RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques»

Option :
« Analyse fonctionnelle et Application»

Présenté Par :
AMALOU Aicha
SAOUDET Saliha

Sous L'intitulé :

Introduction à l'analyse vectorielle et Applications

Soutenu publiquement le 08/07/ 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr A. LARABI	MCA	Université de Tiaret	Président
Mr L.GUEDDA	Pr	Université de Tiaret	Encadreur
Mr A.OUARDANI	MCB	Université de Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciement

Nous en premier lieu remercier notre dieu ALLAH qui nous a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Nous tenons à remercier notre encadreur, ***M L.GUEDDA*** *pour nous avoir proposé le thème de ce mémoire, ses critiques et ces conseils nous ont été précieux.*

Nous remercions également ***M A. LARABI*** *et* ***M A. OUARDANI*** *membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont accordés en acceptant de juger notre travail.*

Merci à tous !

Dédicace

J'offre ce modeste travail : A mes chers parents, ma mère et mon père que dieu leur fasse miséricorde. A mes frères, mes sœurs pour leur encouragement.

*Je dédie aussi ce modeste travail : A tous mes amies, mes camarades, **Saliha, Zahia, Kheira, Roumaissa** et à tous ceux que j'aime et à toutes les personnes qui se sont données la peine de me soutenir durant mon parcours universitaire*

AICHA

Dédicace

Je dédie le fruit de mon humble effort à ceux qui m'ont donné la vie et l'espoir, mes chers parents, que Dieu les protège a ceux qui m'ont aidé et donné de la joie dans ma vie, mes chers frères ***Ramzi, Yassin, Mounir*** *et ma chère sœur* ***Hadjer****. Je dédie aussi à ma tante* ***Bakhta****, qui m'a toujours considérée comme sa fille, à ma tante* ***Fatima****, à toute ma famille, et à ceux avec qui vous avez ouvert la voie du succès dans notre carrière scientifique, mes amis, et enfin à tous ceux qui m'ont aidé depuis de près ou de loin, que Dieu le récompense de la meilleure récompense de ce monde et de l'au-delà, et que Dieu accerde à chacun le succès dans ce qu'il aime satisfait et merci*

SALIHA

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'analyse vectorielle est une branche des mathématiques qui étudie les champs de scalaires et de vecteurs suffisamment réguliers des espaces euclidiens, c'est-à-dire les applications différentiables d'un ouvert d'un espace euclidien E à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans E. Du point de vue du mathématicien, l'analyse vectorielle est donc une branche de la géométrie différentielle.Mais l'importance de l'analyse vectorielle provient de son utilisation intensive en physique et dans les sciences de l'ingénieur. Dans ce cadre, un champ de vecteurs associe à chaque point de l'espace un vecteur (à trois composantes réelles), tandis qu'un champ de scalaire y asocie un réel. Imaginons par exemple l'eau d'un lac. La donnée de sa température en chaque point, un champ de vecteurs (pour une appoche plus théorique, voir géométrie différentielle). Le calcul vectoriel et l'analyse vectorielle furent développés à la fin du xixe siècle par J. Willard Gibbs et Oliver Heaviside à partir de la théorie des quaternions (due à Hamilton) ; la plupart des notations et de la terminologie furent établies par Gibbs et Edwin Bidwell Wilson dans leur livre de 1901, Vector Analysis (Analyse vectorielle).
Ce mémoire est reparti en quatre chapitres.
Le premier chapitre contient définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.
Le deuxième chapitre consacré à la notion d'éléments d'analyse vectorielle.
Le troisième chapitre consacré à la notion des intégrales curvilignes.
Dans le quatrième chapitre nous étudions l'intégrale de surfaces.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

1.1 Introduction à l'intégrale double

([*1*]) *L'intégrale simple sur un intervalle*$[a,b]$ *(avec deux réels* $a < b$*) satisfait aux quatre propriété suivants.*

$*$ ***Longueur***

$$\int_a^b dx = b - a \tag{1.1}$$

$*$ ***Positivité***

$$f \geq 0 sur\, [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \tag{1.2}$$

$*$ ***linéarité***

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{1.3}$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda[\int_a^b f(x)dx], \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

$*$***Additivité par rapport au domaine***

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, a < c < b. \tag{1.5}$$

On a l'analogue pour une intervalle double
Soit D *un domaine bornée de* $\mathbb{R}^2$*, une réunion de rectangle pour fixer les idées on note* $|D|$ *la surface d'un tel domaine, si* D *est le rectangle* $]a,b[\times]c,d[$*, on a*

$$|]a,b[\times]c,d[| = (b-a)(d-c), a < b, c < d. \tag{1.6}$$

On a pour l'intégrale double $\int\int_D f(x,y)dxdy$*(qui est a prions un nombre réel,les quatre propriété qui suivent*
$*$***Surface***

$$\int\int_{]a,b[\times]c,d[} dxdy = (b-a)(d-c), a<b, c<d \tag{1.7}$$

$*$***Positivité***

$$f \geq 0 sur D \Rightarrow \int\int_D f dxdy \geq 0 \tag{1.8}$$

$*$ ***Linéarité***

$$\int\int_D (f+g)dxdy = \int\int_D f dxdy + \int\int_D g dxdy \tag{1.9}$$

$$\int\int_D (\lambda f)dxdy = \lambda \int\int_D f dxdy \tag{1.10}$$

$*$ ***Additivité par rapport au domaine***
On suppose que D *est l'union disjointe de rectangles* $D_j \subset \mathbb{R}^2$*(avec* N *sous-domaines)*

$$D = \bigcup_{j=1}^{N} D_j \tag{1.11}$$

$$k \neq l \Longrightarrow D_k \bigcap D_l = \phi \tag{1.12}$$

alors

$$\int\int_D f dxdy = \sum_{j=1}^{N} \int\int_{D_j} f(x,y)dxdy. \tag{1.13}$$

A partir des hypothèse (1.7) *à* (1.13)*, on peut calculer de nombreuse intégrales doubles.*
On suppose $D =]a,b[\times]c,d[$ *pour fixer les idées ; ou découpe* $]a,b[en N$ *morceaux.*

$$a = x_0 < x_1 = x_0 + \frac{b-a}{N} < ... < x_i = a + i\frac{b-a}{N} < ... < x_N = b \tag{1.14}$$

et $<]c,d[$ *en* M *morceaux :*

$$c = y_0 < y_1 = y_0 + \frac{d-c}{M} < ... < y_j = c + j\frac{d-c}{M} < ... < y_M = d \tag{1.15}$$

on note $D_{i+1/2,j+1/2}$ *le rectangle centré en* $(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2})$ *de cotés* $\frac{b-a}{N}$ *et* $\frac{d-c}{M}$ *:*

$$D_{i+k,j+k} =]x_i, x_{i+1}[\times]y_j, y_{j+1}[, \begin{cases} 0 \leq i \leq N-1 \\ 0 \leq J \leq M-1 \end{cases} \tag{1.16}$$

on a alors

$$]a,b[\times]c,d[=\bigcup_{i=0}^{N-1}\bigcup_{j=0}^{M-1}D_{i+1/2,j+1/2}. \tag{1.17}$$

on a coupé le "grand rectangle "D en " petits rectangles" $D_{i+1/2,j+1/2}$. *on suppose f constante sur chaque* $D_{i+1/2,j+1/2}$ *:*

$$f(x,d)=f_{i+1/2,j+1/2},(x,y)\in D_{i+1/2,j+1/2}, \tag{1.18}$$

est un scalaire connu. ou $f_{i+1/2,j+1/2}$ *comme on a*

$$\left|D_{i+1/2,j+1/2}\right|=\frac{|D|}{NM} \tag{1.19}$$

le calcul complet de $\int_D f$ *conduit à*

$$\int\int_D f dxdy=\frac{|D|}{MN}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{i+1/2,j+1/2}. \tag{1.20}$$

