RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
«Analyse fonctionnelle et applications »

Présenté Par :
Benia Abdellatif et Lahlouh Elmahdi

Sous L'intitulé :

Etude de certains opérateurs intégraux avec noyau d'Oinarov

Soutenu publiquement le 22 / 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr BOUHARKET Benaissa	Grade	Université M.C.A.	Président
Mr SENOUCI Abdelkader	Grade	Université Pr.	Encadreur
Mr SOFRANI Mohamed	Grade	Université M.C.B.	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH de nous avoir donné la foi , le courage et la confiance en nous même pour pouvoir continuer nos études et arriver à ce niveau.

Nous remercions chaleureusement Monsieur A.Senouci de nous avoir offert un cadre de formation agréable et les moyens d'assurer au mieux notre travail, nous le remercions encore pour sa disponibilité, sa rigueur et professionnalisme tout au long de ce projet .

Notre gratitude va au président de jury Mr.B.Bouharket et Mr.M.Sofrani qui nous ont fait l'honneur par leur présences et qui ont bien voulu examiner notre mémoire . En fin, nous remercions nos parents, nos familles , nos entourages , et amis pour leur compréhension et leur encouragement tout au long de nos études , et toutes les personnes qui nous ont aidés et soutenu de prés ou de loin.

Table des matières

Introduction générale

Dans ce travail sont considérés des opérateurs intégraux dont le noyau est celui d'Oinarov. Ces derniers généralisent plusieurs autres opérateurs intégraux, à savoir les opérateurs de Hardy, de Riemann-Liouville, de convolution, de Weyl et autres.

le mémoire comprend une introduction, trois chapitres, une conclusion et a la fin une bibliographie .

Au premier chapitre sont données des notions d'analyse fonctionnelle nécessaires dans la suite de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, on trouve un bref aperçu sur l'inégalité de Hardy moderne et les conditions sous lesquelles elle est satisfaite .De plus est considéré le cas où les fonctions de poids sont des fonctions puissance . Il est aussi question de la constante optimale dans ces différentes estimations . Ainsi sont cités quelques exemples d'illustration .

Au dernier chapitre on traite des opérateurs généraux de Hardy (opérateur K et son conjugué $\widetilde{K}$). A partir d'un lemme dont la preuve est donnée d'une manière détaillée on aborde quelques théorèmes où les paramètres d'intégration p et q sont donnés dans l'ordre $1 < p \leq q < \infty$ et puis $1 < q \leq p < \infty$ pour l'opérateur K , et son conjugué $\widetilde{K}$ .Ainsi est considéré le cas $0 < q < 1 < p < \infty$.

A la fin de ce chapitre ont été traités les cas particuliers des opérateurs K et $\widetilde{K}$, c'est-à-dire celui de Riemann-Liouville et son conjugué .

A la fin du manuscrit on trouve une conclusion et une bibliographie assez détaillée .

Chapitre 1

Espaces classiques de Lebesgue.

1.1 Définitions et inégalités intégrales.

Notations :

1. On note par e le sous ensemble de Ω de mesure nulle .
2. On note par p.p pour dire presque partout.
3. $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω.
4. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ est noté par $C(\mathbb{R}^n)$.
5. Pour deux quantités positives (non négatives) A, B,
   (a) $A \lesssim B$ signifie que $A \leq c_1 B$ avec un certain $c_1 > 0$,
   (b) $A \gtrsim B$ signifie que $A \geq c_2 B$ avec un certain $c_2 > 0$,
   (c) $A \approx B$ signifie que simultanément $A \lesssim B$ et $A \gtrsim B$.
   (d) := on désigne par .

Lemme 1.1 (Lemme de Fatou) :
Soient $\forall k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k non négatives et mesurables sur un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et presque partout sur Ω existe la limite finie ou infinie $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$.
Alors $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ est mesurable et de plus :

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_\Omega f_k(x)dx. \tag{1.1}$$

Démonstration. Voir [21], [7].

Théorème 1.1 (Convergence monotone) :
Soient $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k des fonctions non-négatives et mesurables sur un ensemble Ω mesurable, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de plus $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ p.p . Alors

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx. \tag{1.2}$$

Démonstration. Voir [21], [7].

Théorème 1.2 (Convergence dominée) :

Soient $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k des fonctions mesurables sur un ensemble Ω mesurable, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et p.p existe sur Ω la limite finie $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. S'il existe une fonction $G(x)$ intégrable et non négative p.p. sur Ω, telle que

$$|f_k(x)| \leq G(x), \tag{1.3}$$

alors $\forall k \in \mathbb{N}$ les fonctions f_k et la fonction $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ sont intégrable sur Ω et

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx = \int_\Omega f(x)dx. \tag{1.4}$$

Démonstration. Voir [21], [7].

Remarque 1.1 :

La plus petite possible fonction g dans (1.3) est la fonction G définie comme suit :

$$G(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|, \quad \forall x \in E.$$

Théorème 1.3 (Théorème de Fubuni) :

Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n\,(E \subset \mathbb{R}^n)$ et $F \subset \mathbb{R}^m$ (un ensemble mesurable) et la fonction $f(x,y)$ intégrable sur $E \times F$. Alors pour presque tous les $x \in E$, $f(x,y)$ est intégrable sur F, pour presque tous les $y \in F$ $f(x,y)$ est intégrable sur E et :

$$\int_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int_E \left(\int_F f(x,y)dy\right)dx = \int_F \left(\int_E f(x,y)dx\right)dy. \tag{1.5}$$

Démonstration. Voir [21], [7].

Conséquence 1.4 :

Si $f(x,y)$ est mesurable sur $E \times F$ et est finie l'une des intégrales :

$$\int_E \left(\int_F |f(x,y)|dy\right)dx, \int_F \left(\int_E |f(x,y)|dx\right)dy,$$

alors toutes les intégrales de (1.5) existent et de plus cette dernière est vérifiée.

Remarque 1.2 :

Si f n'est pas intégrable sur $E \times F$, alors les intégrales itérées peuvent ne pas exister ou exister et être différentes.

Théorème 1.5 (Théorème de Luzin) :

Pour qu'une fonction $f(x)$ définie sur un segment $[a, b]$ soit mesurable, il faut et il suffit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction $\varphi(x)$ continue sur $[a, b]$ telle que

$$|\{x, f(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon. \tag{1.6}$$

Démonstration. Voir [19] Ch. V théorème 9.

Dans ce qui suit on définit l'espace de Lebesgue (espace de fonctions).

Définition 1.1 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable avec $0 < p < \infty$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $f \in L_p(\Omega)$ si :

(a) f est mesurable sur Ω.

(b) $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int |f|^p dx\right)^{1/p} < \infty$.

Exemple 1.1 :

Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E_1 \\ -1 & \text{si } x \in E/E_1 \end{cases}$$

avec $E_1 \subset E, E_1$ non mesurable, alors

(1) n'est pas vérifieé.

(2) $\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E dx\right)^{1/p} = |E|^{\frac{1}{p}} < \infty$, donc $f \notin L_p(E)$.

Définition 1.2 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\sup_{x\in\Omega} \text{vrai} f(x) = \inf_{e\subset\Omega} \sup_{x\in\Omega/e} f(x) \tag{1.7}$$

$$\inf_{x\in\Omega} \text{vrai} f(x) = \sup_{e\subset\Omega} \inf_{x\in\Omega/e} f(x). \tag{1.8}$$

Définition 1.3 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mesurable et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}, |\Omega| > 0$. On dit que $f \in L_\infty(\Omega)$ si f est mesurable et

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{vrai}\, |f(x)| < \infty. \tag{1.9}$$

Remarque 1.3 :

On pose $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = 0$ pour $|\Omega| = 0$.

Théorème 1.6 (Théorème de Riesz) :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable et f une fonction mesurable sur Ω, alors :

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{1.10}$$

Démonstration. . Voir [1], et [9].

1.1.1 Inégalités de Hölder.

Lemme 1.2 (Inégalité de Young) :

Soit $p \geq 1$, alors

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1.11}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.3 :

Pour $0 < p < 1$, on a

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.12}$$

Corollaire 1.1 :

Soit $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors

$$\forall A, B \geq 0, \quad (AB)^r \leq \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q. \tag{1.13}$$

Démonstration Comme $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$, et on applique l'inégalité (1.11) avec $a = A^r$ et $b = B^r$ on trouve

$$(AB)^r = ab \leq \frac{a^{p/r}}{p/r} + \frac{b^{q/r}}{q/r} = \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q.$$

Lemme 1.4 :

Soit Ω un ensemble mesurable, si les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ sont mesurables sur Ω, et g est non négative, alors :

$$\inf_{x\in\Omega} \text{vrai}\, f(x) \int_\Omega g(x)dx \leq \int f(x)g(x)dx \leq \sup_{x\in\Omega} \text{vrai}\, f(x) \int_\Omega g(x)dx. \tag{1.14}$$

Démonstration Soit $e \subset \Omega$ tel que $|e| = 0$, alors

$$\int_{\Omega} fgdx = \int_{\Omega \setminus e} fgdx \leq \sup_{\Omega \setminus e} f(x) \int_{\Omega} gdx$$

alors

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \sup_{\Omega / e} f(x) \int_{\Omega} g(x)dx$$

d'où

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \inf_{x \in e} \sup_{x \in \Omega \setminus e} f(x) \int_{\Omega} gdx = \sup_{x \in \Omega} \text{vrai}\, f(x) \int_{\Omega} gdx.$$

D'une manière analogue.on prouve l'inégalité gauche de (1.14).

□

Corollaire 1.2 :

Soit Ω un ensemble mesurable, si les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sont mesurables sur Ω et $f \in L_\infty(\Omega), g \in L_1(\Omega)$, alors :

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \|g\|_{L_1(\Omega)}. \tag{1.15}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} fgdx \right| &\leq \int_{\Omega} |fg|dx \leq \sup_{x \in \Omega} \text{vrai}\, |f(x)| \int |g|dx \\ &\leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \|g\|_{L_1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Théorème 1.7 (Inégalité de Hölder) :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $0 < p \leq \infty$, $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_q(\Omega)$ avec $1/p + 1/q = 1$, alors :

(i) Si $1 \leq p \leq \infty$

$$\int_{\Omega} |fg|dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{1.16}$$

(ii) Si $0 < p < 1, \forall x \in \Omega, g(x) \neq 0$

$$\int_{\Omega} |fg|dx \geq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{1.17}$$

Pour la preuve de (1.16) et (1.17) on utilise l'inégalité de Young (1.11) et (1.12).

Corollaire 1.3 :

Soit $p > 0, p_1 \leq \infty, -\infty \leq p_2 \leq \infty$ et $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$, alors

(i) Si $p \leq p_1$

$$\|fg\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)} \|g\|_{L_{p_2}(\Omega)}. \tag{1.18}$$

(ii)Si $p > p_1$, $\forall x \in \Omega, g(x) \neq 0$

$$\|fg\|_{L_p(\Omega)} \geq \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)} \|g\|_{L_{p_2}(\Omega)}. \tag{1.19}$$

Pour la preuve de (1.18) et (1.19) on applique respectivement (1.16) et (1.17) avec $\frac{1}{p_1/p}+\frac{1}{p_2/p} = 1$.

Proposition 1.1 :

Soit $p_i \in]1, \infty[, i = 1, 2, \ldots, k$, et $1 < r < \infty$ tel que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$ (les p_i sont dits r conjugués), $f_i \in L_{p_i}(\Omega)$, alors

$$f = \prod_{i=1}^{k} f_i \in L_r(\Omega) \text{ et } \|f\|_{L_r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L_{p_i}(\Omega)}\,. \tag{1.20}$$

Démonstration Par récurrence.

Corollaire 1.4 :

Soit $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, alors

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L_{p_1}(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L_{p_2}(\Omega)}. \tag{1.21}$$

où $\alpha \in (0.1)$, et tel que $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

Démonstration La preuve est analogue à (1.18).

Corollaire 1.5 :

Soit $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, alors $\forall \epsilon > 0$ on a

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} \left(\epsilon^{1-\alpha}\|f\|_{L_{p_1}(\Omega)} + \epsilon^{-\alpha}\|f\|_{L_{p_2}(\Omega)}\right). \tag{1.22}$$

où $\alpha \in (0.1)$, et tel que $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

Démonstration l'inégalité (1.22) d'écoule de l'inégalité (1.21) si on prend en considération et en utilisant aussi l'inégalité (1.11).

1.1.2 Inégalités de Minkowsky.

Lemme 1.5 :

Soit $f, g \in L_\infty(\Omega)$, alors on a l'inégalité suivante :

$$\|f_1 + f_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Démonstration Soit e_1 et e_2 deux ensembles tels que $|e_1| = |e_2| = 0$, on pose $e = e_1 \cup e_2$, alors $\forall \epsilon > 0$, on a

$$\sup_{\Omega/e_i} |f_i| \leq \|f_i\|_{L_\infty(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

et donc

$$\sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \sup_{\Omega/e} (|f_1| + |f_2|) \leq \sup_{\Omega/e} |f_1| + \sup_{\Omega/e} |f_2|$$

$$\leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \epsilon$$

$$\inf_e \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \epsilon,$$

on fait tendre ϵ vers 0 , d'où :

$$\inf_e \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)}$$

$$\|f_1 + f_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Théorème 1.8 (Inégalité de Minkowsky) :

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_p(\Omega)$, alors :

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.23}$$

Démonstration Voir [9].

