



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle et équations différentielles »

Présenté Par :
Fergani Imene
Hassaine Ibtissam

Sous L'intitulé :

**La méthode de différences finies pour approximer
les dérivées fractionnaires**

Soutenu publiquement le 25/06/2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. BENIA kheiriddine

MCB Université de Tiaret

Président

Mme. SABIT souhila

MCA Université de Tiaret

Encadreur

Mme. BOUAZZA zoubida

MCB Université de Tiaret

Examineur

Année universitaire :2022/2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

و صلى الله على صاحب الشفاعة سيدنا محمد النبي الكريم، و على آله و صحبه أجمعين

و من تبعهم بإحسان إلى يوم الدين أما بعد:

أهدي ثمرة جهدي المتواضع إلى من وهبوني الحياة و الأمل، و النشأة على شغف الإطلاع و المعرفة، و من علموني أن أصعد سلم الحياة بحكمة و صبر، برا و إحسانا و وفاء لهما:

"والدي العزيز و والدي العزيزة".

إلى من وهبني الله نعمة وجودهم في حياتي، رفاق دربي و سندي، إخوتي:

"زكرياء، إبراهيم و آية".

إلى من تحلين بالإخاء و تميزن بالوفاء و العطاء و إلى من برفقتهن في دروب الحياة السعيدة و الحزينة
سرت، و سلطنا طريق العلم معا:

"صديقتي الحبيبات".

إلى كل من علمني حرفا في مشواري الدراسي، إلى كل أساتذتي من المرحلة الابتدائية إلى الجامعية، و أخص بالذكر من كانت كلماتهم و تعاملهم دافعا لأخوض في درب هذا التخصص و أكون خير خليفة لهم
بإذن الله:

"الأستاذ مجاهري سمير" حفظه الله و "الأستاذ بن سهيلة مصطفى" رحمة الله عليه.

إلى كل من ساعدني و ساندني و كان له دور من قريب أو من بعيد في إتمام هذه الدراسة سائلة المولى
عز و جل أن يجزي الجميع خير جزاء في الدنيا و الآخرة.

و في الأخير إلى كل طالب علم سعى بعلمه ليفيد الإسلام و المسلمين بكل ما أعطاه الله من علم و معرفة.

الطالبة: حساين ابتسام.



Dédicaces

Tout d'abord, je dédie ce modeste travail à :

L'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que Dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

*La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ;
maman que j'adore.*

Mes chères et adorables sœurs (Sara, Hadjer, Wahiba et Halima).

Mon frère.

Toute ma famille de loin ou de près.

Mes meilleurs amis.

Tous mes collègues de ma promotion.

Tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant mes études.

Imène...

Remerciements

*Tout d'abord, nos remerciements vont aux **ALLAH** qui nous a éclairé le chemin du savoir et de nous avoir donné le bon sens et la grande volonté pour réaliser ce modeste travail.*

*Nous tenons à remercier notre encadreur, **Mme.SABIT SOUHILA**, qui a supervisé notre travail tout en nous laissant une grande marge de liberté, nous le remercions pour son encadrement, sa disponibilité et la pertinence de ses remarques tout au long de la réalisation de ce projet.*

*Nous remercions également le président du jury **Mr.BENIA KHEIRREDINE** , et l'examineur **Mme.BOUAZZA ZOUBIDA** d'avoir accepté d'évaluer ce travail.*

Nous voulons, à cette occasion avec le plus grand honneur, remercier sincèrement tous nos enseignants. Enfin, nous tenons à exprimer nos sincères gratitudeux aux les personnes qui ont vraiment contribué à l'élaboration de la présente de cet mémoire.

Nous espérons que ce travail aura la valeur souhaitée.

Merci à tous !

Table des matières

Table des matières	2
1 Préliminaire	6
1.1 Fonctions basiques en calcul fractionnaire	6
1.1.1 La fonction gamma	6
1.1.2 La fonction bêta	6
1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler	7
1.2 L'espace $X_c^p(\Omega)$	8
1.3 L'espace L^p	8
1.4 L'espace C^m	9
1.5 Fonction absolument continue	9
1.6 La méthode du trapèze [1]	9
1.7 Théorème de Fubini	9
2 Dérivées et intégrales fractionnaires	10
2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	10
2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	11
2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	11
2.4 Relation de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo avec la dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville	12
2.5 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov	12
2.6 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard	13
2.7 L'intégrale fractionnaire au sens de Katugampola	14
2.8 La dérivée fractionnaire au sens de katugampola	14
2.9 Propriétés des dérivées fractionnaires	14
2.9.1 Linéarité	14
2.9.2 Non-commutativité	15
2.9.3 Règle de Leibniz	15
2.9.4 Intégration par parties	15
3 La méthode des différences finies	17
3.1 La formule de Taylor [2]	17
3.1.1 Approximation de dérivée première de f par les différences finies en avant avec trois points	17
3.1.2 Approximation de la dérivée deuxième de f par les différences finies en avant avec trois points	18
3.1.3 Approximation de la dérivée deuxième de f par les différences finies en arrière avec trois points	18
3.1.4 Approximation de la dérivée deuxième de f par les différences finies en centre avec trois points	18
3.2 Le principe de la méthode des différences finies	19
3.3 Approximation de dérivée fractionnaire au sens de Caputo par la méthode des différences finies [7]	19

3.4	Approximation de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville par la méthode des différences finies	20
3.5	Approximation de la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard	21
3.6	Approximation de la dérivée fractionnaire de Caputo-Katugampola	22
3.7	Approximation de la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov	23
4	Applications numériques	28
4.1	Pour la dérivée au sens de Caputo	28
4.2	Pour la dérivée au sens de Riemann-Liouville	32
4.3	Pour la dérivée au sens de Caputo-Hadamard	35
4.4	Pour la dérivée au sens de Caputo-Katugampola	38
4.5	Pour la dérivée au sens de Grünwald-Letnikov	42
	Table des figures	46
	Liste des tableaux	47
	Bibliographie	49

Introduction

Aujourd'hui, les équations différentielles d'ordre non entier attirent l'attention de nombreux chercheurs en raison d'un large éventail d'application dans plusieurs domaines de la science telle que la physique, la biologie, l'ingénierie et la finance.

Généralement, on ne peut pas trouver la solution exacte de ces équations et on doit donc utiliser des méthodes numériques.

Plusieurs méthodes numériques ont été développées comme la méthode des différences finie fractionnaires.

Dans ce mémoire, nous présentons cette méthode pour trouver la solution approchée les dérivées fractionnaires.

Ce mémoire est composé à 4 chapitres.

Nous rassemblons dans le chapitre 1 les définitions utilisés dans la suite de travail.

Au chapitre 2 on définit les intégrales et les dérivées fractionnaires et ses propriétés.

Le chapitre 3 est consacré à la méthode de différences finis.

Enfin, on applique dans le dernier chapitre la méthode de différences finis sur les dérivées choisit dans le deuxième chapitre pour approximer les dérivées fractionnaires et une conclusion à la fin .

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Fonctions basiques en calcul fractionnaire

1.1.1 La fonction gamma

La fonction gamma est une fonction complexe qui prolonge la fonction factorielle sur l'ensemble des nombres complexes [5]. L'introduction de la fonction gamma dans l'analyse était due à Euler en 1729 sur la base des découvertes faites par des mathématiciens (Wallis, Stirling, Goldbach et Daniel Bernoulli) dans leurs études précédentes [3].

Définition 1.1. [5]

$\forall x \in \mathbb{C}$ tq $\operatorname{Re}(x) > 0$, la fonction gamma (notée par Γ) est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Propriétés 1.1. [5]

1. La propriété la plus importante de la fonction Γ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\text{car } \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-e^{-t} t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

3. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty$ et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

4. Γ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $x \in]0, 1]$.

