RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques»

Option :
« Analyse fonctionnelle et Applications»

Présenté Par :
ATALLAH IMANE
AMEUR AMEL

Sous l'intitulé :

ETUDE QUALITATIVE DES SOULITIONS POUR DES EQUATIONS INTEGRO-DIFFERENTIELLES NON LINEAIRE

Soutenu publiquement le 10/07/2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mme SABIT SOUHILA	MCA	Université de Tiaret	Présidente
Mr BAGHDED SAID	MCA	Université de Tiaret	Encadrant
Mr MAAZOUZ KADA	MCA	Université de Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciements

D'abord, nous remercions **ALLAH**, le tout Puissant, de nous avoir donné la santé, la volonté et la patience pour achever ce modeste travail.

Nous adressons un très grand remerciement à Mr. **Baghdad Said** pour le sujet intéressant qu'il a proposé. Nous le remercions encore pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements et sa grande disponibilité qui ont aidé à mener à bien ce travail. Sans ses idées et son expertise qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nous souhaitons aussi remercier les membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et de participer à la soutenance.

Nous tenons à remercier chaleureusement tous les enseignants. Nous avons également une pensée affectueuse et nostalgique pour tous nos enseignants durant les trois cycles (primaire, moyen et secondaire), qui ont contribué à notre éducation et à notre enseignement dès notre plus jeune âge. Que le bon Dieu leur accorde son vaste paradis.

Enfin, nous tenons à remercier tous ceux et celles qui ont aidé de loin ou de près pour l'élaboration de ce travail, ainsi que toute la famille du département de mathématiques et **la promotion 2023**.

Merci à tous

♡ *Je dédie ce travail* ♡

À mes parents, pour tous leurs sacrifices, leurs encouragements et leur amour inestimable, ainsi que toutes les valeurs qu'ils ont su m'accorder.

À mes sœurs **Khadidja, Amel, Amina** et mes frères **Mohamed, Amine, Oussama**, pour leur disponibilité à entendre mes frustrations et les sources de mon stress. Avec mes vœux de bonheur dans leur vie.

À tous ceux qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce niveau d'étude, en particulier **Nour Sine**.

À **Amel**, chère amie avant d'être binôme, et à toutes mes amies, surtout **Assia**, **Houda, Ikram, Kheira, Amani, Gouta, Bouchra**.

Finalement, nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendus.

Imane

♡ *Je dédie ce travail* ♡

À mes parents, pour tous leurs sacrifices, leurs encouragements et leur amour inestimable, ainsi que toutes les valeurs qu'ils ont su m'accorder.

À mes sœurs **Anfel, Hanin, Sidra** et mes frères **Fouad, Kamel, Kadi**, pour leur disponibilité à entendre mes frustrations et les sources de mon stress. Avec mes vœux de bonheur dans leur vie.

À **Imane**, chère amie avant d'être binôme, et à toutes mes amies, surtout **Dhouha**, **Meriem, Amel, Feriel, Rawia, Houda, Bouchra, Fatna**.

Finalement, nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendus.

Amel

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires ont été récemment utilisées comme outils efficaces dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie, tels que le contrôle acoustique, le traitement du signal, les milieux poreux, l'électrochimie, la médecine, l'économie, le génie chimique, la dynamique chaotique, la physique statistique, et ainsi de suite (voir [15, 16, 17] et les références qui y sont mentionnées). De nombreux problèmes peuvent être modélisés par des équations intégro-différentielles fractionnaires découlant de diverses applications en sciences et en ingénierie. Ainsi les théorèmes de point fixe ont provoqué de grands effets sur le développement de nombreuses disciplines mathématiques. Associés à des problèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle, ces théorèmes jouent un rôle principal dans ce travail.

La question de la dépendance continue des solutions du problèmes dans les équations différentielles a été largement étudiée ces dernières années pour une variété de problèmes. Cela est parfois appelé la question de la stabilité structurelle, et de nombreuses références peuvent être trouvées, par exemple, dans le livre Straughan [5]. En ce qui concerne la stabilité structurelle, l'accent est mis sur la dépendance continue (résultant de la convergence) vis-à-vis des changements dans le modèle lui-même, plutôt que sur les données initiales. Cela signifie des changements de coefficients dans les équations et des changements dans les équations, et peut être reflété physiquement par des variations des paramètres constitutifs. De plus, il convient de tenir compte de l'erreur inévitable qui survient à la fois lors du calcul numérique et lors de la mesure physique des données. Il est important de connaître l'impact de ces erreurs sur la solution.

Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions de l'analyse fonctionnelle utilisées tout au long de ce mémoire, telles que les espaces vectoriels normés, la complétude, les applications continues, les espaces fonctionnels et quelques théorèmes du point fixe. Ensuite, la définition des dérivées fractionnaires les plus populaires, à savoir Riemann-Liouville et Caputo, ainsi que leurs propriétés.

Le deuxième chapitre : En utilisant le théorème du point fixe de Banach généralisé, nous étudions l'existence et l'unicité, ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales, les estimations sur la solution et la dépendance continue sur les paramètres et les fonctions impliquées dans l'équation intégro-différentielle fractionnaire non linéaire :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = \lambda x(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t h(t,s)x(s)ds, \int_0^T k(t,s)x(s)ds\right), t \in J = [0,T] \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où ${}^cD^{\alpha}$ représente la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : J \times J \to \mathbb{R}$ et $k : J \times J \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données. Nous établissons en outre une estimation sur la solution et sa dépendance continue par rapport aux paramètres et aux fonctions impliquées dans le membre de droite de cette équation. Enfin, un exemple est donné pour illustrer les résultats obtenus.

Dans le troisième chapitre : nous examinons l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d^q x}{dt^q} = A(t)x(t) + F(t, x(t)), \qquad t \in J = [0,b] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

La variable inconnue $x(\cdot)$ prend des valeurs dans l'espace de Banach X, $F \in C(J \times X, X)$, et $A(t)$ est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X, et x_0 est un élément donné de X. L'opérateur D^q désigne la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < q < 1$. Nous allons étudier l'existence, l'unicité et la dépendance continue du solution du problème de valeur initiale. Les principaux outils utilisés sont les applications du théorème du point fixe de Banach.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on va présenter quelques définitions, théorèmes fondamentaux et notions de base qui seront utilisés dans la suite du mémoire.

1.1 Espaces vectoriels normés

1.1.1 Topologie des espaces normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.1. *[1] On appelle **norme** sur E toute application p de E dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*

i) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(Séparation).*

ii) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ *(Homogénéité).*

iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *(Inégalité du triangle).*

On note $p(x) = \|x\|$, ce qui s'appelle la norme de x. On dit alors que le couple (E, p) est un espace vectoriel normé (EVN).

Exemple 1.1.1. *Dans $\mathbb{K}^n$ on a les normes usuelles.*

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Proposition 1.1.1. *[1] L'application $d : (x, y) \to \|x - y\|$ est une distance sur E qui est invariante par translation, c'est-à-dire que pour tout $a \in E$, $d(x+a, y+a) = d(x, y)$. On dit que d est la distance associée à la norme.*

Définition 1.1.2. *[19] Soient $(E, \|\cdot\|)$ un EVN, $a \in E$, et $r > 0$.*
- *On appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre a et de rayon r l'ensemble :* $B(a, r) = x \in E : \|x - a\| < r$ *(resp.* $B_f(a, r) = x \in E : \|x - a\| \leq r$*).*
- *On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :* $S(a, r) = x \in E : \|x - a\| = r$.

Exemple 1.1.2. *Dans $\mathbb{R}$, $B(a, r) =]a - r, a + r[$, $B_f(a, r) = [a - r, a + r]$, et $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$.*

Définition 1.1.3. *[19] Soit a un élément d'un EVN E. On appelle voisinage de a toute partie de E contenant un ouvert de E qui contient a.*

Proposition 1.1.2. *Soit a un élément d'un espace vectoriel normé E. Une partie V de E est un voisinage de a si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$.*

Définition 1.1.4. *[19] Soit A une partie non vide d'un EVN E. On dit que $a \in E$ est un point adhérent de A si pour tout voisinage V de a, $V \cap A \neq \emptyset$. De manière équivalente, on dit que a est un point adhérent de A si $\forall \varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents de A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$.*

Exemple 1.1.3. *L'adhérence d'un intervalle borné non vide est l'intervalle fermé de même extrémités.*

Proposition 1.1.3. *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. En particulier, A est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Définition 1.1.5. *[19] Soit A une partie d'un EVN E. L'intérieur de A noté $\mathring{A}$ est l'ensemble des points intérieurs de A, i.e $\mathring{A} = \{a \in E / \exists \varepsilon > 0 / B(a, \varepsilon) \subset A\}$.*

Exemple 1.1.4. *Pour $a \in E$ et $\varepsilon > 0$, l'intérieur de la boule fermée $B_f(a, \varepsilon)$ est la boule ouverte $B(a, \varepsilon)$.*

Exemple 1.1.5. *L'intérieur d'un intervalle non vide est l'intervalle ouvert de mêmes extrémités.*

Proposition 1.1.4. *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A. En particulier, A est un ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.*

Définition 1.1.6. *[19] Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On appelle frontière de A l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

Exemple 1.1.6. *La frontière de la boule fermée $B_f(a, \varepsilon)$ est la sphère $S(a, \varepsilon)$.*

1.1.2 Complétude

Définition 1.1.7. *Soit E un EVN. On dit qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans (E) converge vers un point $l \in E$ si, et seulement si $\lim_{n \to \infty} \|a_n - l\| = 0$.*