Corollaire 1.6 :

Soient $m \in \mathbb{N}$, et $f_k \in L_p(\Omega)$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $1 \leq p \leq \infty$, alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.24}$$

Démonstration Par récurrence.

Corollaire 1.7 (Inégalité de Minkowsky pour les sommes infinies) :

Soit $f_k \in L_p(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} . \tag{1.25}$$

Démonstration On suppose que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} < \infty$.

A l'aide du critère de Cauchy pour les séries numériques et l'inégalité de Minkowsky pour les sommes finies on montre que la somme $S_m = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}$ est une suite de Cauchy et puisque L_p est complet, on déduit que

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} ,$$

on passe à la limite quand $m \to \infty$ et en vertu de la continuité des seminormes $\sum_{k=1}^{m} f_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, lorsque $m \to \infty$, on a

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}$$

Théorème 1.9 :

Soit $0 < p < 1$, et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $f, g \in L_p(\Omega)$, alors

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \right) . \tag{1.26}$$

Démonstration. On utilise l'inégalité , $\forall a, b > 0$,

$$(a + b)^p \leq c\,(a^p + b^p) , \tag{1.27}$$

si $p \geq 1, c = 2^{p-1}$ et si $0 < p < 1$, alors $c = 1$. On applique cette inégalité avec $a = |f|$ et $b = |g|$, on obtient :

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f + g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p dx + \int_\Omega |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

on applique l'inégalité (1.27), avec $c = \max\left(1, 2^{\frac{1}{p}-1}\right) = 2^{\frac{1}{p}-1}$, et donc

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L_p(\Omega)} &\leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left(\left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \right) , \end{aligned}$$

□

Lemme 1.6 :

Soit $a_i > 0, i = 1, \dots, m$, alors on a l'inégalité suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_i\right)^p \leq c \left(\sum_{k=1}^{m} a_i^p\right) \tag{1.28}$$

avec $c = \max(1, m^{p-1})$

Démonstration. Par récurrence à partir de l'inégalité (1.27).

Corollaire 1.8 :

Soit $0 < p < 1$, alors

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} f_k\right\|_{L_p(\Omega)} \leq m^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.29}$$

Démonstration. A partir du Corollaire 1.1.28 et du Lemme 1.1.31.

Théorème 1.10 (Inégalité intégrale de Minkowsky) :

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables, et $1 \leq p \leq \infty$, f une fonction mesurable sur $E \times F$ alors

$$\left\|\int_F f(.,y)dy\right\|_{L_p(E)} \leq \int_F \|f(.,y)\|_{L_p(E)} dy. \tag{1.30}$$

Démonstration. Voir [9]. p. 316-317.

Théorème 1.11 :

Soient $E \subset \mathbb{R}^m$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables, et f une fonction mesurable sur $E \times F$ alors pour $0 < q \leq p \leq \infty$ on a

$$\left\|\left\| f(x,y) \right\|_{L_y^q(F)}\right\|_{L_x^p(E)} \leq \left\|\left\| f(x,y) \right\|_{L_x^p(E)}\right\|_{L_y^q(F)}. \tag{1.31}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\left\|\left\| f(x,y) \right\|_{L^q_y(F)}\right\|_{L^p_x(E)} &= \left\| \left(\int_F |f(x,y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p_x(E)} \\
&= \left\| \int_F |f(x,y)|^q dy \right\|^{\frac{1}{q}}_{L_x^{\frac{p}{q}}(E)} \\
&\leq \left(\int_F \left\| |f(x,y)|^q \right\|_{L_x^{\frac{p}{q}}(E)} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_F \| f(x,y) \|^q_{L^p_x(E)} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\|\left\| f(x,y) \right\|_{L^p_x(E)}\right\|_{L^q_y(F)} .
\end{aligned}$$

1.2 Propriétés des espaces de Lebesgue.

1.2.1 Dual de L_p.

Définition 1.4 :

On dit que $l : E \to \mathbb{C}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur E si :

(1) $l(af + bg) = al(f) + bl(g)$ pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et $f, g \in E$.

(2) $|l(f)| \leq c\|f\|_E$.

Proposition 1.2 :

L'application $l : L_p(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par

$$l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad g \in L_q(\Omega), \tag{1.32}$$

est une fonctionnelle linéaire continue, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

L'ensemble des fonctionnelles linéaires sur $L_p(\Omega)$ est noté par $(L_p(\Omega))^*$.

Démonstration 1) La linéarité est évidente.

2) La continuité

$$|l(f)| = \left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq \int_\Omega |f(x)||g(x)|dx,$$

par application de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \cdot|l(f)| &\leq \|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)} \\ &\leq c\|f\|_{L_p(\Omega)}, \end{aligned}$$

avec $c = \|g\|_{L_q(\Omega)}$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

□

Remarque 1.4 :

L'espace dual $(L_p(\Omega))^*$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ normé :

$$\|l\| = \sup\left\{|l(f)| : \|f\|_{L_p(\Omega)} \leq 1\right\}. \tag{1.33}$$

1.2.2 Convergences dans L_p.

Définition 1.5 :

On dit qu'une suite de fonctions mesurables $f_n(x)$ converge en mesure vers une fonction $f(x)$ si pour tout $\sigma > 0$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} |\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}| = 0. \tag{1.34}$$

Théorème 1.12 :

Si une suite de fonctions mesurables $\{f_n(x)\}$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$, elle converge vers la même fonction $f(x)$ en mesure.

Démonstration. Voir [19] Chapitre V, §4 ; Théorème 7.

Théorème 1.13 :

Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions mesurables convergeant en mesure vers $f(x)$. Alors, de cette suite on peut extraire une sous suite $\{f_{n_k}(x)\}$ convergeant vers $f(x)$ presque partout.

Démonstration. Voir [19] Chapitre V, §4 ; Théorème 8.

Définition 1.6 :

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L_p(\Omega)$, on dit que (f_n) converge faiblement vers f si

$$\lim_{n\to\infty} l(f_n) = l(f) \text{ pour tout } l \in (L_p(\Omega))^*. \tag{1.35}$$

Théorème 1.14 :

Soit $f \in L_p(\Omega)$ telle que $l(f) = 0$ pour toute $l \in (L_p(\Omega))^*$ alors $f = 0$. p.p.

Théorème 1.15 :

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge faiblement vers f dans $L_p(\Omega)$, alors :

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.36}$$

Démonstration On distingue deux cas :

a) $1 \leq p < \infty$ On pose

$$l(h) = \int_\Omega g f dx, \text{avec}\, g(x) = |f(x)|^{p-2}\overline{f(x)}.$$

Alors d'après la preuve du théorème précédent on a $l(f) = \|f\|_{L_p}^p$ et par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|f\|_{L_p}^p = l(f) = \lim_{n\to\infty} l(f_n) \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g f_n dx \leq \|g\|_{L_q} \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L_p}.$$

Comme $\|g\|_{L_q} = \|f\|_{L_p}^{p-1}$ on a

$$\|f\|_{L_p}^p \leq \|f\|_{L_p}^{p-1} \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L_p}$$

D'où

$$\|f\|_{L_p} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_{L_p}$$

b) $p = \infty$, on pose $a = \|f\|_{L_\infty}$ et

$$A_\epsilon = \{x \in \Omega, |f(x)| > a - \epsilon\}.$$

Alors il existe une sous suite d'ensemble B_k tels que $A_\epsilon \cap B_k$ décroit vers A_ϵ, posons

$$g_{k,\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{si } x \in A_\epsilon \cap B_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De l'inégalité de Hölder on d'éduit

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} g_{k,\epsilon} f_n dx = \int_{A_\epsilon\cap B_k} 1\times|f(x)|dx \leq |A_\epsilon\cap B_k| \lim_{n\to\infty}\|f\|_{L_\infty}.$$

Mais

$$\int_{A_\epsilon\cap B_k} |f(x)|dx \geq (a-\epsilon)\,|A_\epsilon\cap B_k|$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}\inf\|f_n\|_{L_\infty} \geq a-\epsilon = \|f\|_{L_\infty}-\epsilon.$$

On fait tendre ϵ vers 0 , et on obtient le résultat.

□

Théorème 1.16 :

Soit $1\leq p\leq\infty$, le dual de $L_p(\Omega)$ est $L_q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $l(f)=\int_\Omega f(x)g(x)dx$ pour une certaine $g\in L_q(\Omega)$ unique et de plus :

$$\|l\| = \|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{1.37}$$

Démonstration. Voir [21] théorème 2.14 .

Définition 1.7 :

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n(x))$ de L_p converge en moyenne vers $f(x)\in L_p$ avec $1\leq p\leq\infty$ si l'égalité suivante est vérifiée

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L_p}=0. \tag{1.38}$$

Proposition 1.3 :

Si une suite de fonctions $(f_n(x))$ de $L_p, 1\leq p\leq\infty$ converge en moyenne vers $f(x)$, alors elle converge faiblement vers la même fonction $f(x)$.

Démonstration. (A l'aide de l'inégalité de Hölder) On a

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)\|g(x)\mid dx \leq \|f_n-f\,\|_{L_p}\|\,g\|_{L_q}$$

par passage à la limite on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,|g(x)|dx \leq \lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L_p}\|g\|_{L_q},$$

et comme f_n converge en moyenne vers f, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, |g(x)| dx = 0,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))\, (g(x)) dx = 0,$$

et donc f_n converge faiblement vers f.

Remarque 1.5 :

Si $p = 1$ alors la convergence faible est vérifiée $\forall g(x)$ mesurable et bornée, et donc la proposition 1.2.12 est aussi vérifiée.

1.2.3 Complétude, réflexivité et séparabilité.

Théorème 1.17 :

Soit $1 < p \leq \infty$, alors L_p est un espace de Banach.

Démonstration. . Voir [9]

Définition 1.8 :

. Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.

Théorème 1.18 :

L_p est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Démonstration. Voir [7] Chapitre IV.3. Théorème IV.10.

Définition 1.9 :

On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.

Théorème 1.19 :

$L_p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Démonstration. Voir [7] Chapitre IV.3. Théorème IV.13.

1.2.4 Continuité par rapport à la translation de fonctions dans L_p.

Théorème 1.20 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $0 < p < \infty$, alors pour tout $f \in L_p(\Omega)$ on a :

$$\lim_{h \to 0} \left\| f^0(x+h) - f(x) \right\|_{L_p(\Omega)} = 0 \tag{1.39}$$

où

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}.$$

Démonstration. Voir [9].

Remarque 1.6 :

$$x + h \in \Omega \Leftrightarrow x \in \Omega - h.$$

Remarque 1.7 :

Pour $p = \infty$ le théorème n'est plus valable. En effet soit $|\Omega| > 0$, on considère $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que $0 < |\Omega_1| < |\Omega|$ et

$$f^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_1, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega/\Omega_1. \end{cases}$$

alors

$$\left\| f^0(x+h) - f(x) \right\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\chi_{\Omega_1}(x+h) - \chi_{\Omega_1}(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \geq \|1\|_{L_\infty(\Omega)} = 1 \nrightarrow 0.$$

Lemme 1.7 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C(\Omega)$, alors

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \|f\|_{C(\Omega)}. \tag{1.40}$$

Démonstration. Voir [9].

Proposition 1.4 :

Soit $f \in \bar{C}\left(\mathbb{R}^n\right)$ (espace des fonctions bornées et uniformément continues), alors

$$\lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_{\bar{C}(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{1.41}$$

Démonstration Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon,$$

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, |h| < \delta,$$

$$\|f(x+h) - f(x)\|_{\bar{C}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)| \leq \epsilon$$

en vertu du lemme 1.7, on obtient l'égalité (1.42).

□

1.2.5 Injection et densité.

Définition 1.10 :

Soient $(X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y) \in$ e.v.n, alors on dit que X s'injecte continûment dans Y, et on le note par

$$X \hookrightarrow Y, \text{ si } :$$

1) $X \subset Y$.

2) Il existe une constante $M > 0$ telle que $\|x\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X$.

Théorème 1.21 :

Si $1 \leq p < q \leq \infty$ et $|\Omega| < \infty$, alors

$$L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega) \tag{1.42}$$

et

$$f\|_{L_p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L_q(\Omega)}, \forall f \in L_p(\Omega). \tag{1.43}$$

Démonstration (i) Soit $1 < p < q < \infty$, en utilisant l'inégalité de Hölder avec $q/p > 1$ et son conjugué $\frac{q}{q-p}$, on obtient

$$\int_\Omega |f|^p dx = \int_\Omega |f|^p \cdot 1 dx \leq \left(\int_\Omega |f|^q dx\right)^{p/q} \cdot \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{q-p}{q}},$$

élevant à la puissance $1/p$, on déduit que

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L_q(\Omega)}.$$

(ii) $p < q = \infty$, alors on a

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_q(\Omega)}.$$

Maintenant soit $f \in L_q(\Omega)$ alors $\|f\|_{L_q(\Omega)} < \infty$, et d'apres l'inégalité (1.44) on obtient que $\|f\|_{L_p(\Omega)} < \infty$, et donc on a (1.43).