1.1.2 La fonction bêta

La fonction bêta est l'une des fonctions utilisées dans le domaine de calcul fractionnaire. Elle était développée par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1772 [2].

Définition 1.2. [4]

$\forall p, q \in \mathbb{C}$ tq $\operatorname{Re}(p) > 0$ et $\operatorname{Re}(q) > 0$, la fonction bêta (notée par β) est définie par :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

Remarque 1.1.

Les deux fonctions précédentes sont liées par la relation suivante [4] :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Démonstration 1.1. [8]

On a :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1} dx dy,$$

on fait le changement de variable $x + y = r$, on pose $x = wr$, donc : $0 \leq r < +\infty$ et $0 \leq w < +\infty$, $dr = dx + dy$, $dx = wdr + rdw$, $dy = dr - wdr + rdw = (1-w)dr + rdw$ donc $dx dy = rdw dr$ il s'en suit :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^1 w^{p-1} (1-w)^{q-1} dw \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{p+q-1} dr = \beta(p, q)\Gamma(p+q).$$

$$\text{D'où : } \beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Propriétés 1.2.

$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2$ tq $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$, on a les propriétés suivantes :

1. La symétrie : la fonction β est symétrique i.e $\beta(p, q) = \beta(q, p)$, on peut la démontrer avec le changement de variable $u = 1 - t$.
2. Il y a une autre formule de la fonction β : $\beta(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}(\theta) \cos^{2q-1}(\theta) d\theta$.
3. $\beta(p, q+1) = \frac{q}{p} \beta(p+1, q)$.
4. $\beta(p, n+1) = \frac{n}{p(p+1)(p+2)(p+3) \cdots (p+n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentielle et se décline en deux types : la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre a été formulée en 1903 par le mathématicien Leffler et la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres a été formulée en 1953 par le même mathématicien. Toutes les informations de cette section sont tirées de [2].

Définition 1.3.

La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre :

La fonction de Mittag-Leffler était définie pour la première fois par le développement en série suivant :

$$E_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(ak+1)} \quad \forall a > 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Théorème 1.1.

La fonction de Mittag-Leffler $E_a(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{C}$.

Définition 1.4.

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres :

La fonction de Mittag-Leffler à deux variables a été introduite par Agarwal et elle est définie comme suite :

$$E_{a,b}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(ak+b)} \quad \forall a, b > 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Propriétés 1.3.

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres a de nombreuses propriétés importantes, parmi les quelles nous mentionnons les suivantes :

$$1. E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

$$2. E_{a,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(ak+1)} = E_a(x).$$

$$3. E_{1,b}(x) = \frac{1}{x^{b-1}} \left(e^x - \sum_{k=0}^{b-2} \frac{x^k}{k!} \right).$$

$$4. E_{a,b}(x) = \frac{1}{\Gamma(b)} + x E_{a,a+b}(x).$$

Théorème 1.2. [7, 10]

1. $\forall x \in \mathbb{C}$ tq $|x| < 1$, la fonction de Mittag-Leffler est définie par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{b-1} E_{a,b}(tx) dt = \frac{1}{x-1}.$$

2. $\forall x \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler est convergente.

3. La dérivée entière de la fonction de Mittag-Leffler est donnée par :

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[x^{b-1} E_{a,b}(x^a) \right] = x^{b-n-1} E_{a,b-n}(x^a), \quad b-n > 0.$$

4. L'intégrale de la fonction de Mittag-Leffler est donnée par la relation suivante :

$$\int_0^x t^{b-1} E_{a,b}(\theta t^a) dt = x^b E_{a,b+1}(\theta x^a).$$

1.2 L'espace $X_c^p(\Omega)$

Définition 1.5.

On désigne par $X_c^p(\Omega)$ ($c \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$) l'espace des fonctions Lebesgue mesurables définie sur Ω tel que :

$$\int_{\Omega} |t^c f(t)|^p dt < \infty,$$

alors

$$\|f\|_{X_c^p} = \left(\int_{\Omega} |t^c f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty),$$

et

$$\|f\|_{X_c^p} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} (x^c |f(x)|), \quad p = +\infty.$$

1.3 L'espace L^p

Définition 1.6.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω un ensemble mesurable, f une fonction mesurable sur Ω à valeurs réelles ou complexe et $1 \leq p \leq \infty$. On dit que $f \in L^p(\Omega)$ si :

Pour $1 \leq p < \infty$:

$$\left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right) < \infty,$$

et

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$: Il existe $c > 0$ tq :

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| < c.$$

1.4 L'espace C^m

Définition 1.7.

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. f est de classe C^m si seulement si f est m fois dérivables sur I et $f^{(m)}$ est continue.

1.5 Fonction absolument continue

Définition 1.8.

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite absolument continue si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $]a_k, b_k[\subset]a, b]$, $k = 1..n$ contenus dans $[a, b]$ alors

$$\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta \implies \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

L'espace des fonctions absolument continues noté par $AC(\Omega)$.

1.6 La méthode du trapèze [1]

Cette méthode est basée sur l'interpolation de chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k-1}]$ par un polynôme de degré 1. Sur chaque $[x_k, x_{k-1}]$, la fonction f est continue et dérivable sur $[a, b]$ elle est substituée par la droite joignant les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. La méthode du trapèze est donnée par :

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$

1.7 Théorème de Fubini

Théorème 1.1.

Soit f une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ à valeurs dans \mathbb{C} , alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Chapitre 2

Dérivées et intégrales fractionnaires

Les intégrales sont l'inverse des dérivées et peuvent être considérées comme des dérivées d'ordre (-1). Le début de dérivées fractionnaires remonte à diverses correspondances entre Gottfried Leibniz, Guillaume de l'hôpital et Johann Bernoulli a la fin du dix-septième siècle pour généraliser les dérivées entières.

2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.1.

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, ou b pouvant être fini où infini. On sait qu'une primitive de f s'annule en a est donnée comme suite [2] :

$$I_a^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

La primitive seconde est :

$$I_a^2 f(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t) dt \right) ds,$$

d'après le théorème de Fubini, on peut écrire

$$I_a^2 f(t) = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

De même, on a :

$$I_a^3 f(t) = \int_a^t (I_a^2 f(s)) = \frac{1}{2} \int_a^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau.$$

Donc par récurrence, on obtient

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau.$$

Définition 2.2. (Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville [2])

$$I_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

Remarque 2.1.

La formule (2.1) est une généralisation de la n-ième primitive avec un ordre de primitive α non entier.

Exemple 1.

Fonction constante

Si la fonction $f(t) = c \in \mathbb{R}$ est une constante, alors par la relation (2.1), l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f est donnée par :

$$I_a^\alpha c = {}^{RL}D_a^{-\alpha} c = \frac{c}{\Gamma(\alpha + 1)}(t - a)^\alpha.$$

2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.3. [2]

Soit $f \in L^1[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f de borne inférieure a est définie par :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f(\tau) d\tau \\ &= D^n (I_{a+}^{n - \alpha} f(t)). \end{aligned}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ est dérivée d'ordre entier $n = [\alpha] + 1$.

Remarque 2.2.

Si $\alpha < 0$, on convient de prendre $D_{a+}^\alpha f(t) = I_{a+}^{-\alpha} f(t)$.

Remarque 2.3.

Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite D_{0+}^α par D^α .

Exemple 2.

Fonction constante : Si on prend $f(t) = c$ alors la dérivée au sens de Riemann-Liouville de f est donnée par :

$${}^{RL}D_a^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1 - \alpha)}(t - a)^{-\alpha}.$$

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.4. [2]

Soient $f \in C^m([a, b])$ et $m - 1 < \alpha < m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α de la fonction f est définie par :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} f^{(m)}(\tau) d\tau.$$

Exemple 3.