Remarque 1.1.1. *Quelques conséquences immédiates découlent de cette définition :*
- *Si une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* E*, alors sa limite est unique.*
- *Toute suite convergente dans* E *est bornée.*
- *Soit* φ *une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*. Alors, si* $(an)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite convergente, la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dont le terme général est donné pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $b_n = a_{\varphi(n)}$ *est convergente vers la même limite.* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'appelle une suite extraite.*

Définition 1.1.8. *Soit* E *un EVN. Une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *est dite de Cauchy si, et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $p, q \geq N$*, on a* $\|a_p - a_q\| < \varepsilon$*.*

Proposition 1.1.5. *Soit* E *un EVN. Alors :*

(i) *Toute suite convergente est de Cauchy.*

(ii) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Définition 1.1.9. *Soit* E *un EVN. On dit que* E *est complet si toute suite de Cauchy de* E *converge dans* E*.* E *est alors appelé un espace de Banach.*

Proposition 1.1.6.
1. *L'espace* $\mathbb{R}^n$ *est complet.*
2. *Soient* E *un EVN complet et* A *une partie de* E*. Alors* A *est complet si et seulement si* A *est fermée.*

1.1.3 Convexité

Définition 1.1.10. *[21] Soit* E *un EVN. Une partie non vide* $C \subset E$ *est convexe si et seulement si :*

$$\forall x, y \in C, tx + (1-t)y \subset C, t \in [0, 1].$$

Théorème 1.1.1. *[21] Soit* E *un EVN. Alors les boules sont des ensembles convexes.*

Proposition 1.1.7. *Soit* E *un EVN et* C *un ensemble fermé de* E*. Si* C *vérifie la propriété de la "demi-somme" suivante :* $\forall x, y \in C, \dfrac{x+y}{2} \in C$*, alors* C *est convexe.*

Proposition 1.1.8. *L'intérieur et l'adhérence d'un convexe* C *sont convexes.*

Lemme 1.1.1. *Soient* $B(x_0, r_0)$ *et* $B(x_1, r_1)$ *deux boules dans un EVN.*
Alors $(1-t)B(x_0, r_0) + tB(x_1, r_1) = B(tx_1 + (1-t)x_0, tr_1 + (1-t)r_0)$*.*

Corollaire 1.1.1. *[21] Soient* E *un EVN et* $C \subset E$ *un convexe d'intérieur non vide.*
Alors $\overline{\mathring{C}} = \overline{C}$ *et* $\mathring{C} = \mathring{\overline{C}}$*.*

1.1.4 Applications continues

Définition 1.1.11. *Soit f une application d'une partie A d'un EVN E à valeurs dans un EVN F. On dit que f est continue en $a \in A$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in A, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

Proposition 1.1.9. *Soit f une application d'une partie A d'un EVN E à valeurs dans un EVN F. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset A$ convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*

Définition 1.1.12. *Soit f une application d'une partie A d'un EVN E à valeurs dans un EVN F. On dit que f est uniformément continue sur A si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, y \in A, \|x - y\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.13. *Soit f une application d'une partie A d'un EVN E à valeurs dans un EVN F. On dit que f est lipschitzienne sur A si*

$$\exists K > 0 \qquad \forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

Dans ce cas, on dit que f est lipschitzienne de rapport K ou K-lipschitzienne.

Remarque 1.1.2. *La lipschitzienne est inchangée si on change les normes en des normes équivalentes. Néanmoins, le rapport de lipschitzienne peut changer.*

Exemple 1.1.7. *Soit E un EVN. L'application $z \mapsto \|z\|$ est 1-lipschitzienne donc continue.*

Proposition 1.1.10. *Soit f une application d'une partie A d'un EVN E à valeurs dans un EVN F. Si f est lipschitzienne sur A, alors f est uniformément continue sur A.*

Remarque 1.1.3. *La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.*

Définition 1.1.14. *On dit que $f : E \to E$ est une application contractante si elle est lipschitzienne de rapport $K < 1$.*

1.1.5 Compacité

Définition 1.1.15. *[20] On dit qu'une partie K d'un EVN E est une partie compacte de E si toute suite à valeurs dans K admet une valeur d'adhérence dans K.*

Proposition 1.1.11. *Tout compact d'un EVN est fermé et borné.*

Théorème 1.1.2. *[20] Une partie d'un EVN de dimension finie est compacte si et*

seulement si elle est fermée et bornée.
Proposition 1.1.12. *Toute partie fermée d'un compact est compacte.*
Proposition 1.1.13. *Une suite à valeurs dans un compact d'un EVN converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Dans ce cas, elle converge vers cette unique valeur d'adhérence.*
Lemme 1.1.2. *Les parties fermées et bornées de $\mathbb{K}^n$ sont compactes.*
Proposition 1.1.14. *[20] L'image d'une partie compacte par une application continue est compacte.*
Corollaire 1.1.2. *Soient K un compact d'un EVN E et f une application continue sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, f admet un minimum et un maximum sur K.*
Théorème 1.1.3. *[20]* ***(Théorème de Heine)***
Soient E et F deux EVNs, K une partie compacte de E et f une application de K dans F. Si f est continue sur K, alors elle est uniformément continue sur K.
Exemple 1.1.8. *Toute application continue sur un segment de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un EVN est uniformément continue sur ce segment.*
Exemple 1.1.9. *Les boules fermées et les sphères d'un EVN de dimension finie sont compactes.*

1.1.6 Théorème du point fixe de Banach

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On note $J = [0, b]$. Soit S l'espace des fonctions continues $z : J \to X$ qui vérifient la condition

$$\|z(t)\| = O(\exp(\lambda t)). \tag{1.1}$$

Pour une constante positive $\lambda > 0$. Dans cet espace nous définissons la norme

$$\|z\|_S = \sup_{t\in J} \left[\|z(t)\| \exp(-\lambda t)\right]. \tag{1.2}$$

Il est facile de voir que S avec la norme ci-dessus est un espace de Banach. Notons que la condition (1.1) implique l'existence d'une constante positive N telle que $\|z(t)\| \leq N \exp(\lambda t)$ pour $t \in J$. En utilisant ce fait dans (1.2), on observe que

$$\|z\|_S \leq N. \tag{1.3}$$

Définition 1.1.16. *[2] Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$. On dit que $x \in E$ est un point fixe de l'application T si $T(x) = x$.*
Théorème 1.1.4. *[2] Soit T une application d'un espace de Banach E dans lui-même. Si T est une contraction, alors T admet un unique point fixe dans E.*
Théorème 1.1.5. *[13] Soit U un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de Banach*

E, et soit $\alpha_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ une suite telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ converge. De plus, supposons que l'application $T : U \to U$ satisfasse

$$\|T^n u - T^n v\| \leq \alpha_n \|u - v\|,$$

pour tout $u, v \in U$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors T a un unique point fixe u^*. De plus, la suite $\{T^n u_0\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers u^* pour tout $u_0 \in U$.

1.2 Intégrales et dérivées d'ordres fractionnaires

Définition 1.2.1. *[4] On appelle fonction Γ de Euler la fonction définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0.$$

Exemple 1.2.1. $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$

Définition 1.2.2. *La fonction $\mathbb{E}(\alpha > 0)$ définie par $\mathbb{E}_\alpha(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}$, est appelée fonction de Mittag-Leffler d'ordre α.*

Définition 1.2.3. *[6] On appelle intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f l'intégrale définie par la formule suivante :*

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{(\alpha - 1)} f(t) dt,\ x \in [a, b]$$

Définition 1.2.4. *Une fonction réelle $f(t), t > 0$, est dite dans l'espace $C_\mu, \mu \in \mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel $p > \mu$, tel que $f(t) = t^p g(t)$, où $g(t) \in C[0, \infty)$, et on dit qu' il est dans l'espace C_μ^n si et seulement si $f^{(n)} \in C_\mu, n \in \mathbb{N}$.*

Théorème 1.2.1. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe $I_a^{(\alpha)} \left[I_a^\beta f(x) \right] = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$.*

Définition 1.2.5. *[6] La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*

$$D_t^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(s)}{(t - s)^{\alpha+1+n}} ds,$$

avec $n = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$ et $[\alpha]$ dénote la partie entière de réel α.

Théorème 1.2.2. *1. Si $(n - 1) \leq \alpha < n$, $D_a^\alpha I_{a^+}^\alpha f(x) = f(x)$ pour toute fonction $f \in C([a, b])$.*

2.

$$I_{a^+}^{\alpha} D_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(a-k)} \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (I_{a^+}^{n-\alpha} f(x)).$$

3. En particulier : pour $0 < \alpha < 1$

$$I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (I_{a^+}^{1-\alpha} f(x)),$$

et pour $\alpha = n$ *on a :*

$$I_{a^+}^{n} D_{a^+}^{n} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)(a)(x-a)^k}}{k!}.$$

1.2.1 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.2.6. *[4, 6] La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est définie comme*

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = I^{n-\alpha}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds,$$

et $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, t > 0$ *et* $f \in C_{-1}^n$. *Si* $0 < \alpha \leq 1$, *alors*

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds,$$

où $f'(s) = \frac{df}{ds}(s)$ *et* f *est une fonction abstraite à valeurs dans* X.