□

Théorème 1.22 :

(Théorème de densité).

(1) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable, $1 \leq p < \infty$; alors $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L_p(\Omega)$.

(2) Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n, 1 \leq p < \infty$; alors $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L_p(\Omega)$.

(3) $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $L_\infty(\Omega)$.

Notations :

- $C^\infty(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables.

- $C_0^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

Par exemple $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L_p(\Omega)$ veut dire : $\forall f \in L_p(\Omega), \exists$ une squsisuite $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f_k - f\|_{L_p(\Omega)} \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Autrement dit f peut être approximée par la suite f_k au sens de la semi-norme dans $L_p(\Omega)$.

Chapitre 2

Sur l'inégalité de Hardy

2.1 Formes classiques de l'inégalité de Hardy

Dans une note publiée en 1920, G. H. HARDY [14] affirme (sans preuve) que si $a > 0, f(x) \geq 0, p > 1$ et $\int_a^\infty f^p(x)dx$ existe convergente, alors

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^\infty f^p(x)dx. \tag{2.1}$$

Dans une autre note publiée en 1925 [15], il écrit : "on a pas donné de preuve, étant principalement occupé du théorème correspondant pour les séries infinies." Son but principal était de trouver une nouvelle preuve, plus élémentaire, de l'inégalité de Hilbert pour les séries doubles, et il a montré dans [15] qu'en fait cette inégalité découle de la version discrète de (2.1) :

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^\infty a_n^p \quad (a_n \geq 0, p > 1)\,. \tag{2.2}$$

En fait, G. H. HARDY avait traité l'inégalité (2.2) plus tôt (voir [13]) après une communication avec M. RIESZ, mais sans la meilleure constante (dans son estimation, la constante $[p^2/(p-1)]^p$ apparaît).

Enfin, dans sa note de 1925 [15] G. H. HARDY écrit :" Dans une lettre du 21 juin 1921, le Prof. LANDAU m'a communiqué une preuve directe du théorème [c'est-à-dire de (2.1)] qui donne la valeur correcte $[p/(p-1)]^p$. Il a également souligné que, si le théorème intégral était étendu au cas $a = 0$, alors le théorème des séries, avec la constante correcte, peut être déduit immédiatement en prenant $f(x) = a_1(0 \leq x < 1), f(x) = a_2(1 \leq x < 2), \ldots$.. D'où G. H. HARDY a énoncé et prouvé l'inégalité suivante :

Supposons que $f(x) \geq 0, p > 1$; qui est intégrable sur tout intervalle fini $(0, x)$ et f^p est intégrable sur $(0, \infty)$. Alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{2.3}$$

Il s'agit de la forme originale de l'inégalité intégrale de Hardy qui a ensuite été largement étudiée et utilisée comme exemple modèle pour l'étude d'inégalités plus générales.

Très peu de temps après la preuve de G. H. HARDY de (2.3), la première modification pondérée est apparue, à savoir la fameuse inégalité

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\varepsilon dx \tag{2.4}$$

valable avec $p > 1$ et $\varepsilon < p-1$ pour toute fonction mesurable non négative f , où la constante $[p/(p-1-\varepsilon)]^p$ est la meilleure possible. Mentionons également l'inégalité duale suivante (qui peut être facilement déduite de (2.4)) :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\varepsilon dx, \tag{2.5}$$

qui est valable - avec $p > 1$ et $\varepsilon > p-1$ - pour toutes les fonctions non négatives mesurables f où la constante $[p/(\varepsilon+1-p)]^p$ la meilleure possible .

2.2 Formes modernes de l'inégalité de Hardy

Au cours des dernières décennies, l'inégalité (2.4) a été étendue à la forme

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p}, \tag{2.6}$$

avec

— a, b satisfaisants

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

— u, v fonctions de poids, c'est-à-dire fonctions mesurables positives p.p. dans l'intervalle (a, b),

— p, q paramètres réels satisfaisant

$$0 < q \leq \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

L'inégalité (2.6) est vraie pour toute fonction mesurable $f \geq 0$ si et seulement si

$$A < \infty, \tag{2.7}$$

où

$$A := \sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'}, \quad p' = \frac{p}{p-1} \tag{2.8}$$

pour le cas

$$1 < p \leq q < \infty,$$

et

$$A := \left(\int_a^b \left(\int_x^b u(t)dt \right)^{r/q} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{r/q'} v^{1-p'}(x)dx \right)^{1/r}, \tag{2.9}$$

pour le cas

$$0 < q < p < \infty, q \neq 1, 1 < p < \infty$$

avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

L'inégalité duale qui est une extension de (2.5) a la forme

$$\left(\int_a^b \left(\int_x^b f(t)dt \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx \right)^{1/p}. \tag{2.10}$$

L'inégalité (2.10) est vraie pour toute fonction mesurable $f \geq 0$ si et seulement si

$$\tilde{A} < \infty, \tag{2.11}$$

où

$$\tilde{A} := \sup_{a<x<b} \left(\int_a^x u(t)dt \right)^{1/q} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)dt \right)^{1/p'}, \tag{2.12}$$

pour le cas $1 < p \leq q < \infty$, et

$$\tilde{A} := \left(\int_a^b \left(\int_a^x u(t)dt \right)^{r/q} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)dt \right)^{r/q'} v^{1-p'}(x)dx \right)^{1/r}, \tag{2.13}$$

pour le cas $0 < q < p < \infty, q \neq 1, 1 < p < \infty$, avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Pour les détails et preuves, ainsi que pour les conditions correspondantes dans le cas p, q égaux à 1 et/ou ∞, voir [[29] , Section 1].

2.3 Meilleures constantes

La meilleure constante C dans (2.6) satisfait

$$A \leq C \leq k(p,q)A, \text{ pour } p \leq q, \tag{2.14}$$

et

$$q^{1/q}\left(\frac{p'q}{r}\right)^{1/q'} A \leq C \leq q^{1/q}\left(p'\right)^{1/q'} A \quad \text{pour} \quad q < p. \tag{2.15}$$

La constante $k(p,q)$ dans (2.14) apparaît sous diverses formes. Par exemple,

$$k(p,q) = p^{1/q}\left(p'\right)^{1/p'},$$

ou

$$k(p,q) = q^{1/q}\left(q'\right)^{1/p'},$$

ou

$$k(p,q) = \left(1+\frac{q}{p'}\right)^{1/q}\left(1+\frac{p'}{q}\right)^{1/p'},$$

(voir [[29], Section 1]) ou, pour $p < q$,

$$k(p,q) = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{q}{s}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right)\Gamma\left(\frac{q-1}{s}\right)}\right]^{s/q}$$

avec $s = q/p - 1$ (voir V. M. MANAKOV [22]).

Ces estimations restent vraies également pour la constante C dans (2.10) avec A remplacée par $\tilde{A}$.

Remarque 2.1 :

Dans ce travail, nous considérons principalement les cas $1 < p < \infty, 0 < q < \infty$, en omettant les valeurs limites $p = 1, \infty, q = \infty$ .On peut facilement reformuler les résultats, en utilisant de manière appropriée la définition des espaces de Lebesgue correspondants (et leurs duaux).

Nous ne considérons pas systématiquement le problème des meilleures constantes de ces inégalités. Toutes les constantes C sont supposées positives et finies et la seule information donnée est que C est comparable à A ($C \approx A$), où A est donné par (2.8) ou (2.9), ou que C est comparable à $\tilde{A}(C \approx \tilde{A})$ où $\tilde{A}$ est donné par (2.12) ou (2.13).

2.4 En bref sur l'histoire

Depuis que l'inégalité de Hardy a été démontrée par G. H. HARDY, il existe une vaste littérature sur l'inégalité, ses variations et ses généralisations. Par conséquent, une liste complète sur le sujet ne peut être donnée. Nous nous référons aux livres [11] et [29] et ne mentionnons que quelques résultats.

La caractérisation des poids u, v pour lesquels les inégalités de Hardy (2.6) et (2.10) sont valables dans l'intervalle

$$p = q > 1,$$

remonte à 1969 (G. TOMASELLI [37] et G. TALENTI [36]) et à 1972 (B. MUCKENHOUPT [26] qui a donné une belle et simple preuve directe) ; de nombreux auteurs se réfèrent également au "manuscrit sans titre et non publié" de A. ARTOLA.

Le cas

$$1 < p \leq q < \infty$$

a été étudié indépendamment en 1978 par J. S. BRADLEY [6] et en 1979 par V. S. KOKILASHVILI [18] et (peut-être même plus tôt) par V. G. MAZ'JA et A. L. ROZIN (voir V. G. MAZ'JA [25]). Ces deux derniers auteurs caractérisent également le cas

$$1 < q < p < \infty.$$

Conditions nécessaires et suffisantes sur les poids dans le cas

$$0 < q < 1, p > 1$$

remontent à la thèse de 1987 de G. SINNAMON [33].

Remarque 2.2 :

Dans les applications, le plus souvent des poids de puissance (c'est-à-dire des poids de la forme $x^\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$) apparaissent. Nous incluons maintenant quelques exemples. Les conditions nécessaires et suffisantes données de la validité de ces inégalités peuvent être facilement vérifiées en s'assurant si les nombres correspondants A de (2.8) et (2.9) ou $\tilde{A}$ de (2.12) et (2.13) sont finis.

Exemple 2.1 ([30]) :

(i) L'inégalité

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q x^\alpha dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty f^p(x) x^\beta dx\right)^{1/p}, \tag{2.16}$$

est vérifiée pour $1 < p \leq q < \infty$ si et seulement si

$$\beta < p - 1, \alpha = \beta \frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1. \tag{2.17}$$

(ii) L'inégalité

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(t)dt \right)^q x^\alpha dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty f^p(x) x^\beta dx \right)^{1/p} \tag{2.18}$$

est vérifiée pour $1 < p \leq q < \infty$ si et seulement si

$$\beta > p - 1, \alpha = \beta \frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1. \tag{2.19}$$

(iii) Pour $p > q$, les inégalités (2.16) et (2.18) ne sont pas vérifiées.

Exemple 2.2 ([30]) :

(i) L'inégalité

$$\left(\int_0^b \left(\int_0^x f(t)dt \right)^q x^\alpha dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^b f^p(x) x^\beta dx \right)^{1/p}, \tag{2.20}$$

avec $0 < b < \infty$ est vérifiée .

(i-1) pour $1 < p \leq q < \infty$ si et seulement si

$$\beta < p - 1, \alpha \geq \beta \frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1, \tag{2.21}$$

(i-2) pour $1 < q < p < \infty$ si et seulement si

$$\beta > p - 1, \alpha > \beta \frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1. \tag{2.22}$$

(ii) L'inégalité

$$\left(\int_0^b \left(\int_x^b f(t)dt \right)^q x^\alpha dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^b f^p(x) x^\beta dx \right)^{1/p}, \tag{2.23}$$

avec $0 < b < \infty$ est vérifiée .

(ii-1) pour $1 < p \leq q < \infty$ si et seulement si

$$\beta > p - 1, \alpha \geq \beta \frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1 \tag{2.24}$$

ou

$$\beta \leq p-1, \alpha > -1 \tag{2.25}$$

$(ii-2)$ pour $1 < q < p < \infty$ si et seulement si

$$\beta > p-1, \alpha > \beta\frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1 \tag{2.26}$$

ou

$$\beta \leq p-1, \alpha > -1 \tag{2.27}$$

Exemple 2.3 ([30]) **:**

(i) L'inégalité

$$\left(\int_a^\infty \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q x^\alpha dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^\infty f^p(x)x^\beta dx\right)^{1/p} \tag{2.28}$$

avec $0 < a < \infty$ est vérifiée

(i-1) pour $1 < p \leq q < \infty$ si et seulement si

$$\beta < p-1, \alpha \leq \beta\frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1 \tag{2.29}$$

ou

$$\beta \geq p-1, \alpha < -1, \tag{2.30}$$

(i-2) pour $1 < p < q < \infty$ si et seulement si

$$\beta < p-1, \alpha < \beta\frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1, \tag{2.31}$$

ou

$$\beta \geq p-1, \alpha < -1. \tag{2.32}$$

(ii) L'inégalité

$$\left(\int_a^\infty \left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^q x^\alpha dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^\infty f^p(x)x^\beta dx\right)^{1/p}, \tag{2.33}$$

avec $0 < a < \infty$ est vérifiée .