Le calcule de l'intégrale double d'une fonction constante sur chaque petit rectangle n'offre donc pas de difficulté particulier.
C'est la fonction f est" quelconque", de sons continue $\overline{D}\to\mathbb{R}$ *pour fixe les idées, en peut toujours l'approcher par une fonction de la forme*(1.18), *constante sur chaque rectangle* $D_{i+1/2,j+1/2}$.*Cette approximation est de plus en plus précise si N et M sont de plus en plus grands. Dans ce cas, la relation*(1.20) *est encore valable avec le signe d'égalité remplacé par"* $\simeq$ *". Par ailleurs, un travail prouver que l'intégrale double* $\int\int_D f dxdy$ *est un nombre réel qui existe effectivement.*
Si le domaine D a une frontière courbe régulière, en l'approche par un réseau de petits carrés de coté $h>0$. *Les carrés marqués d'une croix, extérieurs à D, contribuent pas aux sommes de la forme* (1.20) *qui permettent un calcule approcher de l'intégrale. Les carrés marqués d'un cercle sont intérieur au domaine D et définissant une approximation intérieur du domaine D (à l'échelle h des petits carrés).*
Les carrés non marqués forment une approximation de la frontière. La réunion de l'approximation intérieur et de l'approximation de la frontière constitue une approximation extérieure du domaine D à l'échelle.
On dispose alors de deux approximations de l'intégrale $\int_D f$ *à l'échelle h, de la forme* (1.20).
L'une avec l'approximation intérieure de D et l'autre avec l' approximation extérieure de D.
Leur différence donne une bonne idée de l'erreur entre ces valeurs approchées

et la valeur exacte de $\int_D f dxdy$.
La positivité (1.8) *conduit à des majorations utiles si* $f : D \to \mathbb{R}$ *est bornée :*

$$\exists M \geq 0, \forall (x,y) \in D, |f(x,y)| \leq M \tag{1.21}$$

alors on a l'estimation.

$$-M\,|D| \leq \int\int_D f dxdy \leq M\,|D|\,. \tag{1.22}$$

$*$ *En effet, on a dans* (1.21), $M - f(x,y)$ *et* $f(x,y) + M$ *sont deux fonctions positives dont l'intégrale sur* D *est positive :*
$\int_D (M-f)dxdy \geq 0, \int_D (f+M)dxdy \geq 0.$
ces inégalités entrainent immédiatement (22)puisque

$$\int\int_D dxdy = |D| \tag{1.23}$$

qui généralise (1.7) *à un domaine quelconque .*
De façon plus générale, au déduit de l'inégalité$-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|$ *l'encadrement* $-\int_D |f\| \leq \int_D f \leq \int_D |f|$, *qui montre que*

$$\left|\int\int_D f dxdy\right| \leq \int\int_D |f(x,y)|\,dxdy. \tag{1.24}$$

Le calcul " analytique " d'une intégrale double est positive grâce ou théorème de Fubini.
Au se donne pour fixer les idées un domaine D *a deux réels* $a < b$,*une fonction continue* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *qu'on suppose strictement positive :* $\varphi(x) > 0$ *si* $a < x < b$
on sait que l'aire $|D|$ *du domaine* D *défini par*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(x)\right\} \tag{1.25}$$

en donné par l'intégrale simple :

$$|D| = \int_a^b \Phi(x)dx. \tag{1.26}$$

Mais cette surface est également donnée par une intégrale double ! on la relation (1.23)*...*
On écrit $\Phi(x)$ *sous la forme* $\Phi(x) = \int_0^{\Phi(x)} dy$.
Alors l'égalité du deux expressions(1.23) *et*(1.26) *pour calculer la surface des domaine* D *peut s'écrire*

$$\int\int_D dxdy = \int_a^b dx \int_0^{\Phi(x)} dy. \tag{1.27}$$

On peu étendre la relation (1.27) *[valable pour la fonction* $f(x,y) \equiv 1$*] aux constantes, aux somme de fonctions, aux fonctions constantes sur une partie des domaines* D*, avec les techniques mes plus haut. En définitive on peut établir la relation suivante*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx[\int_0^{\Phi(x)} dyf(x,y)] \tag{1.28}$$

valable pour tout fonction bornée sur le domaine D*. La relation* (1.28) *en l'une des formes des théorème de Fubini qui permet le calcul effectif d'une intégrale double à l'aide d'intégrales simples. La relation* (1.28) *exprimer qu'on doit d'abord considérer la fonction g(x) à une seule variable définie par l'intégrale à x fixé :*

$$g(x) = \int_0^{\Phi(x)} f(x,y)dy \tag{1.29}$$

Puis on intègre g par rapport à x on le résultat est l'intégrale double cherchée :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx. \tag{1.30}$$

On peut aussi échange le rôle des variables .
si $c < d$ *délimitent le domaine* D*, maintenant décrit avec une fonction* $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ *strictement positive, c'est à dire*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq \psi(y)\right\}, \tag{1.31}$$

la relation (1.28) *devient*

$$\int\int_D fdxdy = \int_c^d dy[\int_0^{\psi(y)} dxf(x,y)] \tag{1.32}$$

pour une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ *bornée. On calcule d'abord* $\widetilde{g}(y)$ *par intégration par rapport à x :*

$$\widetilde{g}(y) = \int_0^{\psi(y)} f(x,y)dx. \tag{1.33}$$

Puis on intègre $\widetilde{g}$ *entre c et d :*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \widetilde{g}(y)dy. \tag{1.34}$$

Le théorème de Fubini exprimé qu'on intègre dans l'ordre que l'on veut, si D est représenté "à la fois" sous la forme (1.25) *et* (1.31)*, c'est à dire de façon générale.*

$$D = \begin{cases} [(x,y), x_{min} \leq x \leq x_{max}\varphi - (x) \leq y \leq \varphi + (x)] \\ [(x,y), y_{min} \leq y \leq y_{max}\psi - (y) \leq x \leq \psi + (x)] \end{cases} \tag{1.35}$$

On a :

$$\int\int_D f dxdy = \begin{cases} \int_{x_{min}}^{x_{max}} dx[\int_{\varphi-(x)}^{\varphi+(x)} dy f(x,y)] \\ \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy[\int_{\psi-(y)}^{\psi+(y)} dx f(x,y)]. \end{cases} \quad . \tag{1.36}$$

Vérifions sur un exemple simple la relation (1.36) *avec* $f \equiv 1$ *et* D *le quart de disque* $D = (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 = y^2 \leq 1.$
$|D| = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$
et $|D| = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy$ *Ces deux intégrales sont bien égale(elle" différent" par le nom de la variable muette) et valent* $\pi/4$