Le problème (3.1) est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} A(s) x(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds, \ t \in J. \quad (1.4)$$

1.2.2 Relation enter l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 1.2.3. *Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$ et soit f une fonction telle que les dérivée fractionnaires ${}^{c}D^{\alpha}f(t)$ et ${}^{RL}D^{\alpha}f(t)$ existent alors :*

$$ {}^{c}D^{\alpha}f(t) =^{RL} D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)(0)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}. $$

Remarque 1.2.1. *Si $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$, on aura*

$$ {}^{c}D^{\alpha}f(t) =^{RL} D^{\alpha}f(t). $$

Corollaire 1.2.1. *La relation entre les dérivées fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville donnée par la formule suivante :*

$$ {}^{c}D^{\alpha}f(t) =^{RL} D^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^k(a)\right). $$

Lemme 1.2.1. *Let $\alpha, \beta \in [0, \infty)$*

$$ \int_0^t s^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} ds = t^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. $$

Chapitre 2

Propriétés de solution pour des équations intégro-différentielles d'ordre fractionnaire avec des coefficients constants positifs

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et quelque propriétés de la solution pour une équation intégro-différentielle non linéaires à coefficients constants, en utilisant une inégalité intégrale de type mixte [9, 10, 12, 13].

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = \lambda x(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t h(t,s)x(s)ds, \int_0^T k(t,s)x(s)ds\right), t \in J = [0,T] \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ${}^cD^{\alpha}$ représente la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : J \times J \to \mathbb{R}$ et $k : J \times J \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données. Nous établissons en outre une estimation sur la solution et sa dépendance continue par rapport aux paramètres et aux fonctions impliquées dans le membre de droite de l'équation 2.1. Enfin, un exemple est donné pour illustrer les résultats obtenus.

Théorème 2.0.4. *[10] Soit $u, f, g, h \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}_+)$ et $c \geq 0$. Si*

$$u^p(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} h(s)\left(u^q(s) + \int_{\alpha}^{s} f(\sigma)u^q(\sigma)d\sigma + \int_{\alpha}^{\beta} g(\sigma)u^p(\sigma)d\sigma\right),$$

pour $t \in [\alpha, \beta]$, On a

$$u^p(t) \leq cexp\left(\int_{\alpha}^{t} n_1 A(\sigma)d\sigma\right) + \int_{\alpha}^{t} n_2 B(s)exp\left(\int_{\alpha}^{t} n_1 A(\sigma)d\sigma\right),$$

où $A(t) = h(t)\left(1 + \int_\alpha^t f(\sigma)d\sigma + \dfrac{1}{n_1}\int_\alpha^\beta g(\sigma)d\sigma\right)$, $B(t) = h(t)\left(1 + \int_\alpha^t f(\sigma)d\sigma\right)$, *et* $p \geq q \geq 0$, $p \neq 0$, $k > 0$, $n_1 = \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}$ *et* $n_2 = \frac{p-q}{q}k^{\frac{q}{p}}$.

2.1 Résultats d'existence

Le lemme suivant traite de l'équation d'une équation intégro-différentielle fractionnaire mixte non linéaire équation (2.1)

Lemme 2.1.1. *Si la fonction* $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue, alors l'équation (2.1) est équivalente à l'équation intégrale,*

$$x(t) = x_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x(s)ds$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f\left((s, x(s), \int_0^s h(t,\tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right)ds, \quad t \in J. \tag{2.2}$$

Preuve : Soit x une solution de l'équation (2.1). Définir

$$z(t) = \lambda x(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t h(t,s)x(s)ds, \int_0^T k(t,s)x(s)ds\right),$$

donc $z(t) =^c D^\alpha x(t)$, et comme ${}^cD^\alpha x(t) = D^\alpha(x(t) - x_0)$. Alors on obtient

$$z(t) = D^\alpha(x(t) - x_0) = \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}(x(t) - x_0),$$

en déduire que : $I^1 z(t) = I^{1-\alpha}(x(t) - x_0) + k$ ou k est une constante quelconque puisque $z(t)$ et $x(t) - x_0$ sont des fonctions continues, pour $t = 0$ on obtient $k = 0$, ainsi $I^1 z(t) = I^{1-\alpha}(x(t) - x_0)$. On applique l'opérateur différentiel fractionnaire de Riemann-Liouville $D^{1-\alpha}$ des deux cotés,on obtient

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= D^{1-\alpha}I^1 z(t) \\ &= D^1 I^\alpha I^1 z(t) \\ &= D^1 I^{1+\alpha} z(t) \\ &= I^\alpha z(t), \end{aligned}$$

en utilise la définition de $z(t)$, nous obtenons Eq (2.1). Inversement, supposons que $x(t)$ soit une solution de l'eq (2.1). Il peut alors s'écrire comme

$$x(t) = x_0 + I^\alpha z(t) \tag{2.3}$$

ou

$$z(t) = \lambda x(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t h(t,s)x(s)ds, \int_0^T k(t,s)x(s)ds\right),$$

puisque $z(t)$ est continue et x_0 est constant, l'utilisation de l'opérateur différentiel fractionnaire de Caputo ${}^cD^\alpha$, de l'équation (2.3), on obtient :

$${}^cD^\alpha x(t) = {}^c D^\alpha x_0 + {}^c D^\alpha I^\alpha z(t) = z(t),$$

donc

$${}^cD^\alpha x(t) = \lambda x(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t h(t,s)x(s)ds, \int_0^T k(t,s)x(s)ds\right),$$

de (2.3), on obtient $x(0) = x_0$. on peut démontrer que $x(t)$ est la solution de l'eq (2.1).

■

Théorème 2.1.1. *Soit $T > 0$ et $\varepsilon > 0$ une constante telle que $0 \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Supposons que $f : J \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ vérifie la condition H_1 suivante :*

$$|f(t,x,y,z) - f(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z})| \leq L(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}| + |z-\bar{z}|).$$

Soit

$$\chi = \min\left\{T, \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\varepsilon}{(\varepsilon + |x_0|)(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T)) + M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$$

où $h_T = \sup\{|h(t,s)| 0 \leq s \leq t \leq T\}$, $k_T = \sup\{|k(t,s)| 0 \leq s \leq t \leq T\}$, $M = \sup_{t\in J}|f(t,0,0,0)|$. Puis l'éq (2.1) a une unique solution $x : [0,\chi] \to \mathbb{R}$.

Preuve : Définissons l'ensemble $U = \{x \in C([0,\chi],\mathbb{R}) : x(0) = x_0, \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$. Puisque $x_0 \in U$, U est non vide, de plus U est un sous-ensemble fermé, borné et convexe de l'espace de Banach $C([0,\chi],\mathbb{R})$. on définit l'opérateur A sur l'ensemble U par

$$Ax(t) = x_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x(s)ds$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\right)ds.$$

Maintenant, nous montrons que A envoi l'ensemble U dans lui-même.
Prenons $x \in E$ et $t \in [0,\chi]$, on a

$$|Ax(t) - x_0| \leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)|ds$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s,x(s),\int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau,\int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\right)\right|ds\\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)|ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s,x(s),\int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau,\int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\right)\right.\\
&\left.-f(s,0,0,0)\right|ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Big|f(s,0,0,0)\Big|ds
\end{aligned}
$$

En utilisant (H_1) et la définition de U, pour tout $t \in [0,\chi]$

$$
|x(t)| \leq |x(t)-x_0| + |x_0| \leq \varepsilon + |x_0| \tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|f\left(s,x(s),\int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau,\int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\right)-f(s,0,0,0)\right|\\
&\leq L\bigg[|x(t)|+\int_0^s |h(s,\tau)||x(\tau)|d\tau\\
&+\int_0^T |k(s,\tau)||x(\tau)|d\tau\bigg]\\
&\leq L(\varepsilon+|x_0|)(1+Th_T+Tk_T).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&|Ax(t)-x_0|\\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(\varepsilon+|x_0|)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}L(1+Th_T+Tk_T)(\varepsilon+|x_0|)ds\\
&+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\\
&\leq \left(\frac{(\lambda+L(1+Th_T+Tk_T))(\varepsilon+|x_0|)+M}{\Gamma(\alpha+1)}\right)t^\alpha\\
&\leq \left(\frac{(\lambda+L(1+Th_T+Tk_T))(\varepsilon+|x_0|)+M}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\chi^\alpha\\
&\leq \left(\frac{(\lambda+L(1+Th_T+Tk_T))(\varepsilon+|x_0|)+M}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\varepsilon}{(\varepsilon+|x_0|)(\lambda+L(1+Th_T+Tk_T)+M}\right)\\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

On remarque que, pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \chi$,

$$
\begin{aligned}
&|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big|\lambda \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} x(s)ds + \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f\Big(s, x(s), \\
&\int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\Big)ds - \lambda \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} x(s)ds \\
&- \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f\Big(s, x(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\Big)ds\Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big|\lambda \int_0^{t_1} \left((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}\right) x(s)ds + \int_0^{t_1} \Big((t_1 - s)^{\alpha-1} \\
&- (t_2 - s)^{\alpha-1}\Big) f\left(s, x(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\right) ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \lambda \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} x(s)ds - \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f\Big(s, x(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \\
&\int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\Big)ds\Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda \int_0^{t_1} \left((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}\right)(|x(s) - x_0| + |x_0|)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}\right\}\Big)\Big|f\Big(s, x(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \\
&\int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\Big) - f(s,0,0,0)\Big| + \Big|f(s,0,0,0)\Big|\Big)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} \\
&(|x(s) - x_0| + |x_0|)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1}\Big(\Big|f\Big(s, x(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \\
&\int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\Big) - f(s,0,0,0)\Big| + \Big|f(s,0,0,0)\Big|\Big)ds,
\end{aligned}
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
&|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \\
&\leq \left(\frac{(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))(\varepsilon + |x_0|) + M}{\Gamma(\alpha)}\right) \int_0^{t_1} \left((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}\right) ds \\
&+ \left(\frac{(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))(\varepsilon + |x_0|) + M}{\Gamma(\alpha)}\right) \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \left\{\frac{(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))(\varepsilon + |x_0|) + M}{\Gamma(\alpha+1)}\right\} \left\{2(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha\right\}.
\end{aligned}
$$