(ii-1) pour $1 < p \leq q < \infty$ si et seulement si

$$\beta > p-1, \alpha \leq \beta\frac{a}{p} - \frac{a}{p'} - 1, \tag{2.34}$$

(ii-2) pour $1 < q < p < \infty$ si et seulement si

$$\beta > p-1, \alpha < \beta\frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1. \tag{2.35}$$

Exemple 2.4 ([30]) :

Dans les inégalités (2.4) et (2.5), la valeur $\varepsilon = p-1$ est exclue. Dans ce cas, nous pouvons améliorer l'inégalité en ajoutant des termes logarithmiques des deux membres et en considérant l'intervalle $(0,1)$. Plus précisément,

(i) l'inégalité

$$\left(\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q \frac{1}{x}|\ln x|^\alpha dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^1 f^p(x)x^{p-1}|\ln x|^\beta dx\right)^{1/p}, \tag{2.36}$$

est vérifiée pour $1 < p \leq q < \infty$ si et seulement si

$$\beta > p-1, \alpha = \beta\frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1, \tag{2.37}$$

(ii)l'inégalité

$$\left(\int_0^1 \left(\int_x^1 f(t)dt\right)^q \frac{1}{x}|\ln x|^\alpha dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^1 f^p(x)x^{p-1}|\ln x|^\beta dx\right)^{1/p} \tag{2.38}$$

est vérifiée pour $1 < p \leq q < \infty$ si et seulement si

$$\beta < p-1, \alpha = \beta\frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1. \tag{2.39}$$

Dans le cas $p > q$ les nombres correspondants A et $\tilde{A}$ sont infinis et les inégalités (2.36) et (2.37) ne sont pas valables.

Remarque 2.3 :

Les progrès de la théorie des inégalités de type Hardy et de leurs extensions plus générales se sont également poursuivis après 1990 (lorsque le livre [29] est apparu).

2.5 Espaces de Lebesgue pondérés et opérateur de Hardy

2.5.1 Inégalités sur les normes pondérées

L'espace de Lebesgue pondéré

$$L_s(a, b; w) = L_s(w), \tag{2.40}$$

où $0 < s \leq \infty$ et w est une fonction de poids sur (a, b), comprend toutes les fonctions mesurables $f = f(x)$ sur (a, b) telles que

$$\|f\|_{s,w} := \left(\int_a^b |f(x)|^s w(x) dx \right)^{1/s} < \infty, \quad 0 < s < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty,w} := \operatorname{ess} \sup_{a<x<b} |f(x)| < \infty. \tag{2.41}$$

Si H désigne l'opérateur de Hardy,

$$(Hf)(x) := \int_a^x f(t) dt, \tag{2.42}$$

alors l'inégalité de Hardy (2.6) peut être réécrite sous la forme

$$\|Hf\|_{q,u} \leq C \|f\|_{p,v}, \tag{2.43}$$

et cela est vérifiée pour les fonctions $f \geq 0$ si et seulement si

$$A < \infty. \tag{2.44}$$

Où A est donné par (2.8) ou (2.9), respectivement. Avec l'opérateur de Hardy H, nous pouvons immédiatement définir l'opérateur de Hardy conjugué $\widetilde{H}$:

$$(\tilde{H}f)(x) := \int_x^b f(t) dt. \tag{2.45}$$

L'inégalité de Hardy (conjuguée) correspondante

$$\|\tilde{H}f\|_{q,u} \leq C \|f\|_{p,v}, \tag{2.46}$$

alors est vérifiée pour les fonctions $f \geq 0$ si et seulement si

$$\widetilde{A} < \infty, \tag{2.47}$$

où $\tilde{A}$ est donné par (2.12) ou (2.13), respectivement. Évidemment, le passage de H à $\widetilde{H}$ et de la condition (2.44) à la condition (2.47) peut se faire par une simple substitution.

Ce qui est plus important est le fait que les inégalités (2.43) et (2.46) sont des prototypes d'une inégalité générale pondérée de la forme

$$\|Tf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v}, \tag{2.48}$$

où T est un opérateur intégral général. Ainsi l'inégalité (2.48) affirme que T applique $L_p(v)$ (continûment) dans $L_q(u)$:

$$T : L_p(v) \to L_q(u).$$

2.5.2 Dualité

Définir la dualité sur l'espace de Lebesgue pondéré $L_s(w)$ avec $1 < s < \infty$ par le produit scalaire

$$\langle g, f\rangle = \int_a^b g(x)f(x)dx, \quad f \in L_s(w). \tag{2.49}$$

Alors on voit facilement que l'espace dual de $L_s(w)$ peut être identifié avec l'espace $L_{s'}(\widehat{w})$ où

$$s' = \frac{s}{s-1}, \quad \widehat{w} = w^{1-s'}.$$

Spécifiquement, $\|g\|_{s',w^{1-s'}} = \sup_{\|f\|_{s,w}=1} |\langle g, f\rangle|$ de sorte que

$$(L_s(w))^* = L_{s'}\left(w^{1-s'}\right). \tag{2.50}$$

En effet : l'inégalité de Hölder montre que

$$\begin{aligned}
|\langle g, f\rangle| &\leq \int_a^b |g(x)|w^{-1/s}(x)|f(x)|w^{1/s}(x)dx \\
&\leq \left(\int_a^b |f(x)|^s w(x)dx\right)^{1/s} \left(\int_a^b |g(x)|^{s'} w^{-s'/s}(x)dx\right)^{1/s'} \\
&= \|f\|_{s,w} \cdot \|g\|_{s',w^{1-s'}}
\end{aligned}$$

puisque $s/s' = s - 1 = 1/(s' - 1)$, et si

$$f = |g|^{s'-1} \operatorname{sgn} g \ w^{1-s'} / \|g\|_{s', w^{1-s'}}^{s'/s},$$

alors $\|f\|_{s,w} = 1$ et $\langle g, f \rangle = \|g\|_{s', w^{1-s'}}$. De plus, les opérateurs de Hardy H et $\widetilde{H}$ sont mutuellement conjugués ; plus précisément, si

$$H : L_p(v) \to L_q(u), \quad 1 < p, q < \infty,$$

alors $(H)^* = \widetilde{H}$ et

$$\widetilde{H} : L_{q'}\left(u^{1-q'}\right) \to L_{p'}\left(v^{1-p'}\right).$$

En effet : D'après le théorème de Fubini,

$$\langle g, Hf \rangle = \int_a^b g(x) \int_a^x f(t) dt dx = \int_a^b f(t) \int_t^b g(x) dx dt = \langle f, \widetilde{H} g \rangle$$

où les premières (dernières) parenthèses dénotent la dualité dans $L_q(u)$ (dans $L_p(v)$).

Dans le chapitre suivant nous obtiendrons des inégalités de la forme (2.48) pour plusieurs opérateurs particuliers T : ce sont des opérateurs avec noyau d'Oinarov .

Chapitre 3

Opérateurs généraux de type de Hardy

3.1 Opérateurs généraux de type de Hardy.

Définition 3.1 :

On dit que K est un opérateur généralisé de Hardy s'il est de la forme

$$(Kf)(x) := \int\limits_a^x k(x,t)f(t)dt, \quad x \in (a,b).$$

Pour simplifier, nous traiterons le cas $(a,b) = (0,\infty)$, c'est-a-dire, avec l'opérateur

$$(Kf)(x) := \int_0^x k(x,t)f(t)dt, \quad x > 0. \tag{3.1}$$

Les résultats pour un intervalle (a,b) seront résumés à la fin de ce chapitre (voir Sec. 3.4).

Définition 3.2 :

On dit que le noyau $k(x,t)$ est celui d'Oinarov si :

a) $k(x,t) > 0, \quad 0 < t < x$

b)

$$k \text{ est croissant en } x \text{ et décroissant en } t \tag{3.2}$$

c)

$$k(x,t) \approx k(x,z) + k(z,t), \quad 0 < t < z < x, \tag{3.3}$$

L'opérateur conjugué $\widetilde{K}$ de K est donné par

$$(\widetilde{K}g)(x) := \int_x^\infty k(t,x)g(t)dt, \quad x > 0. \tag{3.4}$$

Remarque 3.1 :

Si le noyau $k(x,t)$ satisfait les conditions de monotonie (3.2), alors à partir de (3.3) il s'ensuit immédiatement que

$$k(x,t) \geq \frac{1}{2}(k(x,z) + k(z,t)), \text{ pour } 0 < t < z < x$$

est vérifiée, c'est-à-dire que la borne inférieure déduite à partir de (3.3) est satisfaite .

Exemple 3.1 :

Les noyaux suivants satisfont les condition (3.2) et (3.3) :

(i) Le noyau de convolution

$$k(x,t) = \varphi(x-t)$$

où φ satisfait

$$\varphi(a+b) \approx \varphi(a) + \varphi(b), \quad 0 < a, b < \infty.$$

(ii) Le noyau

$$k(x,t) = \Phi\left(\frac{t}{x}\right)$$

où Φ satisfait

$$\Phi(ab) \approx \Phi(a) + \Phi(b), \quad 0 < a, b < \infty.$$

(iii) Les cas particuliers de (i) et (ii)

$$k(x,t) = (x-t)^{\alpha}, \quad \alpha \geq 0, \quad x > t > 0,$$
$$k(x,t) = \log^{\beta} \frac{x}{t}, \quad \beta \geq 0, \quad x > t > 0.$$

(iv) Le noyau intégral

$$k(x,t) = \int_t^x \varphi(\tau) d\tau, \quad x > t > 0,$$

avec une fonction non négative φ.

Remarque et notation 3.1 :

(i) Dans la suite, on caractérisera des fonctions de poids pour lesquelles l'opérateur K est borné entre des espaces de Lebesgue pondérés pour une large gamme d'indices. Ce problème a été largement étudié dans la littérature (voir, par exemple, S. BLOOM et R. KERMAN [5], F. J. MARTÍN-REYES et E. SAWYER [31], R. OINAROV [28] [27], V. D. STEPANOV [34] [35] et les sources qu'il y sont citées).

(ii) Mentionnons qu'un rôle important sera joué par la dualité . Si l'opérateur K de (3.1) applique $L_p(v)$ dans $L_q(u)$,

$$K : L_p(v) \to L_q(u)$$

pour $1 < p, q < \infty$ borné de norme C, alors de manière analogue son conjugué $\widetilde{K}$ de (3.4) applique $L_{q'}\left(u^{1-q'}\right)$ dans $L_{p'}\left(v^{1-p'}\right)$,

$$\widetilde{K} : L_{q'}\left(u^{1-q'}\right) \to L_{p'}\left(v^{1-p'}\right)$$

de même norme C. En effet par dualité on a

$$\begin{aligned} \|\widetilde{K}g\|_{L_{p'}(v^{1-p'})} &= \left(\int_0^\infty |(\widetilde{K}g)(x)|^{p'} v^{1-p'}(x)dx\right)^{1/p'} \\ &= \sup_{\|f\|_{p,v=1}} \left|\int_0^\infty (\widetilde{K}g)(x)f(x)dx\right| \\ &= \sup_{\|f\|_{p,v=1}} \left|\int_0^\infty g(x)(Kf)(x)dx\right| \\ &\leq \sup_{\|f\|_{p,v=1}} \|Kf\|_{q,u}\|g\|_{q',u^{1-q'}} \leq C\|g\|_{q',u^{1-q'}} \end{aligned}$$

où nous avons appliqué $\|f\|_{L_p(E)} = \sup_{\|g\|_{L_{p'}(E)=1}} \int_E f(x)g(x)dx$, le théorème de Fubini,l'inégalité de Hölder et l'hypothèse que

$$\|Kf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v}. \tag{3.5}$$

(iii) L'opérateur particulier K,

$$(Kf)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad \alpha > 0$$

est appelé l'opérateur de Riemann-Liouville et son conjugué

$$(\widetilde{K}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt,$$

est appelé opérateur intégral fractionnaire de Weyl. A partir de ce qui précède, il résulte en particulier que l'on caractérisera des poids pour lesquels ces opérateurs sont bornés sur des espaces de Lebesgue pondérés lorsque $\alpha \geq 0$. Le cas $-1 < \alpha < 0$ n'est pas traité ici car $k(x,t) = (x-t)^\alpha, -1 < \alpha < 0$, n'est pas un noyau d'Oinarov. (Rappelons que dans l'exemple 3.1 (iii), ce noyau n'apparaissant qu'avec un $\alpha \geq 0$!)

(iv) Afin de trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les fonctions de poids u et v sous lesquelles l'inégalité (3.5), c'est a dire l'inégalité

$$\left(\int_0^\infty |(Kf)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty |f(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p} \tag{3.6}$$

est vérifiée , il nous faut un lemme .

Pour simplifier la notation , soient $s \geq 0$

$$\begin{aligned} (K_s f)(x) &:= \int_0^x k^s(x,t) f(t) dt, \\ \left(\widetilde{K}_s f\right)(x) &:= \int_x^\infty k^s(t,x) f(t) dt \end{aligned} \tag{3.7}$$

pour k un noyau d'Oinarov. Notons que si $s = 0$, alors (3.7) se réduit aux opérateurs de Hardy H et $\widetilde{H}$, respectivement. Nous écrirons

$$K_1 f = Kf, \quad \widetilde{K}_1 f = \widetilde{K} f.$$

De plus , soulignons que sans perte de généralité , on suppose que

$$f \geq 0. \tag{3.8}$$

Maintenant, on formule le lemme fondamental.

Lemme 3.1 :

Supposons que $1 < q < \infty$ et que $K_q, \widetilde{K}_q$ soient définis suivant (3.7).