Fonction constante : La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante $f(t) = c$ est nulle ${}^C D_a^\alpha c = 0$.

2.4 Relation de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo avec la dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville

Théorème 2.1.

Si ${}^C D_a^\alpha f(t)$ et ${}^{RL} D_a^\alpha f(t)$ existent, alors on a

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-a}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

Remarque 2.4.

On déduit que :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right).$$

Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \dots, m-1$, alors on a ${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t)$.

Proposition 2.1. *Nous avons :*

1.

$$\begin{aligned} {}^{RL} D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{f(a)}{(t-a)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + {}^C D_a^\alpha f(t). \end{aligned}$$

2. Si $f \in C([a, b])$ alors : ${}^C D_a^\alpha [I_a^\alpha f(t)] = f(t)$.

3. Si $f \in C^m([a, b])$ alors : $I_a^\alpha [{}^C D_a^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$.

2.5 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

Définition 2.5. [2]

La dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'ordre α de f est définie par :

$${}^{GL} D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh), \quad (2.2)$$

où $0 < n-1 < \alpha < n$.

Définition 2.6. [2]

La dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'ordre $-\alpha$ de f est définie par :

$${}^{GL} I^\alpha f(t) = {}^{GL} D^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh), \quad (2.3)$$

où $0 < n-1 < \alpha < n$.

• On peut écrire ${}^{GL} D^\alpha f(t)$ de (2.2) et ${}^{GL} I^\alpha f(t)$ de (2.3) sous la forme :

$${}^{GL} D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

et

$${}^{GL} I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

- Soient $m - 1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^*$ et les fonctions $f^{(k)}(t), (k = 1, 2, \dots, m)$ sont continues sur l'intervalle fermé $[a, t]$, alors par des intégrations par parties de (2.4) et (2.5) on a :

$${}^{GL}D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau,$$

et

$${}^{GL}D_a^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau.$$

Remarque 2.1.

La relation entre la dérivée de Caputo et la dérivée de Grünwald-Letnikov est :

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + {}^C D_a^\alpha f(t) \end{aligned}$$

Exemple 4.

Fonction constante

Soit $f(t) = c$ (c est un constant) et α non entier, on a $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, m$ et donc :

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}}_0 + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau}_0 \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

2.6 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard

Définition 2.7.

Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$ et $f \in AC_\delta^m$. La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard à gauche d'ordre α de la fonction f est :

$$\begin{aligned} {}^{CH}D_{a^+}^\alpha &= I_{a^+}^{n-\alpha} \delta^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \log\left(\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} \left(\tau \frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (t > a). \end{aligned}$$

La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard à droite d'ordre α de la fonction f est :

$$\begin{aligned} {}^{CH}D_{b^-}^\alpha f(t) &= (-1)^n I_{b^-} \delta^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(\log\left(\frac{\tau}{t}\right)\right)^{n-\alpha-1} \left(\tau \frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (t < b). \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$${}^{CH}D_{a^+}^\alpha f(t) = \delta^n f(t),$$

et

$${}^{CH}D_{b^-}^\alpha f(t) = (-1)^n \delta^n f(t).$$

2.7 L'intégrale fractionnaire au sens de Katugampola

Définition 2.8.

Soit $\rho > 0$, l'intégrale fractionnaire de Katugampola d'ordre $\alpha > 0$ est définie comme suit [4] :

$${}^{\rho}I_{a+}^{\alpha}f(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^{\rho} - \tau^{\rho})^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a.$$

Cette formule est de l'intégrale à gauche. De même manière, l'intégrale de Katugampola à droite est définie par :

$${}^{\rho}I_{b-}^{\alpha}f(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau^{\rho} - t^{\rho})^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau, \quad t < b.$$

Théorème 2.2.

Soient $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq +\infty$. L'opérateur ${}^{\rho}I_{a+}^{\alpha}$ est borné dans $X_c^p(a, b)$:

$$\|{}^{\rho}I_{a+}^{\alpha}f\|_{X_c^p} \leq k \|f\|_{X_c^p} \quad \rho \geq c,$$

tq :

$$k = \frac{b^{\alpha\rho-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{b}{a}} u^{c-\alpha\rho-1} \left(\frac{u^{\rho}-1}{\rho}\right)^{\alpha-1} du.$$

2.8 La dérivée fractionnaire au sens de katugampola

La dérivée fractionnaire de katugampola d'une fonction f à gauche d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :

$$({}^{\rho}D_{a+}^{\alpha}f)(t) = \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \circ ({}^{\rho}I_{a+}^{n-\alpha}f)(t) = \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-1)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{\tau^{\rho-1} f(\tau)}{(t^{\rho} - \tau^{\rho})^{\alpha-n+1}} d\tau \quad t > a.$$

La dérivée fractionnaire de Katugampola à droite d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction f est définie par :

$$({}^{\rho}D_{b-}^{\alpha}f)(t) = \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \circ ({}^{\rho}I_{b-}^{n-\alpha}f)(t) = \frac{(-1)^n f^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b \frac{\tau^{\rho-1} f(\tau)}{(\tau^{\rho} - t^{\rho})^{\alpha-n+1}} d\tau \quad t < b.$$

Proposition 1.

$${}^{\rho}D_{0+}^{\alpha}t^{\lambda} = \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma(1 + \frac{\lambda}{\rho})t^{\lambda-\alpha\rho}}{\Gamma(1 - \alpha + \frac{\lambda}{\rho})} \quad \forall \alpha, \rho > 0 \quad \lambda > -\rho.$$

2.9 Propriétés des dérivées fractionnaires

Nous présentons quelques propriétés des dérivées fractionnaires où D^{α} désigne n'importe quelle approche de dérivations fractionnaire d'ordre α .

2.9.1 Linéarité

Proposition 2.

Soit $n - 1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et soient f et g deux fonctions telles que $D^{\alpha}f(t)$ et $D^{\alpha}g(t)$ existent alors : la dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha}f(t) + \mu D^{\alpha}g(t).$$

Démonstration 2.1.

Pour la dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α ($n - 1 \leq \alpha < n$), on a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{\mu}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} g(\tau) d\tau \\ &= \lambda {}^{RL}D_a^\alpha f(t) + \mu {}^{RL}D_a^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Alors ce qui termine la démonstration.

2.9.2 Non-commutativité

La dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en générale.

Proposition 3.

On suppose que $n - 1 < p, q < n, n \in \mathbb{N}^*, p, q \in \mathbb{R}$ et soit la fonction f telles que $Df(t)$ existe, alors :

$$D^p D^q f(t) \neq D^q D^p f(t).$$

2.9.3 Règle de Leibniz

La règle de Leibniz est utilisé pour calculer la dérivée n-ième du produit de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, on a pour tout entier n :

$$\frac{d^n}{dt^n} (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

On obtient une généralisation de cette formule par remplacer l'entier n par un paramètre réel p , dans le membre à droite à la formule précédente :

$$D^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{\alpha-k} g(t) - R_n^\alpha(t), \quad n \geq \alpha + 1,$$

où

$$R_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!} \Gamma(-\alpha) \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\varsigma) (\tau - \varsigma)^n d\varsigma,$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^\alpha(t) = 0.$$

Si toutes les dérivées de f et g sont continues sur $[a, t]$, alors la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire s'écrit sous la forme :

$$D^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{\alpha-k} g(t),$$

où D^α désigne la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov ou au sens de Riemann-Liouville.

2.9.4 Intégration par parties

La formule d'intégration par parties pour les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.3.