Ceci montre que Ax est continue. Ainsi pour tout $x \in U$, on à $Ax \in C([0,\chi],\mathbb{R})$, $Ax(0) = x_0$ et $\|Ax - x_0\| \leq \varepsilon$. Cela prouve que $Ax \in U$ i.e A applique l'ensemble U

sur lui-même. L'étape suivante consiste à prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, et tout $x, y \in U$, on a

$$\|A^n x - A^n y\| \leq \frac{[(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))t^\alpha]^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \|x - y\|, \ t \in [0, \chi], \tag{2.5}$$

Pour $n = 0$, l'inégalité (2.5) est trivialement vraie. On suppose que (2.5) est vraie pour $n = m - 1$ et on la prouve pour $n = m$, en utilisant la définition de l'opérateur A et l'hypothèse (H_1), nous avons

$$\begin{aligned}
&|A^m x(t) - A^m y(t)| = |A(A^{m-1}x(t) - A^{m-1}y(t))| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Bigg| \lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A^{m-1}x(s) ds \\
&+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, A^{m-1}x(s), \int_0^s h(s,\tau) A^{m-1}x(\tau) d\tau, \int_0^T k(s,\tau) A^{m-1}x(\tau) d\tau\right) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A^{m-1}y(s) ds \\
&- \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, A^{m-1}y(s), \int_0^s h(s,\tau) A^{m-1}y(\tau) d\tau, \int_0^T k(s,\tau) A^{m-1}y(\tau) d\tau\right) ds \Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |A^{m-1}x(s) - A^{m-1}y(s)| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Bigg| f\left(s, A^{m-1}x(s), \int_0^s h(s,\tau) A^{m-1}x(\tau) d\tau, \int_0^T k(s,\tau) A^{m-1}x(\tau) d\tau\right) \\
&\qquad - f\left(s, A^{m-1}y(s), \int_0^s h(s,\tau) A^{m-1}y(\tau) d\tau, \int_0^T k(s,\tau) A^{m-1}y(\tau) d\tau\right) \Bigg| ds.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

En utilisant les hypothèses (H_1) et (2.5) dans (2.6) pour $n = m - 1$, on a

$$\begin{aligned}
&|A^m x(t) - A^m y(t)| \\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))^{m-1}}{\Gamma((m-1)\alpha + 1)} \|x - y\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha m - \alpha} ds \\
&+ \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Bigg\{ |A^{m-1}x(s) - A^{m-1}y(s)| + \int_0^s |h(s,\tau)||A^{m-1}x(\tau) - A^{m-1}y(\tau)| d\tau \\
&+ \int_0^T |K(s,\tau)||A^{m-1}x(\tau) - A^{m-1}y(\tau)| d\tau \Bigg\} ds \\
&\leq \frac{(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))^{m-1}}{\Gamma((m-1)\alpha + 1)} \|x - y\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha m - \alpha} ds \\
&\leq \frac{[(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))t^\alpha]^m}{\Gamma(m\alpha + 1)} \|x - y\|,
\end{aligned}$$

qui est notre inégalité (2.5). Par conséquent, nous avons

$$\|A^n x - A^n y\| \leq \frac{[(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))\chi^\alpha]^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}\|x - y\|.$$

Par définition (1.2.2), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))\chi^\alpha]^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} = \mathbb{E}_\alpha((\lambda + L(1 + Th_T + Tk_T))\chi^\alpha).$$

Nous avons prouvé que l'opérateur A vérifie toutes les conditions du Théorème 2.0.4 et donc A admet un unique point fixe $x : [0, \chi] \to \mathbb{R}$ qui est la solution de l'équation (2.1)

■

2.1.1 Estimations sur la solution

Le théorème suivant contient l'estimation de la solution de l'équation (2.1).

Théorème 2.1.2. *Supposons que la fonction $f : J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait l'hypothèse $(H1)$. Si x est une solution quelconque de l'équation (2.1) , alors*

$$|x(t)| \leq \left(|x_0| + \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}\right) exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right),$$

où

$$A(t) = \frac{(\lambda + L)(T - t)^{\alpha - 1}}{\gamma(\alpha)}\left[1 + \int_0^t \frac{Lh_T}{\lambda + L}d\tau + \int_0^T \frac{Lk_T}{\lambda + L}d\tau\right],$$
$$M = \sup_{t\in J}|f(t, 0, 0, 0)|,\ h_T = \sup_{0\leq s\leq t\leq T}|h(t, s)|,\ k_T = \sup_{0\leq s\leq t\leq T}|k(t, s)|.$$

Preuve : Soit x une solution quelconque de l'équation (2.1), alors

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = \lambda x(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t h(t, s)x(s)ds, \int_0^T k(t, s)x(s)ds\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t - s)^{\alpha - 1}x(s)ds$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f\left(s, x(s), \int_0^s h(s, \tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(s, \tau)x(\tau)d\tau\right) ds.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&|x(t)|\\
&\leq |x_0| + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)|ds\\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s,x(s),\int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau,\int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\right)-f(s,0,0,0)\right|ds\\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Big|f(s,0,0,0)\Big|ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse (H_1), pour tout $t \in J$, on obtient

$$
\begin{aligned}
|x(t)| \leq\ & |x_0| + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|x(s)\right|ds + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|x(s)\right|ds\\
&+ \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f\left(\int_0^s \left|h(s,\tau)\right|\left|x(\tau)\right|d\tau + \int_0^T \left|k(s,\tau)\right|\left|x(\tau)\right|d\tau\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\\
&\leq |x_0| + \frac{M\Gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda+L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|x(s)\right|ds + \frac{Lh_T}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_0^s \left|x(\tau)\right|d\tau\right)ds\\
&+ \frac{Lk_T}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_0^T \left|x(\tau)\right|d\tau\right)ds.
\end{aligned}
$$

$$
\leq |x_0| + \frac{Mt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^t \frac{\lambda+L}{\Gamma(\alpha)}(T-s)^{\alpha-1}\left(\left|x(s)\right| + \int_0^s \frac{Lh_T}{\lambda+L}\left|x(\tau)\right|d\tau + \int_0^T \frac{Lk_T}{\lambda+L}\left|x(\tau)\right|d\tau\right)ds \tag{2.7}
$$

En appliquant l'inégalité donnée dans le Théorème 2.0.4 à l'inégalité (2.7) avec

$$
u(t) = x(t), c = |x_0| + \frac{Mt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, h(s) = \frac{\lambda+L}{\Gamma(\alpha)}(T-s)^{\alpha-1}, f(\tau) = \frac{Lh_T}{\lambda+L}, g(\tau) = \frac{Lk_T}{\lambda+L},
$$

$p = q = 1, n_1 = 1, n_2 = 0$, nous obtenons

$$
|x(t)| \leq \left(|x_0| + \frac{Mt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right),
$$

où

$$
A(t) = \frac{(\lambda+L)(T-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \int_0^t \frac{Lh_T}{\lambda+L}d\tau + \int_0^T \frac{Lk_T}{\lambda+L}d\tau\right)
$$

■

2.1.2 Dépendance continue et unicité de la solution

Théorème 2.1.3. *Supposons que la fonction* $f : J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfait l'hypothèse* (H_1) *. Soit* $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$ *les solutions de l'équation*

$$^cD^\alpha x(t) = \lambda x(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t h(t,s)x(s)ds, \int_0^T k(t,s)x(s)ds\right), t \in J \tag{2.8}$$

correspondant à $x_1(0) = x_0$ *et* $x_2(0) = x_0^*$ *respectivement. Alors*

$$||x_1 - x_2|| \leq |x_0 - x_0^*| exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right), \tag{2.9}$$

où

$$A(t) = \frac{(\lambda + L)(T-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \int_0^t \frac{Lh_T}{\lambda + L}d\tau + \int_0^T \frac{Lk_T}{\lambda + L}d\tau\right).$$

Preuve : Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les solutions de l'équation (2.8) correspondant à $x_1(0) = x_0$ et $x_2(0) = x_0^*$ respectivement. Alors

$$\begin{cases} ^cD^\alpha x_1(t) = \lambda x_1(t) + f(t, x_1(t), \int_0^t h(t,s)x_1(s)ds, \int_0^T k(t,s)x_1(s)ds) \\ x_1(0) = x_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} ^cD^\alpha x_2(t) = \lambda x_2(t) + f(t, x_2(t), \int_0^t h(t,s)x_2(s)ds, \int_0^T k(t,s)x_2(s)ds) \\ x_2(0) = x_0^* \end{cases}$$

Alors

$$x_1(t) = x_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x_1(s)ds$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, x_1(s), \int_0^s h(t,\tau)x_1(\tau)d\tau, \int_0^T k(t,\tau)x_1(\tau)d\tau\right) ds$$

et

$$x_2(t) = x_0^* + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x_2(s)ds$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, x_2(s), \int_0^s h(t,\tau)x_2(\tau)d\tau, \int_0^T k(t,\tau)x_2(\tau)d\tau\right) ds$$