(a) si $Kf \in L_q(u)$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (Kf)^q(x) u(x) dx \approx &\int_0^\infty f(x) \left(K_0 f\right)^{q-1}(x) \left(\widetilde{K}_q u\right)(x) dx \\ &+ \int_0^\infty f(x) (Kf)^{q-1}(x) (\widetilde{K} u)(x) dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

(b) Si $\widetilde{K} g \in L_q(u)$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\widetilde{K} g)^q(x) u(x) dx \approx &\int_0^\infty g(x) \left(\widetilde{K}_0 g\right)^{q-1}(x) \left(K_q u\right)(x) dx \\ &+ \int_0^\infty g(x) \left(\widetilde{K} g\right)^{q-1}(x) (Ku)(x) dx. \end{aligned}$$

Démonstration Puisque la preuve de (b) est assez similaire à celle de (a), nous l'omettons en ne démontrant que la première partie.

On note les membres gauche et droit de (3.9) par I et J, respectivement.

A partir du théorème de Fubini et la double inégalité (voir [8])

$$\min(2^{p-1}, 1)(a^p + b^p) \leq (a+b)^p \leq \max(2^{p-1}, 1)(a^p + b^p) \text{ où } p > 0, a, b > 0 \tag{$*$}$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty u(x) \left(\int_0^x k(x,t) f(t) dt \right)^q dx \\
&= \int_0^\infty u(x) \left(\int_0^x k(x,z) f(z) dz \right)^{q-1} \left(\int_0^x k(x,t) f(t) dt \right) dx \\
&= \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty k(x,t) u(x) \left[\left(\int_0^t + \int_t^x \right) k(x,z) f(z) dz \right]^{q-1} dx dt \\
&\approx \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty k(x,t) u(x) \left(\int_0^t k(x,z) f(z) dz \right)^{q-1} dx dt \\
&\quad + \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty k(x,t) u(x) \left(\int_t^x k(x,z) f(z) dz \right)^{q-1} dx dt \\
&=: I_0 + I_1.
\end{aligned}
$$

Comme $z < t < x$ dans l'intégrale I_0 on a

$$k(x,z) \approx k(x,t) + k(t,z)$$

et par conséquent ,

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty k(x,t) u(x) \left(\int_0^t k(x,z) f(z) dz \right)^{q-1} dx dt \\
&\approx \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty k(x,t) u(x) \left(\int_0^t \left(k(x,t) + k(t,z) \right) f(z) dz \right)^{q-1} dx dt
\end{aligned}
$$

on applique $(*)$, on trouve

$$
\begin{aligned}
I_0 &\approx \int_0^\infty f(t) \left(\int_t^\infty k^q(x,t) u(x) dx \right) \left(\int_0^t f(z) dz \right)^{q-1} dt \\
&\quad + \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty k(x,t) u(x) \left(\int_0^t k(t,z) f(z) dz \right)^{q-1} dx dt \\
&= \int_0^\infty f(t) \left(\widetilde{K}_q u \right)(t) \left(K_0 f \right)^{q-1}(t) dt \\
&\quad + \int_0^\infty f(t) (\widetilde{K} u)(t) \left(K f \right)^{q-1}(t) dt \\
&= J.
\end{aligned}
$$

Donc $I \approx J + I_1$ c'est-à-dire $(C(J + I_1) \leq I)$, et $CJ \leq C(J + I_1) \leq I$ car $I_1 \geq 0$,la borne inférieure de (a) est satisfaite $J \lesssim I$.

Pour compléter la preuve il faut montrer que $I_1 \lesssim J$ car $I_0 \lesssim J$. Considérons d'abord le cas $q = 2$. Le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty k(x,t)u(x) \int_t^x k(x,z)f(z)dzdxdt \\ &= \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty f(z) \int_z^\infty k(x,t)k(x,z)u(x)dxdzdt. \end{aligned}$$

Puisque $t < z < x$, on conclut que $k(x,t) \approx k(x,z) + k(z,t)$ par conséquent, par une utilisation répétée du théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} I_1 \approx& \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty f(z) \int_z^\infty k^2(x,z)u(x)dxdzdt \\ &+ \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty f(z) \int_z^\infty k(z,t)k(x,z)u(x)dxdzdt \\ =& \int_0^\infty f(z) \int_0^z f(t)dt \int_z^\infty k^2(x,z)u(x)dxdz \\ &+ \int_0^\infty f(z) \left(\int_z^\infty k(x,z)u(x)dx\right) \int_0^z k(z,t)f(t)dtdz \\ &= \int_0^\infty f(z) \left(K_0 f\right)(z) \left(\widetilde{K}_2 u\right)(z)dz + \int_0^\infty f(z)(\widetilde{K}u)(z)(Kf)(z)dz \\ &= J. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons le résultat pour $q = 2$.

Si $q \neq 2$, on a

$$I_1 = \int_0^\infty f(t)I_1(t)dt$$

où

$$\begin{aligned} I_1(t) :=& \int_t^\infty k(x,t)u(x) \left(\int_t^x k(x,z)f(z)dz\right)^{q-1} dx \\ &= \int_t^\infty k(x,t)u(x) \left(\int_t^x k(x,s)f(s)ds\right)^{q-2} \int_t^x k(x,z)f(z)dzdx \\ &= \int_t^\infty f(z) \int_z^\infty k(x,z)k(x,t)u(x) \left(\int_t^x k(x,s)f(s)ds\right)^{q-2} dxdz. \end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé le théorème de Fubini. Mais puisque $t < z < x$, la condition (3.3) donne

$k(x,t) \approx k(x,z) + k(z,t)$ et par conséquent,

$$\begin{aligned}
I_1(t) \approx &\int_t^\infty f(z) \int_z^\infty k^2(x,z)u(x) \left(\int_t^x k(x,s)f(s)ds\right)^{q-2} dxdz \\
&+ \int_t^\infty f(z) \int_z^\infty k(x,z)k(z,t)u(x) \left(\int_t^x k(x,s)f(s)ds\right)^{q-2} dxdz \\
:=& I_1^0(t) + I_1^1(t).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$I_1 \approx \int_0^\infty f(t)I_1^0(t)dt + \int_0^\infty f(t)I_1^1(t)dt =: I_1^0 + I_1^1 \tag{3.10}$$

Si $q > 2$, on applique l'inégalité de Hölder $\left(\text{avec les exposants } q-1 \text{ et } \frac{q-1}{q-2}\right)$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
I_1^0(t) = &\int_t^\infty f(z) \int_z^\infty k^{q/(q-1)+(q-2)/(q-1)}(x,z) \\
&\times u^{1/(q-1)+(q-2)/(q-1)}(x) \left(\int_t^x k(x,s)f(s)ds\right)^{q-2} dxdz
\end{aligned}$$

On utilisent l'inégalité de Hölder avec

$$\begin{aligned}
f(x) =& k^{q/(q-1)}(x,z)u^{1/(q-1)}(x) \\
g(x) =& k^{(1/(q-1)}(x,z)u^{1/(q-1)}(x) \left(\int_t^x k(x,s)f(s)ds\right)^{q-2}
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\leq &\int_t^\infty f(z) \left(\int_z^\infty k^q(x,z)u(x)\right)^{1/(q-1)} \\
&\times \left(\int_z^\infty k(x,z)u(x) \left(\int_t^x k(x,s)f(s)ds\right)^{q-1} dx\right)^{(q-2)/(q-1)} dz \\
\leq &\int_t^\infty f(z) \left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/(q-1)}(z) \\
&\times \left(\int_z^\infty k(x,z)u(x)(Kf)^{q-1}(x)dx\right)^{(q-2)/(q-1)} dz
\end{aligned}$$

et ainsi, on applique le théorème de Fubini (deux fois) et à nouveau l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
I_1^0 \leq & \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty f(z) \left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/(q-1)} (z) \\
& \times \left(\int_z^\infty k(x,z)u(x)(Kf)^{q-1}(x)dx\right)^{(q-2/(q-1)} dzdt \\
= & \int_0^\infty f(z) \left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/(q-1)} (z) \\
& \times \left(\int_z^\infty k(x,z)u(x)(Kf)^{q-1}(x)dx\right)^{(q-2)/(q-1)} \int_0^z f(t)dtdz
\end{aligned}$$

On utilisent l'inégalité de Hölder avec

$$\begin{aligned}
f(x) = & f^{1/(q-1)}(z) \left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/(q-1)} (z)(K_0 f)(z) \\
g(x) = & f^{(q-2)/(q-1)}(z) \left(\int_z^\infty k(x,z)u(x)(Kf)^{q-1}(x)dx\right)^{(q-2)/(q-1)}
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
& \leq \left(\int_0^\infty f(z) \left(\widetilde{K}_q u\right)(z) \left(K_0 f\right)^{q-1}(z)dz\right)^{1/(q-1)} \\
& \quad \times \left(\int_0^\infty f(z) \left(\int_z^\infty k(x,z)u(x)(Kf)^{q-1}(x)dx\right) dz\right)^{(q-2)/(q-1)} \\
& = \left(\int_0^\infty f(z) \left(\widetilde{K}_q u\right)(z) \left(K_0 f\right)^{q-1}(z)dz\right)^{1/(q-1)} \\
& \quad \times \left(\int_0^\infty u(x)(Kf)^q(x)dx\right)^{(q-2)/(q-1)} \\
& = \left(\int_0^\infty f(z) \left(\widetilde{K}_q u\right)(z) \left(K_0 f\right)^{q-1}(z)dz\right)^{1/(q-1)} I^{(q-2)/(q-1)}.
\end{aligned}$$

De même, en utilisant le fait que $q > 2$, on trouve que

$$\begin{aligned}
I_1^1 &= \int_0^\infty f(t) I_1^1(t) dt \\
&= \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty f(z) k(x,t) \int_z^\infty k(x,z) u(x) \\
&\quad \times \left(\int_t^x k(x,s) f(s) ds \right)^{q-2} dx dz dt \\
&= \int_0^\infty f(z) \int_0^z k(z,t) f(t) \int_z^\infty k(x,z) u(x) \\
&\quad \times \left(\int_t^x k(x,s) f(s) ds \right)^{q-2} dx dt dz \\
&\leq \int_0^\infty f(z) (Kf)(z) \left(\int_z^\infty k(x,z) u(x) (Kf)^{q-2}(x) dx \right) dz \\
&\leq \int_0^\infty f(z) (Kf)(z) \left(\int_z^\infty k(x,z) u(x) dx \right)^{1/(q-1)} \\
&\quad \times \left(\int_z^\infty k(x,z) u(x) (Kf)^{q-1}(x) dx \right)^{(q-2)/(q-1)} dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^\infty f(z) (Kf)^{q-1}(z) (\widetilde{K}u)(z) dz \right)^{1/(q-1)} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty f(z) \left(\int_z^\infty k(x,z) u(x) (Kf)^{q-1}(x) dx \right) dz \right)^{(q-2)/(q-1)} \\
&= \left(\int_0^\infty f(z) (Kf)^{q-1}(z) (\widetilde{K}u)(z) dz \right)^{1/(q-1)} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty u(x) (Kf)^{q-1}(x) \left(\int_0^z k(x,z) f(x) dz \right) dx \right)^{(q-2)/(q-1)} \\
&= \left(\int_0^\infty f(z) (Kf)^{q-1}(z) (\widetilde{K}u)(z) dz \right)^{1/(q-1)} I^{(q-2)/(q-1)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
I_1 \leq& C \left(\int_0^\infty f(z) \left(\widetilde{K}_q u \right)(z) \left(K_0 f \right)^{q-1}(z) dz \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty f(z) (Kf)^{q-1}(z) (\widetilde{K}u)(z) dz \right)^{1/(q-1)} I^{(q-2)/(q-1)} \\
=& C J^{1/(q-1)} I^{(q-2)/(q-1)} \\
\leq& C_1 J^{1/(q-1)} \left(I_0 + I_1 \right)^{(q-2)/(q-1)}
\end{aligned}$$

puisque on a $I \approx I_0 + I_1$. Les indices $q-1$ et $\frac{q-1}{q-2}$ sont conjugués, en utilisant l'inégalité de young on obtient

$$I_1 \leq C_2 \frac{J}{q-1} + \frac{(I_0 + I_1)}{(q-1)/(q-2)}, \text{ où } C_1 = \min(C_2, 1).$$

