RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Analyse Fonctionnelle et équations différentielles »

Présenté Par :
Mechraoui Sarah Nour El Houda
Nehari Sabrine

Sous L'intitulé :

Dérivée déformable et applications

Soutenu publiquement le 04 / 07 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Halim . B	Grade	Université Ibn khaldoun	Président
Mr Ziane . M	Grade	Université Ibn khaldoun	Encadreur
Mr Zenter . W	Grade	Université Ibn khaldoun	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciement

Nous tenons à remercier vivement tous nos professeurs qui n'ont ménagé aucun effort afin de nous inculquer le savoir dont nous avions réellement besoin.
Sans oublier au passage de remercier aussi notre encadreur monsieur Ziane Mohamed qui nous a beaucoup aidé à préparer notre mémoire.
Nous remercions nos parents pour leur soutien incessant et à qui nous souhaitons une longue et heureuse vie.
Un vif remerciement à nos frères et sœurs qui nous ont accompagnés moralement pendant notre cursus scolaire.

Table des matières

Résumé

Ce mémoire est une étude de la dérivation déformable,pour pouvoir traiter un problème de Cauchy déformable et dans le cas impulsive .Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution de ces problèmes par le théorème de point fixe.

Introduction

F.Zulfeq-ar, A.Ujlayan et P.Ahuja ont introduit le nouveau concept de dérivée
déformable en utilisant une approche limite comme dans la dérivée usuelle.Il l'ont l'appelé déformable en raison de sa propriété intrinsèque de déformer continuellement la fonction en dérivée, cette dérivée est linéairement liée a la dérivée usuelle.

A.Meraj, D.N.Pandey ont utilise ce concept pour étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy non-locale et impulsive.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Dérivée déformable

Dans cette section
On introduit la notion de la dérivée déformable
Ainsi que ses propriétés.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème d'existence et d'unicité pour une classe d'équation différentiel les gouvernées par une dérivation déformable.
L'argument utiliser est celle du point fixe dans un espace de Banach approprié.
Les résultats obtenus dans ce chapitre sont inspirées de [8].

Définition 1.1 *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, où $[a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $0 < \alpha < 1$. La dérivée déformable de f d'ordre α en $t \in [a, b]$ est définie par :*

$$D^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1 + \varepsilon\beta) f(t + \varepsilon\alpha) - f(t)}{\varepsilon}, \qquad \alpha + \beta = 1. \tag{1}$$

On dit que f est $\alpha-$dérivable en t si la limite précédente existe.

Remarque 1.1 *Si $\alpha = 1$ alors $\beta = 0$, la dérivée déformable coïncide avec la dérivée usuelle.*

Définition 1.2 *Pour une fonction continue f définie sur $[a,b]$, l'intégrale déformable d'ordre α de f est donnée par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} \int_a^t e^{\frac{\beta}{\alpha}x} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad t \in [a,b],\ \alpha+\beta=1. \tag{2}$$

$\alpha \in (0,1]$, *et quand $a=0$ on utilise la notation :*

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} \int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}x} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Remarque 1.2 *Si $\alpha = 1$ alors $\beta = 0$. L'intégrale précédent coïncide avec l'intégrale de Riemann usuel.*

Théorème 1.1 *[1] Toute fonction dérivable est α-dérivable. De plus, nous avons la relation :*

$$D^\alpha f(t) = \beta f(t) + \alpha D f(t), \qquad \alpha+\beta=1. \tag{4}$$

Ici $Df(t)$ désigne la dérivée usuelle (classique).

preuve 1.1 *Nous avons :*

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+\varepsilon\beta)f(t+\varepsilon\alpha) - f(t)}{\varepsilon}, \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\varepsilon\beta)f(t+\varepsilon\alpha)}{\varepsilon} + \frac{\alpha(f(t+\varepsilon\alpha) - f(t))}{\alpha\varepsilon}, \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\alpha(f(t+\varepsilon\alpha) - f(t))}{\alpha\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} \beta f(t+\varepsilon\alpha), \\ &= \alpha f'(t) + \beta f(t). \end{aligned}$$

Théorème 1.2 *[1] Si f est α-dérivable alors elle est continue.*

Théorème 1.3 [4] *D^α et I_a^α admettent les propriétés suivantes :*
Soient f définie sur $[a,b]$, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ avec $\alpha+\beta=1$ et $\alpha_i+\beta_i=1$ pour $i=1,2$, alors :

1/ $D^\alpha(\lambda f+\mu g)(t)=\lambda D^\alpha f(t)+\mu D^\alpha g(t)$, (linéarité de D^α).

2/ $D^{\alpha_1}\cdot D^{\alpha_2}=D^{\alpha_2}\cdot D^{\alpha_1}$, (commutativité de D^α).

3/ $D^\alpha(C)=\beta C, \forall C$ constante.

4/ $D^\alpha(f\cdot g)=(D^\alpha f)g+\alpha f Dg$,

5/ Supposons que f et g sont différentiables, alors :

$$D^\alpha(f\circ g)(t)=\beta(f\circ g)(t)+\alpha f'(g(t))g'(t).$$

6/ $I_a^\alpha(bf+cg)(t)=bI_a^\alpha f(t)+cI_a^\alpha g(t)$, (linéarité de I_a^α).

7/ $I_a^{\alpha_1}\cdot I_a^{\alpha_2}=I_a^{\alpha_2}\cdot I_a^{\alpha_1}$, (commutativité de I_a^α).

