow}(A, X_3^{\rightarrow}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$t^{\rightarrow} = \cos\theta X_1^{\rightarrow} + \sin\theta X_2^{\rightarrow}$$

alors

$$T^{\rightarrow}(A, X_3^{\rightarrow}) \cdot t^{\rightarrow} = \sigma_{13} \cos\theta + \sigma_{23} \sin\theta = 0$$

et ceci quel que soit θ , c'est donc que: $\sigma_{13} = 0$ et $\sigma_{23} = 0$

Ainsi le tenseur des contraintes s'écrit en A :
$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Ainsi, lorsqu'il n'y a pas de chargement tangentiel à la surface au point A, la normale à la surface est une direction principale car: $\sigma(A) \cdot n^{\rightarrow} = \sigma_{33} \cdot n^{\rightarrow}$

Le plan $(X_1^{\rightarrow}, X_2^{\rightarrow}, X_3^{\rightarrow})$ est alors plan principal.

Signification de la relation (3) :

$$T^{\rightarrow}(A, X_3^{\rightarrow}) \cdot X_3^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = 0 \quad \text{NYU7Y}$$

En définitive, le tenseur des contraintes s'écrit en A: $\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Conclusion : Lorsque en un point A de la surface d'un solide il n'y a pas de charge extérieure, l'état de contrainte est un état de contrainte plane dans le plan tangent à la surface.

Cette propriété est mise en œuvre en extensomètre.

II.3 Déplacements – Déformations :

II.3.1 Champ des déplacements q^{\rightarrow} :

Sous l'effet des efforts, la structure se déforme. Un point M de coordonnées (x1, x2, x3) appartenant à la structure se déplace sous le chargement. Son déplacement est caractérisé par le vecteur déplacement:

$$U^{\rightarrow}(M) = u_1(x_1, x_2, x_3) X_1^{\rightarrow} + u_2(x_1, x_2, x_3) X_2^{\rightarrow} + u_3(x_1, x_2, x_3) X_3^{\rightarrow}$$

Comme on est en théorie des petites perturbations, les composantes u_1, u_2 et u_3 sont "petites".

II.3.2 Etat des déformations au voisinage d'un point :

On se place ici dans le cas des petites déformations.

On démontre que l'état de déformation au voisinage d'un point A est caractérisé par le tenseur des déformations.

C'est un tenseur du second ordre symétrique qui se déduit du champ des déplacements par la relation :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Dans une base orthonormée il s'écrit en A : $\epsilon(A) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \text{sym} & & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$

Allongement unitaire en A et pour une direction q^{\rightarrow} :

Après déformation, la longueur ds_1 du vecteur \mathbf{AA}_1 de direction q_1^{\rightarrow} est devenue ds'_1 . On peut alors définir l'allongement relatif en A et pour la direction q_1^{\rightarrow} (Figure 1. 7) :

C'est la quantité : $e(A, q_1^{\rightarrow}) = \frac{ds'_1 - ds_1}{ds_1}$

ds'_1 et ds_1 sont des longueurs infiniment petites.

On peut montrer que cette quantité s'exprime à partir du tenseur des déformations par :

$$e(A, \vec{q}_1) = t_{\vec{q}_1} \varepsilon(A) \vec{q}_1$$

Exemple: Calculons l'allongement unitaire dans la direction $X_1 \rightarrow (1,0,0)$

$$e(A, X_1 \rightarrow) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{11}$$

On interprète ainsi les termes diagonaux du tenseur des déformations qui représentent les allongements unitaires dans les trois directions orthonormées.

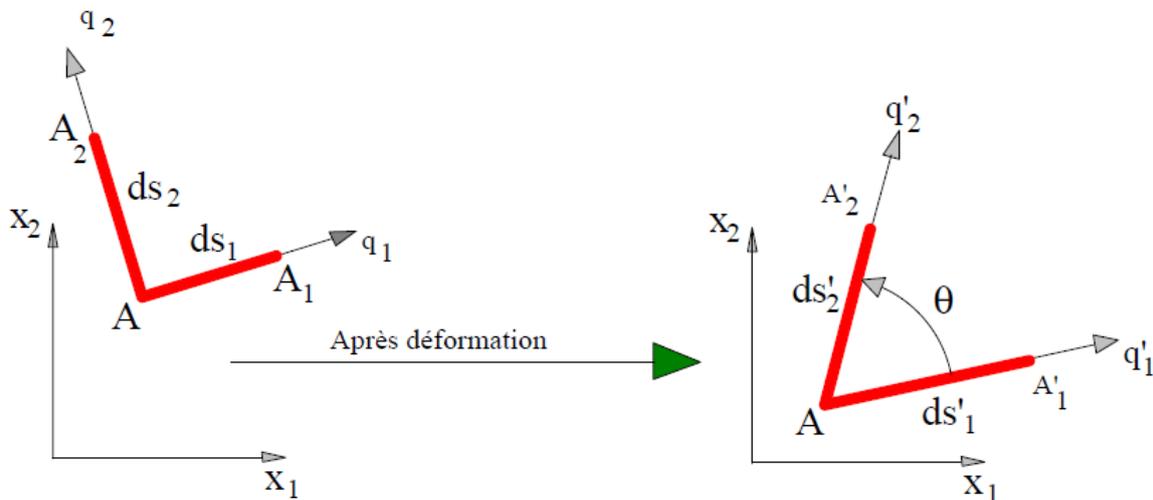


Figure II. 7 : Déformation au voisinage d'un point A

II.3.3 Glissement. Distorsion :

Après déformation, l'angle droit $A_1 A A_2$ est devenu $A'_1 A' A'_2$. Cette variation d'angle droit s'appelle le glissement ou la distorsion. On peut montrer que le glissement $g(A, \vec{q}_1, \vec{q}_2)$ se calcule par : $g(A, \vec{q}_1, \vec{q}_2) = -2 t_{\vec{q}_1} \varepsilon \vec{q}_2$

Exemple : Calculons la distorsion de l'angle droit $(X_1 \rightarrow, X_3 \rightarrow)$

$$g(A, X_1 \rightarrow, X_3 \rightarrow) = -2 [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\varepsilon_{31}$$

II.3.4 Déformations principales et directions principales :

De même que pour le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations étant réel symétrique, il est diagonalisable, c'est à dire qu'il existe un réel ε_i et une direction \vec{X}_i telle

que: $\varepsilon(A) \vec{X}_i = \varepsilon_i \vec{X}_i$

Ainsi dans une telle direction \vec{X}_i il n'y a pas de glissement mais seulement un allongement.