Si $0 < \alpha < 1$ et $a < t < b$, alors :

$$\int_a^t [{}^{RL}D_a^\alpha f(s)]g(s)ds = \int_a^t f(s)[{}^{RL}D_a^\alpha g(s)]ds.$$

Démonstration 2.2.

On a :

$$\begin{aligned} \int_a^t [{}^{RL}D_a^\alpha f(s)]g(s)ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{d}{ds} \left(\int_a^s (s-u)^{-\alpha} f(u)du \right) g(s)ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\int_a^s (s-u)^{-\alpha} f(u)du \right) g'(s)ds \\ &\quad + \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} g(s) \int_a^s (s-u)^{-\alpha} f(u)du \right]_{s=a}^{s=t} \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\int_u^t (s-u)^{-\alpha} g'(s)ds \right) f(u)du \\ &\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{-\alpha} f(u)du \\ &= \int_a^t f(u) \left[{}^{RL}D_u^\alpha g(u) - g(t) \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] du \\ &\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{-\alpha} f(u)du \\ &= \int_a^t f(u) [{}^{RL}D_a^\alpha g(u)] du \\ &= \int_a^t f(s) [{}^{RL}D_a^\alpha g(s)] ds. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. La formule d'intégration par parties pour les dérivées fractionnaires au sens de Caputo est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 2.4.

Soient $0 < \alpha < 1$ et $a < t < b$, alors :

$$\int_a^t [{}^C D_a^\alpha f(s)]g(s)ds = \int_a^t f(s)[{}^C D_a^\alpha g(s)]ds + g(t) {}^{RL}D_a^{-(1-\alpha)} f(t) - f(a) {}^{RL}D_a^{-(1-\alpha)} g(a).$$

Démonstration 2.3.

On a :

$$\begin{aligned} \int_a^t [{}^C D_a^\alpha f(s)]g(s)ds &= \int_a^t [{}^{RL}D_a^{-(1-\alpha)} f(s)]g(s)ds - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (s-a)^{-\alpha} g(s)ds \\ &= \int_a^t f(s) [{}^{RL}D_s^{-(1-\alpha)} g(s)]ds - f(a) {}^{RL}D_a^{-(1-\alpha)} g(a) \\ &= \int_a^t f(s) [{}^C D_s^{-(1-\alpha)} g(s)]ds + \frac{g(t)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds \\ &\quad - f(a) {}^{RL}D_a^{-(1-\alpha)} g(a) \\ &= \int_a^t f(\tau) [{}^C D_s^\alpha g(s)]ds + g(t) {}^{RL}D_a^{-(1-\alpha)} f(t) - f(a) {}^{RL}D_a^{-(1-\alpha)} g(a). \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

Chapitre 3

La méthode des différences finies

3.1 La formule de Taylor [2]

Soit f une fonction $(n + 1)$ dérivable sur $[a, b]$, pour tout $x_0 \in [a, b]$, il existe ξ entre x et x_0 tq :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots + \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

On pose :

$$R(\xi) = \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!},$$

donc :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{d^2f}{dx^2}(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx^3}(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots + \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + R(\xi). \quad (3.1)$$

3.1.1 Approximation de dérivée première de f par les différences finies en avant avec trois points

On pose $x_j = x_0 + jh$ dans (3.1). Si $x = x_{j+1}$ et $x_0 = x_j$, alors :

$$\begin{aligned} f(x_{j+1}) &= f(x_j) + f'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + f''(x_j)\frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + f'''(\xi_1)\frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{3!} \\ &= f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2!}f''(x_j) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Si $x = x_{j+2}$ et $x_0 = x_j$, alors :

$$\begin{aligned} f(x_{j+2}) &= f(x_j) + f'(x_j)(x_{j+2} - x_j) + f''(x_j)\frac{(x_{j+2} - x_j)^2}{2!} + f'''(\xi_2)\frac{(x_{j+2} - x_j)^3}{3!} \\ &= f(x_j) + 2hf'(x_j) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x_j) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(\xi_2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

On multiplie (3.2) par (-4) , après on ajoute le résultat à (3.3), on trouve :

$$f'(x_j) = \frac{-3f(x_j) + 4f(x_{j+1}) - f(x_{j+2})}{2h} - \frac{2h^2}{3!}f'''(\xi_1) + \frac{4h^2}{3!}f'''(\xi_2). \quad (3.4)$$

Donc l'erreur est :

$$erreur = -\frac{2h^2}{3!}f'''(\xi_1) + \frac{4h^2}{3!}f'''(\xi_2) = O(h^2).$$

3.1.2 Approximation de la dérivée deuxième de f par les différences finies en avant avec trois points

Si $x = x_{j+1}$ et $x_0 = x_j$, alors :

$$\begin{aligned} f(x_{j+1}) &= f(x_j) + f'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + f''(x_j) \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + f'''(\xi_1) \frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{3!} \\ &= f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2!} f''(x_j) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si $x = x_{j+2}$ et $x_0 = x_j$, alors :

$$\begin{aligned} f(x_{j+2}) &= f(x_j) + f'(x_j)(x_{j+2} - x_j) + f''(x_j) \frac{(x_{j+2} - x_j)^2}{2!} + f'''(\xi_2) \frac{(x_{j+2} - x_j)^3}{3!} \\ &= f(x_j) + 2hf'(x_j) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_j) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(\xi_2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

En multipliant (3.5) par (-2) et on fait la somme avec (3.6), on aura :

$$f''(x_j) = \frac{f(x_j) - 2f(x_{j+1}) + f(x_{j+2}))}{h^2} + \frac{2h}{3!} f'''(\xi_1) - \frac{8h}{3!} f'''(\xi_2).$$

Donc l'erreur est :

$$erreur = \frac{2h}{3!} f'''(\xi_1) + \frac{8h}{3!} f'''(\xi_2) = O(h).$$

3.1.3 Approximation de la dérivée deuxième de f par les différences finies en arrière avec trois points

Si $x = x_{j-1}$ et $x_0 = x_j$, alors :

$$\begin{aligned} f(x_{j-1}) &= f(x_j) + f'(x_j)(x_{j-1} - x_j) + f''(x_j) \frac{(x_{j-1} - x_j)^2}{2!} + f'''(\xi_1) \frac{(x_{j-1} - x_j)^3}{3!} \\ &= f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2!} f''(x_j) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si $x = x_{j-2}$ et $x_0 = x_j$, on a d'après (3.1) :

$$\begin{aligned} f(x_{j-2}) &= f(x_j) + f'(x_j)(x_{j-2} - x_j) + f''(x_j) \frac{(x_{j-2} - x_j)^2}{2!} + f'''(\xi_2) \frac{(x_{j-2} - x_j)^3}{3!} \\ &= f(x_j) + 2hf'(x_j) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_j) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(\xi_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

En multipliant (3.7) par (-2), après on fait la somme avec (3.8), on trouve :

$$f''(x_j) = \frac{f(x_{j-2}) - 2f(x_{j-1}) + f(x_j))}{h^2} - \frac{2h}{3!} f'''(\xi_1) + \frac{8h}{3!} f'''(\xi_2), \quad (3.9)$$

et

$$erreur = -\frac{2h}{3!} f'''(\xi_1) + \frac{8h}{3!} f'''(\xi_2) = O(h).$$

3.1.4 Approximation de la dérivée deuxième de f par les différences finies en centre avec trois points

Si $x = x_{j+1}$ et $x_0 = x_j$, alors :

$$\begin{aligned} f(x_{j+1}) &= f(x_j) + f'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + f''(x_j) \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + f'''(\xi_1) \frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{3!} + f''''(\xi_2) \frac{(x_{j+1} - x_j)^4}{4!} \\ &= f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2!} f''(x_j) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_j) + \frac{h^4}{4!} f''''(\xi_1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Si $x = x_{j-1}$ et $x_0 = x_j$, alors :

$$\begin{aligned} f(x_{j-1}) &= f(x_j) + f'(x_j)(x_{j-1} - x_j) + f''(x_j) \frac{(x_{j-1} - x_j)^2}{2!} + f'''(\xi_1) \frac{(x_{j-1} - x_j)^3}{3!} + f''''(\xi_2) \frac{(x_{j-1} - x_j)^4}{4!} \\ &= f(x_j) - hf'(x_j) + \frac{h^2}{2!} f''(x_j) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_j) + \frac{h^4}{4!} f''''(\xi_2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