preuve 1.2 *(1)*

$$\begin{aligned} D^\alpha(\lambda f+\mu g)(t) &= \beta(\lambda f+\mu g)(t)+\alpha D(\lambda f+\mu g)(t),\\ &= \lambda\beta f(t)+\mu\beta g(t)+\alpha(\lambda Df(t)+\mu Dg(t)),\\ &= \lambda(\beta f(t)+\alpha Df(t))+\mu(\beta g(t)+\alpha Dg(t)),\\ &= \lambda D^\alpha f(t)+\mu D^\alpha g(t). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1}\cdot D^{\alpha_2}f(t) &= (\beta_1 f(t)+\alpha_1 Df(t))\times(\beta_2 f(t)+\alpha_2 Df(t)),\\ &= (\beta_2 f(t)+\alpha_2 Df(t))\times(\beta_1 f(t)+\alpha_1 Df(t)),\\ &= D^{\alpha_2}\cdot D^{\alpha_1}. \quad \alpha_1+\beta_1=1 \quad ,\alpha_2+\beta_2=1. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} &D^\alpha(C)=\beta C+\alpha DC \text{ où } Dc=0 \ \textit{ alors} :\\ &D^\alpha(C)=\beta C. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} D^\alpha(f\cdot g)(t) &= \beta(f\cdot g)(t)+\alpha D(f\cdot g)(t),\\ &= \beta f(t)g(t)+\alpha f(t)Dg(t)+\alpha g(t)Df(t),\\ &= g(t)(\beta f(t)+\alpha Df(t))+\alpha f(t)Dg(t),\\ &= (gD^\alpha f)(t)+\alpha(fDg)(t). \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} D^\alpha(f\circ g)(t) &= D^\alpha f(g(t)) = \beta f g(t) + \alpha D f(g(t)), \\ &= \beta(f\circ g)(t) + \alpha D g(t) f \cdot D g(t), \\ &= \beta(f\circ g)(t) + \alpha f^{'}(g(t))\cdot g^{'}(t). \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(bf+cg)(t) &= \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_a^t e^{\frac{\beta}{\alpha}x}(bf+cg)(x)\,\mathrm{d}x, \\ &= \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}(b\int_a^t e^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x)\,\mathrm{d}x + c\int_a^t e^{\frac{\beta}{\alpha}x}g(x)\,\mathrm{d}x), \\ &= b\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_a^t e^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x)\,\mathrm{d}x + c\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_a^t e^{\frac{\beta}{\alpha}x}g(x)\,\mathrm{d}x, \\ &= bI_a^\alpha f(t) + cI_a^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Proposition 1.1 *Soient f et g deux fonctions dérivables nous avons alors :*

$$D^\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD^\alpha(f) - \alpha f D g}{g^2}. \tag{5}$$

avec $g \neq 0$

preuve 1.3 *On a, $\forall t \in [a,b]$,*

$$\begin{aligned} D^\alpha\left(\frac{f}{g}\right) &= \beta\left(\frac{f}{g}\right) + \alpha D\left(\frac{f}{g}\right), \\ &= \frac{\beta f g}{g^2} + \frac{\alpha(gDf + fDg)}{g^2}, \\ &= \frac{\beta f g + \alpha(gDf + fDg)}{g^2}, \\ &= \frac{g(\beta f + \alpha D f) + \alpha f D g}{g^2}, \\ &= \frac{gD^\alpha f - \alpha f D g}{g^2} \end{aligned}$$

Théorème 1.4 *[8] Soit f une fonction continue dans $[a,b]$ qui possédé une dérivée déformable d'ordre α,$0 < \alpha < 1$. Alors, $I_a^\alpha f$ est $\alpha-$dérivable dans $]a,b[$, et on a :*

$$D^\alpha(I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Et

$$I_a^\alpha(D^\alpha f)(t) = f(t) - e^{\frac{\beta}{\alpha}(a-t)} f(a).$$

1.2 Quelques espaces fonctionnels

- On considère l'espace $\mathrm{C} := \mathrm{C}([0,T],\mathbb{R}) = \{f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$,

  muni de la norme :

  $$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |f(t)|.$$

  $(\mathrm{C}, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

- On considère l'ensemble de fonctions :
  $PC(\mathrm{J},\mathbb{R}) = \{y : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}, y \in C((t_k,t_{k+1}),\mathbb{R}) \setminus k = 0,...,m$ et $\exists\, y(t_k^-)$et $y(t_k^+)$ $\setminus k = 1,...,m$ avec $y(t_k^-) = y(t_k)\}$.
  cet ensemble est un espace de Banach avec la norme suivante :

  $$\|y\|_{PC} = \sup_{t\in\mathrm{J}} |y(t)|$$

  Tel que $\mathrm{J} := [0,T]\setminus t_1,...,t_m$.

- On dit que F est équicontinue si et seulement si :
  $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall t_1,t_2 \in [0,T], |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon, \quad \forall f \in F$.

- Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est noté A est dite uniformément bornée s'il existe $M > 0$ tel que pour toute $F \in A$, $\|F\|_\infty \leq M$.

- f est dite lipschtizienne si : $\exists\, L > 0$ tel que :

  $$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

- L'espace L^1 est l'espace des fonctions a valeur dans $\mathbb{R}$ dont la valeur absolue est intégrable au sens de Lebsgue.

(i,e)

$$u \in L^1([0,T],\mathbb{R}) \Rightarrow \int_0^T |u| < \infty.$$

1.2.1 Critère de compacité :

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications entre autre la compacité de certains opérateurs. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues.

- Une partie K de X est dite compacte si, toute suite (U_n) d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.

Théorème 1.5 *Soient K un compact, F un espace métrique et A une partie de $C(K,F)$ est relativement compact si et seulement si :*

1/ A est uniformément bornée.

2/ A est équicontinue.

3/ Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x)$ définit par : $A(x) = \{f(x),\ f \in A\}$, est relativement compact dans F.

Proposition 1.2 *Si F est de dim $<\infty$, (3) du théorème précédent est automatiquement satisfaite.*

- un opérateur compact est une application continue entre deux espaces vectoriels topologiques X et Y envoyant les parties bornées de X sur les parties relativement compactes de Y.

- un opérateur complètement continu envoie une suite faiblement convergente dans une suite convergente.

1.2.2 Principe de contraction de Banach

Théorème 1.6 *Soit $f : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C}$, où C est un fermé, f est une contraction c'est-à-dire : $\exists L \in]0,1[$ tel que $\forall x,y \in \mathrm{C},\ |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$.*
Alors il existe un unique $x^* \in \mathrm{C}$ tel que :

$$f(x^*) = x^*.$$

1.2.3 Théorème de Schaefer

Théorème 1.7 *Soit* $f : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C}, \mathrm{C}$ *est un ouvert, si* f *est un opérateur continue et compact, alors on a l'une des alternatives suivantes :*

1/ f *admet un point fixe,* $f(x^*) = x^*$.

2/ $E = \{x \in \mathrm{C},\ x = \lambda f(x)\}$ *est non borné.*

1.2.4 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 1.8 *Soit* $f : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C}$, *si* f *est un opérateur complètement continue, alors on a l'une des alternatives suivantes :*

1/ f *admet un point fixe,* $f(x^*) = x^*$.

2/ $E = \{x \in \partial\mathrm{C},\ \exists\lambda \in]0,1[,\ x = \lambda f(x)\}$.

1.2.5 Quelques théorèmes du point fixe

Théorème 1.9 *Soit* M *un convexe fermé d'un espace de Banach* X. *Soit* A,B *deux opérateurs tels que :*

1/ $Ax + By \in M, \quad x, y \in M$.