En utilisant l'hypothèse (H_1) , pour tout $t \in [0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned}
&|x_1(t) - x_2(t)| \\
&\leq \ |x_0 - x_0^*| + \frac{\lambda + L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \, |x_1(s) - x_2(s)| \, ds \\
&+ \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_0^s |h(s,\tau)||x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau + \int_0^T |k(s,\tau)||x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \right) \\
&\leq |x_0 - x_0^*| + \frac{\lambda + L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| ds \\
&+ \frac{Lh_T}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_0^s |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \right) ds \\
&+ \frac{Lk_T}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_0^T |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \right) ds \\
&\leq |x_0| + \frac{M\Gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(\lambda+L)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x(s)| ds \\
&+ \frac{Lh_T}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_0^t |x(\tau)| d\tau \right) ds + \frac{Lk_T}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_0^T |x(\tau|) d\tau \right) ds
\end{aligned}$$

donc

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_0 - x_0^*| + \int_0^t \frac{\lambda + L}{\Gamma(\alpha)} (T-s)^{\alpha-1} \tag{2.10}$$

$$\left(|x_1(s) - x_2(s)| + \int_0^s \frac{Lh_T}{(\lambda + L)} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau + \int_0^T \frac{Lk_T}{(\lambda + L)} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \right) ds \tag{2.11}$$

En appliquant l'inégalité donnée dans le Théorème 2.0.4 à l'inégalité (2.10) avec

$$u(t) = |x_1(t) - x_2(t)|, c = |x_0 - x_0^*|, h(s) = \frac{\lambda + L}{\Gamma(\alpha)} (T-s)^{\alpha-1}, f(\tau) = \frac{Lh_T}{\lambda + L}, g(\tau) = \frac{Lk_T}{\lambda + L},$$

$p = q = 1, n_1 = 1, n_2 = 0$, nous obtenons

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_0 - x_0^*| \, exp \left(\int_0^t A(\tau) d\tau \right),$$

où

$$A(t) = \frac{(\lambda + L)(T-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \int_0^t \frac{Lh_T}{\lambda + L} d\tau + \int_0^T \frac{Lk_T}{\lambda + L} d\tau \right)$$

on obtient ainsi l'inégalité (2.9)

■

Remarque 2.1.1. *L'inégalité (2.9) montre la dépendance continue de la solution de Eq. (2.1) aux conditions initiales et donne aussi l'unicité. L'unicité s'ensuit en mettant* $x_0 = x_0^*$ *dans (2.9).*

2.1.3 Dépendance continue sur les fonctions impliquées et des paramètres

On étudie la dépendance continue de la solution de l'équation (2.1) sur les fonctions implquées. On considère l'équation (2.1) et l'équation suivante

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = \lambda y(t) + F\left(t, y(s), \int_0^t h(t,s)y(s)ds, \int_0^T k(t,s)y(s)ds\right) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Dans le théorème suivant, nous prouvons la dépendance continue de la solution de l'équation (2.1) sur les fonctions impliquées dans le coté droit de l'équation (2.1).

Théorème 2.1.4. *Supposons que fin équation (2.1) satisfait l'hypothèse* (H_1)*. Soit* $y(t)$ *une solution de (2.12) et supposons ce*

$$|f(t, y(t), \bar{y}(t), \tilde{y}(t)) - F(t, y(t), \bar{y}(t)| \leq \varepsilon,\ t \in J,\ |x_0 - y_0| < \delta, \tag{2.13}$$

où $\varepsilon, \delta > 0$ *sont de petites constantes arbitraires. Alors la solution* $x(t)$ *de l'équation (2.1).*

Preuve : Soit $x(t)$ et $y(t)$ une solution quelconque de l'équation (2.1) et (2.12) respectivement. Alors

$${}^cD^\alpha x(t) = \lambda x(t) + F\left(t, x(t), \int_0^t h(t,s)x(s)ds, \int_0^T k(t,s)x(s)ds\right)$$

et

$${}^cD^\alpha y(t) = \lambda y(t) + f\left(t, y(s), \int_0^t h(t,s)y(s)ds, \int_0^T k(t,s)y(s)ds\right), y(0) = y_0$$

cela implique

$$x(t) = x_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x(s)ds$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\right)ds$$

et

$$y(t) = y_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}F\left(s, y(s), \int_0^s h(s,\tau)y(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)y(\tau)d\tau\right)ds$$

donc

$$\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &\leq |x_0-y_0| + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\bigg|f\left(s, x(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\right) \\
&- F\left(s, y(s), \int_0^s h(s,\tau)y(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)y(\tau)d\tau\right)\bigg|ds \\
&\leq |x_0-y_0| + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\bigg|f\left(s, x(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\right) \\
&- f\left(s, y(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)y(\tau)d\tau\right)\bigg|ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\bigg|f\left(s, x(s), \int_0^s h(s,\tau)x(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x(\tau)d\tau\right) \\
&- F\left(s, y(s), \int_0^s h(s,\tau)y(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)y(\tau)d\tau\right)\bigg|ds \\
&\leq |x_0-y_0| + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|ds \\
&+ \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|ds \\
&+ \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_0^s |h(s,\tau)||x(\tau)-y(\tau)|d\tau + \int_0^T |k(s,\tau)||x(\tau)-y(\tau)|d\tau\right)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\bigg|f\left(s, y(s), \int_0^s h(t,\tau)y(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)y(\tau)d\tau\right) \\
&- F\left(s, y(s), \int_0^s h(t,\tau)y(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)y(\tau)d\tau\right)\bigg|ds \\
&\leq \left\{\delta + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha\right\} + \frac{(\lambda+L)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|ds \\
&+ \frac{Lh_T}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_0^s |x(\tau)-y(\tau)|d\tau\right)ds \\
&+ \frac{Lk_T}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_0^T |x(\tau)-y(\tau)|d\tau\right)ds \\
&\leq \left\{\delta + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha\right\} + \int_0^t \frac{(\lambda+L)}{\Gamma(\alpha)}(T-s)^{\alpha-1}\bigg(|x(s)-y(s)| \\
&+ \int_0^s \frac{Lh_T}{(\lambda+L)}|x(\tau)-y(\tau)|d\tau
\end{aligned}$$

$$+\int_0^T \frac{Lk_T}{(\lambda+L)}|x(\tau)-y(\tau)|d\tau\Big)ds.$$

En appliquant l'inégalité donnée dans le Théorème 2.0.4 avec

$$u(t)=|x(t)-y(t)|, c=\left(\delta+\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}T^{\alpha}\right), h(s)=\frac{\lambda+L}{\Gamma(\alpha)}(T-s)^{\alpha-1},$$
$$g(\tau)=\frac{Lk_T}{\lambda+L}, f(\tau)=\frac{Lh_T}{\lambda+L},$$

$p=q=1, n_1=1, n_2=0,$
On obtient

$$|x(t)-y(t)|\leq\left(\delta+\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}T^{\alpha}\right)exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right), \tag{2.14}$$

où

$$A(t)=\frac{(\lambda+L)(T-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\int_0^t\frac{Lh_T}{(\lambda+L)}d\tau+\int_0^T\frac{Lk_T}{(\lambda+L)}d\tau\right)$$

De l'inégalité (2.14), il découle que la solution $x(t)$ de l'Eq (2.1), dépend continuellement des fonctions impliquées dans le côté droit de l'Eq (2.1). Si $\epsilon=0$ alors l'inégalité (2.14) donne une dépendance continue de la solution aux conditions initiales et nous notons également que comme $\epsilon,\delta>0$ étaient arbitraires, en prenant $\epsilon,\delta\longrightarrow 0$, nous avons $x\longrightarrow y$, où $x:J\longrightarrow\mathbb{R}$ et $y:J\longrightarrow\mathbb{R}$ sont les solutions de l'équation (2.1) et de l'équation (2.12) respectivement.

■

Ensuite, nous considérons l'équation intégro-différentielle mixte d'ordre fractionnaire :

$${}^cD^{\alpha}x_1(t)=\lambda x_1(t)+H\left(t,x_1(t),\int_0^t h(t,s)x_1(s)ds,\int_0^T k(t,s)x_1(s)ds,\delta_1\right), x_1(0)=x_0 \tag{2.15}$$

et

$${}^cD^{\alpha}x_2(t)=\lambda x_2(t)+H\left(t,x_2(t),\int_0^t h(t,s)x_2(s)ds,\int_0^T k(t,s)x_2(s)ds,\delta_2\right), x_2(0)=x_0 \tag{2.16}$$

pour t $\in$ J, où H : $J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ et δ_1 , δ_2 sont des paramètres réels. Le théorème suivant traite de la dépendance continue des solutions de l'équation (2.1) par rapport aux paramètres.

Théorème 2.1.5. *Supposons que la fonction H satisfasse aux conditions :*

$$|H(t,x,y,z,\delta_1)-H(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z},\delta_1)|\leq L_1(|x-\bar{x}|+|y-\bar{y}|+|z-\bar{z}|), \tag{2.17}$$

$$|H(t,x,y,z,\delta_1)-H(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z},\delta_2)|\leq L_2\left|\delta_1-\delta_2\right|, \tag{2.18}$$

où L_1 , $L_2 \geq 0$. Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les solutions de l'équation (2.15) et (2.16) respectivement. Dans ce cas

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \frac{|\delta_1 - \delta_2| L_2}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right), \tag{2.19}$$

$$A(t) = \frac{(\lambda + L_1)(T-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \int_0^t \frac{L_1 h_T}{(\lambda + L_1)}d\tau + \int_0^T \frac{L_1 k_T}{(\lambda + L_1)}d\tau\right)$$

Preuve : Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ une solution quelconque de l'équation. (2.15) et (2.16) respectivement. Alors

$${}^cD^\alpha x_1(t) = \lambda x_1(t) + H\left(t, x_1(t), \int_0^t h(t,s)x_1(s)ds, \int_0^T k(t,s)x_1(s)ds, \delta_1\right), x_1(0) = x_0.$$

et

$${}^cD^\alpha x_2(t) = \lambda x_2(t) + H\left(t, x_2(t), \int_0^t h(t,s)x_2(s)ds, \int_0^T k(t,s)x_2(s), \delta_2 ds\right), x_2(0) = x_0.$$

cela implique

$$x_1(t) = x_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x_1(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} H\Bigg(s, x_1(s), \int_0^s h(s,\tau)x_1(\tau)d\tau,$$
$$\int_0^T k(s,\tau)x_1(\tau)d\tau, \delta_1\Bigg)ds$$

et

$$x_2(t) = x_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x_2(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} H\Bigg(s, x_2(s), \int_0^s h(s,\tau)x_2(\tau)d\tau,$$
$$\int_0^T k(s,\tau)x_2(\tau)d\tau, \delta_2\Bigg)ds$$