On ajoute (3.10) à (3.11), on trouve :

$$f''(x_j) = \frac{f(x_{j-1}) - 2f(x_j) + f(x_{j+1}))}{h^2} - \frac{h^2}{4!} f''''(\xi_1) - \frac{h^2}{4!} f''''(\xi_2), \quad (3.12)$$

et

$$\text{erreur} = -\frac{h^2}{4!} f''''(\xi_1) - \frac{h^2}{4!} f''''(\xi_2) = O(h^2).$$

3.2 Le principe de la méthode des différences finies

Le principe de cette méthode est exposé dans les lignes suivantes :

On suppose que l'intervalle $[a, b]$ est subdivisé en n sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ de longueur $h = \frac{b-a}{n}$, en utilisant les noeuds également espacés $x_k = a + kh$ pour $k=0, 1, \dots, n$ [2, 7]. La règle trapézoïdale composite pour n sous-intervalles nous permette d'écrire :

$$T(f, h) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)], \quad (3.13)$$

et

$$\int_a^b f(x) dx \approx T(f, h). \quad (3.14)$$

3.3 Approximation de dérivée fractionnaire au sens de Caputo par la méthode des différences finies [7]

On a :

$${}^C D^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{y'(t)}{(t-x)^\alpha} dx,$$

tq : $0 < \alpha < 1$ et $t \geq 0$.

En intégrant par partie, on trouve :

$${}^C D^\alpha y(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left(y'(0)t^{1-\alpha} + \int_0^t (t-x)^{1-\alpha} y''(x) dx \right).$$

On a l'approximation de y en point t_i

$${}^C D^\alpha y(t_i) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left(y'(0)t_i^{1-\alpha} + \int_0^{t_i} (t_i-x)^{1-\alpha} y''(x) dx \right).$$

On pose : $f(x) = (t_i - x)^{1-\alpha} y''(x)$ et on utilise (3.13) et (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_i} (t_i - x)^{1-\alpha} y''(x) dx &\approx \frac{h}{2} \sum_{k=1}^i [(t_i - x_{k-1})^{1-\alpha} y''(x_{k-1}) + (t_i - x_k)^{1-\alpha} y''(x_k)] \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{k=1}^i (t_i - x_{k-1})^{1-\alpha} y''(x_{k-1}) + \frac{h}{2} \sum_{k=1}^i (t_i - x_k)^{1-\alpha} y''(x_k) \\ &\approx \frac{h}{2} \left[(t_i - x_0)^{1-\alpha} y''(0) + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (t_i - x_k)^{1-\alpha} y''(x_k) \right]. \end{aligned}$$

Donc :

$${}^C D^\alpha y(t_i) = \frac{h \left[(t_i - x_0)^{1-\alpha} y''(0) + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (t_i - x_k)^{1-\alpha} y''(x_k) \right]}{2(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} + \frac{(t_i - x_0)^{1-\alpha} y'(0)}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)},$$

et puisque $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$, alors on a :

$${}^C D^\alpha y(t) = \frac{h \left[(t - x_0)^{1-\alpha} y''(0) + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (t - x_k)^{1-\alpha} y''(x_k) \right]}{2\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(t - x_0)^{1-\alpha} y'(0)}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (3.15)$$

D'après (3.4), (3.9) et (3.12), on trouve :

$$y'(x_k) \approx \frac{-3y(x_k) + 4y(x_{k+1}) - y(x_{k+2}))}{2h},$$

$$y''(x_k) \approx \frac{y(x_{k-2}) - 2y(x_{k-1}) + y(x_k)}{h^2}.$$

Alors :

$$y'(x_0) \approx \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h},$$

$$y''(x_0) \approx \frac{y(x_0) - 2y(x_1) + y(x_2)}{h^2}. \quad (3.16)$$

On remplace par (3.16) dans (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha y(t_i) &\approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{y(x_0) - 2y(x_1) + y(x_2)}{2h} (t_i - x_0)^{1-\alpha} \right] \\ &+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{i-1} \left[\frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1}))}{h} (t_i - x_k)^{1-\alpha} \right] \\ &+ \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h\Gamma(2-\alpha)} (t_i - x_0)^{1-\alpha}, \forall i = 1..n \end{aligned}$$

D'où :

$${}^C D^\alpha y(t_i) \approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[A + \frac{h}{2} (B + 2C) \right],$$

tq :

$$A = \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h} (t_i - x_0)^{1-\alpha},$$

$$B = \frac{y(x_0) - 2y(x_1) + y(x_2)}{h^2} (t_i - x_0)^{1-\alpha},$$

$$C = \sum_{k=1}^{i-1} \left[\frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) - y(x_{k+1}))}{h^2} (t_i - x_k)^{1-\alpha} \right].$$

3.4 Approximation de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville par la méthode des différences finies

D'après la relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, on a :

$${}^{RL} D_a^\alpha y(t) = {}^C D_a^\alpha y(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(a)(t-a)^{k-a}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

Donc :

$${}^{RL} D_a^\alpha y(t_i) \approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[A + \frac{h}{2} (B + 2C) \right] + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(a)(t_i - a)^{k-a}}{\Gamma(k-\alpha+1)}, \forall i = 1..n.$$

3.5 Approximation de la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard

Dans cette section, nous subdivisons également les intervalles $[a, T]$ avec $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, où $h = \frac{T-a}{N}$ est la taille du pas.

Soit $u : [a, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, U_n est l'approximation numérique de $U_n(t)$ et $f_n = f(t_n)$, notre résultat se présente comme suit .

Théorème 3.1. [4]

Soit $u : [a, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $u \in C^2([a, t] : \mathbb{R})$ et $0 < \alpha < 1$, alors pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$${}^{CH}D_{a^+}^\alpha u(t_n) = {}^{CH}D_{a^+}^\alpha u_n + O(h^{1-\alpha}),$$

où ${}^{CH}D_{a^+}^\alpha u_n$ est défini comme suit :

$${}^{CH}D_{a^+}^\alpha u_n = \frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^n b_i(u_i - u_{i-1}), \quad (3.17)$$

et

$$b_i = t_i \left(\left(\log \frac{t_n}{t_{i-1}} \right)^{1-\alpha} - \left(\log \frac{t_n}{t_i} \right)^{1-\alpha} \right). \quad (3.18)$$

Démonstration 3.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour chaque $n \in \{0, 1, \dots, N\}$, on a

$$\begin{aligned} {}^{CH}D_{a^+}^\alpha u(t_n) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{t_n} \left(\log \frac{t_n}{s} \right)^{-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right) u(s) \frac{ds}{s} \\ &\simeq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\log \frac{t_n}{s} \right)^{-\alpha} t_i \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right) \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n t_i \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\log \frac{t_n}{s} \right)^{-\alpha} \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{h\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n t_i (u_i - u_{i-1}) \left[-\frac{\left(\log \frac{t_n}{s} \right)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} \right]_{t_{i-1}}^{t_i} \\ &= \frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^n t_i \left[\left(\log \frac{t_n}{t_{i-1}} \right)^{1-\alpha} - \left(\log \frac{t_n}{t_i} \right)^{1-\alpha} \right] (u_i - u_{i-1}) \\ &= \frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^n b_i (u_i - u_{i-1}) = {}^{CH}D_{a^+}^\alpha u_n. \end{aligned}$$