Dans le repère principal en A, la matrice des déformations s'écrit alors :

$$\varepsilon(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{bmatrix} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

II.3.5 Etat de déformations planes :

On a affaire à un état plan de déformations parallèlement au plan $(X_1 \rightarrow, X_2 \rightarrow)$ si le champ des déplacements $\vec{U}(M)$ de tout point M peut se mettre sous la forme :

$$\vec{U}(M) = u_1(X_1, X_2)X_1 \rightarrow + u_2(X_1, X_2)X_2 \rightarrow + C X_3 X_3 \rightarrow$$

Les composantes u_1 et u_2 ne sont fonctions que des deux seules variables X_1 et X_2 , C est une constante : la composante suivant $X_3 \rightarrow$ est une fonction affine en X_3 .

Cette hypothèse est généralement admise lorsque l'on étudie des pièces cylindriques de génératrice parallèle à l'axe $X_3 \rightarrow$, suffisamment longues pour que l'on puisse négliger les effets aux extrémités, et chargées dans le plan $(X_1 \rightarrow, X_2 \rightarrow)$.

C'est le cas des canalisations de transport de fluide par exemple.

Dans ces conditions, le tenseur des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Comme u_1 et u_2 ne dépendent pas de X_3 , $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$

et $\varepsilon_{33} = C$ $\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ et $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$

Dans la suite on supposera $C = 0$.

Le tenseur des déformations s'écrit alors dans une base quelconque :

$$\varepsilon(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

L'axe $X_3 \rightarrow$ est donc direction principale et l'allongement unitaire correspondant est nul.

II.3 Loi de comportement :

La linéarité de la loi de comportement de l'élasticité se traduit par la linéarité de la loi qui relie tenseur des contraintes et tenseur des déformations.

Soit en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 G \varepsilon_{ij}$$

Dans cette relation : δ_{ij} est le tenseur de Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j, \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Dans certains manuels on note $G : \mu$

λ et G sont les coefficients de Lamé, constants pour un matériau donné.

$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ est le premier invariant du tenseur des déformations
inversement, on peut exprimer le tenseur des déformations à partir de celui des contraintes:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

G : est le module de Coulomb ou bien coefficient de cisaillement.

Si $\nu = 0,25$ alors $G = E / 2.5$, c'est le cas pour les matériaux ductiles.

Pour l'acier "doux" (S235 par exemple) : $E \approx 200\,000$ MPa et $G \approx 80\,000$ MPa

En décomposant sur les axes on obtient :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad , \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}).$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} \quad , \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \quad , \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G}$$

II.4 Critères de limite élastique :

On supposera dans la suite que la limite élastique en traction simple est égale à la limite élastique en compression simple (matériaux ductiles). Soit σ_e cette limite.

On connaît bien le comportement d'un matériau dans le cas d'une sollicitation de traction simple. Cette connaissance est liée à l'essai de traction simple statique.

Soit un état de contrainte complexe caractérisé en un point A par les trois contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 .

Existe-t-il un moyen de savoir si, en ce point, la limite élastique est dépassée ?

On peut répondre à cette question par l'affirmative. On définit pour cela une contrainte de traction simple σ_g présentant le même danger de dépassement de limite élastique que l'état de contrainte complexe ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

σ_g est appelée contrainte équivalente. Bien entendu, dans le cas général, σ_g est une contrainte fictive que l'on ne rencontre pas dans la pièce contrainte.

Il n'y a pas unicité du critère de limite élastique. Au cours de l'histoire de la mécanique des milieux continus déformables, plusieurs critères ont été proposés. Certains sont plus ou moins bien vérifiés en fonction du type de matériau sollicité et du type de sollicitation.

A l'heure actuelle les logiciels d'élasticité prennent en compte surtout les critères de Tresca et de Von Mises que nous allons expliciter.

II.4.1 Critère de Tresca ou du cisaillement maximal :

Pour ce critère, l'état limite est atteint lorsque la contrainte de cisaillement maximal admet la valeur seuil τ_e déterminée par l'essai de torsion.

A l'aide de la représentation de Mohr, on sait déterminer le cisaillement maximal, il suffit de tracer le plus grand des trois cercles de Mohr.

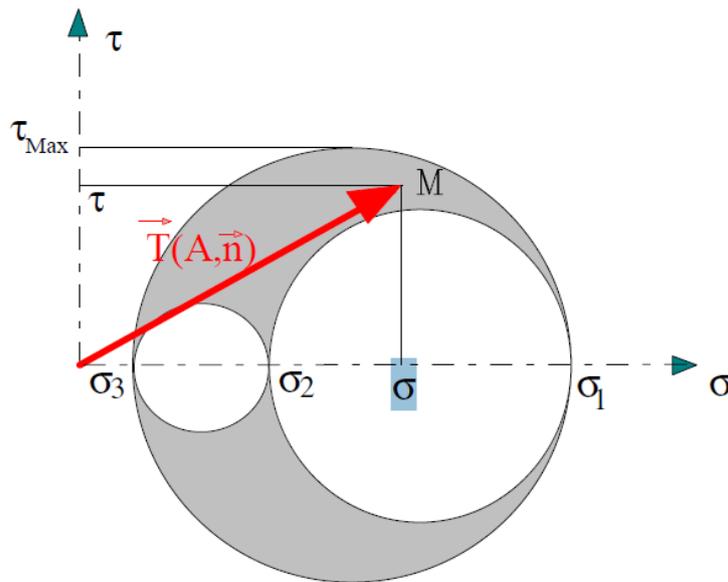


Figure II. 8 : Tricercle de Mohr et contrainte tangentielle maximale.

Dans le cas particulier d'une sollicitation de traction simple :

σ_1 seul est différent de zéro. Alors: $\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$

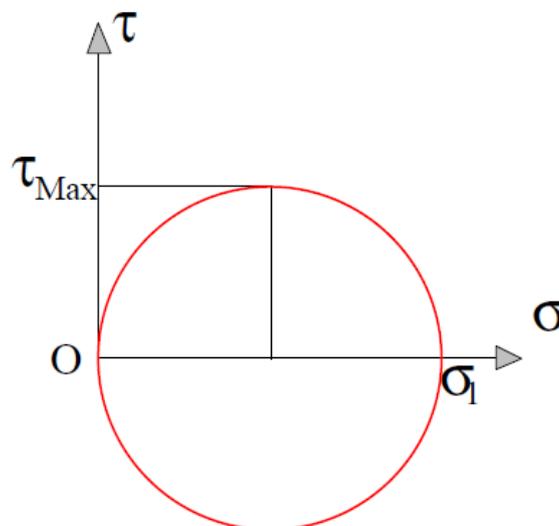


Figure II. 9: Traction uniaxiale

Le critère de Tresca impose : $\tau_{\max} = \sigma_1/2 \leq \tau_e$

Si σ_1 atteint sa limite σ_e on obtient: $\tau_e = \sigma_e / 2$

Ainsi le critère de Tresca impose cette dernière relation entre τ_e et σ_e .