On obtient , pour $t \in J$

$$\begin{aligned}|x_1(t) - x_2(t)| \leq{}& \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x_1(s) - x_2(s)|ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Bigg|H\left(s, x_1(s), \int_0^s h(s,\tau)x_1(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x_1(\tau)d\tau, \delta_1\right) \\ &- H\left(s, x_2(s), \int_0^s h(s,\tau)x_2(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x_2(\tau)d\tau, \delta_2\right)\Bigg|ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x_1(s) - x_2(s)| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \bigg| H\left(s, x_1(s), \int_0^s h(s,\tau)x_1(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x_1(\tau)d\tau, \delta_1\right) \\
&- H\left(s, x_2(s), \int_0^s h(s,\tau)x_2(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x_2(\tau)d\tau, \delta_1\right) \bigg| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \bigg| H\left(s, x_2(s), \int_0^s h(s,\tau)x_1(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x_1(\tau)d\tau, \delta_1\right) \\
&- H\left(s, x_2(s), \int_0^s h(s,\tau)x_2(\tau)d\tau, \int_0^T k(s,\tau)x_2(\tau)d\tau, \delta_2\right) \bigg| ds \\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x_1(s) - x_2(s)| ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \bigg(|x_1(s) - x_2(s)| \\
&+ \int_0^s |h(s,\tau)| \, |x_1(\tau) - x_2(\tau)| \, d\tau + \int_0^T |k(s,\tau)| \, |x_1(\tau) - x_2(\tau)| \, d\tau \bigg) ds \\
&+ \frac{L_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \, |\delta_1 - \delta_2| \, ds \\
&\leq \frac{|\delta_1 - \delta_2| L_2}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{\lambda + L_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \, |x_1(s) - x_2(s)| \, ds \\
&+ \frac{L_1 h_T}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_0^s |x_1(\tau) - x_2(\tau)| \, d\tau \right) ds \\
&+ \frac{L_1 k_T}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_0^T |x_1(\tau) - x_2(\tau)| \, d\tau \right) ds \\
&\leq \frac{|\delta_1 - \delta_2| L_2}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha + \int_0^t \frac{\lambda + L_1}{\Gamma(\alpha)} (T-s)^{\alpha-1} \bigg(|x_1(s) - x_2(s)| \\
&+ \int_0^s \frac{L_1 h_T}{\lambda + L_1} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau + \int_0^T \frac{L_1 k_T}{\lambda + L_1} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \bigg) ds.
\end{aligned}
$$

En appliquant l'inégalité donnée dans le Théorème 2.0.4 avec

$$
\begin{aligned}
&u(t) = |x(t) - y(t)|, c = \frac{|\delta_1 - \delta_2| L_2}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha, h(s) = \frac{(\lambda + L_1)}{\Gamma(\alpha)} (T-s)^{\alpha-1}, \\
&f(\tau) = \frac{L_1 h_T}{(\lambda + L_1)}, g(\tau) = \frac{L_1 k_T}{(\lambda + L_1)},
\end{aligned}
$$

$$
p = q = 1, n_1 = 1, n_2 = 0,
$$

nous obtenons

$$
|x_1(t) - x_2(t)| \leq \frac{|\delta_1 - \delta_2| \, L_2}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha exp\left(\int_0^t A(\tau) d\tau \right),
$$

où
$$A(t)=\frac{(\lambda+L_1)(T-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\int_0^t \frac{L_1h_T}{\lambda+L_1}d\tau+\int_0^T \frac{L_1k_T}{\lambda+L_1}d\tau\right)$$

■

2.1.4 Exemple

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{1}{2}}x(t)=x(t)+\dfrac{x(t)+1}{t^2+9}+\dfrac{1}{9}\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(2+t)^2}x(s)ds+\frac{1}{9}\int_0^1 \frac{e^{-t}}{(3+t)^2}x(s)ds, \\ t\in[0,1], x(0)=0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Définissons $f(t,x(t),H_1x(t),K_1x(t))=\dfrac{x(t)+1}{t^2+9}+\dfrac{1}{9}H_1x(t)+\dfrac{1}{9}K_1x(t), t\in[0,1]$, $\alpha=\dfrac{1}{2}, \lambda=1$. ou

$$\begin{aligned} H_1x(t)&=\int_0^t \frac{1}{(2+t)^2}x(s)ds, \\ K_1x(t)&=\int_0^1 \frac{e^{-t}}{(3+t)^2}x(s)ds. \end{aligned}$$

Il est clair que la fonction f est continue . Pour tout $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ et $t\in[0,1]$,

$$|f(t,x_1,H_1x_1,K_1x_1)-f(t,x_2,H_1x_2,K_1x_2)|\leq\frac{1}{9}\Big(|x_1-x_2|+|H_1x_1-H_1x_2|+|K_1x_1-K_1x_2|\Big)$$

L'hypothèse (H_1) est donc satisfaite avec $L=\frac{1}{9}$. il résulte du Théorème 2.1.1 que le problème (2.20) a une solution unique sur $[0,1]$.

Chapitre 3

Quelques théorèmes sur une équation d'évolution semi-linéaire d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre nous étudions l'existence, l'unicité et d'autres propriétés de solutions d'équations d'évolution semi-linéaires fractionnaires dans les espaces de Banach. Les résultats sont obtenus en utilisant le calcul fractionnaire, le célèbre théorème du point fixe de Banach couplé à la norme de type Bielecki et l'inégalité intégrale établie par [11].

$$\begin{cases} \dfrac{d^q x}{dt^q} = A(t)x(t) + F(t, x(t)), \qquad t \in J = [0, b] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

La variable inconnue $x(\cdot)$ prend des valeurs dans l'espace de Banach X, $F \in C(J \times X, X)$, et $A(t)$ est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X, et x_0 est un élément donné de X. L'opérateur D^q désigne la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < q < 1$. Nous allons étudier l'existence, l'unicité et la dépendance continue du solution du problème de valeur initiale (3.1). Les principaux outils utilisés sont les applications du théorème du point fixe de Banach.

3.1 Résultats d'existence et d'unicité

Lemme 3.1.1. *Soient $\upsilon(\cdot), \omega(\cdot) : [0, b] \to [0, \infty)$ des fonctions continues. Si $\omega(\cdot)$ est non décroissante et qu'il existe des constantes $p > 0, 0 < \alpha < 1$ telles que*

$$\upsilon(t) \leq \omega(t) + p \int_0^t \frac{\upsilon(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \qquad t \in [0, b],$$

alors

$$v(t) \leq \exp\left(\frac{[p\Gamma(\alpha)b]^n}{\Gamma(n\alpha)}\right)\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{pb^\alpha}{\alpha}\right)^j \omega(t),$$

pour tout $t \in [0, b]$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n\alpha > 1$. *Nous énumérons les hypothèses suivantes :*

(M_1) *$A(t)$ est un opérateur linéaire borné sur X pour chaque $t \in J$ et la fonction $t \to A(t)$ est continue pour la topologie des opérateurs uniformes et il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\|A(t)\| \leq M, \qquad t \in J.$$

(M_2) *Il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \leq K\|x - \bar{x}\|,$$

pour chaque $t \in J$ et $x, \bar{x} \in X$.

(M_3) *Pour λ comme dans (1.1)*

(a) *Il existe une constante positive β telle que*

$$\|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s, 0)\|ds \leq \beta \exp(\lambda t), \qquad t \in J.$$

(b) *Il existe une constante positive $\alpha < 1$ telle que*

$$\frac{1}{\Gamma(q)}(M + K)\int_0^t (t-s)^{q-1}\exp(\lambda s)ds\mu \leq \alpha \exp(\lambda t), \qquad t \in J.$$

Théorème 3.1.1. *Supposons que les hypothèses $(M_1) - (M_3)$ soient vérifiées. Alors le problème aux valeurs initiales (3.1) a une solution unique sur J.*

Preuve : Soit $x(t) \in S$ et définissons l'opérateur $T : S \to S$ par

$$(Tx)(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}A(s)x(s)ds + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}f(s, x(s))ds, \quad (3.2)$$

pour $t \in J$. Nous allons d'abord montrer que Tx envoie S sur lui-même. Comme toutes les fonctions impliquées dans (3.2) sont continues, l'application Tx est continue sur J et $Tx \in X$. On vérifie que (1.1) est vérifiée. D'après (3.2), en utilisant les hypothèses et (1.3), on a

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t)\| &\leq \|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|A(s)\|\|x(s)\|ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,x(s))\|ds \\
&\leq \|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}M\|x(s)\|ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,x(s)) - f(s,0)\|ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,0)\|ds \\
&\leq \|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,0)\|ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}M\|x(s)\|ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}K\|x(s)-0\|ds \\
&\leq \beta\exp(\lambda t) + \frac{1}{\Gamma(q)}[M+K]\|x\|_s \int_0^t (t-s)^{q-1}\exp(\lambda s)ds \\
&\leq \beta\exp(\lambda t) + N\alpha\exp(\lambda t) = (\beta + N\alpha)\exp(\lambda t).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

De l'inégalité (3.3), on observe que

$$\|Tx\|_s \leq (\beta + N\alpha),$$

d'où il suit que $Tx \in S$. Cela prouve que T envoie S sur lui-même. Ensuite, nous vérifions que l'opérateur T est une application de contraction. Soient $x(t), y(t) \in S$. A partir de (3.2) et en utilisant les hypothèses, on a

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t) - (Ty)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|A(s)\| \qquad \|x(s)-y(s)\|ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}M\|x(s)-y(s)\|ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}K\|x(s)-y(s)\|ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)}[M+K]\int_0^t (t-s)^{q-1}\|x(s)-y(s)\|ds
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(q)}[M+K]\|x-y\|_S \int_0^t (t-s)^{q-1}\exp(\lambda s)ds$$
$$\leq \alpha \exp(\lambda t)\|x-y\|_S. \tag{3.4}$$

A partir de (3.4), on constate que

$$\|Tx - Ty\|_S \leq \alpha\|x-y\|_S.$$

Puisque $\alpha < 1$, il résulte du théorème du point fixe de Banach que T admet un unique fixe a dans S. Le point fixe de T est cependant une solution du problème des valeurs initiales (3.1). La preuve est complète.