2/ A *est compact et continue.*

3/ B *est une application contractante.*

Alors $\exists z \in M$, *tel que* $z = Az + Bz$.

Chapitre 2

Problème de Cauchy déformable

2.1 Introduction

Dans le présent chapitre,nous introduisons des conditions suffisantes pour les quelles le problème suivant possède une solution.
Considérons :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & t \in [0; T]. \\ x(0) + g(x) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Où f, g sont deux fonctions qui seront préciser par la suite et $D^\alpha x(t)$ est la dérivée déformable de $0 \leq \alpha \leq 1$.

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & t \in [0; T]. \\ x(0) + g(x) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Où $D^\alpha x(t)$ est la dérivée déformable de $0 \leq \alpha \leq 1$, $g : \mathrm{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant une fonction continue.

Théorème 2.1 *Le problème(1) est équivalent à l'équation intégrale suivante :*

$$x(t) = [x_0 - g(x)]e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0, T]. \tag{6}$$

Démonstration 2.1 *On a*

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0; T]. \\ x(0) + g(x) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

En intégrant :

$I^{\alpha}D^{\alpha}x(t) = I^{\alpha}f(t, x(t)) = x(t) - e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}x(0)$, *donc*
$I^{\alpha}f(t, x(t)) = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$
D'ou

$$x(t) = [x_0 - g(x)]e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Réciproquement, on applique D^{α} sur l'équation intégrale $x(t)$:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x(t) &= \beta x(t) + \alpha Dx(t), \\ &= \beta([x_0 - g(x)]e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, x(s))\,\mathrm{d}s), \\ &+ \alpha(D\left[[x_0 - g(x)]e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, x(s))\,\mathrm{d}s)\right], \\ &= \beta[x_0 - g(x)]e^{-\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{\beta}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, x(s))\,\mathrm{d}s - \beta e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}[x_0 - g(x)] \\ &+ e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}e^{\frac{\beta}{\alpha}t}f(t, x(t)) - \frac{\beta}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, \\ &= f(t, x(t)). \end{aligned}$$

Définition 2.1 *La fonction $x \in \mathrm{C}$ est solution de (1) si :*

$$x(t) = [x_0 - g(x)]e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0, T].$$

Introduisons les hypothèses suivantes :

H1) $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

H2) $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

H3) $g : \mathrm{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $G = \sup\limits_{x \in \mathbb{C}}|g(x)| < \infty$, de plus $\exists\, b > 0$ tel que :

$$|g(x) - g(y)| \leq b\|x - y\|, \forall x, y \in \mathrm{C}.$$

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_3)$ sont vérifiées et $b < \frac{1}{2}$, $L < \frac{\beta}{2}$ alors le problème de Cauchy* (1) *a une unique solution.*

preuve 2.1 *Soit l'opérateur* $F : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C}$ *défini par :*

$$(Fx)(t) := [x_0 - g(x)]e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s.$$

On pose $M = \sup_{t\in[0,T]} |f(t,0)|$*,évidement* $M < \infty$*, on prend* $r > 2(|x_0|+G+\frac{M}{\beta})$ *,*

Nous avons alors : $F(B_r) \subset B_r$ *.*

Où $$B_r = \{x \in \mathrm{C},\ \|x\| \leq r\}.$$

En effet, soit $x \in B_r$*, on a :*

$$\begin{aligned}
|Fx(t)| &\leq |x_0| + G + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}|f(s,x(s))|\,\mathrm{d}s,\\
&\leq |x_0| + G + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}|f(s,x(s))| - |f(s,0)| + |f(s,0)|\,\mathrm{d}s,\\
&\leq |x_0| + G + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}(Lr+M),\\
&\leq |x_0| + G + (Lr+M)\frac{1}{\beta}(1-e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}),\\
&\leq |x_0| + G + (Lr+M)\frac{1}{\beta},\\
&\leq r.
\end{aligned}$$

D'où l'opérateur F *transforme la boule* B_r *en elle même.*
Soit maintenant $x, y \in B_r$*, on a :*

$$
\begin{aligned}
|Fx(t)-Fy(t)| &\leq |g(x)-g(y)| + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|\,\mathrm{d}s,\\
&\leq b\|x-y\|_\infty + L\|x-y\|_\infty \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}\,\mathrm{d}s,\\
&\leq b\|x-y\|_\infty + L\|x-y\|_\infty \frac{\alpha}{\beta}(e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}-1),\\
&\leq b\|x-y\|_\infty + \frac{L}{\beta}\|x-y\|_\infty,\\
&\leq (b+\frac{L}{\beta})\|x-y\|_\infty,\\
&\leq \Omega\|x-y\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Par conséquant $\|Fx-Fy\|_\infty \leqslant \Omega\|x-y\|_\infty$, *avec* $\Omega = (b+\frac{L}{\beta})$.
Comme $\Omega < 1$ *L'opérateur* F *est contractant, en vertu du théorème de contraction de Banach, il existe* $x^* \in B_r$ *tel que* $Fx^* = x^*$.
Finalement, le problème (1) *admet une solution unique.*

2.3 Résultat d'existence

Supposons :

H4) $|f(t,x)| \leq u(t)$,$\forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$ ou $u \in L^1([0,T],\mathbb{R}^+)$.
Ensuite, on peut énoncer et démontrer le résultat principale.

Théorème 2.3 *Si* $(H_1)-(H_4)$ *sont satisfaites avec* $b<1$ *alors le problème de Cauchy possède au moins une solution sur* $C[0,T]$.

preuve 2.2 *Soit* $r \geq |x_0| + G + \frac{\|u\|_{L1}}{\alpha}$*, on considère* $B_r = \{x \in \mathrm{C}, \|x\| \leq r\}$ *, et on définit sur* B_r *les opérateurs* A *et* B *par :*

$$
\begin{aligned}
Ax(t) &= \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha} s} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s, \\
B(x)(t) &= [x_0 - g(x)] e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}.
\end{aligned}
$$

On démontre dans un premier temps que $A+B$ *opère dans la même boule* B_r *.*

$$
\begin{aligned}
|Ax(t) + By(t)| &= \left| \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha} s} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s + [x_0 - g(y)] e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \right|, \\
&\leq \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha} s} |f(s, x(s))|\, \mathrm{d}s + |x_0 - g(y)|\, e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}, \\
&\leq \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} e^{\frac{\beta}{\alpha} t} \int_0^t |f(s, x(s))|\, \mathrm{d}s + |x_0| + G, \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^t u(s)\, \mathrm{d}s + |x_0| + G, \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^T u(s)\, \mathrm{d}s + |x_0| + G, \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \|u\|_{L1} + \|x_0\| + G, \\
&\leq r.
\end{aligned}
$$