1.2 Intégrales multiples

([2]) *Un sous-ensemble* D *de* $\mathbb{R}^n$ *est appelé un **pavé fermé** (dans* $\mathbb{R}^2$*,on parle de **rectangle fermé**),s'il peut s'écrire sous la forme*

$$D = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$$

où les $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ *sont 2n nombres réels vérifiant pour tout entier* $1 \leq K \leq n : a_k < b_k$.
Nous dirons que $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une famille de pavé fermés quasi disjoints si pour tout couple* $r \neq s$ *:*

$$\mathring{D}_r \cap \mathring{D}_s = \emptyset.$$

Soient $D = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ *un pavé fermé de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : D \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors, le nombre réel*

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(... \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, ..., x_n) dx_1 \right) ... \right) dx_{n-1} \right) dx_n$$

*est appelé l'**intégrale multiple** (si $n = 2$, on parle d'**intégrale double** et si $n = 3$ d'**intégrale triple**) de la fonction f sur le pavé fermé D et est noté $I_D(f)$. Ce nombre ne dépend pas de l'ordre d'intégration. D'autre part, le nombre réel positif $V(D) = I_D(1)$ est appelé le **volume** du pavé fermé D (dans $\mathbb{R}^2$,on parle d'**aire**).*
A présent, soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une famille $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de pavé fermé quasi disjoints dont la réunion est D. De plus, si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée, la série numérique

$$\sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(f)$$

*est absolument convergente et sa somme est indépendante de la famille $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ choisie. Par définition, cette somme est appelée l'**intégrale multiple**(si $n = 2$, on parle d'**intégrale double** et si $n = 3$ d'**intégrale triple**) de la fonction f sur D et on écrit*

$$I_D(f) = \int \ldots \int_D f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(f).$$

*D'autre part, le nombre $V(D) = I_D(1)$ est appelé le **volume** de D (dans $\mathbb{R}^2$, on parle d'**aire**).*
Par convolution : Si $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné et $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on pose

$$\int \ldots \int_{\overline{D}} f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n = \int \ldots \int_D f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n.$$

*Maintenant, supposons que $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un **recouvrement régulier** de $\mathbb{R}^n$ (sect. 4.3) et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, si la suite $(I_{D_k}(f))$ converge aussi et sa limite est indépendante du choix du recouvrement régulier de $\mathbb{R}^n$ considéré. Par définition, cette limite est appelée l'**intégrale multiple** (si $n = 2$, on parle d'**intégrale double** et si $n = 3$ d'**intégrale triple**) de la fonction*

f sur $\mathbb{R}^n$ et on écrit

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n = \lim_{k\to+\infty} I_{D_k}(f).$$

Pour finir, notons que tous les résultats obtenus concernant les intégrale doubles restent valables pour les intégrales multiples.

Changements de variables particuliers dans $\mathbb{R}^3$

1) Pour les coordonnées cylindriques

$\begin{cases} x = \varphi(\rho,\theta,z) = \rho\cos\theta \\ y = \psi(\rho,\theta,z) = \rho\sin\theta \\ z = \theta\phi(\rho,\theta,z) = z, \end{cases}$ $, \rho \in \mathbb{R}, \theta \in [-\pi,\pi]$ *et on a* $\dfrac{D(\varphi,\psi,\phi,)}{D(\rho,\theta,z)}(\rho,\theta,z) = \rho.$

*2) Pour les **coordonnées sphériques***

$\begin{cases} x = \varphi(\rho,\theta,\gamma) = \rho\sin\gamma\cos\theta \\ y = \psi(\rho,\theta,\gamma) = \rho\sin\gamma\sin\theta \\ z = \theta\phi(\rho,\theta,\gamma) = \rho\cos\gamma, \end{cases}$ $, \rho \in \mathbb{R}, \gamma,\theta \in [-\pi,\pi]$ *et on a* $\dfrac{D(\varphi,\psi,\phi,)}{D(\rho,\theta,\gamma)}(\rho,\theta,\gamma) = \rho^2\sin\gamma.$

CHAPITRE 2

ÉLÉMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE

2.1 Rappels

Produit scalaire est un nombre réel
$\boldsymbol{A.B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|\cos(\boldsymbol{A,B})$
Propriété : $\boldsymbol{A.B} = 0$ *si* $\boldsymbol{A}$ *orthogonal à* $\boldsymbol{B}$
Exemple : le travail d'une force $dW = \boldsymbol{F.dOM}$ *(moteur ou résistant selon signe)*
Produit vectoriel est un vecteur
$\boldsymbol{A}\Lambda\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$ *est orthogonal à* $\boldsymbol{A}$ *et à* $\boldsymbol{B}$
$\|\boldsymbol{A}\Lambda\boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|\,|\sin(A,B)|$ = *surface du parallélogramme* (A,B)
Propriété : $\boldsymbol{A}\Lambda\boldsymbol{B} = 0$ *si* $\boldsymbol{A}$ *colinéaire à* $\boldsymbol{B}$
Règles mnémoniques d'orientation du produit vectoriel et de calcul par duplication des deux premières lignes et produits en croix

$$\begin{bmatrix} A_xB_x \\ A_yB_y \\ A_zB_z \\ A_xB_x \\ A_yB_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{bmatrix}$$

dérivées partielles

Si $f(x, y, z)$ est un champ scalaire, ses dérivées partielles par rapport aux variables spatiales x, y, z (coordonnées d'un point M) sont notées avec des $\ll \partial$ronds $\gg$: $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z$
$\rightarrow \partial f/\partial x$ est la dérivée de $f(x, y, z)$ par rapport à x en gardant y et z constants
$\rightarrow$ <u>différentielle</u> $df = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy + (\partial f/\partial z dz) =$ ***grad f .doM***

2.2 Opérateurs différentiels

V désigne un champ scalaire, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, et A désigne un champ de vecteurs, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. ∇ est le vecteur symbolique

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

2.3 Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes

La base est $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ (elle ne dépend pas du point choisi),

$$A = A_x\overrightarrow{u_x} + A_y\overrightarrow{u_y} + A_z\overrightarrow{u_z}.$$

***Gradient** :*

$$\overrightarrow{grad}V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z}.$$

***Divergence** :*

$$div(A) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

***Rotationnel** :*

$$\overrightarrow{rot}(A) = \nabla \wedge A$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z}.$$

Laplacien :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

2.4 Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

La base est $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, (\overrightarrow{e_z})$*(les deux premiers vecteurs dépendent du point), et*

$$A = A_r\overrightarrow{e_r} + A_\theta\overrightarrow{e_\theta} + A_z\overrightarrow{e_z}.$$

Gradient :

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z}.$$

Divergence :

$$div(A) = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Rotationnel :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}(A) = &\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r}\\ &+ \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}.\end{aligned}$$

Laplacien :

$$\begin{aligned}\Delta V =& \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\ =& \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

2.5 Opérateurs différentiels en coordonnées sphériques

La base est $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, (\overrightarrow{e_\phi})$ *(les vecteurs dépendent du point), et*

$$A = A_r\overrightarrow{e_r} + A_\theta\overrightarrow{e_\theta} + A_\phi\overrightarrow{e_\phi}.$$

Gradient :

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\overrightarrow{e_\phi}.$$

Divergence :

$$div(A) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}.$$

Rotationnel :

$$\overrightarrow{rot}(A)$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{e_\phi}$$

Laplacien :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}.$$

2.6 Composition des opérateurs différentiels

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(V) = \vec{0} div(\overrightarrow{rot}(A)) = 0$$

$$div(\overrightarrow{grad}(V)) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}A = \overrightarrow{grad}(divA) - \Delta A$$