On définit $E_n = |{}^{CH}D_{a^+}^\alpha u(t_n) - {}^{CH}D_{a^+}^\alpha u_n|$ et $M_i = \max |u^{(i)}(t)|$, $i=1,2$ donc on obtient :

$$E_n \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\log \frac{t_n}{s} \right)^{-\alpha} t_i \left| s \frac{du}{ds} - t_i \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right) \right| \frac{ds}{s}.$$

Il découle du théorème de Taylor, on a pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ avec $s \in [t_{i-1}, t_i]$ et $\eta_1 \in [t_{i-1}, t_i]$,

$\eta_2 \in [t_{i-1}, s]$.

$$\begin{aligned}
\left| s \frac{du}{ds} - t_i \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right) \right| &= \left| s \frac{du}{ds} - t_i \left(\frac{du(t_{i-1})}{ds} - \frac{d^{(2)}u(\eta_1) h}{ds^2} \right) \right| \\
&\leq \left| \left(s \frac{du}{ds} - t_i \frac{du(t_{i-1})}{ds} \right) \right| + M_2 \frac{t_i h}{2} \\
&= \left| s \left(\frac{du(t_{i-1})}{ds} - t_i \frac{du(t_{i-1})}{ds} - \frac{d^{(2)}u(\eta_1)}{ds^2} (s - t_{i-1}) \right) \right| + M_2 \frac{t_i h}{2} \\
&\leq M_1(t_i - t_{i-1}) + M_2 t_i \frac{3}{2} h \\
&\leq \left(M_1 + \frac{3T}{2} M_2 \right) h.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $0 < \alpha \leq 1$ et $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ avec $i \leq n$ et $s \in [t_{i-1}, t_i]$

$$0 \leq \left(\log \frac{t_n}{s} \right)^{-\alpha} \leq \left(\log \frac{t_i}{s} \right)^{-\alpha},$$

par conséquent, on conclut que

$$\begin{aligned}
E_n &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(M_1 + \frac{3T}{2} M_2 \right) h \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\log \frac{t_n}{s} \right)^{-\alpha} \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(M_1 + \frac{3T}{2} M_2 \right) h \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\log \frac{t_i}{s} \right)^{-\alpha} \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(M_1 + \frac{3T}{2} M_2 \right) h \sum_{i=1}^n \left(\log \frac{t_i}{t_{i-1}} \right)^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(M_1 + \frac{3T}{2} M_2 \right) h \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} \right)^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(M_1 + \frac{3T}{2} M_2 \right) h \sum_{i=1}^n h^{1-\alpha} T^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(M_1 + \frac{3T}{2} M_2 \right) T^{1-\alpha} h^{1-\alpha} \sum_{i=1}^n h \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(M_1 + \frac{3T}{2} M_2 \right) (T-a) T^{1-\alpha} h^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie

$${}^{CH}D_{a^+}^\alpha u(t_n) = {}^{CH}D_{a^+}^\alpha u_n + O(h^{1-\alpha}).$$

3.6 Approximation de la dérivée fractionnaire de Caputo-Katugampola

Dans cette section, nous portons notre attention sur une approche numérique de l'équation différentielle fractionnaire généralisée de Caputo-Katugampola [4].

Dans la suite, pour tout intervalle $[a, T]$ avec $\alpha > 0$ et $\rho > 0$, on note :

$$h = \frac{T^\rho - a^\rho}{N},$$

où $N > 0$ est un entier positif donnée. De plus, on hérite de la grille temporelle suivante par :

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T,$$

ici t_n est défini comme

$$t_n = (a^\rho + nh)^{\frac{1}{\rho}} = \left(a^\rho + \frac{n(T^\rho - a^\rho)}{N} \right)^{\frac{1}{\rho}}, n \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (3.19)$$

Remarque 3.1.

En fait, si $\rho = 1$, alors (3.19) se réduit à la partition équidistance classique pour $[a, T]$

$$t_n := a + nh = a + \frac{n(T - a)}{N}, n \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Si $\rho \neq 1$, on voit facilement que la partition de $[a, b]$ est non équidistance, donc $t_k - t_{k-1} \neq h$.

Théorème 3.2.

Soit $u : [a, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $u \in C^2([a, T] : \mathbb{R})$, $0 < \alpha \leq 1$ et $\rho > 1$, l'approximation de la dérivée fractionnaire de Caputo-Katugampola ${}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho}$ en un point t_{n+1} est donnée par le schéma suivant :

$${}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} u_{n+1} = \frac{h^{1-\alpha} \rho^{\alpha-1}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^n b_j^{\alpha, \rho} (u_{j+1} - u_j), \quad (3.20)$$

où

$$b_j^{\alpha, \rho} = \frac{t_j^{(1-\rho)}}{t_{j+1} - t_j} ((n-j+1)^{1-\alpha} - (n-j)^{1-\alpha}), j = 0, \dots, n, \quad (3.21)$$

et

$${}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} u(t_{n+1}) = {}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} u_n + c_{\alpha, \rho} h^{1-\alpha}.$$

3.7 Approximation de la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

D'après le 2^{eme} chapitre on a :

$${}^{GL} D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau,$$

Pour $0 < \alpha < 1$ et $m = 1$: On a

$$\begin{aligned} {}^{GL} D_a^\alpha y(t) &= \frac{y(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{y'(x)}{(t-x)^\alpha} dx \\ &= \frac{y(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + {}^C D_a^\alpha y(t), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} {}^{GL} D_a^\alpha y(t) &\approx \frac{y_0(t-x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h\Gamma(2-\alpha)} (t-x_0)^{1-\alpha} + \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{\Gamma(2-\alpha)h} (t-x_0)^{1-\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{2h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{i-1} (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})(t-x_k)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} {}^{GL} D_\alpha y(t_i) &\approx \frac{y_0(t_i-x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h\Gamma(2-\alpha)} (t_i-x_0)^{1-\alpha} + \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h\Gamma(2-\alpha)} (t_i-x_0)^{1-\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{2h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{i-1} (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})(t_i-x_k)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$$f(t_i) = \frac{y_0}{\Gamma(1-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} - \frac{y_0}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} + \frac{y_1}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} \\ + \frac{1}{2h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{i-1} (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})(t_i - x_k)^{1-\alpha},$$

alors

$$\frac{y_1}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} + \frac{1}{2h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{i-1} (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})(t_i - x_k)^{1-\alpha} = \\ f(t_i) - \frac{y_0}{\Gamma(1-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} + \frac{y_0}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha}.$$

Pour $i = 1$

$$B_1 = \frac{y_1}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_1 - x_0)^{1-\alpha} = f(t_1) - \frac{y_0}{\Gamma(1-\alpha)}(t_1 - x_0)^{1-\alpha} + \frac{y_0}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_1 - x_0)^{1-\alpha},$$

d'où

$$a_{1,1} = \frac{(t_1 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}.$$

Pour $i = 2$

$$B_2 = \frac{(t_2 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}y_1 + \frac{1}{2h\Gamma(2-\alpha)}(-2y_1 + y_2)(t_2 - x_1)^{1-\alpha} = f(t_2) - \frac{(t_2 - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{(t_2 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(1-\alpha)} - \frac{(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)}y_0,$$

alors

$$a_{2,1} = \frac{(t_2 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} - \frac{(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}. \\ a_{2,2} = \frac{(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)}.$$