De (H_3) *il est claire que* B *est une application contractante pour* $b < 1$ *.*
Comme l'hypothèse est continue et d'après (H_2)*,* $(Ax(t))$ *est continue .*
On suppose alors que $x_n \longrightarrow x$ *dans* B_r *, alors étant donné* $\varepsilon > 0$ *, il existe* N *asser grand pour que* $\|x_n - x\|_\infty < \varepsilon$ *, chaque fois que* $n > N$ *,* $\forall n$ *on obtient :*

$$
\begin{aligned}
|Ax_n(t) - Ax(t)| &\leq \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} \int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| \, \mathrm{d}s, \\
&\leq \frac{L}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} \int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s} |x_n(s) - x(s)| \, \mathrm{d}s, \\
&\leq \frac{L}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} \varepsilon \int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s} \, \mathrm{d}s, \qquad (car \|x_n(s) - x(s)\| < \varepsilon), \\
&\leq \frac{L}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} e^{\frac{\beta}{\alpha}t}, \\
&\leq \frac{L \cdot \varepsilon}{\beta}.
\end{aligned}
$$

D'où $\|Ax_n(t) - Ax(t)\|_\infty \leq \frac{L \cdot \varepsilon}{\beta}$
Et cella prouve que $A : B_r \longrightarrow \mathrm{C}$ *est continue.*
L'uniformément bornitude de $A(B_r)$ *résulte du fait qu'on a :*

$$
\begin{aligned}
|Ax(t)| &\leq \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} \int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s} |f(s, x(s)| \, \mathrm{d}s, \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^T u(s) \, \mathrm{d}s, \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \|u\|_{L1}.
\end{aligned}
$$

Donc $\|A\|_\infty \leq \frac{\|u\|_{L1}}{\alpha}$, $\forall x \in B_r$.
Il reste à montrer que la famille $A(B_r)$ *est équicontinue.*
Soit $t_1, t_2 \in [0, T], t_2 < t_1$, *et* $x \in B_r$, *en utilisant le fait que* f *est borné sur le compact* $[0, T] \times [-r, r]$ *et que* $K = \sup\limits_{(t,x) \in [0,T] \times [-r,r]} |f(t, x)| < \infty$, *on*

obtient :

$$\begin{aligned}
|Ax(t_1)-Ax(t_2)| &= |\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t_1}\int_0^{t_1} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s-\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}t_2}\int_0^{t_2} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s| \\
&= \frac{1}{\alpha}|\int_0^{t_1} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t_1}e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s-\int_0^{t_2} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t_2}e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s| \\
&= \frac{1}{\alpha}|\int_{t_2}^{t_1} e^{-\frac{\beta}{\alpha}t_1}e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s-\int_0^{t_2}[e^{-\frac{\beta}{\alpha}t_2}-e^{-\frac{\beta}{\alpha}t_1}]e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s| \\
&= \frac{1}{\alpha}|e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_1}\int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s-[e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_2}-e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_1}]\int_0^{t_2} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s| \\
&\leq \frac{1}{\alpha}|e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_1}\int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s|+\frac{1}{\alpha}|[e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_2}-e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_1}]\int_0^{t_2} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s| \\
&\leq \frac{K}{\beta}|e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_1}(e^{\frac{\beta}{\alpha}t_1}-e^{\frac{\beta}{\alpha}t_2})+(e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_2}-e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_1})(e^{\frac{\beta}{\alpha}t_2}-1)| \\
&\leq \frac{K}{\beta}|(1-e^{\frac{\beta}{\alpha}(t_2-t_1)})+(1-e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_2}-e^{\frac{\beta}{\alpha}(t_2-t_1)}+e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_1})| \\
&= \frac{K}{\beta}|2-2e^{\frac{\beta}{\alpha}(t_2-t_1)}-e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_2}+e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_1}| \\
&\leq \frac{K}{\beta}|2-2e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t_1-t_2)}| \\
&= 2\frac{K}{\beta}|e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t_1-t_2)}-1|
\end{aligned}$$

Donc $\|Ax(t_1)-Ax(t_2)\|_\infty \longrightarrow 0$, *quand* $t_1 \longrightarrow t_2$, *indépendamment de* x.
Par conséquent, $A(B_r)$ *est équicontinue.*
D'après Ascoli-Arzela $\overline{A(B_r)}$ *compact . Le théorème de Krasnosel'skii assure qu'il existe* $x_* \in B_r$ *tel que :*

$$Ax_*+Bx_*=x_*.$$

Chapitre 3

Problème de Cauchy déformable cas impulsive

3.1 Introduction

Dans ce chapitre.
On étudie l'existence et le caractère unique des solutions pour les problèmes de valeur initiale des équations différentielles impulsives d'ordre déformable.

−−−

L' équations différentielles impulsive d'ordre fractionnaires α est définie par :

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t) = f(t, y), \quad t \in J = [0, T], t \neq t_k, \\ \Delta y \mid_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Où $k = 1, .., m$, D^{α} est la dérivée déformable fractionnaire, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $I_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et $y_0 \in \mathbb{R}$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$
$\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$ où $y(t_k^+) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0^-} y(t_k + h)$, représente la limite à gauche et à droite de $y(t)$ dans $t = t_k$.

3.2 Résultat d'existence et d'unicité

[14] Soit $y \in PC(\mathrm{J}, \mathbb{R})$ Une fonction $\alpha-$ dérivable sur J est dite la solution de (2) si y satisfait l'équation $D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t))$ sur J, et satisfait les

conditions :

$$\begin{cases} \Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1, ..., m. \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Et pour prouver l'existence de (2) on a besoin des lemmes suivantes : [8]
Pour $\alpha \in]0,1[$:

$$I_a^\alpha D^\alpha h(t) = h(t) - e^{\frac{\beta}{\alpha}(a-t)} h(a).$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. Les solutions de l'équation suivante :

$$D^\alpha h(t) = 0,$$

sont donnée par :

$$h(t) = Ce^{-\frac{\beta}{\alpha}t}.$$

C étant une constante arbitraire.