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ M = \Delta M$$

2.7 Formules de Leibniz pour les produits

$$\overrightarrow{grad}(V_1V_2) = V_1\overrightarrow{grad}(V_2) + V_2\overrightarrow{grad}(V_1)$$

$$\overrightarrow{rot}(VA) = V\overrightarrow{rot}(A) + \overrightarrow{grad}V \wedge A$$

$$div(VA) = V\,div(A) + \overrightarrow{grad}V \cdot A$$

$$div(A_1 \wedge A_2) = A_2 \cdot \overrightarrow{rot}(A_1) - A_1 \cdot \overrightarrow{rot}(A_2)$$

$$\Delta(U \cdot V) = U\Delta V + 2\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ U \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ V + V\Delta U$$

$$\mathrm{div}(U\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ V - V\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ U) = U\Delta V - V\Delta U$$

CHAPITRE 3

INTÉGRALES CURVILIGNES

([3])

3.1 L'intégrale curviligne de première espèce

3.1.1 Longueur d'un élément différentiel de courbe

1. Le cas des équations paramétriques Dans le plan supposons que les coordonnées x et y soient des fonctions continument dérivables de la variable t .On s'intéresse à l'arc de courbe formé des points $M(x;y)$ tels que

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{ou } t \text{ varie de } t_1 \text{ à } t_2 \text{ avec } t_1 < t_2.$$

Une variation infinitésimale de t provoque alors des variations infinitésimales de x et y et on peut assimiler la longueur dI de l'élément différentiel de courbe correspondant à la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les cotés de l'angle droit sont dx et dy ...

$$dI = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t).dt)^2 + (y'(t).dt)^2}$$

Si on a bien pris la précaution de ranger les valeurs de t en croissant ,alors on a $dt > 0$ et on en déduit :

$$dI = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.dt$$

Exemple : Supposons que $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - t + t^2 \end{cases}$ on a alors (avec $dt > 0$) :

$$dI = \sqrt{4t^2 + (2t-1)^2}.dt = \sqrt{8t^2 - 4t + 1}.dt$$

Si la courbe est plongée dans l'espace ,au lieu de deux coordonnée on en utilise trois... ce qui ne change rien à la méthode :

$$dI = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.dt$$

2. Le cas des équation cartésiennes Dans le plan supposons que la coordonnée y soit une fonction continument dérivable de la variable x. On s'intéresse à l'arc de courbe formé des points $M(x, y)$ tels que $y = f(x)$ ou x varie de x_1 à x_2 avec $x_1 < x_2$.
Dans ces conditions on a $dy = f'(x).dx$ et par conséquent $dI = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ devient :

$$dI = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.dx$$

ce cas ne se généralise pas aisément à l'espace ...
3. Le cas des équations polaires
Dans le plan supposons que la distance à l'origine r soit une fonction continument dérivable de l'angle polaire θ. On s'intéresse à l'arc de courbe formé des points $M(x, y)$ tels que $r = f(\theta)$ou θ varie de θ_1 à θ_2.
Dans ces condition on a $\begin{cases} x = r.\cos(\theta) \\ y = r.\sin(\theta) \end{cases}$ ... sans oublier que r est une fonction continument dérivable de θ. On en déduit $\begin{cases} dx = (r'.\cos(\theta)) - r.\mathrm{si} \\ dy = (r'.\sin(\theta) + r.\mathrm{cos} \end{cases}$

et par conséquent :
$dI = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ *devient...*

$$dI = \sqrt{r^2 + r'^2}.d\theta$$

ce cas ne se généralise pas aisément à l'espace...

3.1.2 Longueur d'un arc de courbe

L'application de la méthode de Riemann donne immédiatement la méthode pour calculer la longueur d'un arc de courbe : on le partage en éléments infinitésimaux et on somme les longueurs de ces éléments pour obtenir la longueur de l'arc.
Si l'arc de courbe va du point A au point B on le note AB et on a :

$$Longueur(AB) = \int_{AB} dI$$

Suivant le cas, dI s'exprime en utilisant comme variable descriptive t, ou x ou θ... et l'intégrale à calculer est une intégrale simple (c'est à dire avec une seule variable, mais pas forcément facile !)

3.1.3 Densité linéïque de masse, masse d'un fil matériel

a. Définition de la densité

Soit un point M sur un fil matériel. On appelle Δm la masse d'un tronçon de fil contenant M et ΔI la longueur de ce tronçon... Il est clair que si $\Delta I \to 0$ alors $\Delta m \to 0$. dans ces conditions, le quotient $\frac{\Delta m}{\Delta I}$, formé de deux termes qui tendent vers 0, est indéterminé : il peut posséder une limite et si cette limite existe elle représente alors la densité de masse au point M. Si li fil est homogène, la densité de masse est la même partout et s'exprime en unité de masse par unité de longueur, par exemple en kg/m ou en g/cm... Si le fil n'est pas homogène, parce que sa composition n'est pas la même partout ou parce que sa section *n'est pas résultat n'est plus une constante, il dépend de l'endroit observé sur le fil.*

b. Masse d'un tronçon de fil...

La position d'un point sur la courbe étant définie par la valeur de t, ou x ou θ... suivant le cas, la densité linéïque en ce point est fonction de la seule variable qui sert à décrire la courbe. Si on note μ la densité de masse, la masse d'un tronçon de fil infinitésimal qui entoure le point M est $dm = \mu.dI$ et en appliquant la méthode de Riemann, on obtient la masse d'un tronçon de fil AB grâce à une intégrale :

$$Masse(AB) = m = \int_{AB} dm = \int_{AB} \mu.dI$$

***Exemple** :*

Sur un fil matériel suivant la courbe d'équation $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$ *où t varie de 0 à π, la densité au point de paramètre t est* $1 + t^2$. *Quelle est la masse du fil ?* $\mu(t) = 1 + t^2; dI = dt; dm = (1 + t^2).dt; m = \int_{AB}(1 + t^2).dt = \int_0^{\pi}(1 + t^2).dt = \frac{\pi}{3}.(1 + \pi^2)$

3.1.4 Modélisation abstraite

cette intégrale permet de modéliser aussi bien les calcule de longueur d'une courbe que ceux de masse d'une fil non homogène , de charge électrique d'un fil ou la densité de charge est variable ,et plus généralement de « somme d'information » le long d'une trajectoire .

a. Dans le cas d'une courbe plane

Soient x et y deux variables indépendantes , est μ une fonction continue de x et y .

Si la courbe AB, formée des pointe $M(x, y)$, est lisse c'est à dire sans « rupture » ni « courbe » on définit l'intégrale curviligne de μ le long de AB par $\int_{AB} \mu(x, y).dI = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

b. Dans le cas d'une courbe non-plane (on dit « gauche »

Soient x, y et z trois variables intégrale indépendante, et μ une fonction continue de x, y et z.

Si la courbe AB, formée des points $M(x, y, z)$, est lisse c'est à dire sans « rupture » ni « coude » on définit l'intégrale curviligne de μ le long de AB par $\int_{AB} \mu(x, y, z).dI$ ou $dI = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

3.2 L'intégrale curviligne de deuxième espèce

3.2.1 Rappel sur la notion de travail

Une force constante $\overrightarrow{F}$ qui se déplace de d sur une trajectoire rectiligne dirigée par $\overrightarrow{F}$ produit un travail w tel que $w = \|\overrightarrow{F}\|.d$: cette notion est abordée dans le cours de physique de 3^{me}.
Si la force $\overrightarrow{F}$ fait un angle constantα avec la trajectoire, le travail devient $w = \|\overrightarrow{F}\|.d.\cos(\alpha)$ c'est à dire $w = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{d}$ ... où on retrouve un produit scalaire : cette notion est développée dans le cours de physique de 2^{nde}.
Tout le problème consiste à généraliser au cas ou la force est variable en fonction de la position et la trajectoire n'est pas droit.