Rappel :

- σ_e est la limite élastique en traction simple.
- τ_e est la limite élastique en cisaillement simple.

b) Dans le cas particulier d'une sollicitation en contraintes planes

Soit un état de contraintes planes caractérisé par les deux contraintes principales σ_1 et σ_2
 $(\sigma_3 = 0)$.

On peut représenter cet état de contraintes dans le plan des contraintes (σ_1, σ_2) . En effet à tout état de contraintes (σ_1, σ_2) on fait correspondre un point caractéristique $M(\sigma_1, \sigma_2)$. Le point

M peut, à priori, décrire tout le plan des contraintes.

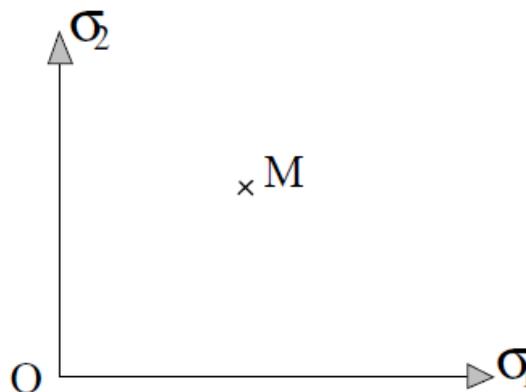


Figure II. 10 : Etat de contraintes planes.

Distinguons plusieurs cas :

1°) σ_1 et σ_2 admettent le même signe

Dans ces conditions M appartient au premier ou au troisième quadrant.

a) Si $\sigma_1 > \sigma_2$

La plus grande scission est :

$\tau_{\max} = 0,5 |\sigma_1 - \sigma_3|$ ou $\sigma_3 = 0$ donc: $\tau_{\max} = 0,5 |\sigma_1|$ et le critère de Tresca impose :

$0,5 |\sigma_1| \leq \tau_e$ Soit $\sigma_1 \leq 2 \tau_e = \sigma_e$. Ainsi dans ces conditions: $|\sigma_1| \leq \sigma_e$

Si $\sigma_1 > 0$ alors $\sigma_1 < \sigma_e$

Si $\sigma_1 < 0$ alors $\sigma_1 > -\sigma_e$

b) Si $\sigma_1 < \sigma_2$

La plus grande scission est : $\tau_{\max} = 0,5 |\sigma_2|$

Ainsi dans ces conditions : $|\sigma_2| \leq \sigma_e$

Si $\sigma_2 > 0$ alors $\sigma_2 \leq \sigma_e$

Si $\sigma_2 < 0$ alors $\sigma_2 \geq -\sigma_e$

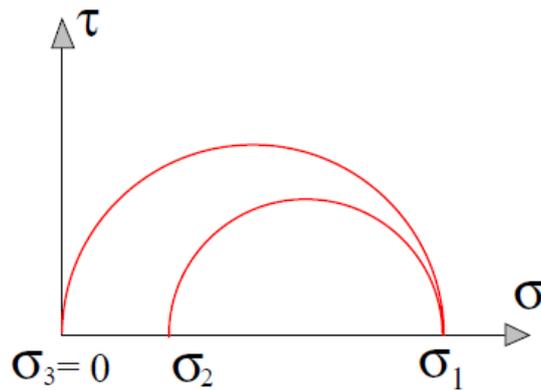


Figure II. 11: σ_1 et σ_2 de même signe

2°) σ_1 et σ_2 admettent des signes opposés

Dans ces conditions M appartient au deuxième ou au quatrième quadrant.

$$\tau_{\max} = 0,5 |\sigma_1 - \sigma_2|$$

Si $\sigma_1 > \sigma_2$ alors $\tau_{\max} = 0,5 (\sigma_1 - \sigma_2)$ soit $\sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_e$

Si $\sigma_1 < \sigma_2$ alors $\tau_{\max} = 0,5 (\sigma_2 - \sigma_1)$ soit $\sigma_2 - \sigma_1 \leq \sigma_e$

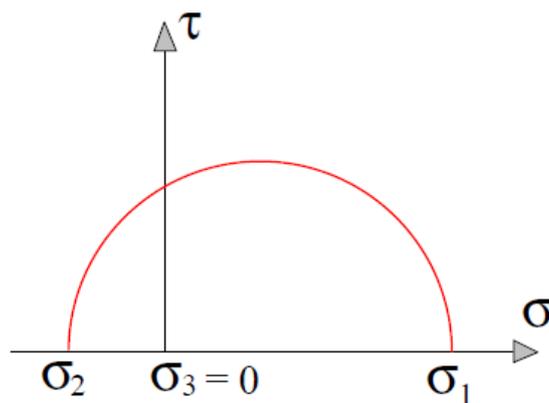


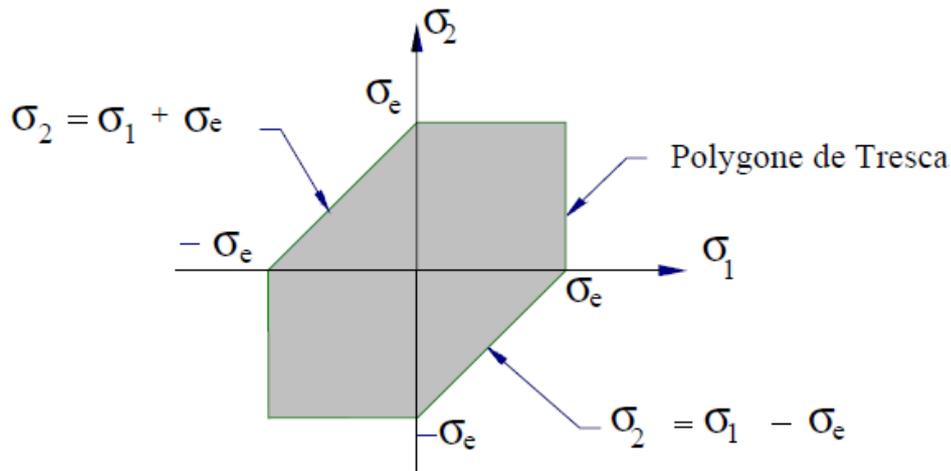
Figure II. 12 : σ_1 et σ_2 de signes différents

Conclusion :

Pour appliquer le critère de Tresca, il faut bien connaître les signes de σ_1 et σ_2 :

- si σ_1 et σ_2 ont un même signe $|\sigma_1| < \sigma_e$ et $|\sigma_2| < \sigma_e$;

- si σ_1 et σ_2 ont des signes différents: $|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_e$ La zone admissible pour le point M est l'intérieur du polygone de la figure 1.