preuve 3.1 *On sait que $D^\alpha h(t) = \beta h(t) + \alpha D h(t)$, on pose $D^\alpha h(t) = 0$. il vient :*

$$\beta h(t) + \alpha D h(t) = 0.$$

D'où

$$Dh(t) + \frac{\beta}{\alpha} h(t) = 0.$$

Par un calcule élémentaire, on obtient le résultat :

$$Dh(t) = -\frac{\beta}{\alpha} h(t),$$
$$h(t) = Ce^{-\frac{\beta}{\alpha}h(t)}.$$

Soient $h : \mathrm{J} \longleftrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, y une solution de l'équation intégrale fractionnaire :

$$y(t) = \begin{cases} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} y_0 + \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} \displaystyle\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s} h(s) \mathrm{d}s, & t \in [0, t_1], \\ e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} y_0 + \sum_{i=1}^k I_i(y(t_i^-)) e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_i)} + \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} \displaystyle\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s} h(s) \mathrm{d}s, & t \in [t_k, t_{k+1}[. \end{cases} \tag{3}$$

Où $k = 1, .., m$ si et seulement si y est une solution de :

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t) = h(t), \quad t \in \mathrm{J} = [0, T], \quad t \neq t_k, \;\; k = 1, .., m, \\ \Delta y \mid_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

preuve 3.2 *Pour* $\alpha \in]0, 1[$,*si* $t \in [0, t_1[$ *l'equation diff :*

$$D^{\alpha}y(t) = h(t).$$

On utilise le Lemme 3.2.1, *on obtient :*
pour solution

$$y(t) = e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}y_0 + \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}h(s)\mathrm{d}s.$$

En effet si $t \in]t_1, t_2]$ *alors :*

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_1}y_0 + \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_1}\int_0^{t_1} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}h(s)\mathrm{d}s\right]e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_1)} + I_1(y(t_1^-))e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_1)} \\ &+ \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_{t_1}^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}h(s)\mathrm{d}s, \\ &= e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}y_0 + \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_0^{t_1} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}h(s)\mathrm{d}s + I_1(y(t_1^-))e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_1)} \\ &+ \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_{t_1}^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}h(s)\mathrm{d}s, \\ &= e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}y_0 + \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{\alpha}s}h(s)\mathrm{d}s + I_1(y(t_1^-))e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_1)}. \end{aligned}$$

Si $t \in [t_2, t_3[$, *alors :*

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}y_0 + \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_0^{t_1} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}h(s)\mathrm{d}s + I_1(y(t_1^-))e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_1)} \\ &+ \left[\frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_2}\int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}h(s)\mathrm{d}s\right] e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_2)} + I_2(y(t_2^-))e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_2)} \\ &+ \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_{t_2}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}h(s)\mathrm{d}s, \\ &= e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}y_0 + \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_0^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}h(s)\mathrm{d}s + I_1(y(t_1^-))e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_1)} \\ &+ I_2(y(t_2^-))e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_2)}. \end{aligned}$$

Si $t \in [t_k, t_{k+1}[$, *on obtient (3) par Lemme* 3.2.1.
Réciproquement supposons que y *satisfait (3).Si* $t \in [0, t_1]$ *alors* $y(0) = y_0$ *et puisque* D^α *est l'inverse à gauche de* I^α *on obtient* $D^\alpha y(t) = h(t)$ *pour chaque* $t \in [0, t_1]$.
si $t \in [t_k, t_{k+1}[\setminus k = 1, .., m$ *utilisant le fait que* $D^\alpha(Ce^{\frac{-\beta}{\alpha}t}) = 0$ *où* D^α *et la dérivée déformable, pour une constante* C*, on obtient :*

$$D^\alpha y(t) = h(t).$$

Pour chaque $t \in [t_k, t_{k+1}[$
On montre facilement que :

$$\Delta y\mid_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)) \setminus\ k = 1, .., m.$$

Théorème 3.1 *Supposons que :*

H1) Il existe une constante $l > 0$*, tel que* $|f(t, x) - f(t, y)| \leq l|x - y|$ *pour chaque* $t \in \mathrm{J}$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$.

H2) Il existe une constante $l^* > 0$, tel que $|I_k(x) - I_k(y)| \leq l^*|x - y|$ pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$ et $k = 1, .., m$ si

$$[(e^{\frac{\beta}{\alpha}T}m + 1)\frac{l}{\beta} + ml^*] < 1.$$

Alors le problème (2)a une unique solution en J.

preuve 3.3 *Transformons le problème (2) en un problème de point fixe, considérons*
l'opérateur $F : PC(\mathrm{J}, \mathbb{R}) \to PC(\mathrm{J}, \mathbb{R})$ défini par :

$$F(y)(t) = e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}y_0 + \frac{1}{\alpha}\sum_{o<t_k<t} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_k}\int_{t_k-1}^{t_k} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, x(s))\mathrm{d}s$$
$$+ \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_{t_k}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, y(s))\mathrm{d}s + \sum_{o<t_k<t} I_k(y(t_k^-)).$$

Les points fixes de l'opérateur F sont des solutions du problème (2). Nous utiliserons la contraction de Banach pour prouver que F a un point fixe. On doit d'abord montrer que F est une contraction.

Soit $x, y \in PC(J, \mathbb{R})$, *alors pour chaque* $t \in J$ *on a :*

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| \leq\ & \frac{1}{\alpha} \sum_{o<t_k<t} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_k} \int_{t_k-1}^{t_k} e^{\frac{\beta}{\alpha}s} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \mathrm{d}s \\
& + \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} \int_{t_k}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}s} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \mathrm{d}s + \sum_{o<t_k<t} |I_k(x(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))|, \\
& \leq \frac{l}{\alpha} \sum_{k=1}^{m} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_k} \int_{t_k-1}^{t_k} e^{\frac{\beta}{\alpha}s} |x(s) - y(s)| \mathrm{d}s + \frac{l}{\alpha} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} \int_{t_k}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}s} |x(s) - y(s)| \mathrm{d}s \\
& + \sum_{k=1}^{m} b|x(t_k^-) - y(t_k^-)|, \\
& \leq \frac{l}{\alpha} \sum_{k=1}^{m} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_k} \frac{\alpha}{\beta} e^{\frac{\beta}{\alpha}T} \|x - y\|_{pc} + \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{l}{\alpha} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} [e^{\frac{\beta}{\alpha}t} - e^{\frac{\beta}{\alpha}t_k}] \|x - y\|_{pc} \\
& + ml^* \|x - y\|_{pc}, \\
& \leq \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}T} ml}{\beta} \|x - y\|_{pc} + \frac{l}{\beta} [1 - e^{\frac{-\beta}{\alpha}(t-t_k)}] \|x - y\|_{pc} + ml^* \|x - y\|_{pc}, \\
& \leq \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}T} ml}{\beta} \|x - y\|_{pc} + \frac{l}{\beta} \|x - y\|_{pc} + ml^* \|x - y\|_{pc}, \\
& = \left[\frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}T} ml}{\beta} + \frac{l}{\beta} \right] \|x - y\|_{pc} + ml^* \|x - y\|_{pc}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|F(x) - F(y)\|_{pc} \leq [(e^{\frac{\beta}{\alpha}T} m + 1) \frac{l}{\beta} + ml^*] \|x - y\|_{pc}.$$

F *est une contraction, d'après le théorème du point fixe de Banach, nous concluons que* F *a un point fixe qui est solution du problème* (2).