3.2.2 Travail lors d'un déplacement différentiel

a. Dans le plan (coordonnées x et y)

Un déplacement différentiel dI a pour coordonnées dx et dy, le champ de forces $\overrightarrow{F}$ a pour coordonnées P et Q(fonction de x et y) le travail produit en déplaçant $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{d}I$ est alors dw tel que $dw = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{d}I$.

b. Dans l'espace

Un déplacement différentiel $\overrightarrow{d}I$ a pour coordonnées dx, dy et dz, le champ de forces $\overrightarrow{F}$ a pour coordonnées P, Q et R(fonctions de x, y et z) le travail produit en déplaçant $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{d}I$ est alors dw et on a encore $dw = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{d}I$

3.2.3 Travail d'un champ de forces le long d'un arc de courbe

Soit un champ de force $\overrightarrow{F}$ défini en tout point d'un domaine contractile et dont les coordonnées (P et Q ou bien P, Q et R) sont des fonctions continues des variables de position (x et y ou bien x, y et z).
Soit dans ce même domaine un arc de courbe d'origine A et d'extrémité B tel que, en tout point on puisse définir le vecteur tangent (on dit que l'arc de courbe est « lisse »).
Le travail du champ de forces $\overrightarrow{F}$ effectué en parcourant l'arc de courbe AB de A vers B est le résultat de l'intégrale $\int_{AB} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{d}I$, c'est à dire : $w = \int_{AB} dw = \int_{AB} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{d}I$.
Lorsque le travail est positif on dit qu'il est globalement moteur et lorsqu'il est négatif on dit qu'il est globalement résistant.

3.2.4 Généralisation : circulation d'un champ

Le champ peut être un champ électrique ou magnétique, ce peut aussi être un champ de vitesses (par exemple, vitesse d'un fluide en chaque point)... et on peut reproduire le même type de calcul sans que l'interprétation en terme de travail soit pertinente.
Si $\overrightarrow{E}$ désigne un champ défini en tout point d'un domaine contractile et dont les coordonnées (P et Q ou bien P, Q et R) sont des fonctions continues des variables de position (x et y ou bien x, y et z), si on a dans ce même domaine un arc de courbe lisse d'origine A et d'extrémité B, alors on appelle circulation du champ $\overrightarrow{E}$ le long de l'arc de courbe AB le résultat de l'intégrale $\int_{AB} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d}I$.

3.3 Formes exactes et intégrales curvilignes

3.3.1 Intégral d'une forme exacte

Soit ω une forme exacte dans un domaine contractile et C un arc de courbe lisse contenu dans ce domaine, on peut alors écrire $\omega = df$ si bien que $\int_C \omega = \int_C df = [f]_A^B = f(B) - f(A)$.

On constant que cette intégrale dépend du point initial et du point final mais pas du tout du trajet entre ces deux point : si la courbe proposée est trop compliquée pour calculer l'intégrale, on peut la simplifier en la remplaçant par une courbe plus simple (un seul segments de droite allant « directement » du point de départ au point d'arrivée ou bien des segments de droites parallèles aux axes...)

3.3.2 Forme exacte et courbe fermée

Soit ω une forme exacte dans un domaine contractile et C un arc de courbe lisse et fermé contenu dans ce domaine. On peut alors écrire que $\int_C \omega = \int_C df = [f]_A^A = f(A) - f(A) = 0$.
L'intégrale d'une forme exacte le long d'une courbe lisse et fermée est toujours nulle.

3.4 Propriétés

3.4.1 Réunion de deux courbes

Si δ est une forme différentielle, pas forcément exacte, et si la courbe lisse C est telle que $C = AB$ et$E \in AB$ alors on a

3.4.2 Linéarité

Si δ_1 et δ_2 sont des formes différentielle, pas forcément exactes, et si α et β sont deux coefficients réels, on a :

$\int_C \alpha\delta_1 + \beta\delta_2 = \alpha \int_C \delta_1 + \beta \int_C \delta_2$.

3.4.3 Exemples

1.Calcul de la longueur de l'astroïde d'équation $\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$ *où on admet que la courbe est fermée et constituée de quatre parties de même longueur comme le montre le dessin ci-contre.*
On trouve $dI = \frac{3}{2}.\left|\sin(2t)\right|.dt$ *et on obtient la longueur d'un quart d'astroïde en intégrant :* $\frac{1}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dI = ... = \frac{3a}{2}$ *d'où la longueur totale :* $I = 6a$.
2. Calcul de la circulation Circ. de $\overrightarrow{V}\binom{3x}{x+y}$ *le long du cercle de centre* O *et de rayon 1 parcouru dans le sans direct.*
On décrit le cercle par $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$ *où le paramètre varie de 0 à* 2π.
On obtient $Circ. = \int_0^{2\pi} 3x.dx + (x+y).dy = \int_0^{2\pi}(x+y).dy$ *car* $3x.dx$ *est une forme exacte et la courbe est fermée.*
On termine le calcul : $Circ. = \int_0^{2\pi}(x+y).dy = \int_0^{2\pi}(\cos(t) + \sin(t)).\cos(t).dt = \pi$
3. Calcul du travail W *de la force* $\overrightarrow{F}\begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix}$ *le long de l'hélice* H *d'équation* $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases}$ *décrite en faisant varier le paramètre de 0 à* $\frac{\pi}{4}$.
On remarque que la forme à intégrer est la différentielle de xyz... donc... $W = \frac{\pi}{8}$.

CHAPITRE 4
INTÉGRALE DE SURFACES

([4])

4.1 Surfaces paramétrées

Définition 4.1.1. *Une surface paramétrée dans l'espace , cela consiste à se donner trois fonctions définies sur un domaine D du plan,*

$$(u, v) \mapsto s(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

On supposera toujours que les fonctions $(u, v) \mapsto x(u, v), (u, v) \mapsto y(u, v), (u, v) \mapsto z(u, v)$ admettent des dérivées partielles continues.

Définition 4.1.2. *Plan tangent. Lorsque les vecteurs*

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} et \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants, le plan qu'ils engendrent est le plan tangent à la surface au point $s(u, v)$. En effet, ce plan contient

le vecteur vitesse de toute courbe tracée sur la surface et passant par ce point.
Leur produit vectoriel

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)$$

est un vecteur normale à la surface au point $s(u,v)$. Il est orthogonal au vecteur vitesse de toute courbe tracée sur la surface et passant par ce point.
Le vecteur unitaire

$$V(u,v) = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)}{\left|\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)\right|}$$

s'appelle la normale orientée au point $s(u,v)$.

Exercice 4.1.1. *On utilise les coordonnées latitude-longitude sur la sphère unité.*

$$s(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \phi \in [-\pi,\pi].$$

Quel est le vecteur unitaire normale déterminé par la paramétrisation ?