Mais, nous avons noté que $I_0 \approx J$, et donc

$$I_1 \leq C_3 J + \frac{q-2}{q-1} I_1, \text{ où } C_3 = \frac{C_2}{q-1} + \frac{q-2}{q-1}$$

c'est-à-dire

$$I_1 \leq C_3 (q-1) J.$$

D'où le résultat suivant pour $q > 2$. Si $1 < q < 2$, alors

$$\begin{aligned} I_1^0(t) &= \int_t^\infty f(z) \int_z^\infty k^2(x,z) u(x) \left(\int_t^x k(x,s) f(s) ds \right)^{q-2} dx dz \\ &= \int_t^\infty f(z) \int_z^\infty k^q(x,z) u(x) \left(\int_t^x k(x,s) f(s) ds \right)^{q-2} \\ &\times k^{2-q}(x,z) dx dz \end{aligned}$$

et puisque $x > z > t$,

$$\begin{aligned} \left(\int_t^x k(x,s) f(s) ds \right)^{q-2} &\leq \left(\int_t^z k(x,s) f(s) ds \right)^{q-2} \\ &\leq k^{q-2}(x,z) \left(\int_t^z f(s) ds \right)^{q-2} \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité découle du fait que k est décroissante dans la deuxième variable. Ainsi

$$I_1^0(t) \leq \int_t^\infty f(z) \left(\int_t^z f(s) ds \right)^{q-2} \int_z^\infty k^q(x,z) u(x) dx dz,$$

et le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} I_1^0 &\leq \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty f(z) \left(\int_t^z f(s) ds \right)^{q-2} \left(\widetilde{K}_q u \right)(z) dz dt \\ &= \int_0^\infty f(z) \left(\widetilde{K}_q u \right)(z) \int_0^x f(t) \left(\int_t^z f(s) ds \right)^{q-2} dt dz \\ &= \frac{1}{q-1} \int_0^\infty f(z) \left(\widetilde{K}_q u \right)(z) \left(K_0 f \right)^{q-1}(z) dz \end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}
\int_0^z f(t)\left(\int_t^z f(s)ds\right)^{q-2} dt &= -\frac{1}{q-1}\int_0^z (q-1)\left(-f(t)\right)\left(\int_t^z f(s)ds\right)^{q-2} dt \\
&= -\frac{1}{q-1}\int_0^z (q-1)\frac{d\left(\int_t^z f(s)ds\right)}{dt}\left(\int_t^z f(s)ds\right)^{q-2} dt \\
&= -\frac{1}{q-1}\int_0^z \frac{d}{dt}\left(\int_t^z f(s)ds\right)^{q-1} dt \\
&= \frac{1}{q-1}\left(\int_0^z f(s)ds\right)^{q-1} \\
&= \frac{1}{q-1}\left(K_0 f\right)^{q-1}(z).
\end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}
I_1^1(t) &= \int_t^\infty k(z,t)f(z)\int_z^\infty k(x,z)u(x)\left(\int_t^x k(x,s)f(s)ds\right)^{q-2} dxdz \\
&\leq \int_t^\infty k(z,t)f(z)\int_z^\infty k(x,z)u(x)\left(\int_t^z k(z,s)f(s)ds\right)^{q-2} dxdz
\end{aligned}$$

puisque $t < z < x$ et k est croissant dans la première variable. Ainsi

$$\begin{aligned}
I_1^1 &\leq \int_0^\infty f(t)\int_t^\infty k(z,t)f(z)\int_z^\infty k(x,z)u(x) \\
&\quad\times\left(\int_t^z k(z,s)f(s)ds\right)^{q-2} dxdzdt \\
&= \int_0^\infty f(z)\int_0^z k(z,t)f(t) \\
&\quad\times\left(\int_t^z k(z,s)f(s)ds\right)^{q-2}\int_z^\infty k(x,z)u(x)dxdtdz \\
&= \frac{1}{q-1}\int_0^\infty f(z)(Kf)^{q-1}(z)(\widetilde{K}u)(z)dz
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
I_1 &\approx I_1^0 + I_1^1 \\
&\leq \frac{1}{q-1}\left[\int_0^\infty f(z)\left(\widetilde{K}_q u\right)(z)\left(K_0 f\right)^{q-1}(z)dz\right. \\
&\quad\left. + \int_0^\infty f(z)(\widetilde{K}u)(z)(Kf)^{q-1}(z)dz\right]. \\
&= \frac{1}{q-1}J.
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du lemme.

□

3.2 Opérateurs généraux de type Hardy. Le cas $p \leq q$

Nous somme maintenant en mesure d'énoncer et de prouver le premier théorème principal de ce chapitre décrivant les conditions nécessaires et suffisantes de la validité de l'inégalité (3.6).

Théorème 3.1 :

Soient $1 < p \leq q < \infty$, K l'opérateur général de type de Hardy de la définition 3.1 , K_s et $\widetilde{K}_s$ donnés par (3.7). Alors l'inégalité

$$\left(\int_0^\infty (Kf)^q(x)u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p} \tag{3.11}$$

est vérifiée pour tout $f \geq 0$ si et seulement si

$$A_0 := \sup_{t>0}\left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/q}(t)\left(K_0 v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t) < \infty \tag{3.12}$$

et

$$A_1 := \sup_{t>0}\left(\widetilde{K}_0 u\right)^{1/q}(t)\left(K_{p'} v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t) < \infty. \tag{3.13}$$

La meilleure constante C dans (3.11) satisfait

$$C \approx \max\left(A_0, A_1\right). \tag{3.14}$$

Remarque 3.2 :

Grâce a (3.7), on peut écrire A_0 et A_1 aussi sous la forme

$$A_0 = \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty k^q(s,t)u(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_0^t v^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'}$$

$$A_1 = \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty u(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_0^t k^{p'}(t,s)v^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'}. \tag{3.15}$$

Si K est l'opérateur de Hardy H, c'est-à-dire, si l'on prend $k(x,t) \equiv 1$, alors A_0 et A_1 coïncident et ne sont rien d'autre que la constante A dans (2.8).

Démonstration du Théorème 3.1

(i) Nécessité de conditions (3.12), (3.13) . On suppose

$$\left(K_{p'}v^{1-p'}\right)(t) := \int_0^t k^{p'}(t,s)v^{1-p'}(s)ds < \infty \tag{3.16}$$

pour un certain $t > 0$. (Dans le cas contraire $v \equiv 0$ et le membre gauche de (3.11) est égale a zéro , d'où $u \equiv 0$ car si $v = 0$ et $f = \infty$, ou aura $0 \cdot \infty = 0$ implique que (3.13) et (3.13) tenir.) Si (3.16) est satisfaite pour un certain $t > 0$, définir une fonction f_t par

$$f_t(x) := \chi_{[0,t]}(x)k^{p'-1}(t,x)v^{1-p'}(x).$$

Alors on résulte de (3.11) que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty (Kf_t)^q(x)u(x)dx\right)^{1/q} \\
&\leq C\left(\int_0^\infty f_t^p(x)v(x)dx\right)^{1/p} \\
&= C\left(\int_0^t k^{p'}(t,x)v^{1-p'}(x)dx\right)^{1/p} \\
&= C\left(K_{p'}v^{1-p'}\right)^{1/p}(t).
\end{aligned}$$

Mais puisque k est croissant dans la première variable, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty (Kf_t)^q(x)u(x)dx\right)^{1/q} \\
&\geq \left(\int_t^\infty u(x)\left(\int_0^t k(x,s)k^{p'-1}(t,s)v^{1-p'}(s)ds\right)^q dx\right)^{1/q} \\
&\geq \left(\int_t^\infty u(x)dx\right)^{1/q}\left(\int_0^t k^{p'}(t,s)v^{1-p'}(s)ds\right) \\
&= \left(\widetilde{K}_0u\right)^{1/q}(t)\left(K_{p'}v^{1-p'}\right)(t)
\end{aligned}$$

et il s'ensuit que

$$\left(\widetilde{K}_0u\right)^{1/q}(t)\left(K_{p'}v^{1-p'}\right)^{1/p'} \leq C.$$

Donc (3.13) est vérifiée. Pour voir que (3.12) est également satisfaite on note que (3.11) est équivalent , à

$$\left(\int_0^\infty (\widetilde{K}g)^{p'}(x)v^{1-p'}(x)dx\right)^{1/p'} \leq C\left(\int_0^\infty g^{q'}(x)u^{1-q'}(x)dx\right)^{1/q'} \tag{3.17}$$

avec la même constante C qu'en (3.11) (voir remarque 3.1 (ii)). Comme ci dessous, nous pouvons supposer que

$$\left(\widetilde{K}_q u\right)(t) := \int_t^\infty k^q(s,t)u(s)ds < \infty$$

pour un certain $t > 0$ et pour un tel t définir une fonction g_t par

$$g_t(x) = \chi_{(t,\infty)}(x)k^{q-1}(x,t)u(x).$$

Alors (3.17) donne

$$\begin{aligned}
&\left(K_0 v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t)\left(\widetilde{K}_q u\right)(t) \\
&= \left(\int_0^t v^{1-p'}(s)\left(\int_t^\infty k^q(x,t)u(x)dx\right)^{p'} ds\right)^{1/p'} \\
&\leq \left(\int_0^t v^{1-p'}(s)\left(\int_t^\infty k(x,s)k^{q-1}(x,t)u(x)dx\right)^{p'} ds\right)^{1/p'} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \left(\widetilde{K} g_t\right)^{p'}(s)v^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'} \\
&\leq C\left(\int_0^\infty g_t^{q'}(x)u^{1-q'}(x)dx\right)^{1/q'} \\
&= C\left(\int_t^\infty k^q(x,t)u(x)dx\right)^{1/q'} = C\left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/q'}(t)
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/q}(t)\left(K_0 v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t) \leq C \tag{3.18}$$

et donc (3.12) est vérifié. En particulier,

$$\max\left(A_0, A_1\right) \leq C. \tag{3.19}$$

C'est-à-dire, que l'estimation inférieure de (3.14) est vérifiée.

(ii) Suffisance des conditions (3.12) et (3.13). On peut supposer que f a un support compact dans$(0,\infty)$ et que $0 < \|f\|_{p,v} < \infty$. Le cas général s'ensuit alors via le lemme de Fatou.

Maintenant,par l'estimation de (3.9) du lemme (3.1) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
I :=& \int_0^\infty u(x)(Kf)^q(x)dx \\
\lesssim& \left(\int_0^\infty f(x) \left(K_0 f\right)^{q-1}(x) \left(\widetilde{K}_q u\right)(x)dx \right. \\
&\left. + \int_0^\infty f(x)(Kf)^{q-1}(x)(\widetilde{K}u)(x)dx \right) \\
=& C \left(J_0 + J_1\right).
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$
\begin{aligned}
J_0 :=& \int_0^\infty f(x) \left(K_0 f\right)^{q-1}(x) \left(\widetilde{K}_q u\right)(x)dx \\
:=& \int_0^\infty f(x) v^{1/p+1/p'-1}(x) \left(K_0 f\right)^{q-1}(x) \left(\widetilde{K}_q u\right)(x)dx \\
:=& \int_0^\infty f(x) v^{1/p} v^{1/p'-1}(x) \left(K_0 f\right)^{q-1}(x) \left(\widetilde{K}_q u\right)(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_0 \leq& \left(\int_0^\infty f^p(x) v(x) dx \right)^{1/p} \\
&\times \left(\int_0^\infty v^{1-p'}(x) \left(K_0 f\right)^{p'(q-1)}(x) \left(\widetilde{K}_q u\right)^{p'}(x)dx \right)^{1/p'}.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Si l'on note

$$
w(x) = v^{1-p'}(x) \left(\widetilde{K}_q u\right)^{p'}(x),
$$

alors le deuxième facteur du coté droit de (3.20) prend la forme

$$
\left(\int_0^\infty w(x) \left(\int_0^x f(t)dt \right)^{p'(q-1)} dx \right)^{1/p'}
$$

et peut être majoré par

$$
C_2^{q-1} \left(\int_0^\infty v(x) f^p(x) dx \right)^{(q-1)/p}
$$

via l'inégalité standard de Hardy (cf. (2.6)) si et seulement si

$$
C_3 := \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty w(x)dx \right)^{1/(p'(q-1))} \left(\int_0^t v^{1-p'}(x)dx \right)^{1/p'} < \infty
$$

(cf. condition (2.7)) ; l'application de l'inégalité de Hardy est correcte puisque $1 < p \leq q < \infty$ implique que $p'(q-1) \geq p$). De plus, on a $C_2 \approx C_3$. Mais d'après (3.12),