14.

Figure II. 13 : Polygone de Tresca.

I.4.2 Critère du plus grand travail de distorsion.

Critère de Von Mises :

Pour ce critère, l'état limite est atteint lorsque l'énergie de distorsion par unité de volume est égale à l'énergie de distorsion unitaire limite du matériau.

L'énergie de distorsion par unité de volume s'exprime en fonction des contraintes principales par:

$$\frac{dW(f)}{dv} = \frac{1 + \nu}{E} [(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) + (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)]$$

Dans le cas de la traction simple, seule $\sigma_1 \neq 0$:

$$\frac{dW(f)}{dv} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_1^2$$

Ce critère devant être valable quel que soit l'état de sollicitation, on doit donc avoir :

$$(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) + (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \leq \sigma_e^2$$

La contrainte de traction simple équivalente σ_g à l'état de contrainte complexe est alors en fonction des contraintes principales telle que :

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) + (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)^2]$$

et, en fonction des contraintes non principales :

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_{11}^2 - \sigma_{22}^2) + (\sigma_{22}^2 - \sigma_{33}^2) + (\sigma_{22}^2 - \sigma_{33}^2)^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)]$$

I.4.3 Critères exprimés dans le cas de contraintes planes :

Seules les contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} sont non nulles.

1.4.3.1 Critère de Tresca

$$\sigma_g = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \sigma_{12}^2]^{1/2}$$

Si de plus $\sigma_{22} = 0$ (flexion-torsion) alors :

$$\sigma_g = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \sigma_{12}^2]^{1/2}$$

II.4.3.2 Critère de Von Mises

En fonction des contraintes principales, il reste :

$$\sigma_g = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2}$$

L'état limite est atteint pour: $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_e^2$

C'est l'équation d'une ellipse dont le grand axe est incliné de 45° dans le plan (σ_1, σ_2)

En fonction des contraintes non principales, il vient :

$$\sigma_g = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3 \sigma_{12}^2)^{1/2}$$

Si de plus $\sigma_{22} = 0$ (flexion-torsion) alors :

$$\sigma_g = (\sigma_{11}^2 + 3 \sigma_{12}^2)^{1/2}$$

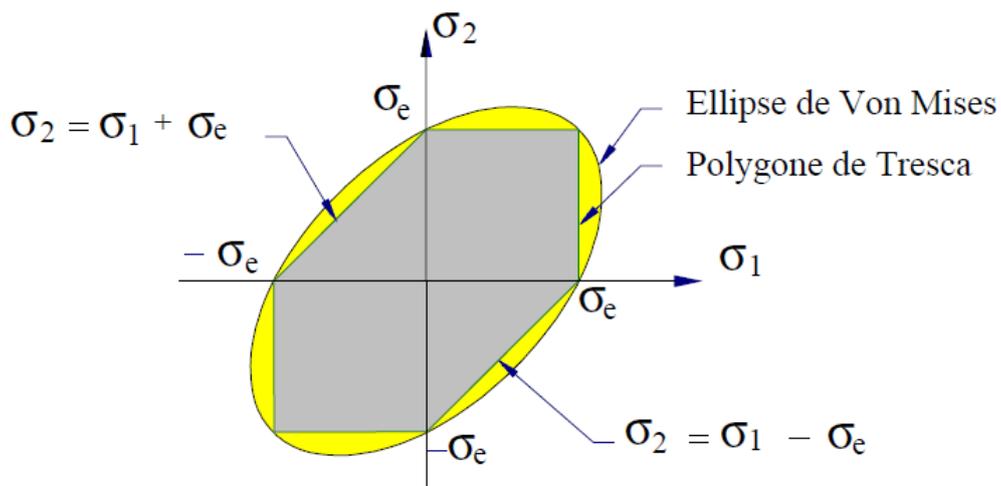


Figure II. 14 : Représentation graphique des critères de limite élastique
 σ_e est la limite élastique du matériau considéré.

Conclusion :

Il apparaît clairement que les critères de Tresca et de Von Mises ne donnent pas tout à fait les mêmes résultats (coefficients 3 ou 4 en flexion-torsion, notamment).

L'expérience montre que le critère de Von Mises est souvent plus satisfaisant que celui de Tresca. De plus le critère de Von Mises est d'emploi plus facile que celui de Tresca car il se traduit par une formule unique quadratique, donc sans problème de signe.

II.5 Types particuliers de problème d'élasticité :

II.5.1 Contraintes planes du plan (x1, x2) :

C'est le cas de certaines plaques soumises à des forces parallèles à leur plan moyen.

Les contraintes et les déformations sont indépendantes de x3.

Le tenseur des contraintes admet la forme :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)}$$

Le tenseur des déformations admet la forme :

$$\varepsilon(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad \varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Avec :
$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \end{cases}$$

II.5.2 Déformations planes :

C'est le cas de certains solides cylindriques d'axe \vec{X}_3 , longs et soumis à des forces de surface et de volume perpendiculaire à \vec{X}_3 . Ces forces sont indépendantes de la coordonnée \vec{X}_3 .

Le tenseur des déformations admet la forme :

$$\varepsilon(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)}$$

Le tenseur des contraintes admet la forme :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \end{cases}$$

II.5.3 Problèmes axisymétriques méridiens :

Par définition, la structure, le chargement et les forces de liaisons admettent un axe de révolution $O \vec{X}_3$. De plus toutes les forces sont situés dans des plans méridiens (pas de forces circonférentielles).

Tous les paramètres sont indépendants de la coordonnée circonférentielle θ . On traite ce type de problème en coordonnées cylindriques.

Le tenseur des déformations admet la forme :
$$\varepsilon(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & \varepsilon_{rz} \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ \varepsilon_{rz} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}_{(r,\theta,z)}$$

Le tenseur des contraintes admet la forme :
$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}_{(r,\theta,z)}$$

CHAPITRE III

La modélisation mathématique et résultat numérique de la poutre en E- FGM

III.1 Introduction :

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGMS) sont un type de matériau possédant des propriétés être conçues de manière à améliorer sa résistance, sa ténacité, sa capacité de résistance à haute température, etc. Par rapport aux structures composites stratifiées traditionnelles, les structures en FGM n'ont pas d'interfaces évidentes de propriété matérielle de sorte que les phénomènes qui varient progressivement par rapport aux coordonnées spatiales. Les propriétés du matériau peuvent de contraintes peuvent être éliminés ou grandement affaiblis. Ainsi, les FGMS ont de larges applications potentielles dans l'industrie manufacturière aéronautique astronautique, les centrales nucléaires, ...etc.