■

Le théorème suivant montre l'unicité du solution de (3.1) dans tout l'espace S.

Théorème 3.1.2. *Si les hypothèses* (M_1) *et* (M_2) *sont satisfaites, alors le problème aux valeurs initiales (3.1) a au plus une solution douce sur* J.

Preuve : Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solution du problème de la valeur initiale (3.1) et $u(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\|$. Alors par hypothèse, on a

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|A(s)\|\ \|x_1(s)-x_2(s)\|ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s))\|\|ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}Mu(s)ds + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}Ku(s)ds \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(q)}[M+K]\int_0^t (t-s)^{q-1}u(s)ds. \tag{3.5}$$

Maintenant une application appropriée de (3.1.1) (avec $p = \frac{1}{\Gamma(q)}[M+K]$ et $w(t) = 0$) à (3.5) donne

$$u(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq 0,$$

ce qui implique $x_1(t) = x_2(t)$ for $t \in J$. Il existe donc au plus une solution au problème des valeurs initiales (3.1) sur J.

■

3.1.1 Bornéture et dépendance continue

Nous étudions le caractère borné des solutions du problème de la condition initiale et la dépendance continue des solutions de (3.1) sur les données initiales données, et la fonction f qui y est impliquée. Nous montrons également la dépendance continue des solutions vis-à-vis de certains paramètres. Le théorème suivant contient l'estimation sur la solution du problème de la condition initiale.

Théorème 3.1.3. *Supposons que l'hypothèse (M_1) soit vérifiée et que la fonction f en équation (3.1) satisfait la condition*

$$\|f(t,x)\| \leq d\|x\|, \tag{3.6}$$

où d est une constante non négative. Si $x(t), t \in J$ est une solution quelconque du problème aux valeurs initiales (3.1), alors toutes les solutions de (3.1) sont bornées sur J.

Preuve : En procédant comme dans la preuve du Théorème 3.1.2 et les hypothèses, on obtient

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}M\|x(s)\|ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,x(s))\|ds \\ &\leq \|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)}(t-s)^{q-1}M\|x(s)\|ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}d\|x(s)\|ds\end{aligned}$$

$$\leq \|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)}[M+d]\int_0^t (t-s)^{q-1}\|x(s)\|ds \tag{3.7}$$

En appliquant le lemme (3.1.2) (avec $p = [M+d]$ et $w(t) = \|x_0\|$)à 3.7 on obtient

$$\|x(t)\| \leq \exp\left(\frac{[(M+d)b]^n}{\Gamma(nq)}\right)\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{(M+d)b^q}{\Gamma(q+1)}\right)^j \|x_0\| = C, \tag{3.8}$$

pour tout $t \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $nq > 1$. Ainsi

$$\|x(t)\| \leq C, \quad t \in J.$$

Ceci prouve la Théorème 3.1.3.

■

Le théorème suivant traite la dépendance continue de la solution de l'équation (3.1) à des valeurs initiales données.

Théorème 3.1.4. *Supposons que les hypothèses $(M_1)-(M_2)$ soient vérifiées . Soient*

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ être des solutions de l'équation (3.1), pour $0 \leq t < b$ avec des conditions initiales données

$$x_1(0) = x_0^*$$

et

$$x_2(0) = x_0^{**},$$

respectivement, où x_0^*, x_0^{**} sont des éléments de X. Alors

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \exp\left(\frac{[(M+K)b]^n}{\Gamma(nq)}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{(M+K)b^q}{\Gamma(q+1)}\right)^j \|x_0^* - x_0^{**}\|,$$

pour chaque $t \in J$ et chaque $n \in \mathbb{N}$ tel que $nq > 1$.

Preuve : Les détails de la preuve du Théorème 3.1.4 suivent des arguments similaires à ceux de la preuve du Théorème 3.1.1 avec les modifications appropriées.

■

Considérons maintenant le problème de la valeur initiale (3.1) avec

$$\frac{d^q y}{dt^q} = A(t)y(t) + F(t, y(t)), \qquad t \in J \tag{3.9}$$

$$y(0) = y_0 \tag{3.10}$$

où $F \in C(J \times X, X)$ et y_0 est un élément de X. Le théorème suivant traite de la proximité des solutions du problème de valeur initiale (3.1) et du problème de valeur initiale (3.9)(3.10).

Théorème 3.1.5. *Supposons que les hypothèses $(M_1) - (M_2)$ soient vérifiées. Soit $y(t)$ une solution du problème (3.9) (3.10) et supposons que*

$$\|f(t,x) - F(t,x)\| \leq \epsilon \tag{3.11}$$

et

$$\|x_0 - y_0\| \leq \delta, \tag{3.12}$$

où ϵ et δ sont de petites constantes arbitraires. Alors la solution $x(t)$ du problème des valeurs initiales (3.1) dépend continument des fonctions qui y sont impliquées.

Preuve : Soit $\upsilon(t) = \|x(t) - y(t)\|$, $t \in J$. En utilisant les hypothèses et les faits que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement solution de (3.1) et (3.9)(3.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\upsilon(t) \leq{}& \|x_0 - y_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|A(s)\| \quad \|x(s)-y(s)\|ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,x(s)) - F(s,y(s))\|ds \\
&\leq \delta + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}M\upsilon(s)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (t-s)^{q-1}\|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\|f(s,y(s)) - F(s,y(s))\|ds \\
&\leq \delta + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}M\nu(s)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}K\|x(s)-y(s)\|ds + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\epsilon ds \\
&\leq \delta + \frac{1}{\Gamma(q)}(M+K)\int_0^t (t-s)^{q-1}\upsilon(s)ds + \frac{b^q\epsilon}{\Gamma(q+1)} \\
&\quad \leq \delta\frac{b^q\epsilon}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{\Gamma(q)}(M+K)\int_0^t (t-s)^{q-1}\upsilon(s)ds.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Appliquant le lemme (3.1.1) à l'équation (3.13), on obtient
$\upsilon(t) = \|x(t) - y(t)\|$

$$\leq \left(\delta + \frac{b^q\epsilon}{\Gamma(q+1)}\right)\exp\left(\frac{((M+K)b)^n}{\Gamma(nq)}\right)\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{((M+K)b^q)^j}{\Gamma(q+1)}\right)^j, \tag{3.14}$$

pour tout $t \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $nq > 1$. De (3.14) il résulte que les solutions du problème de la valeur initiale (3.1) dépendent continument des fonctions qui y sont impliquées.

■

Remarque 3.1.1. *Le résultat donné dans la Théorème 3.1.3 relie les solutions des problème aux valeurs initiales (3.1) et (3.9)(3.10) en ce sens que si f est proche de F, x_0 est proche de y_0, alors non seulement les solutions des problème aux valeurs initiales (3.1) et (2.12)(3.10) sont proches les unes des autres, mais dépendent aussi continument des fonctions qui y sont impliquées.*

Ensuite, considérons le problème de la valeur initiale (3.1) avec

$$\frac{d^q y}{dt^q} = A(t)y(t) + f_k(t, y(t)), \qquad t \in J, \tag{3.15}$$

$$y(0) = \alpha_k, \tag{3.16}$$

pour $k = 1, 2, \cdot$, où $f_k \in C(J \times X, X)$ et $(\alpha_k)_k$ est une suite dans X. Comme conséquence immédiate du Théorème (3.1.3), on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.1. *Supposons que les hypothèses $(M_1) - (M_2)$ soient vérifiées et qu'il existe des constantes non négatives ϵ_k, δ_k $(k = 1, 2, \cdot)$ tel que*

$$\|f(t, x) - f_k(t, x)\| \leq \epsilon_k, \tag{3.17}$$

et

$$\|x_0 - \alpha_k\| \leq \delta_k, \tag{3.18}$$

avec $\epsilon_k \to 0$ et $\delta_k \to \infty$, si $x(t)$ et $y_k(t)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ sont respectivement les solutions des problèmes aux valeurs initiales (3.1) et (3.15)(3.16) sur J, alors $y_k(t) \to x(t)$ sur J quand $k \to \infty$.

Preuve : Pour $k = 1, 2 \cdots$, les conditions du Théorème 3.1.5 sont vérifiées. Ceci nous donne

$$\|y_k(t) - x(t)\| \leq \left(\delta_k + \frac{b^q \epsilon_k}{\Gamma(q+1)}\right) \exp\left(\frac{((M+K)b)^n}{\Gamma(nq)}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{(M+K)b^q}{\Gamma(q+1)}\right)^j, \tag{3.19}$$

pour tout $t \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $nq > 1$. Comme $k \to \infty$, le résultat découle (3.19).