Solution*.* *On calcule*

$$\frac{\partial s}{\partial \theta}\wedge\frac{\partial s}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^2\theta\cos\phi \\ -\cos^2\theta\sin\phi \\ -\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} = -\cos\theta s(\theta,\phi)$$

Comme $\cos\theta > 0, V(\theta,\phi) = -s(\theta,\phi)$ est la normale rentrant dans la boule.

4.2 Aire

4.2.1 Rappel de géométrie euclidienne

Le produit scalaire de deux vecteurs $\omega = (x, y, z)$ *et* $\omega' = (x', y', z')$ *est* $\omega \cdot \omega' = xx' + yy' + zz'$*.Il est nul si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux. Il satisfait* $\omega \cdot \omega' + \omega'' = \omega \cdot \omega' + \omega \cdot \omega''$ *et* $\omega \cdot \omega = |\omega|^2$.
Le produit vectoriel de deux vecteurs $\omega = (x, y, z)$ *et* $\omega' = (x', y', z')$ *est* $\omega \wedge \omega' = (yz' - y'z, -xz' + x'z, xy' - x'y)$*. Il est nul si et seulement si les vecteurs sont colinéaires. Il satisfait* $\omega \wedge (\omega' + \omega'') = \omega \wedge \omega' + \omega \wedge \omega''$ *et* $\omega \wedge \omega' = -\omega' \wedge \omega$*. Si* ω *et* ω' *sont orthogonaux, alors* $|\omega \wedge \omega'| = |\omega| \, |\omega'|$.

4.2.2 Aire des parallélogrammes

L'aire d'un parallélogramme est le produit de la base par la hauteur. En voici une expression vectorielle. Si les sommets du parallélogramme sont 0, a*,* b *et* $a + b$*, alors*

$$aire = |a \wedge b| \,.$$

En effet, soit c *la projection de* b *sur la droite engendrée par* a*, i.e.* c *est colinéaire à* a *et* $b - c$ *et orthogonal à* a*. Alors* $|a \wedge b| = |a \wedge (b - c)| = |a| \, |b - c| = base \times hauteur$.

4.2.3 Heuristique

Si $(u, v) \mapsto s(u, v)$ *est une surface paramétrée, l'image d'un rectangle de sommets* (u, v) *et dont les cotés* δu *et* δv *sont très petits est approximativement un parallélogramme construit sur les vecteurs* $\frac{\partial s}{\partial u}(u, v)\delta u$ *et* $\frac{\partial s}{\partial v}(u, v)\delta v$*, donc son aire est voisine de*

$$\left| \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right| \delta u \delta v.$$

Cela motive la définition suivante.

Définition 4.2.1. *L'aire d'un surface paramétrée est donnée par l'intégrale double*

$$aire = \int_D \left| \frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) \right| dudv.$$

Exercice 4.2.1. *Calculer l'aire du triangle de sommets* $a = (1,0,0), b = (0,-1,2)$ *et* $c = (0,2,1)$.

Solution. *On utilise la paramétrisation* $s(u,v) = a + u(b-a) + v(c-a)$ *où* $u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1$. *On calcule*

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) = (b-a) \wedge (c-a) = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Sa norme est constante est vaut $\sqrt{35}$. *On l'intègre sur un triangle d'aire* $\frac{1}{2}$, *donc l'aire cherchée vaut* $\sqrt{35}/2$.

Exercice 4.2.2. *Calculer l'aire de la sphère de centre* 0 *et de rayon* R, *en utilisant les coordonnées latitude-longitude*

$$s(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ R\sin\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Solution. *On calcule*

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\phi \\ -R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\phi \\ R\cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\cos^2\theta\cos\phi \\ -R^2\cos^2\theta\sin\phi \\ -R^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$$

dont la norme vaut $R^2\cos\theta$. *Par conséquent*

$$aire = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\theta d\theta = 4\pi R^2.$$

4.2.4 Invariance

Théorème 4.2.1. *L'aire ne dépend pas du choix de paramétrage.*

Preuve. *Changer de paramétrage, c'est remplacer (u, v) par (u', v') qui sont fonction inversible de u et v. D'après la formule de dérivation des fonction composées, le nouveau paramétrage $s_1(u', v') = s(u, v)$ satisfait*

$$\frac{\partial s_1}{\partial u'} = \frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'}, \frac{s_1}{v'} = \frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'}.$$

Il vient

$$\frac{\partial s_1}{\partial u'} \wedge \frac{\partial s_1}{\partial v'} = \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial u'})$$

et on conclut avec la formule de changement de variable dans les intégrales doubles.

4.3 Flux

4.3.1 Motivation

Étant donné un fluide en mouvement dans l'espace, sa vitesse est un champ de vecteurs w. La quantité de matière qui, pendant une unité de temps, traverse un morceau de surface S, est proportionnelle à l densité volumique, à l'aire de S, à l'intensité de la vitesse, mais dépend aussi de la direction de la vitesse : elle est proportionnelle à la projection de la vitesse sur la normale à S. Il faut préciser si on s'intéresse au flux sortant ou rentrant, d'où la nécessité d'orienter S.

4.3.2 Orientation

Définition 4.3.1. *Oriente une surface, c'est choisir en chaque point l'un des vecteurs unitaires orthogonaux au plan tangent, de* *façon continue. Une paramétrisation d'une surface détermine une orientation, donnée par*

$$v = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}}{\left|\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\right|}$$

Définition 4.3.2. *Soit $(x, y, z) \mapsto w(x, y, z)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. Soit S une surface orientée par un choix de normale unitaire v. Le flux de w à travers S est l'intégrale*

$$flux(w, S) = \int_D w \cdot v dA$$

où dA désigne l'élément d'aire.

Remarque 4.3.1. *Soit $(u, v) \mapsto s(u, v), (u, v) \in D$, une paramétrisation de la surface compatible avec l'orientation choisie. Le flux du champ w à travers la surface S est donné par l'intégrale double*

$$flux = \int_D w(s(u,v)) \cdot \frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) du dv.$$

Exercice 4.3.1. *Calculer le flux du champ de vecteurs $w(x, y, z) = (x, y, 0)$ à travers la sphère unité orientée par la normale rentrante.*

Solution. *Comme les coordonnées latitude-longitude déterminent la normale rentrante,*

$$w(s(\theta,\phi))\cdot(\frac{\partial s}{\partial \theta}(\theta,\phi))\wedge\frac{\partial s}{\partial \phi}(\theta,\phi)) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos^2\theta\cos\phi \\ -\cos^2\theta\sin\phi \\ -\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} = -\cos^3\theta,$$

et on intègre

$$\begin{aligned} flux(w,S) &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3\theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -(\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos(3\theta))d\theta \\ &= 2\pi\left[\frac{3}{4}\sin\theta + \frac{1}{12}\sin(3\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Le signe moins provient du fait que la normale rentrante fait un angle obtus avec W.