Différentes théories avaient été développées pour les structures FMG. Alors qu'une série de solution d'élasticité 3D a été obtenue pour des plaques et coques FGM avec des géométries spéciales

D'autres théories ont étudié le problème de contrainte d'une poutre simplement supportée avec des constantes thermo élastiques variant de manière exponentielle à travers l'épaisseur.

Cependant, les études associées pour les poutres anisotropes FGM avec des paramètres de matériau variant arbitrairement à travers l'épaisseur n'ont pas encore été rapportées. Dans cet article, nous présentons une solution analytique pour une poutre en FGM, dont les paramètres thermo élastiques changent arbitrairement le long de la direction de l'épaisseur, et le problème de conduction thermique est traité comme un problème 1D le long de la coordonnée d'épaisseur. Un exemple numérique est considéré avec des résultats numériques.

III.2. Equations de base et conditions aux limites :

Considérons une poutre en appui simple. On suppose que la poutre est dans l'état du plan de contraintes, et soumise à une charge q parabolique sur sa face supérieure, les propriétés du matériau ne variant que dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire nous avons les paramètres de souplesse élastique comme si $S_{ij}(y)$ ($ij= 1,2,6$),

III.2 Position du problème :

Considérons une poutre simplement appuyée de longueur « $2L$ » et de hauteur « $2h$ », soumise à une charge parabolique $q(x)$. On veut déterminer pour cette poutre l'état de contrainte en utilisant la théorie de l'élasticité, cette poutre possède des caractéristiques mécaniques fonctionnellement graduées en hauteur selon une loi exponentielle.

$$E(y) = E_t e^{\beta(y+h)}, \beta = \frac{1}{2h} \ln \frac{E_t}{E_b},$$

Avec E_b et E_t sont les modules d'élasticité longitudinal sur les faces supérieure et inférieure de la poutre

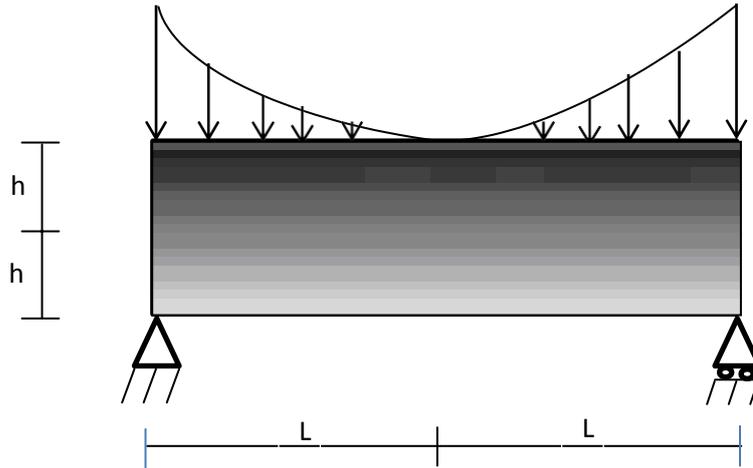


Figure III.1 : Poutre sous charge parabolique

III.3 Formulation analytique :

Pour résoudre ce problème on se propose la composante de contraintes σ_{yy} qui prend la forme de la charge parabolique

Selon :

$$\sigma_{yy} = f(y)x^2 \tag{III.1}$$

Avec $f(y)$. est une fonction inconnue

En absence des forces volumiques, exprimons les équations d'équilibre statique :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \tag{III.2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \tag{III.3}$$

De l'équation (3.3) on tire :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -f'(y) \cdot x^2$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = -\frac{f'(y)}{3} x^3 + g(y) \quad (III.4)$$

En substituant cette dernière dans l'équation (3.2) on aura :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{f''(y)}{3} x^3 - g'(y) \quad \text{Tapez une équation ici.}$$

$$\Rightarrow \sigma_{xx} = f''(y) \frac{x^4}{12} - g'(y) \cdot x + h(y) \quad (III.5)$$

Où : g et $h(y)$ sont des fonctions inconnues.

Ces fonctions seront déterminées à partir des équations de compatibilité des déformations définies dans le plan de la poutre comme :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (III.6)$$

Les composantes de déformation sont déterminées à partir des équations de Hooke :

$$\varepsilon_{xx} = S_{11} \sigma_{xx} + S_{12} \sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = S_{12} \sigma_{xx} + S_{22} \sigma_{yy}$$

$$\gamma_{xy} = S_{66} \cdot \tau_{xy}$$

Où S_{ij} ; $i, j = 1, 2, 6$ sont des constantes de souplesse à savoir :

$$S_{11} = \frac{1}{E(y)} \quad S_{12} = \frac{\nu}{E(y)} \quad S_{22} = S_{11} \text{ et } S_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E(y)} \quad (III.7)$$

Avec $E(y)$ le module d'élasticité longitudinal et ν est le coefficient de poisson constant

En substituant les équations (III.1), (III.4), (III.5) et (III.7) dans l'équation (III.6)

$$\varepsilon_{xx} = S_{11} f''(y) \frac{x^4}{12} - S_{11} g'(y) x + S_{11} h(y) x + S_{12} f(y) x^2$$

$$\varepsilon_{yy} = S_{12} f''(y) \frac{x^4}{12} - S_{12} g'(y) x + S_{12} h(y) x + S_{22} f(y) x^2$$

$$\sigma_{xy} = -S_{66} f'(y) \frac{x^3}{3} + S_{66} g(y)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = (S_{12}f(y))''x^2 + (S_{11} \frac{f''(y)}{12})''x^4 - (S_{11}g'(y))''x + (S_{11}h(y))''$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = S_{12}f''(y)x^2 + 2S_{22}f(y)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = -(S_{66}f'(y))'x^2$$

$$(S_{11}f''(y)) = 0 \quad (III.8.1)$$

$$(-S_{11}g'(y))'' = 0 \quad (III.8.2)$$

$$(S_{11}h(y))'' + 2S_{22}f(y) = 0 \quad (III.8.3)$$

Par intégration des équations (III.8.1)

de (III.8.3) $\rightarrow (S_{11}f''(y))' = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_{11}f''(y))' = a_1 \\ S_{11}f''(y) = a_1y + a_2 \quad f''(y) = a_1 \frac{y}{S_{11}} + \frac{1}{S_{11}} a_2 \\ f''(y) = a_1A_1 + a_2A_2 ; \quad A_1 = \frac{y}{S_{11}} \end{array} \right. \quad (III.9)$$