Notre deuxième résultat est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème 3.2 *Supposons que :*

H3) La fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*

H4) Il existe une constante $M > 0$, *tel que* $|f(t, u)| \leq M$ *pour chaque* $t \in J$ *et* $u \in \mathbb{R}$.

H5) La fonction $I_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions continues et il existe une constante* $M^* > 0$, *tel que* $|I_k(u)| \leq M^*$ *pour chaque* $u \in \mathbb{R}$, $k = 1, .., m$.
Alors (2) *a au mois une solution.*

preuve 3.4 *Nous utiliserons le théorème de point fixe de Schaefer pour prouver que* F *a un point fixe. La preuve sera donnée en plusieurs étapes :*
Étape 1 : F *est continu. Soit* $\{y_n\}$ *une suite telle que* $y_n \to y$ *dans* $PC(J, \mathbb{R})$, *alors pour chaque* $t \in J$.

$$\begin{aligned}|F(y_n)(t) - F(y)(t)| \leq &\frac{1}{\alpha}\sum_{o<t_k<t} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_k}\int_{t_k-1}^{t_k} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|\mathrm{d}s\\ &+ \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_{t_k}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|\mathrm{d}s\\ &+ \sum_{o<t_k<t}|I_k(y_n(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))|.\end{aligned}$$

puisque f *et* I_k, $k = 1, .., m$ *sont des fonctions continues, on a :*

$$\|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| \to 0.$$

quand

$$n \to \infty.$$

<u>*Étape 2 :*</u> *F transforme des ensembles bornés en un ensembles bornés dans* $PC(J, \mathbb{R})$. *Il suffit de montrer que pour tout* $y \in B^*_\eta = \{y \in PC(J, \mathbb{R}) : \|y\| \leq \eta^*\}$, *on a* $\|F(y)\| \leq l$. *Par* $(H4)$*et* $(H5)$ *on a pour chaque* $t \in J$.

$$\begin{aligned}
\|Fy(t)\| \leq |e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} y_0| &+ \frac{1}{\alpha} \sum_{o<t_k<t} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_k} \int_{t_k-1}^{t_k} e^{\frac{\beta}{\alpha}s} |f(s, y(s))| \mathrm{d}s \\
&+ \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} \int_{t_k}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}s} |f(s, y(s))| \mathrm{d}s + \sum_{o<t_k<t} |I_k(y(t_k^-))|, \\
&\leq |y_0| + \frac{mMe^{\frac{\beta}{\alpha}T}}{\beta} + \frac{M}{\beta} + mM^*.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|F(y)\| \leq |y_0| + \frac{M(e^{\frac{\beta}{\alpha}T} m + 1)}{\beta} + mM^* = l.$$

<u>*Étape 3 :*</u> *F transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinue de* $PC(J, \mathbb{R})$. *Soient* $\tau_1, \tau_2 \in J, \tau_1 < \tau_2$, B^*_η *un ensemble borné de* $PC(J, \mathbb{R})$ *pareil*

que l'étape 2 et $y \in B_\eta^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
|F(y)(\tau_2)-F(y)(\tau_1)| &= \frac{1}{\alpha}|e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_2}\int_o^{\tau_2} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,y(s))\mathrm{d}s - e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_1}\int_o^{\tau_1} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,y(s))\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{o<t_k<\tau_2-\tau_1} I_k(y(t_k^-))|, \\
&= \frac{1}{\alpha}|\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_2}e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,y(s))\mathrm{d}s - \int_0^{\tau_1}[e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_1}-e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_2}]e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,y(s))\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{o<t_k<\tau_2-\tau_1} I_k(y(t_k^-))|, \\
&= \frac{1}{\alpha}|e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,y(s))\mathrm{d}s - [e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_1}-e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_2}]\int_0^{\tau_1} e^{\frac{\beta}{\alpha}}sf(s,y(s))\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{o<t_k<\tau_2-\tau_1} I_k(y(t_k^-))|, \\
&\leq \frac{1}{\alpha}|e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s,y(s))\mathrm{d}s| - |[e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_1}-e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_2}]\int_0^{\tau_1} e^{\frac{\beta}{\alpha}}sf(s,y(s))\mathrm{d}s| \\
&+ \sum_{o<t_k<\tau_2-\tau_1} |I_k(y(t_k^-))|, \\
&\leq \frac{M}{\beta}|e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_2}(e^{\frac{\beta}{\alpha}\tau_1}-e^{\frac{\beta}{\alpha}\tau_2}) + (e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_1}-e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_2})(e^{\frac{\beta}{\alpha}\tau_1}-1) \\
&+ \sum_{o<t_k<\tau_2-\tau_1} |I_k(y(t_k^-))|, \\
&= \frac{M}{\beta}|2-2e^{\frac{-\beta}{\alpha}(\tau_2-\tau_1)} - e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_1} + e^{\frac{-\beta}{\alpha}\tau_2}| + \sum_{o<t_k<\tau_2-\tau_1} |I_k(y(t_k^-))|.
\end{aligned}$$

Pour $\tau_1 \to \tau_2$, on ait $|F(y)(\tau_2)-F(y)(\tau_1)| \to 0$. D'après les étapes précédentes, en vertu du théorème d'Ascoli-Arzela, l'opérateur $F : PC(J,\mathbb{R}) \to PC(J,\mathbb{R})$ est complètement continu.
Étape 4 : Estimation à priori

$$E = \{y \in PC(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y),\ \ pour\, certains\ 0 < \lambda < 1\}.$$

Ainsi pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} y_0 + \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{o<t_k<t} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_k} \int_{t_k-1}^{t_k} e^{\frac{\beta}{\alpha}s} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$
$$+ \frac{\lambda}{\alpha} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t} \int_{t_k}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}s} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$
$$+ \lambda \sum_{o<t_k<t} I_k(y(t_k^-)).$$

Cela implique par (H4) et (H5) comme dans l'étape 2, pour chaque $t \in J$, on a :

$$|y(t)| \leq |y_0| + \frac{mMe^{\frac{\beta}{\alpha}T}}{\beta} + \frac{M}{\beta} + mM^*.$$

Pour chaque $t \in J$, on a :

$$\|y\| \leq |y_0| + \frac{mMe^{\frac{\beta}{\alpha}T}}{\beta} + \frac{M}{\beta} + mM^*.$$

Cela montre que l'ensemble E est borné, en conséquence de théorème de point fixe de Schaefer, on déduit que F a un point fixe qui est solution du problème (2).