Pour $i = 3$

$$B_3 = \frac{y_1(t_3 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{2h\Gamma(2-\alpha)} [(-2y_1 + y_2)(t_3 - x_1)^{1-\alpha} + (y_1 - 2y_2 + y_3)(t_3 - x_2)^{1-\alpha}] \\ = f(t_3) - \frac{y_0(t_3 - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{y_0(t_3 - x_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{y_0(t_3 - x_1)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)},$$

alors

$$f(t_3) - \frac{y_0(t_3 - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{y_0(t_3 - x_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{y_0(t_3 - x_1)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)} = \left[\frac{(t_3 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} - \frac{2(t_3 - x_1)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)} \right] y_1 \\ + \left[\frac{(t_3 - x_1)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)} - \frac{2(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)} \right] y_2 \\ + \frac{(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)} y_3,$$

d'où

$$a_{3,1} = \frac{(t_3 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} - \frac{2(t_3 - x_1)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)} \\ a_{3,2} = \frac{(t_3 - x_1)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)} - \frac{2(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)} \\ a_{3,3} = \frac{(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)}.$$

Pour $i = k$

$$B_k = \frac{(t_k - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}y_1 + \frac{1}{2h\Gamma(2-\alpha)} \left[(y_0 - 2y_1 + y_2)(t_k - x_1)^{1-\alpha} + (y_1 - 2y_2 + y_3)(t_k - x_2)^{1-\alpha} \right. \\ \left. + (y_2 - 2y_3 + y_4)(t_k - x_3)^{1-\alpha} + \dots + (t_{k-2} - 2y_{k-1} + y_k)(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha} \right],$$

alors

$$a_{k,1} = \frac{2(t_k - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_k - x_1)^{1-\alpha} + (t_k - x_2)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)}, \quad k = 4 \dots n.$$

$$a_{k,2} = \frac{(t_k - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_k - x_2)^{1-\alpha} + (t_k - x_3)^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)}, \quad k = 4 \dots n.$$

$$a_{k,i} = \frac{(t_k - x_{i-1})^{1-\alpha} - 2(t_k - x_i)^{1-\alpha} + (t_k - x_{i+1})^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)}, \quad i = 3 \dots k-2 \text{ et } k = 4 \dots n-1.$$

$$a_{k,k-1} = \frac{(t_k - x_{k-2})^{1-\alpha} - 2(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)}, \quad k = 4 \dots n.$$

$$a_{k,k} = \frac{(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha}}{2h\Gamma(2-\alpha)}, \quad k = 2 \dots n.$$

D'où

$${}^{GL}D_a^\alpha y_i \approx \sum_{k=0}^n a_{k,i} y_k.$$

Pour $1 < \alpha < 2$ et $m = 2$: On a

$${}^{GL}D_a^\alpha y(t) = \frac{y(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{y'(a)(t-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^t y''(s)(t-s)^{1-\alpha} ds \\ = \frac{y(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{y'(a)(t-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + {}^C D_a^\alpha y(t),$$

alors

$${}^{GL}D_a^\alpha y(t_i) \approx \frac{y(x_0)(t_i - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{y'(x_0)(t_i - x_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\ + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{h}{2} \left((t_i - x_0)^{1-\alpha} y''(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (t_i - x_k)^{1-\alpha} y''(x_k) \right) \right] \\ \approx \frac{y_0(t_i - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{(t_i - x_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} \right) \\ + \frac{h}{2\Gamma(2-\alpha)} \left((t_i - x_0)^{1-\alpha} \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (t_i - x_k)^{1-\alpha} \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} \right) \\ \approx \frac{y_0(t_i - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{-y_0 + 2y_1}{h\Gamma(2-\alpha)} (t_i - x_0)^{1-\alpha} \\ + \frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{i-1} (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})(t_i - x_k)^{1-\alpha}.$$

D'où

$$f(t_i) = \frac{y_0(t_i - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{-y_0 + 2y_1}{h\Gamma(2-\alpha)} (t_i - x_0)^{1-\alpha} + \frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{i-1} (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})(t_i - x_k)^{1-\alpha}.$$

alors

$$f(t_i) - \frac{y_0}{\Gamma(1-\alpha)}(t_i - x_0)^{-\alpha} + \frac{y_0}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} = \frac{2y_1}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} \\ + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h} \sum_{k=1}^{i-1} (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})(t_i - x_k)^{1-\alpha}$$

Pour $i = 1$

$$B(1) = f(t_1) - \frac{y_0}{\Gamma(1-\alpha)}(t_1 - x_0)^{-\alpha} + \frac{y_0}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_1 - x_0)^{1-\alpha},$$

d'où

$$a_{1,1} = \frac{2(t_1 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}.$$

Pour $i = 2$

$$B(2) = f(t_2) - \frac{y_0(t_2 - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{y_0(t_2 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} + \frac{y_0(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)},$$

alors

$$a_{2,1} = \frac{2(t_2 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} - \frac{2(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}. \\ a_{2,2} = \frac{(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}.$$

Pour $i = 3$

$$f(t_3) = \frac{y_0(t_3 - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{-y_0 + 2y_1}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_3 - x_0)^{1-\alpha} \\ + \frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} [(y_0 - 2y_1 + y_2)(t_3 - x_1)^{1-\alpha} + (y_1 - 2y_2 + y_3)(t_3 - x_2)^{1-\alpha}]$$

alors

$$B(3) = f(t_3) - \frac{y_0(t_3 - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{y_0(t_3 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} - \frac{y_0(t_3 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)},$$

d'où

$$a_{3,1} = \frac{2(t_3 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} - \frac{2(t_3 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\ a_{3,2} = \frac{(t_3 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} - \frac{2(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\ a_{3,3} = \frac{(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}.$$

Pour $i = k$

$$B(k) = \frac{(t_k - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} y_1 + \frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} [(y_0 - 2y_1 + y_2)(t_k - x_1)^{1-\alpha} + (y_1 - 2y_2 + y_3)(t_k - x_2)^{1-\alpha} \\ + (y_2 - 2y_3 + y_4)(t_k - x_3)^{1-\alpha} + \dots + (t_{k-2} - 2y_{k-1} + y_k)(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha}],$$

alors

$$\begin{aligned}a_{k,1} &= \frac{2(t_k - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_k - x_1)^{1-\alpha} + (t_k - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2 - \alpha)}, \quad k = 4 \dots n. \\a_{k,2} &= \frac{(t_k - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_k - x_2)^{1-\alpha} + (t_k - x_3)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2 - \alpha)}, \quad k = 4 \dots n. \\a_{k,i} &= \frac{(t_k - x_{i-1})^{1-\alpha} - 2(t_k - x_i)^{1-\alpha} + (t_k - x_{i+1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2 - \alpha)}, \quad i = 3 \dots k - 2 \text{ et } k = 4 \dots n - 1. \\a_{k,k-1} &= \frac{(t_k - x_{k-2})^{1-\alpha} - 2(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2 - \alpha)}, \quad k = 4 \dots n. \\a_{k,k} &= \frac{(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2 - \alpha)}, \quad k = 2 \dots n.\end{aligned}$$

D'où

$${}^{GL}D_a^\alpha y_i \approx \sum_{k=0}^n a_{k,i} y_k.$$

Chapitre 4

Applications numériques

4.1 Pour la dérivée au sens de Caputo

On a :

$${}^C D^\alpha y(t_i) \approx \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} + \frac{y(x_0) - 2y(x_1) + y(x_2)}{2h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} + \sum_{k=1}^{i-1} \left[\frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1}))}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_k)^{1-\alpha} \right]. \quad (4.1)$$

Remarque 4.1.