$$f'(y) = a_1A_1^0 + a_2A_2^0 + a_3 ; \quad A_2 = \frac{1}{S_{11}}$$

$$f(y) = a_1A_1^1 + a_2A_2^1 + a_3y + a_4$$

$$A_1^0 = \int_{-h}^y A_1 dy ; \quad A_2^0 = \int_{-h}^y A_2 dy$$

$$A_1^1 = \iint_{-h}^y A_1 dy dy ; \quad A_2^1 = \iint_{-h}^y A_2 dy dy$$

De (3.8.2) : $(-S_{11}g'(y))'' = 0$

$$(-S_{11}g'(y))' = a_5 ; \quad -S_{11}g'(y) = a_5y + a_6$$

$$g'(y) = -a_5 \frac{y}{S_{11}} - a_6 \frac{1}{S_{11}}$$

$$g'(y) = -a_5B_1 - a_6B_2 \quad (III.10)$$

$$g(y) = -a_5B_1^0 - a_6B_2^0 + a_7 \quad B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2$$

$$B_1^0 = A_1^0$$

$$B_2^0 = A_2^0$$

De(III.8.3) :

$$(S_{11}h(y))'' = -2 S_{22}f(y)$$

$$(S_{11}h(y))' = -2 \int_{-h}^y S_{22} f(y)dy + a_8$$

$$S_{11}h(y) = -2 \iint_{-h}^y S_{22}f(y)dydy + a_8y + a_9$$

$$h(y) = -\frac{2}{S_{11}} \iint_{-h}^y S_{22}f(y)dydy + a_8 \frac{y}{S_{11}} + \frac{1}{S_{11}} a_9$$

$$h(y) = -\frac{2}{S_{11}} \iint_{-h}^y S_{22}(a_1A_1^1 + a_2A_2^1 + a_3y + a_4) + a_8 \frac{y}{S_{11}} + a_9 \frac{1}{S_{11}} \quad (III.11)$$

$$= a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 + a_4C_4 + a_5C_5 + a_6C_6 + a_7C_7 + a_8C_8 + a_9C_9$$

$$\text{Avec : } C_5 = C_6 = C_7 = 0$$

$$C_1 = -\frac{2}{S_{11}} \int_{-h}^2 \int_{-h}^h S_{22}A_1^1 dydy$$

$$C_2 = -\frac{2}{S_{11}} \int_{-h}^2 \int_{-h}^h S_{22}A_2^1 dydy$$

$$C_3 = -\frac{2}{S_{11}} \int_{-h}^2 \int_{-h}^h S_{22}y dy$$

$$C_4 = -\frac{2}{S_{11}} \int_{-h}^2 \int_{-h}^h S_{22} dy$$

$$C_8 = A_1, C_9 = A_2$$

Détermination des constantes à partir des équations de conditions aux limites sur les faces de la poutre :

$$\left[\begin{array}{l} \bar{X} = \sigma_{xx}l + \tau_{xy}m \\ \bar{Y} = \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m \end{array} \right. \quad (III.12)$$

Pour

$$y = +h \quad -l \leq x \leq +l, \quad \vec{n} \text{ (0.1)}$$

$$\bar{X} = 0 = \tau_{xy}(x, +h)$$

$$\bar{Y} = -\frac{q}{l^2}x^2 = \sigma_{yy}(x, +h)$$

$$\rightarrow \tau_{xy}(x, +h) = 0 \quad \sigma_{yy}(x, +h) = -\frac{q}{l^2}x^2$$

$$\bar{X} = -\tau_{xy} \quad \tau_{xy}(x, -h) = 0$$

$$\bar{Y} = 0 = -\sigma_{yy} \quad \sigma_{yy}(x, -h) = 0$$

$$\text{Pour } x = +l \quad -h \leq y \leq +h \quad \vec{n}(1,0)$$

$$\bar{X} = \sigma_{xx}(l, y)$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy}(l, y)$$

$$N = \int_{-h}^{+h} \sigma_{xx}(l, y)y \, dy = 0$$

$$M = \int_{-h}^{+h} \sigma_{xx}(l, y)y^2 \, dy = 0 \quad \text{(III.13)}$$

$$R = \int_{-h}^{+h} \tau_{xy}(l, y) \, dy = \frac{2}{3}ql$$

$$\tau_{xy} = -f' \frac{(y)}{3}x^3 + g(y)$$

$$\tau_{xy}(x, h) = -f' \frac{(h)}{3}x^3 + g(h) = 0 \quad \text{(III.14)}$$

$$\text{Si } f'(h) = 0, \quad g(h) = 0$$

$$\tau_{xy}(x, -h) = -f' \frac{(-h)}{3}x^3 + g(-h) = 0$$

$$f'(-h) = 0, \quad g(-h) = 0$$

$$a_1 A_1^0(h) + a_2 A_2^0(h) + a_3 = 0$$

$$a_1 A_1^0(-h) + a_2 A_2^0(-h) + a_3 = 0 \rightarrow a_3 = 0$$

$$-a_5 B_1^0(h) - a_6 B_2^0(h) + a_7 = 0$$

$$-a_5 B_1^0(-h) - a_6 B_2^0(-h) + a_7 = 0 \rightarrow a_7 = 0$$

(III.15)

$$\sigma_{yy}(x, +h) = f(h)x^2 = -\frac{q}{l^2}x^2$$

$$\rightarrow f(h) = -\frac{q}{l^2}$$

$$a_1A_1^1(h) + a_2A_2^1(h) + a_4 = -\frac{q}{l^2}$$

$$\sigma_{yy}(x, -h) = 0 \quad \rightarrow f(-h) = 0$$

$$a_1A_1^1(-h) + a_2A_2^1(-h) + a_4 = 0 \quad \rightarrow a_4 = 0 \quad \text{(III.16)}$$

$$\sigma_{xx}(l, y) = f''(y)\frac{l^4}{12} - g'(y)l + h(y)$$

$$\int_{-h}^{+h} (f''(y)\frac{l^4}{12} - g'(y)l + h(y))dy = 0$$

$$\int_{-h}^{+h} (f''(y)\frac{l^4}{12} - g'(y)ly + h(y)y)dy = 0$$

$$\int_{-h}^{+h} (-f'(\frac{y}{3})l^3 + g(y))dy = \frac{1}{3}ql$$

En résolvant le système d'équations qui comporte les constantes $(a_1, a_2, a_5, a_6, a_9)$, on peut obtenir les expressions de contraintes σ_{xx} et τ_{xy} .

III.4 Calcul numérique :

Dans cette section une étude numérique d'une poutre en appui simple en matériau E-FGM de longueur $2L$ et de hauteur $2h$ soumise à une charge distribuée paraboliquement q .

L'analyse est effectuée pour différentes valeurs de rapports des modules d'élasticité longitudinales E_t/E_b .