Dans le théorème suivant on donne un résultat d'existence pour le problème (2) *en appliquant l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder et dont les conditions $(H4)$ et $(H5)$ sont affaiblies.*

Théorème 3.3 *Supposons que $(H2)$ et les conditions suivantes sont satisfaites :*

H6) Il existe $\phi_f \in C(J, \mathbb{R}^+)$ et $\psi : [0, \infty] \longrightarrow (0, \infty)$ continue et non décroissante tel que :

$$|f(t, u)| \leq \phi_f(t)\psi(|u|), \qquad \forall t \in J, \qquad u \in \mathbb{R}.$$
$$|I_k(u)| \leq \psi^*(|u|), \qquad \forall u \in \mathbb{R}.$$

H7) Il existe un nombre $N > 0$ tel que :

$$\frac{N}{|y_0| + \frac{\psi(N)me^{\frac{\beta}{\alpha}T}\phi_f}{\beta} + \frac{\psi(N)\phi_f^0}{\beta} + m\psi^*(N)} > 1.$$

Où $\phi_f = sup\{\phi_f, \quad t \in J\}$.
Alors le problème (2) a au mois une solution dans J.

preuve 3.5 *Considérons l'opérateur F défini dans le théorème 14 et 15. On peut facilement montrer que F est continue et complètement continue. Pour $\lambda \in [0,1]$, soit y tel que pour chaque $t \in J$, on a $y(t) = \lambda(Fy)(t)$ alors d'après (H6) on a pour chaque $t \in J$:*

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq |e^{\frac{-\beta}{\alpha}}y_0| + \frac{1}{\alpha}\sum_{o<t_k<t} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_k}\int_{t_k-1}^{t_k} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}\phi_f(s)\psi(|y(s)|)\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}s}\phi(s)\psi(|y(s)|)\mathrm{d}s + \sum_{o<t_k<t}\psi^*(|y(s)|), \\
&\leq |y_0| + \psi(\|y\|)\frac{me^{\frac{\beta}{\alpha}T}\phi_f}{\beta} + \psi(\|y\|)\frac{\phi_f}{\beta} + m\psi^*(\|y\|).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\|y\|}{|y_0| + \psi(\|y\|)\frac{me^{\frac{\beta}{\alpha}T}\phi_f^0}{\beta} + \psi(\|y\|)\frac{\phi_f^0}{\beta} + m\psi^*(\|y\|)} \leq 1.$$

Ainsi par condition (H7),il existe N tel que $\|y\| \neq N$ soit :

$$u = \{y \in PC(J,\mathbb{R}) : \ \|y\| < N\}.$$

Pour un choix convenable de l'ouvert U, il n'existe aucun $y \in \partial u$ de sort que $y = \lambda F(y)$, $\lambda \in (0,1)$. Il résulte d'après l'Alternative non linéaire de Leray-Schauder que F possède au moins un point fixe qui est solution du problème (2).

3.3 Équations différentielles impulsive non local

Cette section concerne la généralisation des résultats présentés dans la section précédente aux équations différentielles fractionnaires impulsives non locales. Plus précisément nous présenterons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème non local suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t) = f(t,y), \quad t \in [0;T], \quad t \neq t_k. \\ \Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)). \\ y(0) + g(y) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

Où $k = 1,..,m, 0 < \alpha < 1, f, I_k$, sont comme dans la section (3) et $g : PC(J,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
La condition non locale a été initialement étudiée par L.Byszewski en 1990. La motivation était que la condition initiale non locale permet une mesure et des effets meilleurs ou précis dans la science naturelles, et en physique en particulier, par rapport à la condition initiale classique, en raison de plus de données initiales. Byszewski explique que la condition non locale $u(t_0) = u_0$. Par exemple une onde sonore à travers une tige qui n'est pas uniforme se propagera différemment qu'à travers une tige uniforme. Dans le cas d'une tige non uniforme, des conditions non locales peuvent être appliquées. Il en résulte un changement de motif d'amplitude de fréquence. Ce concept par K.Deng,Deng a lancé par succès le concept de condition non locale (voir [16])
$y(0) + g(y) = y_0$ peut être mieux appliquée que le problème de Cauchy classique avec $y(0) = y_0$.
Il a utilisé

$$g(y) = \sum_{i=1}^{p} ciyi(\tau_i). \tag{7}$$

Où $c_i = 1, 2, .., p$ sont des constantes données et $< \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_p \leq T$ décrire phénomène de diffusion d'une petite quantité de gaz dans un tube transparent.Cela a permis la saisie de mesures supplémentaires à différents moments $(\tau_i = 1, , 2, ..., p)$.
Introduisons les hypothèses :

H9) Il existe une constante $M^{**} > 0$ tel que $|g(y)| \leq M^{**}$ pour chaque $u \in PC(J,\mathbb{R})$.

H10) Il existe une constante $k > 0$ tel que $|g(u) - g(y)| \leq l^*|u - y|$ pour chaque $u, y \in PC(J, \mathbb{R})$.

H11) Il existe $\psi^{**} : [0, \infty) \to (0, \infty)$continue et non croissante tel que : $|g(u)| \leq \psi^{**}(|u|)$ pour chaque $u \in PC(J, \mathbb{R})$.