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty w(x)dx &= \int_t^\infty v^{1-p'}(x)\left(\widetilde{K}_q u\right)^{p'}(x)dx \\
&= \int_t^\infty v^{1-p'}(x)\left(\widetilde{K}_q u\right)^{p'}(x)\left(K_0 v^{1-p}\right)^q\left(K_0 v^{1-p}\right)^{-q}dx \\
&\leq \sup\left(\widetilde{K}_q u\right)^{p'}\left(K_0 v^{1-p}\right)^q\int_t^\infty v^{1-p'}\left(K_0 v^{1-p}\right)^{-q}dx \\
&\leq A_0^{qp'}\int_t^\infty v^{1-p'}(x)\left(K_0 v^{1-p'}\right)^{-q}(x)dx \\
&= A_0^{qp'}\int_t^\infty v^{1-p'}(x)\left(\int_0^x v^{1-p'}(s)ds\right)^{-q}dx \\
&= \frac{A_0^{qp'}}{1-q}\left(\int_0^x v^{1-p'}(s)ds\right)^{1-q}\Bigg|_t^\infty \\
&\leq \frac{A_0^{qp'}}{q-1}\left(\int_0^t v^{1-p'}(s)ds\right)^{1-q}
\end{aligned}$$

et donc

$$C_3 \leq A_0^{q'}(q-1)^{-1/(p'(q-1))}.$$

Alors

$$J_0 \leq C_2^{q-1}\left(\int_0^\infty v(x)f^p(x)dx\right)^{1/p+(q-1)/p} \leq C_4 A_0^q\|f\|_{p,v}^q. \tag{3.21}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}
J_1 := \int_0^\infty f(x)(Kf)^{q-1}(x)(\widetilde{K}u)(x)dx &\leq \left(\int_0^\infty f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p} \\
&\times\left(\int_0^\infty v^{1-p'}(x)(\widetilde{K}u)^{p'}(x)(Kf)^{p'(q-1)}(x)dx\right)^{1/p'}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Puisque la fonction Kf est croissante, le deuxième facteur du coté droit de (3.22) peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty v^{1-p'}(x)(\widetilde{K}u)^{p'}(x)\left(\int_0^x d(Kf)^{p'(q-1)}(s)\right)dx\right)^{1/p'} \\
&= \left(\int_0^\infty\left(\int_s^\infty v^{1-p'}(x)(\widetilde{K}u)^{p'}(x)dx\right)d(Kf)^{p'(q-1)}(s)\right)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Minkowski et par (3.13) on a

$$\begin{aligned}
&\int_s^\infty v^{1-p'}(x)(\widetilde{K}u)^{p'}(x)dx \\
&\quad = \int_s^\infty v^{1-p'}(x)\left(\int_x^\infty k(t,x)u(t)dt\right)^{p'}dx \\
&\quad \le \left(\int_s^\infty u(t)\left(\int_s^t v^{1-p'}(x)k^{p'}(t,x)dx\right)^{1/p'}dt\right)^{p'} \\
&\le \left(\int_s^\infty u(t)\left(\int_0^t v^{1-p'}(x)k^{p'}(t,x)dx\right)^{1/p'}dt\right)^{p'} \\
&= \left(\int_s^\infty u(t)\left(K_{p'}v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t)dt\right)^{p'} \\
&\le A_1^{p'}\left(\int_s^\infty u(t)\left(\widetilde{K}_0u\right)^{-1/q}(t)dt\right)^{p'} \\
&= A_1^{p'}\left(-q'\int_s^\infty d\left(\widetilde{K}_0u\right)^{1/q'}(t)dt\right)^{p'} \\
&= (q')^{p'}A_1^{p'}\left(\widetilde{K}_0u\right)^{p'/q'}(s).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$J_1 \le q'A_1\|f\|_{p,v}\left(\int_0^\infty \left(\widetilde{K}_0u\right)^{p'/q'}(s)d(Kf)^{p'q/q'}(s)\right)^{1/p'},$$

et par l'inégalité intégrale de Minkowski(on a $p'/q' \ge 1$ puisque $p \le q$) il s'ensuit que

$$J_1 \le A_1q'\|f\|_{p,v}\left(\int_0^\infty u(s)(Kf)^q(s)ds\right)^{1/q'}. \tag{3.23}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
I = \|Kf\|_{q,u}^q &\lesssim (J_0+J_1) \lesssim \left(\|f\|_{p,v}^q + \|f\|_{p,v}I^{1/q'}\right) \\
&= C_0\|f\|_{p,v}^q + C_0\|f\|_{p,v}I^{1/q'}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young $ab \le \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'}, q > 1$, avec $a = C_0\|f\|_{p,v}$, $b = I^{1/q'}$, on obtient

$$I \le C_0\|f\|_{p,v}^q + \frac{C_0^q}{q}\|f\|_{p,v}^q + \frac{I}{q'},$$

ce qui implique

$$I \lesssim \|f\|_{p,v}^q$$

c'est-à-dire

$$\|Kf\|_{q,u} \lesssim \|f\|_{p,v}$$

et c'est l'estimation requise (3.11). De plus, il découle de (3.21) et (3.23) que $C \lesssim \max(A_0, A_1)$ et donc avec (3.19) on a (3.14)

□

Maintenant, nous pouvons facilement prouver le résultat correspondant pour l'opérateur conjugué $\widetilde{K}$, défini par

$$(\widetilde{K}g)(x) := \int_x^\infty k(t,x)g(t)dt, \quad x > 0. \tag{3.24}$$

Théorème 3.2 :

Soit $1 < p \leq q < \infty$. Soit $\widetilde{K}$ l'opérateur de type de Hardy conjugué défini par la formule (3.24). Soit K_s et $\bar{K}_s$ donnés par la formule (3.7).Alors l'inégalité

$$\|\widetilde{K}g\|_{q,u} \leq C\|g\|_{p,v} \tag{3.25}$$

est vérifiée pour tout $g \geq 0$ si et seulement si

$$\tilde{A}_0 := \sup_{t>0} (K_q u)^{1/q}(t) \left(\widetilde{K}_0 v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t) < \infty \tag{3.26}$$

et

$$\tilde{A}_1 := \sup_{t>0} (K_0 u)^{1/q}(t) \left(\widetilde{K}_{p'} v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t) < \infty. \tag{3.27}$$

La constante C est la même que dans (3.11).

Démonstration (i) La preuve de la partie nécessité est la même que dans la preuve du théorème 3.1, et elle est donc omise.

(ii) Suffisance. En vertu de la dualité, on a

$$\begin{aligned}\|\widetilde{K}g\|_{q,u} &= \sup_{\|f\|_{q',u^{1-q'}=1}} \left|\int_0^\infty (\widetilde{K}g)(x)f(x)dx\right| \\ &= \sup_{\|f\|_{q',u^{2-q'}=1}} \left|\int_0^\infty g(x)(Kf)(x)dx\right|.\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne

$$\left|\int_0^\infty g(x)(Kf)(x)dx\right| \le \|g\|_{p,v}\|Kf\|_{p',v^{2-p'}}.$$

Enfin, puisque $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1$ correspondent à A_0, A_1 avec u, v et p, q remplacés par $v^{1-p'}, u^{1-q'}$ et q', p', respectivement, le théorème 3.1 implique que

$$\|Kf\|_{p',v^{1-p'}} \le C\|f\|_{q',u^{1-q'}}$$

est vraie si et seulement si les condition (3.26) et (3.27) sont satisfaites. En combinant toutes ces estimations, nous obtenons (3.25).

□

Exemple 3.2 :

Nous énonçons les résultats pour l'opérateur de Riemann-Liouville et pour l'opérateur intégral fractionnaire de Weyl, mentionnés dans la remarque 3.1 (iii).

Soit $1 < p \le q < \infty$.

(i) Si

$$(Kf)(x) = \int_0^x (x-t)^\alpha f(t)dt, \quad \alpha \ge 0, x > 0,$$

alors l'inégalité

$$\|Kf\|_{q,u} \le C\|f\|_{p,v}$$

est satisfaite pour tout $f \ge 0$ si et seulement si

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty (s-t)^{\alpha q}u(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_0^t v^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'} < \infty$$

et

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty u(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha p'}v^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'} < \infty.$$

(ii) Si

$$(\widetilde{K}g)(x) = \int_x^\infty (t-x)^\alpha g(t)dt, \quad \alpha \ge 0, \quad x > 0,$$

alors l'inégalité

$$\|\widetilde{K}g\|_{q,u} \le C\|g\|_{p,v}$$

et satisfaite pour tout $g \geq 0$ si et seulement si

$$\sup_{t>0}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha q} u(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_t^\infty v^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'} < \infty,$$

et

$$\sup_{t>0}\left(\int_0^t u(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_t^\infty (s-t)^{ap'} v^{1-p'}(s)ds\right)^{1/p'} < \infty.$$

3.3 Les opérateurs généralisés du type de Hardy. Le cas $p > q$

Remarque et notation 3.2 :

(i) Considérons maintenant le cas

$$0 < q < p < \infty, p > 1.$$

Où r est defini par

$$\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$$

ainsi que les chiffres

$$B_0 := \left\{\int_0^\infty \left[\left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/q}(t)\left(K_0 v^{1-p'}\right)^{1/q'}(t)\right]^r v^{1-p'}(t)dt\right\}^{1/r}$$

$$B_1 := \left\{\int_0^\infty \left[\left(\widetilde{K}_0 u\right)^{1/p}(t)\left(K_{p'} v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t)\right]^r u(t)dt\right\}^{1/r}. \tag{3.28}$$

Si K est l'opérateur de Hardy H, c'est-à-dire si l'on prend $k(x,t) \equiv 1$ pour $t < x$, $k(x,t) \equiv 0$ pour $t > x$, alors B_1 est un multiple de B_0 et il coïncide avec le nombre A de (2.9).

(ii) Rappelons que pour l'opérateur de Hardy et son conjugué, une caractérisation a été donnée pour le domaine complet $0 < q < p < \infty, p > 1$. Dans ce qui suit, nous nous limitons d'abord au domaine

$$1 < q < p < \infty.$$

Théorème 3.3 :

Supposons $1 < q < p < \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Soit K un opérateur généralisé du type de Hardy . Alors l'inégalité (3.11) est satisfaite pour tous $f \geq 0$ si et seulement si

$$\max\left(B_0, B_1\right) < \infty, \tag{3.29}$$

où B_0, B_1 sont définis dans (3.28).

De plus,la meilleure constante C dans (3.11) satisfait

$$C \approx \max\left(B_0, B_1\right). \tag{3.30}$$

Remarque 3.3 :

La formulation (et la démonstration)du théorème correspondant pour l'opérateur conjugué $\widetilde{K}$ est similaire.

Le théorème suivant traite le cas $0 < q < 1 < p < \infty$ qui est valable pour des conditions plus faibles sur le noyau k de l'opérateur de type Hardy

$$(Kf)(x) = \int_0^x k(x,t) f(t) dt, \quad x > 0, \quad f \geq 0:$$

nous supposons seulement que $k(x,t) \geq 0$ est décroissant en t, et aucune autre condition n'est imposée. D'autre part, les conditions suffisantes sont différentes des conditions nécessaires.

Théorème 3.4 :

Supposons $0 < q < 1 < p < \infty$ et notons $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Soit K l'opérateur de la remarque 3.3. Si

$$B_0 := \left(\int_0^\infty \left[\left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/q}(t) \left(K_0 v^{1-p'}\right)^{1/q'}(t)\right]^r v^{1-p'}(t) dt\right)^{1/r} < \infty,$$

alors, l'inégalité

$$\|Kf\|_{q,u} \leq C \|f\|_{p,v} \tag{3.31}$$

est vraie pour tout $f \geq 0$ avec $C \leq B_0$.

Inversement, si (3.31) et vraie pour tout $f \geq 0$, alors $B_2 \leq C$ où

$$B_2 := \left(\int_0^\infty \left(\widetilde{K}_q u\right)^{p'/q}(t) v^{1-p'}(t) dt\right)^{1/p'}$$

Remarque 3.4 :

(i) Notons que dans le théorème 3.4 nous n'exigeons qu'une seule condition pour la suffisance, c'est a dire B_0 doit être fini comme dans le théorème 3.3, ainsi une seule condition pour la nécessité est demandée.

(ii)Une autre preuve a été donnée indépendamment par G. SINNAMON [32].

3.4 Quelques modifications et extensions

3.4.1 Cas général :intervalle (a, b)

Citons les résultats correspondants aux résultats de Secs. 3.1 à 3.3 pour le cas général d'un intervalle (a, b), c'est-a-dire, pour les opérateurs

$$\begin{aligned} (Kf)(x) &= \int_a^x k(x,t)f(t)dt, \\ (\widetilde{K}g)(x) &= \int_x^b k(t,x)g(t)dt, \end{aligned} \tag{3.32}$$

avec $k(x,t)$ défini pour $a < t < x < b$ et satisfaisant

$$k(x,t) \geq 0 \text{ pour } x > t > a$$

$$k \text{ est croissant en } x \text{ et décroissant en } t, \tag{3.33}$$

$$k(x,t) \approx k(x,z) + k(z,t) \text{ for } a < t < z < x < b.$$

D'une manière analogue à (3.7) on définit les opérateurs K_s et $\widetilde{K}_s$ pour $s \geq 0$

$$(K_s h)(x) = \int_a^x k^s(x,t)h(t)dt, \ \left(\widetilde{K}_s h\right)(x) = \int_x^b k^s(t,x)h(t)dt. \tag{3.34}$$

Alors on a l'assertion suivante qui correspond au théorème 3.1 :

Théorème 3.5 :

Soit $1 < p \leq q < \infty$. Soit K l'opérateur de (3.32) satisfaisant les conditions (3.33) et soit K_s et $\widetilde{K}_s$ donnés par la formule (3.34). Alors l'inégalité

$$\left(\int_a^b (Kf)^q(x)u(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right)^{1/p} \tag{3.35}$$

c'est-à-dire ,l'inégalité

$$\|Kf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v}$$

est vérifiée pour tout $f \geq 0$ si et seulement si

$$A_0 := \sup_{a<t<b} \left(\widetilde{K}_q u\right)^{1/q}(t)\left(K_0 v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t) < \infty,$$

$$A_1 := \sup_{a<t<b} \left(\widetilde{K}_0 u\right)^{1/q}(t)\left(K_{p'} v^{1-p'}\right)^{1/p'}(t) < \infty. \tag{3.36}$$

Nous omettons la preuve le théorème 3.5 peut-être réduit au théorème 3.1.

3.4.2 Estimations des intégrales de Riemann-Liouville avec deux poids .

Nous étudions les estimations pondérées suivantes

$$\left(\int_0^\infty |\ I_\alpha f(x)u(x)\ |^q\ dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty |\ f(x)v(x)\ |^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.37}$$

avec une constante C indépendante de f , pour les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville .

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \alpha > 0,$$

la question est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les fonctions de poids u et v telle que (3.37) soit satisfaite où le membre droit est fini . Ce problème est résolu pour $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$,$\alpha > 1$ .Le résultat obtenu généralise d'autres estimations pour certains opérateurs intégraux où $\alpha = 1$.

Formulation de quelques résultats.

Les estimations de la forme (3.37) ont été étudiées par de nombreux auteurs , et le cas $\alpha = 1$ a été complètement étudié.Ici , l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville coïncide avec l'opérateur d'intégration , et l'inégalité correspondante (3.37) généralise l'inégalité bien connue de Hardy [[12],théorème 330]. Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty, p = q, \alpha = 1$, Talenti [36] ,Tomaselli [37] puis Mackenhopt [26] on montré que l'inégalité (3.37) est vraie si et seulement si

$$A_0 = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty |u(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_0^t |v(x)|^{-p'} dx \right)^{1/p'} < \infty, \tag{3.38}$$

où $1/p' + 1/p = 1$.Pour $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $\alpha = 1$ ce résultat a été obtenu par Bradley [6], Mazya [24] [23] , Kokilachvili [8] , ainsi que les résultats similaires dans [20] [10]. De plus , Mazya et Rosin [24] [23] ont considéré le cas $1 \leqslant q < p < \infty$, $\alpha = 1$, qui diffère significativement du précédent ,Ici l'inégalité (3.37) est satisfaite si et seulement si

$$L = \left\{ \int_0^\infty \left[\left(\int_t^\infty |u(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_0^t |v(x)|^{-p'} dx \right)^{1/q'} \right]^s |v(t)^{-p'} dt \right\}^{1/s} < \infty \tag{3.39}$$

où $1/s = 1/q - 1/p, 1/q - 1/q' = 1$.

Dans[2] [16],sont obtenues des conditions suffisantes pour la bornétude des opérateurs de la forme

$$Tf(x) = \int_{-\infty}^x k(x,t) f(t) dt,$$

dans les espaces pondérés , à condition que $k(x,t) \geqslant 0$ ne croit pas par rapport à x et ne décroit pas par rapport a t dans le domaine $\{x > t\}$. Il a été montré dans [2] si $1 < p \leqslant q < \infty$ et existe $\beta \in [0,1]$ tel que

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \left(\int_t^\infty \left| k(x,t)^\beta u(x) \right|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_{-\infty}^t \mid k(t,x)^{1-\beta} \left[v(x)|^{-1} \right|^{p'} dx \right)^{1/p'} < \infty,$$

alors

$$\left(\int_{-\infty}^\infty |Tf(x) u(x)|^q dx \right)^{1/q} \leqslant C \left(\int_{-\infty}^\infty |f(x) v(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{3.40}$$

Pour $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$, la condition suffisante pour l'estimation (3.40) est comme indiquée dans [16], est la suivante

$$\left\{ \int_0^\infty \left[\left(\int_t^\infty |k(x,t) u(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_{-\infty}^t |v(x)|^{-p'} dx \right)^{1/q'} \right]^s |v(t)|^{-p'} dt \right\}^{1/s} < \infty.$$

Les résultats obtenus par Andersen et Heinig ont été appliqués pour l'étude des estimations (3.37) au cas $0 < \alpha < 1$ et ont trouvé les conditions suffisantes correspondantes .

Pour $1 < p < \infty, 1/p - 1/q = \alpha, 0 < \alpha < 1$, et $u = v$ la condition nécessaire et suffisante pour (3.37) a été trouvée par Andersen et Sawyer [3].

Dans le cas de $\alpha > 1$, le noyau de l'opérateur de Riemann-Liouville ne satisfait pas les conditions de [2] [16] puisque les condition de monotonie sur le noyau sont ne sont pas respectées , et donc une approche différente a été nécessaire ici. Formulons le résultat obtenu ,Soit $\gamma \in [0, 1]$ et

$$A_\alpha(\gamma, t) = \left(\int_t^\infty (x-t)^{\alpha(1-\eta)q}|u(x)|^q dx\right)^{1/q} \left(\int_0^t (t-x)^{\alpha pp'}|v(x)|^{-p'} dx\right)^{1/\rho'}, \tag{3.41}$$

où en cas d'incertitude on fixe $0 \cdot \infty = 0$

Théorème 3.6 :

Soit $1 < p \leqslant q < \infty, \alpha \geqslant 1$, Alors l'estimation (3.37) est satisfaite si et seulement si

$$A_{\alpha-1} = \max_{\gamma=0,1} \sup_{t>0} A_{\alpha-1}(\gamma, t) < \infty, \tag{3.42}$$

de plus, si C est la plus petite constante dans (3.37), alors

$$\Gamma^{-1}(\alpha) A_{\alpha-1} \leqslant C \leqslant r\Gamma^{-1}(\alpha) A_{\alpha-1},$$

où r ne dépend que de p, q, α.

Il faut noter que (3.42) est composée de deux conditions($\gamma = 0$ et $\gamma = 1$), dont chacune dans le théorème 3.6 est nécessaire , et ensemble elles sont suffisantes, on peut montrer que pour $\alpha > 1$ ces conditions , en général , ne se succèdent pas , c'est à dire que la présence d'un couple de conditions dans le théorème 3.6 est essentielle et en cela elle diffère des résultats connus jusqu'alors .

Dans la proposition suivante sont considérés les cas particuliers $p = 1$ ou $q = \infty$. Ces résultats sont un cas particulier de l'énoncé bien connu [[17], ch. 11 , théorème 4].

Théorème 3.7 :

Soient $\alpha \geqslant 1$ et C la plus petite constante dans (3.37) si $p = 1, 1 \leqslant q \leqslant \infty$, alors

$$C = \Gamma^{-1}(\alpha) \sup_{t>0} |v(t)|^{-1} \left(\int_t^\infty (x-t)^{(\alpha-1)q}|u(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

si $q = \infty, 1 < p \leqslant \infty$, alors

$$C = \Gamma^{-1}(\alpha) \sup_{t>0} |u(t)|^{-1} \left(\int_0^t (t-x)^{(\alpha-1)p'} |v(x)|^{-p'} dx \right)^{1/p'} .$$

Pour certaines applications (voir par example, [4]) , il est important de voir quand les opérateurs de Riemann-Liouville sont complètement continus de $L_{p,v}$ à $L_{q,u}$, où $L_{p,v}$ et $L_{q,u}$ sont les espaces de Lebesgue de normes $\|fv\|_p$ et $\|gu\|_q$ respectivement.

Théorème 3.8 :

Soient $\alpha \geqslant 1, 1 < p \leqslant q < \infty$, alors l'opérateur de Riemann-Liouville de $L_{p,v}$ à $L_{q,u}$ est complètement continue si et seulement si $A_{\alpha-1} < \infty$ et pour tout $\gamma = 0, 1$

$$\lim_{t\to 0} A_{\alpha-1}(\gamma, t) = \lim_{t\to\infty} A_{\alpha-1}(\gamma, t) = 0. \tag{3.43}$$

Remarque 3.5 :

Des propositions similaires aux théorèmes 3.6, 3.7, 3.8 , sont valables pour l'opérateur dual

$$I_\alpha^* f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

de plus l'intervalle $(0, \infty)$ du domaine de définitions de fonctions peut être remplacé par tout intervalle (a, b) de la droite réelle avec le changement correspondant des opérateurs I_α et I_α^* .

Des cas particuliers des théorème 3.6 et 3.8 ont été signalés pas l'auteur dans [16] .

Conclusion

La majorité des résultats de ce travail sont à la base de recherche d'imminents scientifiques dans le domaine des opérateurs intégraux . De nos jours les recherches sont poursuivies et de nouveaux résultats sont apparus . On peut conclure que c'est un thème d'actualité .

Bibliographie

[1] R. Adams, *Sobolev spaces, academic press,inc., 1978*, Boston.

[2] K. Andersen and H. Heinig, *Weighted norm inequalities for certain integral operators*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 14 (1983), pp. 834–844.

[3] K. Andersen and E. Sawyer, *Weighted norm inequalities for the riemann-liouville and weyl fractional integral operators*, Transactions of the American Mathematical Society, 308 (1988), pp. 547–558.

[4] O. Apyshev and M. Otelbaev, *On the spectrum of a class of differential operators and some imbedding theorems*, Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya, 43 (1979), pp. 739–764.

[5] S. Bloom and R. Kerman, *Weighted norm inequalities for operators of hardy type*, Proceedings of the American Mathematical Society, 113 (1991), pp. 135–141.

[6] J. S. Bradley, *Hardy inequalities with mixed norms*, Canadian Mathematical Bulletin, 21 (1978), pp. 405–408.

[7] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Théorie et applications,Masson paris, (1983).

[8] V. I. Burenkov, *Fonctions spaces l p*, Moscow Publishing house of the univercity, (1987).

[9] V. I. Burenkov, *Main inequalities in lp,moscow-university*, 1989.

[10] P. Gurka, *Generalized hardy's inequality*, Časopis pro pěstování matematiky, 109 (1984), pp. 194–203.

[11] G. Hardy, *Littlewood. je, and polya, g.(1952). inequalities.*

[12] G. Hardy, D. Littlewood, and G. Polia, *Inegalities*, M.edition, (1948).

[13] G. H. HARDY, *Notes on some points in the integral calculus, li.*, Messenger Math, 48 (1919), pp. 107–112.

[14] G. H. HARDY, *Note on a theorem of hilbert*, Mathematische Zeitschrift, 6 (1920), pp. 314–317.

[15] ——, *Notes on some points in the integral calculus*, Messenger of Math., 54 (1925), pp. 150–156.

[16] H. P. HEINIG, *Weighted norm inequalities for certain integral operators. 2*, Proceedings of the American Mathematical Society, 95 (1985), pp. 387–395.

[17] L. V. KANTOROVICH AND G. P. AKILOV, *Fonctional analysis*, Moscow, (1984).

[18] V. KOKILASHVILI, *On hardyâ€™s inequalities in weighted spaces*, Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR, 96 (1979), pp. 37–40.

[19] A. KOLMOGOROV AND S. FOMINE, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Editions Mir,Moscou 2eme edition, 1973.

[20] A. KUFNER AND H. TRIEBEL, *Generalizations of Hardy's inequality*, Gius. Laterza & Figli, 1978.

[21] E. LIEB AND M. LOSS, *Analysis*, American Mathematical Society.volume 14. Primary 28-01, 42-01, 46-01, 49-01, 2000.

[22] V. M. MANAKOV, *On the best constant in weighted inequalities for riemann-liouville integrals*, Bulletin of the London Mathematical Society, 24 (1992), pp. 442–448.

[23] W. MAZIA, *Spaces of s.l.sobolev*, L :LGU, (1985).

[24] W. G. MAZIA, *Classification set for sobolev spaces*, I,Leipzig : teubner, (1979).

[25] V. G. MAZ'YA AND I. E. VERBITSKY, *The schrödinger operator on the energy space : boundedness and compactness criteria*, (2002).

[26] B. MUCKENHOUPT, *Hardy's inequality with weights*, Studia Mathematica, 44 (1972), pp. 31–38.

[27] R. OINAROV, *Two-sided norm estimates for certain classes of integral operators*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics-AMS Translation, 204 (1994), pp. 205–214.

[28] R. O. Oinarov, *Weighted inequalities for a class of integral operators*, in Doklady Akademii Nauk, vol. 319, Russian Academy of Sciences, 1991, pp. 1076–1078.

[29] B. Opic and A. Kufner, *Hardy type inequalities, pitman research notes in mathematics, vol. 219*, 1990.

[30] L.-e. Persson, A. Kufner, and N. Samko, *Weighted inequalities of Hardy type*, World Scientific Publishing Company, 2017.

[31] E. Sawyer, *Weighted lebesgue and lorentz norm inequalities for the hardy operator*, Transactions of the American Mathematical Society, 281 (1984), pp. 329–337.

[32] G. Sinnamon and V. D. Stepanov, *The weighted hardy inequality : new proofs and the case p= 1*, Journal of the London Mathematical Society, 54 (1996), pp. 89–101.

[33] G. J. Sinnamon, *Operators on lebesgue spaces with general measures, proquest llc*, Ann Arbor, MI, Thesis (Ph. D.)-McMaster University (Canada), (1987).

[34] V. D. Stepanov, *Weighted inequalities of hardy type for fractional riemann–liouville integrals*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, 31 (1990), pp. 186–197.

[35] V. D. Stepanov, *The weighted hardyâ€™s inequality for nonincreasing functions*, Transactions of the American Mathematical Society, 338 (1993), pp. 173–186.

[36] G. Talenti, *Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze : Conferenza tenuta il 27 marzo 1969*, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 39 (1969), pp. 171–185.

[37] G. Tomaselli, *A class of inequalities, boll. un. mat. ital. 21 (1969), 622-631*, The work of the first author was partially supported by the National Science Foundation. JURKAT : SYRACUSE UNIVERSITY- SYRACUSE, NY, 13210 (1969).