Les caractéristiques matérielles sont $E_b = 70$ GPa et le coefficient de poisson

$$\nu = 0,3, \quad E(y) = E_t e^{\beta(y+h)}, \quad \beta = \frac{1}{2h} \ln \frac{E_t}{E_b},$$

Dans la présente étude, nous prenons les différents rapports $E_t/E_b = 1, 2, 5$ et 10 dans la poutre E-FGM.

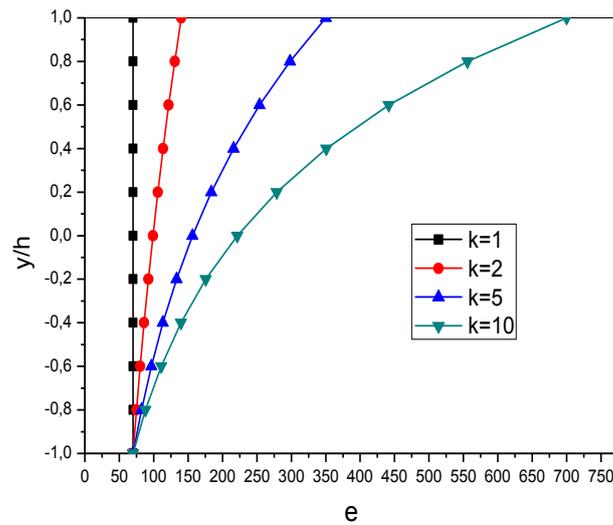


Figure III.2. Distribution du module de Young a travers l'épaisseur de la poutre E-FGM pour différentes valeurs de l'indice k.

La figure III.2 représente la variation du module d'élasticité longitudinal $E(y)$ à travers l'épaisseur de la poutre pour différents rapports E_t/E_b . On remarque bien que lorsqu'on augmente le rapport des modules à travers l'épaisseur de la poutre le module de Young de la loi de mélange augmente (plus rigide).

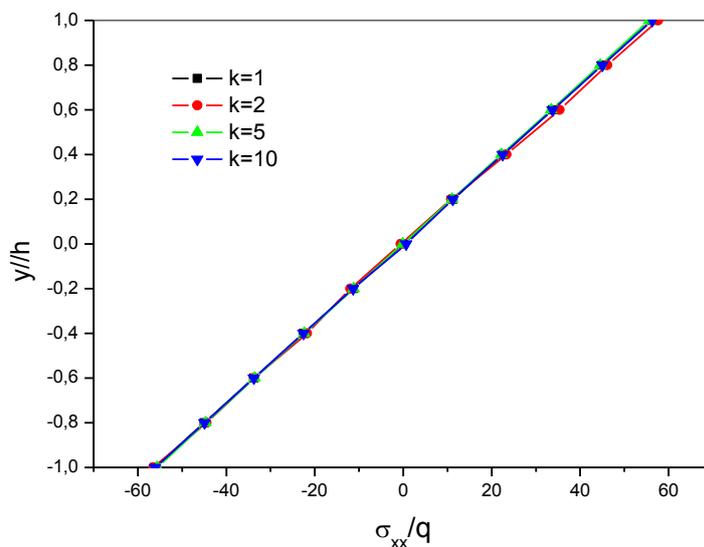


Figure III.3. Contrainte normale (σ_{xx}/q) adimensionnelle pour différents rapport de la poutre E-FGM simplement appuyée à $x= L/2$.

Pour les matériaux fonctionnellement gradués (E_t/E_b) les valeurs des contraintes sont différentes de la distribution linéaire pour un matériau homogène $E_t/E_b=1$. Ces contraintes sont beaucoup plus grandes au niveau de la face $y=h$. Il est intéressant de noter que σ_x/q varie de manière non linéaire de zéro au face ($y=-h/2$) et à la face ($y=h/2$).

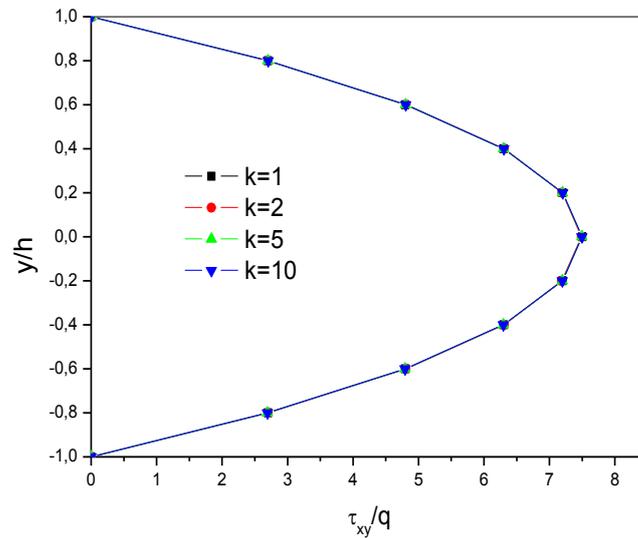


Figure III. 4 Contrainte tangentielle (τ_{xy}/q) adimensionnelle par différents rapports de la poutre simplement appuyée E-FGM à $x= L/2$

La contrainte disparaît à la fois sur les surface supérieure et inférieure, à partir desquelles les conditions aux limites données sont satisfaites et l'exactitude de la présente solution est validée. Le champ de contrainte de la poutre est fortement augmenté avec l'augmentation des rapports dans la zone médiane.

Conclusion :

Dans ce chapitre on a effectué une formulation analytique du problème des poutres soumises à des charges paraboliques basée sur la théorie de l'élasticité.

Les résultats des contraintes obtenues varient en fonction de la variation des rapports E_t/E_b dans la poutre en EFGM pour cela on peut dire que ce paramètre influe directement sur la distribution des contraintes à travers l'épaisseur.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail on effectué une analyse statique du comportement des poutres en E-FGM soumise à des charge paraboliques en utilisant d'élasticité.

Une solution d'élasticité plane est développée pour une poutre à gradation fonctionnelle exponentielle au moyen de la méthode semi-inverse. Le module de Young de la poutre est supposé varier de manière exponentielle dans la direction de l'épaisseur. Les champs de contrainte et de déplacement de la poutre E-FGM sont fortement influencés par le rapport E_t/E_b . La solution obtenue dans ce travail peut servir de base à l'établissement de théories simplifiées des FGM au de résultat de référence pour évaluer d'autre méthodologies approximatives.

La solution obtenue est valable pour des variations graduées arbitraires de la distribution matérielle, elle pourrait donc servir de base pour établir des théories simplifiées de la FGM ou de résultat de référence pour évaluer d'autres méthodologies approximatives

En perspective on propose d'appliquer cette théorie en utilisant la fonction de contraintes d'Airy.