■

Remarque 3.1.2. *Le résultat obtenu de Corollaire (3.1.1) fournit des conditions suffisantes pour assurer que les solutions du problème de valeur initiale (3.15)(3.16) convergeront vers les solutions du problème de valeur initiale (3.1).*

Une variante du théorème 3.1.5 est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.6. *Supposer que*

$$\|f(t, x) - F(t, \bar{x})\| \leq \bar{K}\|x - \bar{x}\|, \tag{3.20}$$

où $\bar{K} \geq 0$, et que l'hypothèse (M_1) et la condition (3.13) sont vérifiées. Soient $x(t)$ et $y(t)$ des solutions respectivement de (3.1) et (3.15) (3.16) sur J. Alors

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta \exp\left(\frac{[(M+\bar{K})b]^n}{\Gamma(nq)}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{(M+\bar{K})b^q}{\Gamma(q+1)}\right)^j, \tag{3.21}$$

pour chaque $t \in J$ et chaque $n \in \mathbb{N}$ tel que $nq > 1$.

Preuve : Définissons $v(t)$ comme dans la preuve du Théorème 3.1.2. Maintenant, en utilisant les hypothèses nous avons

$$\begin{aligned}
v(t) \leq \|x_0 - y_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \|A(s)\| \, \|x(s) - y(s)\| ds \\
+ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \|f(s, x(s)) - F(s, y(s))\| ds \\
\leq \delta + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} M v(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \bar{K} v(s) ds
\end{aligned}$$

$$\leq \delta + \frac{1}{\Gamma(q)} [M + \bar{K}] \int_0^t (t-s)^{q-1} v(s) ds. \tag{3.22}$$

Maintenant, une application du Lemme 3.1.1 à l'équation (3.22) donne (3.21). On considère les équations différentielles d'ordre fractionnaire :

$$\frac{d^q x}{dt^q} = A(t)x(t) + G(t, x(t), \mu_1), \tag{3.23}$$

$$\frac{d^q x}{dt^q} = A(t)x(t) + G(t, x(t), \mu_2), \tag{3.24}$$

où $t \in J$ où $G \in C(J \times X \times \mathbb{R}, X)$ et (3.1) sont des paramètres réels et de condition initiale donnée par (3.1).

■

Le théorème suivant énonce la dépendance continue des solutions de (3.23) (3.1) et (3.24) vis-à-vis des paramètres.

Théorème 3.1.7. *Supposons que la fonction G vérifie les conditions*

$$\|G(t, x, \mu) - G(t, \bar{x}, \mu)\| \leq L_1 \|x - \bar{x}\|, \tag{3.25}$$

$$\|G(t, x, \mu) - G(t, x, \bar{\mu})\| \leq L_2 \|\mu - \bar{\mu}\|, \tag{3.26}$$

où $L_1, L_2 \geq 0$ et l'hypothèse (M_1) est vérifiée. Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les solutions de (3.23) (3.1) et (3.24) (3.1), respectivement. Alors

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \frac{b^q L_2 |\mu_1 - \mu_2|}{\Gamma(q+1)} \exp\left(\frac{[(M + L_1)b]^n}{\Gamma(nq)} \right) \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{(M + L_1) b^q}{\Gamma(q+1)} \right)^j. \tag{3.27}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} M \int_0^t (t-s)^{q-1} u(s) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \| G(s, x_1(s), \mu_1) - G(s, x_2(s), \mu_2 \| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} M \int_0^t (t-s)^{q-1} u(s) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \| G(s, x_1(s), \mu_1) - G(s, x_2(s), \mu_1 \| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \| G(s, x_2(s), \mu_1) - G(s, x_2(s), \mu_2 \| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} M \int_0^t (t-s)^{q-1} u(s) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} L_1 \| x_1(s) - x_2(s) \| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} L_2 |\mu_1 - \mu_2| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} [M + L_1] \int_0^t (t-s)^{q-1} u(s) ds + \frac{b^q L_2 |\mu_1 - \mu_2|}{\Gamma(q+1)}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{b^q L_2 |\mu_1 - \mu_2|}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{\Gamma(q)} [M + L_1] \int_0^t (t-s)^{q-1} u(s) ds. \tag{3.28}$$

Maintenant, une application du lemme (3.1.1) à l'équation (3.28) donne (3.27)

■

3.1.2 Exemple

$$\frac{d^q x}{dt^q} = \frac{t}{20} x + \frac{e^{-t} |x(t)|}{(9 + e^t)(1 + |x(t)|)}, \quad t \in J = [0, 1], \quad 0 < q < 1, \tag{3.29}$$

$$x(0) = 0. \tag{3.30}$$

On prend

$$f(t, x) = \frac{e^{-t} x}{(9 + e^t)(1 + x)}, \quad (t, x) \in J \times [0, \infty),$$

et

$$A(t) = \frac{t}{20}.$$

Soit $x, y \in [0, \infty)$ *et* $t \in J$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}| \\
&= \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}\frac{|x-y|}{(1+x)(1+Y)} \\
&\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}|x-y| \leq \frac{1}{10}|x-y|.
\end{aligned}$$

Donc l'hypothèse (H_2) est vraie avec $K = \frac{1}{10}$. On a aussi $M = \frac{1}{20}$ et

$$\begin{aligned}
\|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}f(s,0)ds &= 0 + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}0ds \\
&= 0 \leq \beta\exp(\lambda t)
\end{aligned}$$

$t \in J = [0,1]$, et pour tout $\beta \geq 0, \lambda > 0$. On va vérifier que la condition

$$\frac{1}{\Gamma(q)}[M+K]\int_0^t (t-s)^{q-1}\exp(\lambda s)ds \leq \alpha\exp(\lambda t),\ t \in J$$

est satisfait. En effet

$$\frac{1}{\alpha}\frac{3}{20}\int_0^t (t-s)^{q-1}\exp(\lambda(s-t))ds \leq \Gamma(q),\ t \in J,\ \alpha < 1. \tag{3.31}$$

Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 3.1.1 sont satisfaites. Ainsi, la conclusion du Théorème 3.1.1 s'applique et problème (3.1) a une solution unique sur $[0, 1]$ pour les valeurs de q et a satisfaisant (3.31).

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté une étude d'existence, d'unicité de solution pour une équation intégro-différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire de type mixte avec des coefficients constants et une autre équation d'évolution semi-linéaire dans des espaces de Banach, de plus, l'estimation et la dépendance continue de la solution aux conditions initiales, aux paramètres, aux fonctions impliquées dans les équations. Cette étude basée sur le théorème du contraction de Banach et des inégalités intégrales.

Le fait important est qu'avec des hypothèses minimales, nous avons obtenu l'existence et diverses propriétés de la solution pour des problèmes non linéaires. Ces résultats peuvent généralisés aux espaces vectoriels topologiques abstraits ou bien pour traiter le problème du stabilité des solutions sur des domaines non bornés lorsqu'on ne peux pas assurer l'unicité.

Bibliographie

[1] A.El jai. *Eléments de topologie et espaces métriques,* Presses Universitaires de Perpignan.

[2] F.Dugundji and A. Granas *Fixed Point Theory, Springer*, New York, (2003).

[3] R,Agarwal ,M. Meehan and D. O'regan.*Fixed Point Theory and Applications Cambridge*. University. Press.

[4] Brahim Tellab (2018). Résolution des équations diférentielles fractionnaires. Thèse de Doctorat. Université des Frères Mentouri Constantine1.

[5] B. Straughan *Explosive Instabilities in Mechanics*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH Co. (2012).

[6] Tidjani Menacer (2014). Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires. Thèse de Doctorat. Université Mentouri-Constantine1.

[7] L. Jeanjean. *Espaces métriques ,Cours et TD.* Université de Franche-Comté16 route

[8] H. Gunawan et M. Mashadi, *On n-normed spaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27(10) :631-639, 2001.

[9] E. B. Omolara and M. S. Jamiu. On nonlinear mixed fractional integro-differential equations with positive constant coefficient. *Filomat*, 33(2) :321-328, 2019.

[10] S. D. Kendre, S. G. Latpate, On some mixed integral inequalities and its applications, Theoretical Mathematics and Applications 5 (2015) 1–14.

[11] Tidke, H.L. Some theorems on fractional semilinear evolution equations. Journal of Fractional Calculus and Applications, 9(1), 1-13, 2018.

[12] Nieto, J., Ouahab, A., Venktesh, V. Implicit fractional differential equations via the Liouville–Caputo derivative. Mathematics, 3(2), 398–411, 2015. doi :10.3390/math3020398

[13] Diethelm, K. and Ford, N.J. Analysis of fractional differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 265(2), 229–248, 2002. doi :10.1006/jmaa.2000.7194

[14] Corduneanu, C. Integral Equations and Applications. Cambridge University Press, 1991.

[15] Abbas, S., Benchohra, M., and N'Guérékata, G.M. Topics in Fractional Differential Equations, Vol. 27. Springer, New York, 2012. https ://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-4036-9

[16] G. Anastassiou, Advances on Fractional Inequalities, Springer, New York, 2011

[17] Baleanu, D., Guvenc, Z., and Machado, J. (Eds.). (2010). New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications. Springer, New York. https ://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-3293-5

[18] Jiang, F., and Meng, F. Explicit bounds on some new nonlinear integral inequality with delay. *J. Comput. Appl. Math.*, 205(1), 479–486, 2007.

[19] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983*

[20] Hervé Guillaumie, *Toutes les mathématiques, ellipses, édition marketing S.A, 2005*

[21] Sylvie Benzoni-Gavage, *Calcul différentiel et équations différentielles,Cours et exercices corrigés, Dunod, 2010*