H12) Il existe un nombre $N^* > 0$ tel que :

$$\frac{N^*}{|y_0| + \psi^{**}(N^*)\frac{\psi(Nme^{\frac{\beta}{\alpha}T}\phi_f^0)}{\beta} + \frac{\psi(N^*)\phi_f^0}{\beta} + m\psi^*(N^*)} > 1.$$

Théorème 3.4 *Supposons que (H1),(H2),(H10) sont satisfaites. Si*

$$[(e^{\frac{\alpha}{\beta}T}m + 1)\frac{l}{\beta} + l^{**} + ml^*] < 1.$$

Alors le problème non locale (4) *a une solution sur* J.

preuve 3.6 *Transformons le problème* (4) *en un problème de pont fixe. considéreons l'opérateur* $F^* : PC(J, \mathbb{R}) \to PC(J, \mathbb{R})$ *défini par :*

$$F^*(y)(t) = e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}[y_0 - g(y)] + \frac{1}{\alpha}\sum_{o<t_k<t} e^{\frac{-\beta}{\alpha}t_k}\int_{t_k-1}^{t_k} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, y(s))\mathrm{d}s$$
$$+ \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\beta}{\alpha}t}\int_{t_k}^{t} e^{\frac{\beta}{\alpha}s}f(s, y(s))\mathrm{d}s + \sum_{o<t_k<t} I_k(y(t_k^-)).$$

Clairement les points fixes de l'opérateur F^* *sont solution du problème* (4). *On peut facilement montrer que* F^* *est contraction.*

Théorème 3.5 *Supposons que* $(H3), (H5), (H9)$ *sont satisfaites, alors le problème non local admet au moins une solution sur* J.

Théorème 3.6 *Supposons que (H6),(H7),(H11),(H12)sont satisfaites, alors le problème non local admet au moins une solution sur* J.

3.4 Exemple

Nous considérons le problème de valeur initiale fractionnaire impulsif suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t) & = \frac{\cos(t)|y(t)|}{20(t+1)(|y(t)|+1)}, \quad t \in J := [0,1], \quad t \neq \frac{1}{2}, \quad 0 < \alpha < 1, \\ \Delta y|_{t=\frac{1}{2}} & = \frac{|y(\frac{1}{2})^{-}|}{4+|y(\frac{1}{2})^{-}|} \ , \\ y(0) & = 1. \end{cases}$$

Nous fixons

$$f(t,x) = \frac{\cos(t)x}{20(t+1)(x+1)} \ , \ (t,x) \in J \times [0,\infty).$$

Et

$$I_k(x) = \frac{x}{4+x} \ , \ x \in [0,\infty).$$

Soit $x, y \in [0,\infty)$ et $t \in J$, alors on a :

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{\cos(t)}{20(t+1)} \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right|, \\ &= \frac{|\cos(t)||x-y|}{20(t+1)(x+1)(y+1)}, \\ &\leq \frac{|\cos(t)|}{20(t+1)}|x-y|, \\ &\leq \frac{1}{20}|x-y|. \end{aligned}$$

D'où la condition (H1) est vérifié avec $l = \frac{1}{20}$.
Soit $x, y \in [0,\infty[$, alors on a :

$$|I_k(x) - I_k(y)| = \left| \frac{x}{x+4} - \frac{y}{y+4} \right| = \frac{4|x-y|}{(x+4)(y+4)} \leq \frac{1}{4}|x-y|.$$

Ainsi la condition (H2) est vérifié avec $l^* = \frac{1}{4}$. Nous vérifions que la condition 3.1 est satisfaite avec $T = 1$,$\beta = 0,5$ et $m = 1$.en effet :

$$\left[(e^{\frac{\beta}{\alpha}T}m + 1)\frac{l}{\beta} + ml^* \right] < 1 \Longleftrightarrow \left[(e^{\frac{0,5}{\alpha}} + 1)\frac{1}{10} + \frac{1}{4} \right] < 1,$$

$$\Longleftrightarrow e^{\frac{0,5}{\alpha}} < \frac{13}{2}.$$

Par calcul élémentaire, on obtient que $\alpha > \frac{1}{2ln6,5} \approx 0,2671$. Puisque $\alpha+\beta = 1$ dans la définition de la dérivée déformable, et $\beta = 0,5$, il est nécessaire que $\alpha = 0,5$, qui satisfaite car $\alpha > 0,2671$dans notre calcul.Alors par théorème (3.1), le problème 4, a une solution unique sur $[0,1]$ pour la valeur de α satisfait $e^{\frac{0,5}{\alpha}} < \frac{13}{2}$.

Bibliographie

[1] K.Deng,Exponential decay of semilinear parabolic equations with nonlocal conditions,Journal of Mathematical Analysis and Applications 179 (1993), 630–637.

[2] K. Ezzinbi, J. Liu, Nondensely defined evolution equations with nonlocal conditions, Mathe- matics and Computer Modelling 36 (2002), no. 9–10, 1027–1038.

[3] U. N. Katugampola, A new fractional derivative with classical properties, 2014, arXiv : 1410.6535v2, 8 pages.

[4] A. M. Mathai, H. J. Haubold, An Introduction to Fractional Calculus, Mathematics Research Developments, Nova Science Publishers, New York, 2017.

[5] A. Meraj, D. N. Pandey, Existence and uniqueness of mild solution and approximate con- trollability of fractional evolution equations with deformable derivative, Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications Volume 2018, Number 7, 85–100.

[6] G. M. N'Gue re kata, A Cauchy problem for some fractional abstract differential equation with non local conditions, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications 70 (2009), no. 5, 1873–1876.

[7] G. M. N'Gue re kata, Existence and uniqueness of an integral solution to some Cauchy problem with nonlocal conditions, Differential and Difference Equations and Applications, 843–849, Hindawi Publ. Corp.,

New York, 2006.

[8] F. Zulfeqarr, A. Ujlayan, P. Ahuja, A new fractional derivative and its fractional integral with some applications, 2017, arXiv : 1705.00962v1, 11 pages.

[9] Mebrat M, N'Guérékata GM. A Cauchy problem for some fractional differential equation via deformablederivatives. J Nonlinear Evol Equ Appl. 2020(4) :1–9.

[10] Mebrat M, N'Guérékata GM. An existence result for some fractional-integro differential equations in Banachspaces via the deformable derivative. J Math Ext. 2021.

[11] Bainov DD, Simeonov PS. Stability theory of differential equations with impulse effects : theory and applications.Chichester : Ellis Horwood ; 1989.

[12] Lakshmikantham V, Bainov DD, Simeonov PS. Theory impulsive differ equ. Singapore :World Scientific ; 1989.

[13] Benchohra M, Henderson J, Ntouyas SK. Impulsive differential equations and inclusions. New York : Hindawi ;2006.

[14] Benchohra M, Slimani BA. Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional differential equations.Electron J Differ Equ. 2009 ;2009(10) :1–11.

[15] Granas A, Dugundji J. Fixed point theory. New York : Springer ; 2003.

[16] Byszewski L. Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchyproblem. J Math Anal Appl. 1991 ;162 :494–505.