4.3.3 Invariance

Théorème 4.3.1. *Le flux ne dépend pas du choix du paramétrage de la surface, seulement de son orientation. Changer d'orientation change le signe du flux.*

Preuve. *Cela résulte de la définition en fonction de la normale et de l'élément d'aire. On peut aussi le prouver directement. Voir la preuve de l'invariance de l'aire, à ceci près que le signe a maintenant de l'importance. Changer de paramétrage sans changer l'orientation, C'est remplacer (u,v) par (u',v') qui sont fonction inversible de u et v sans changer la normale orientée. C'est le cas si et seulement si le déterminant jacobien est positif. Comme c'est la valeur absolue du jacobien qui intervient dans la formule de changement de variable, tout va bien. Si le déterminant jacobien est négatif(changement d'orientation), il est égal à l'opposé de sa valeur absolue, d'où un changement de signe pour le flux.*

4.3.4 Angle solide

Définition 4.3.3. *On appelle angle solide d'une surface vue d'un point p le flux à travers cette surface du champ de vecteurs w_p défini en tout point $q \neq p$ par*

$$w_p(q) = \frac{q-p}{|q-p|^3}.$$

Remarque 4.3.2. *Ce champ radial est proportionnel au champ électrique d'une charge ponctuelle placée en p.*

Exercice 4.3.2. *Toute sphère centrée en p avu de p un angle solide égal à 4π.*

Sous-Solution. *Le long de la sphère de rayon R centrée en $p, w_p \cdot v = R^{-2}$. Or l'aire de la sphère est $4\pi R^2$.*

4.4 Lien entre intégrale de surface et intégrale triple

Définition 4.4.1. *Soit w un champ de vecteurs défini sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$ et possédant des dérivées partielles continues. Sa divergence est la fonction*

$$div(w) = \nabla \cdot w = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

Exercice 4.4.1. *Vérifier qu'un champ de vecteurs constant a une divergence nulle. Pour un champ de vecteurs linéaire $w(p) = Ap$, la divergence est constant et égale à la trace de la matrice A, $trace(A) = \sum a_{ii}$.*

4.4.1 Formule d'Ostrogradsky

Théorème 4.4.1. *Soit S une surface fermée qui délimite un domaine U de $\mathbb{R}^3$. Soit w un champ de vecteurs défini sur U, qui* *possèdent des dérivées partielles continues. On paramètre S de sorte que le vecteur normal $\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}$ pointe vers l'extérieur de U. Alors*

$$\int\int\int_U div(w)dxdydz = flux(w,s).$$

Proposition 4.4.1. *. Pour simplifier, on suppose U convexe. Soit D_x sa projection orthogonale sur le plan $\{x = 0\}$. Alors*

$$U = \{(y,z) \in D_x; f_2(y,z) \leq x \leq f_1(y,z)\}.$$

On calcule

$$\int\int\int_U \frac{\partial w_x}{\partial x} dxdydz = \int\int_{D_x} (w_x(f_2(y,z),y,z))dydz = flux(w_1,S)$$

où w_1 désigne le champ de vecteurs de composante $(w_x, 0, 0)$. De même,

$$\int\int\int_U \frac{\partial w_y}{\partial_x} dxdydz = flux(w_2,S)$$

où $w_1 = (0, w_y, 0)$ et

$$\int\int\int_U \frac{\partial w_z}{\partial z} dxdydz = flux(w_3,S).$$

Comme $w = w_1 + w_2 + w_3$, on trouve la forme annoncée.

Corollaire 4.4.1. *Soit w un champ de vecteurs défini sur un convexe D de $\mathbb{R}^3$, qui possède des dérivée partielles continues. Supposons que w a une divergence nulle. Alors le flux de w à travers toute surface fermée contenue dans D est nul.*

Exercice 4.4.2. *Utiliser le champ de vecteurs $w(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ de l'exercice 3.3 pour calcule le volume de la boule unité B.*

Solution. *On calcule $div(w) = 2$. On orient la sphère unité S par la normale sortante. La formule d'Ostrogradsky donne*

$$\begin{aligned} 2vol(B) &= \int\int\int_B div(w)dxdydz \\ &= Flux(w,S) \\ &= \frac{8\pi}{3}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le résultat de l'exercice 3.3, *en tenant compte du changement d'orientation.*

Exercice 4.4.3. *Soit w_p le champ de vecteurs radial qui sert à définir l'angle solide vu de p. Vérifier que sa divergence est nulle (en dehors de p). En déduire que son flux à travers le bord d'un domaine est nul ou vaut 4π suivant que la boule contient ou non le point p.*

Solution. *Le calcule de la divergence est immédiat. Soit U un domaine de $\mathbb{R}^3$. Si U ne contient pas p, le théorème d'Ostrogradski s'applique, et le flux de w_p à travers le bord de U est nul. Sinon, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(p,r)$ soit entièrement contenue dans U. Soit $U' = U$ privé de cette boule. Alors le théorème d'Ostrogradsky s'applique dans U' : le flux de w_p à travers le bord de U' est nul. Le bord de U' est constitué du bord de U et du bord de la boule $B(p,r)$ muni de la normale pointant vers le point p. Par conséquent*

$$flux(w, \partial U) = flux(w, \partial B(p,r))$$

qui vaut 4π.

4.4.2 Fluides incompressibles

Considérons un fluide en mouvement dans l'espace. Soit w son champ des vitesses et p sa densité volumique. Le bilan de matière entrant et sortant d'un domaine D est égal au flux du champ de *vecteurs pw à travers le bord ∂D. D'après la formule d'Ostrogradsky, le bilan de matière entrant et sortant d'un domaine D infiniment petit est donné par la divergence de pw. Si le fluide est incompressible, le bilan doit être nul. Par conséquent, la condition $div(pw) = 0$ caractérise l'incompressibilité.*

4.5 Lien entre intégrale curviligne et intégrale de surface

On ne donnera pas de définition rigoureuse d'une surface à bord. Les exemples types sont
- *un demi-plan ;*
- *une hémisphère ;*
- *une portion de cylindre (partie courbe du bord d'une boite de conserve).*

On indique seulement la convention qui fait qu'une orientation de la surface détermine une orientation de son bord.

Définition 4.5.1. *Soit S une surface orientée dont le bord est noté ∂S. Le paramétrage du bord doit être choisi de sorte que lorsqu'un observateur marche sur S (i.e. la normale orientée va de ses pieds à sa tête) le long de ∂S, la surface S se trouve sur sa gauche.*

Exercice 4.5.1. *Soit K la boite de conserve définie par les inégalités $x^2 + y^2 \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1$. Soit S la partie cylindrique du bord de K. On l'oriente par la normale pointant vers l'extérieur de K. Vérifier que l'orientation induite sur la partie du bord de S contenue dans le plan $\{z = 0\}$ est le sens trigonométrique.*

Solution. *Au point $p = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, la normale sortant de K est p. L'observateur qui marche dans le sens trigonométrique, i.e. des θ croissants, a son bras gauche dirigé comme le vecteur $(0, 0, 1)$, qui pointe bien vers S.*

Théorème 4.5.1. *(Formule de Stokes). Soit S une surface orientée dont le bord est noté ∂S. Soit w un champ de vecteurs défini sur un voisinage de S, possédant des dérivées partielles continues. Alors*

$$flux(rot(w), S) = circulation(w, \partial S).$$

Preuve. *dans le cas particulier où S est l'image d'une application s définie sur un domaine D du plan (le cas général s'y ramène en découpant la surface). On se ramène à la formule de Green-Riemann. On pose*

$$P(u, v) = w(s(u, v)) \cdot \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) et Q(u, v) = w(s(u, v)) \cdot \frac{\partial s}{\partial v}(u, v).$$

Alors

$$circulation(w, s \circ c) = \int_c P du + Q dv.$$

On vérifie par le calcul (en utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée) que

$$\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} = rot(w) \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}$$

et on applique la formule de Green-Riemann à la forme $Pdu+Qdv$ dans le domaine D.