Références bibliographiques

- [Abdizadeh H.1997] Elaboration et caractérisation de composites « composites laminaires
- [Afaq, K.S. Afaq] M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In Comptes-rendus des 13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [Ahouel. 2016] Ahouel et al (2016) “Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept”, *Steel and Composite Structures*, **20**(5), 963-981.
- [Ait Amar Meziane. 2014] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **16**(3), 293-318.
- [Ait Atmane 2011] Vibration des structures composites en tenant compte de l’effet du cisaillement, Thèse de Doctorat de l’université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes 2011.
- [AitAtmane. 2015] AitAtmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., and Mahmoud, S.R., (2015), “A computational shear displacement model for Vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel and Composite Structures, An Int'l Journal*, **19**(2), 369-385.
- [AitYahia. 2015] AitYahia, S., AitAtmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech.*, **53**(6), 1143-1165.
- [Al-Basyouni. 2015] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Composite Structures*, **125**, 621–630.
- [Belabed. 2014] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites: Part B*, **60**, 274–283.
- [Bellifa. 2016] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**, 265-275.
- [Benferhat. 2016a] Benferhat, R., HassaineDaouadji, T., Hadji, L. and Said Mansour, M. (2016a), “Static analysis of the FGM plate with porosities”, *Composite Structures*, **21**(1), 123–136.
- [Benferhat. 2016b] Benferhat, R., HassaineDaouadji, T., Said Mansour, M., and Hadji, L., (2016b), “ Effect of porosity on the bending and free vibration response of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak foundations”, *Earthquakes and Structures*, **10**(6) , 1429-1449.

- [**Bennai. 2015**] Bennai, R., AitAtmane, H., Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel and Composite Structures*, **19**(3), 521 - 546.
- [**Bessaim 2013**] Analyse statique de la flexion des poutres ZrO₂/ Ti-6Al-4V en P-FGM », *Nature & Technologie A- Sciences fondamentales et Engineering*, n° 09, 2013.
- [**Bounouara. 2016**] Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I., Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel and Composite Structures*, **20**(2), 227 – 249.
- [**Bourada. 2015**] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **18**(2), 409 – 423.
- [**Chen, W, Q Bian, Z.G., lv C.F Ding, H.J., 2004**]. 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid. *Int. J solids struct.*, 41(3-4) :947-964. [Doi: 10.1016/j. Isolator 2003. 09.036]
- [**Chen, WQBA, ZG, Ding H, J., 2001**]. Three-dimensional analysis of a thick FGM rectangular plate
- [**Elomari. 2011**] Elomari, Analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable. Thèse de Master 2 de l’université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbess 2011.
- [**Farahani. 2015**] Farahani, H., Barati, F. (2015), “Vibration of submerged functionally graded cylindrical shell based on first order shear deformation theory using wave propagation method”, *Struct. Eng. Mech.*, **53**(3), 575-587.
- [**Hadji. 2014**] Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A., Bedia, E.A. (2014), “A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam”, *Steel and Composite Structures*, **16**(5), 507-519.
- [**Hadji. 2015**] Hadji, L., and AddaBedia, E.A., (2015) “Influence of the porosities on the free vibration of FGM beams”, *Wind and Structures*, **21**(3) 273-287.
- [**Huu-Tai Thai**] Thuc P. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, *International Journal of Mechanical Sciences* 62, 57–66, 2012.
- [**Li.2010**] Li, X.F., Wang, B.L. and Han, J.C., A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams, *Arch. Appl. Mech.*, 80(10), 1197-1212, 2010.
- [**M. A. A. Meziane, H. H. Abdelaziz, and A. Tounsi, 2014**] An Efficient and simple Refined Theory for Buckling and free vibration of exponentially Graded Sandwich plates under various Boundary conditions. *Sandwich Struct. Mater.* 16 (3), 293-318
- [**Mahi. 2015**] Mahi, A., AddaBedia, E.A., Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2489–2508.

Références bibliographiques

- [Mouaici. 2016] Mouaici, F., Benyoucef, S., AitAtmane, H., and Tounsi, A., “ Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory”, *Wind and Structures*, **22**(4) 429-454.
- [Nedri. 2014] Nedri, K., El Meiche, N. and Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mech. Compos.Mater.*,**49**(6), 641-650.
- [Ould larbi.2013] Ouldarbi ,L.,Kachi ,A.,Houari ,M.S.A.andtounsi , A.,An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams,*Mech .Bas.Des .struct .Mach.*,41,421-433,2013.
- [Sallai et al, 2009] B.O. Sallai, A. Tounsi, I. Mechab, B.M. Bachir, M. Meradjah, E.A. AddaBedia, A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al₂O₃ S-FGM thick beams, *Computational Materials Science*, 44 (2009) 1344–1350.
- [Sankar, B, V, 2001].An elasticity solution for functionally graded beams. *Compos SCI. Techno.*,
- [Sankar, B, V., Tzeng, J, T., 2002]. Thermal stresses in functionally graded beams. *AIAAJ.*, 40: 1228- 1232 .
- [simsek.2010] Simsek,M., Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories , *Nucl .Eng .Des.*, 240(4),697-705,2010.
- [Tai. 2011]Tai, H. T., and Kim, S. E., (2011), “Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory.”*Composite Structures*, **93**(7), 1738-1746.
- [Tai. 2014] Tai, H. T. and Choi, D. H., (2014),“Levy Solution for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates based on a Refined Plate Theory, *KSCE Journal of Civil Engineering*, **18**(6),1813-1824.
- [Thai.2012] Thai,H,T. and Vo,TP. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories ,*Int .J.Mech.Sci.*,62(1),57-66,2012.
- [Tlidji. 2014]Tlidji, Y., HassaineDaouadji, T., Hadji, L., Tounsi, A., and AddaBedia, E.A. (2014), “Elasticity solution for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading”, *Journal of Thermal Stresses*, **37**(7), 852–869.
- [Zemri. 2015] Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), “A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **54**(4), 693-710.
- [Zerrouki.S.,2022] Utilisation de la fonction d’Airy dans l’analyse statique des poutres en FGM ; mémoire Master; Univ Tiaret.
- [Zhong, Z., Shang, E, T., 2005] Exact analysis of simply supported functionally graded piezo thermoelectric plates. *J. Intel. Mater. Sys structs.*, 16(7-8) :643-651. [Doi: 10.1177/1045389X05050530

Références bibliographiques

[Zhu. 2001]Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J. and Lee, S. 2001 “Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy”, *Mater. Chem. Phys.*, **68**(1-3), 130-135.
61(5) : 689-696. [Dio : 10. 1016/S0266-3538(01)00007-0]in thermal environment. Journal of Zhejiang University SCIENCE, 4(1) :1-7.