Corollaire 4.5.1. *Soit S une surface sans bord (e.g. la sphère). Soit w un champ de vecteurs défini au voisinage de S, possédant des dérivées partielles continues. Alors le flux de* rot(w) *à travers S est nul.*

Corollaire 4.5.2. *Soit w un champ de vecteurs défini sur un domaine U de $\mathbb{R}^3$ et possédant des dérivées partielles continues. On suppose que son rotationnel est nul. Soit c une courbe fermée qui borde une surface contenue dans U. Alors la flux de* rot(w) *à travers S est nul.*

Exercice 4.5.2. *On considère le champ de vecteurs w défini en dehors de l'axe $0z$ par*

$$w(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c'est le champ magnétique induit par un fil rectiligne infini). Vérifier que $rot(w) = 0$ en dehors de l'axe Oz. En déduire que la circulation de w le long de toute courbe fermée ne rencontrant pas l'axe Oz est égale à 2π fois le nombre de tours que la courbe fait autour de l'axe Oz.

Solution. *Le calcul de $\mathrm{rot}(w)$ est immédiat.*
Soit $t \mapsto c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe fermée ne rencontrant pas l'axe $0z$. Alors sa projection orthogonale $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ sur le plan $\{z = 0\}$ est une courbe fermée ne passant pas par l'origine. La surface paramétrée

$$(s,t) \mapsto (x(t), y(t), sz(t))$$

(portion de cylindre) a son bord fermé des deux courbes c et σ parcourue en sens inverse. Comme cette surface est contenue dans un domaine où $rot(w) = 0$, la circulation de w le long du bord est nulle. Par conséquent,

$$circulation(w,c) = circulation(w,\sigma).$$

Ensuite, on remarque que w est tangent au plan $\{z = 0\}$. La circulation de w le long d'une courbe de ce plan coïncide avec l'intégrale curviligne de la forme $d\theta$. Par conséquent, $\mathrm{circulation}(w,\sigma)$ est la variation totale de l'angle polaire le long de σ, qui vaut 2π fois le nombre de tours que σ fait autour de l'origine. Ce nombre coïncide avec le nombre de tours que c fait autour de l'axe Oz.

Remarque 4.5.1. *Courant et champ magnétique.*
En présence de courants, le champ magnétique a un rotationnel

non nul. Son rotationnel est, à une constante physique près (perméabilité du milieu), la densité de courant. Intégrée sur une surface S, la densité de courant donne le courant électrique (i.e. la quantité de charge par unité de temps) qui traverse la surface. La formule de Stokes relie donc le courant à la circulation du du champ magnétique le long du bord de S.

4.6 Opérateurs différentiels

Proposition 4.6.1. *On a introduit 3 opérateurs différentiels,*
$fonction \xrightarrow{gradient}$ *champs de vecteurs* $\xrightarrow{rotationnel}$ *champs de vecteurs* $\xrightarrow{divergence} fonctions$
Chaque fois qu'on compose deux opérateurs consécutifs, on trouve 0. Autrement dit

$$rot \circ grad = 0, div \circ rot = 0.$$

Preuve.

$$(rot \circ grad)V = \nabla \wedge \nabla V = 0, (div \circ rot)w = \nabla \cdot (\nabla \wedge w) = det(\nabla, \nabla, w) = 0.$$

4.6.1 Champs de vecteurs dérivant d'un potentiel

Théorème 4.6.1. *Le rotationnel d'un gradient est automatiquement nul. Inversement, soit w un champ de vecteurs défini sur un domaine convexe U de $\mathbb{R}^3$, qui possède des dérivée partielle continues. Supposons que w a une divergence nulle. Alors il existe une fonction V définie sur U telle que $w = -\nabla V$.*

4.6.2 Condition pour être un rotationnel

Théorème 4.6.2. *La divergence d'un rotationnel est automatiquement nulle. Inversement, soit w un champ de vecteurs défini sur un domaine convexe U de $\mathbb{R}^3$, qui possède des dérivée partielle continues. Supposons que w a une divergence nulle. Alors il existe un champ de vecteurs w' défini sur U tel que $rot(w') = w$.*

4.6.3 Laplacien

Définition 4.6.1. *L'opérateur Laplacien prend une fonction à valeurs réelles et retourne une fonction à valeurs réelles. Il est donné par la formule*

$$\Delta = div \circ grad = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Corollaire 4.6.1. *Soit u une fonction sur un domaine D qui possède des dérivées secondes continues. Alors*

$$\int_D \Delta u dx dy dz = flux(\nabla u, \partial D).$$

Exercice 4.6.1. *Soit u le potentiel électrostatique induit par une distribution de charges contenue dans un corps K. Montrer que le flux du champ électrique à travers le bord d'un domaine qui contient K ne dépend pas de ce domaine (théorème de Gauss).*

Solution. *Le champ électrique est $E = \nabla V$ où V est le potentiel électrique. D'après a loi de Poisson, à une constante physique près (constante diélectrique du milieu), $\Delta V = -div(E)$ est la densité de charge, nulle en dehors de K par hypothèse. Soit U un domaine de $\mathbb{R}^3$ contenant K. On applique le corollaire à $U' = U$ privé de K. On trouve que le flux du champ électrique E à travers le bord de U' est nul, donc que le flux de E à travers le bord de $> U$ est égal au flux à travers le bord de K, qui ne dépend pas du choix de U.*

CONCLUSION

En conclusion, l'introduction à l'analyse vectorielle nous a permis de comprendre les concepts fondamentaux et les outils mathématique utilisés pour étudier les phénomènes physiques et géométriques dans un espace multidimensionnel. Nous avons exploré les notions de vecteurs, de champs vectoriels, de champs scalaires, de dérivées partielles et de l'opérateur gradient.

L'analyse vectorielle trouve des applications importantes dans de nombreux domaines scientifiques et techniques. Par exemple, elle est utilisée en physique pour étudier le mouvement des particules dans un champ de force, l'écoulement des fluides et les lois de l'électromagnétisme.

En résumé, l'analyse vectorielle est une branche essentielle des mathématiques qui joue un rôle central dans de nombreux domaines scientifiques et techniques. Elle fournit des méthodes et des concepts fondamentaux pour modéliser et comprendre les phénomènes naturels, ce qui en fait un outil précieux pour les chercheurs, les ingénieurs et les scientifiques travaillant dans diverses disciplines.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Saint Denis, automne(2014), cours d'analyse vectorielle. Introduction à l'intégrale double. Puis, 24 out 2013.

[2] B. Jacques Douchet.Analyse. Recueil d'exercices et aide-mémoire vol.2. Presses polytechniques et universitaires romandes.

[3] C. IUT Orsay.cours du Mesures Physiques. Intégrales curvilignes.

[4] D. P.Pansu. INTÉGRALE DE SURFACES. 01 Novembre 2004.

[5] E. K. Arbenz – A. Wohlhauser, Complements d'Analyse, PPUR, 1981.

[6] F. S. D. Chatterji, Cours d'Analyse 1, Analyse vectorielle, PPUR, 1997

[7] G. E. Kreyszig, Advanced engineering mathematics, Sixth edition, Wiley, 1988.

[8] H. N. PISKOUNOV. Calcul Différentiel et Intégral. Première Partie - Tome 2 - Première partie. Troisième Edition. OPU. 2010.

[9] I. M. H. Protter – C. B. Morrey, A First Course in Real Analysis, Springer-Verlag, First edition, 1977.