On note $y(x_i)$ par y_i . On peut écrire (4.1) sous la forme suivante :

$${}^C D^\alpha y(t_i) = \sum_{k=0}^n a_{i,k} y_k, \quad (4.2)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{i,0} &= \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - (t_i - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 1..n \\ a_{1,1} &= \frac{(t_1 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{2,1} = \frac{(t_2 - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\ a_{i,1} &= \frac{(t_i - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_i - x_1)^{1-\alpha} + (t_i - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 3..n \\ a_{2,2} &= \frac{(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{3,2} = \frac{(t_3 - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \\ a_{i,2} &= \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_i - x_2)^{1-\alpha} + (t_i - x_3)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 4..n \\ a_{k,k} &= \frac{(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{k+1,k} = \frac{(t_{k+1} - x_{k-1})^{1-\alpha} - 2(t_{k+1} - x_k)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, k = 3..n-3 \\ a_{i,k} &= \frac{(t_i - x_{k-1})^{1-\alpha} - 2(t_i - x_k)^{1-\alpha} + (t_i - x_{k+1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, k = 3..n-3, i = k+2..n \\ a_{n-2,n-2} &= \frac{(t_{n-2} - x_{n-3})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n-1,n-1} = \frac{(t_{n-1} - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n,n} = \frac{(t_n - x_{n-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\ a_{n-1,n-2} &= \frac{(t_{n-1} - x_{n-3})^{1-\alpha} - 2(t_{n-1} - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n,n-1} = \frac{-2(t_n - x_{n-1})^{1-\alpha} + (t_n - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \\ a_{n,n-2} &= \frac{(t_n - x_{n-3})^{1-\alpha} - 2(t_n - x_{n-2})^{1-\alpha} + (t_n - x_{n-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \end{aligned}$$

Exemple 4.1.

On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante [11] :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6} t^3 + t^{3+\alpha} - y(t), \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

avec $0 < \alpha < 1$, $0 \leq t \leq T$.

Sa solution exacte est : $y(t) = t^{3+\alpha}$.

On a

$${}^C D_t^\alpha y_i = \sum_{k=0}^n a_{i,k} y_k = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6} t_i^3 + t_i^{3+\alpha} - y_i.$$

Pour $i = 1$ on a

$${}^C D_t^\alpha y_1 = \sum_{k=0}^n a_{1,k} y_k = a_{1,0} y_0 + a_{1,1} y_1 + \dots + a_{1,n} y_n = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6} t_1^3 + t_1^{3+\alpha} - y_1,$$

alors

$$(1 + a_{1,1}) y_1 + \dots + a_{1,n} y_n = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6} t_1^3 + t_1^{3+\alpha} - a_{1,0} y_0,$$

avec

$$a_{1,1} = \frac{(t_1 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)},$$

$$a_{1,k} = 0 \quad k = 2..n.$$

De même manière on trouve que :

$$\begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 1 + a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & 1 + a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6} t_1^3 + t_1^{3+\alpha} - a_{1,0} y_0 \\ \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6} t_2^3 + t_2^{3+\alpha} - a_{2,0} y_0 \\ \vdots \\ \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6} t_n^3 + t_n^{3+\alpha} - a_{n,0} y_0 \end{pmatrix}.$$

Avec

$$a_{i,0} = \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - (t_i - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad i = 1..n$$

$$a_{1,1} = \frac{(t_1 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad a_{2,1} = \frac{(t_2 - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}$$

$$a_{i,1} = \frac{(t_i - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_i - x_1)^{1-\alpha} + (t_i - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad i = 3..n$$

$$a_{2,2} = \frac{(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad a_{3,2} = \frac{(t_3 - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)},$$

$$a_{i,2} = \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_i - x_2)^{1-\alpha} + (t_i - x_3)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad i = 4..n$$

$$a_{k,k} = \frac{(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad a_{k+1,k} = \frac{(t_{k+1} - x_{k-1})^{1-\alpha} - 2(t_{k+1} - x_k)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad k = 3..n - 3$$

$$a_{i,k} = \frac{(t_i - x_{k-1})^{1-\alpha} - 2(t_i - x_k)^{1-\alpha} + (t_i - x_{k+1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad k = 3..n - 3, \quad i = k + 2..n$$

$$a_{n-2,n-2} = \frac{(t_{n-2} - x_{n-3})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad a_{n-1,n-1} = \frac{(t_{n-1} - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad a_{n,n} = \frac{(t_n - x_{n-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}$$

$$a_{n-1,n-2} = \frac{(t_{n-1} - x_{n-3})^{1-\alpha} - 2(t_{n-1} - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad a_{n,n-1} = \frac{-2(t_n - x_{n-1})^{1-\alpha} + (t_n - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)},$$

$$a_{n,n-2} = \frac{(t_n - x_{n-3})^{1-\alpha} - 2(t_n - x_{n-2})^{1-\alpha} + (t_n - x_{n-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)},$$

et

$$B(i) = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6} t_i^3 + t_i^{3+\alpha} - y_0 \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - (t_i - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad i = 1..n$$

On va résoudre le système $Ay = B$ avec des méthodes de résolutions. On calcule l'erreur suivante

$$erreur = \sup_{x_i \in [0,1]} |y(x_i) - y_{exacte}(x_i)|$$

où y est la solution calculé avec notre méthode et y_{exacte} est la solution exacte.

Dans le tableau (4.1), on présente cette erreur en fonction de α et pour différent maillage (n différent) ;

nombre des points	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
erreur avec $\alpha = 0.1$	9.161×10^{-4}	2.110×10^{-4}	4.782×10^{-5}	6.639×10^{-6}	1.483×10^{-6}	3.307×10^{-7}
erreur avec $\alpha = 0.2$	5.393×10^{-3}	1.094×10^{-4}	2.37×10^{-5}	4.803×10^{-6}	1.425×10^{-6}	4.208×10^{-7}
erreur avec $\alpha = 0.3$	5.804×10^{-4}	1.864×10^{-4}	5.936×10^{-5}	1.294×10^{-5}	4.063×10^{-6}	1.27×10^{-6}
erreur avec $\alpha = 0.4$	1.165×10^{-3}	3.969×10^{-3}	1.34×10^{-4}	3.164×10^{-5}	1.056×10^{-5}	3.5167×10^{-6}
erreur avec $\alpha = 0.5$	2.199×10^{-3}	7.964×10^{-4}	2.862×10^{-4}	7.346×10^{-5}	2.615×10^{-5}	9.293×10^{-6}
erreur avec $\alpha = 0.6$	3.976×10^{-3}	1.534×10^{-3}	5.88×10^{-4}	1.645×10^{-4}	6.262×10^{-5}	2.379×10^{-5}
erreur avec $\alpha = 0.7$	6.953×10^{-3}	2.861×10^{-3}	1.171×10^{-3}	3.581×10^{-4}	1.458×10^{-4}	5.931×10^{-5}
erreur avec $\alpha = 0.8$	1.181×10^{-2}	5.190×10^{-3}	2.271×10^{-3}	7.593×10^{-4}	3.31×10^{-4}	1.442×10^{-4}
erreur avec $\alpha = 0.9$	1.958×10^{-2}	9.181×10^{-3}	4.294×10^{-3}	1.57×10^{-3}	7.332×10^{-4}	3.422×10^{-4}

TABLE 4.1 – L'erreur entre la solution calculé et la solution exacte pour la dérivée de Caputo

On remarque que l'erreur approche vers zero pour les differents α quand on raffine notre maillage.

Dans la figure (4.1), on a tracé notre solution y et la solution exacte pour différent α et pour $n = 2000$

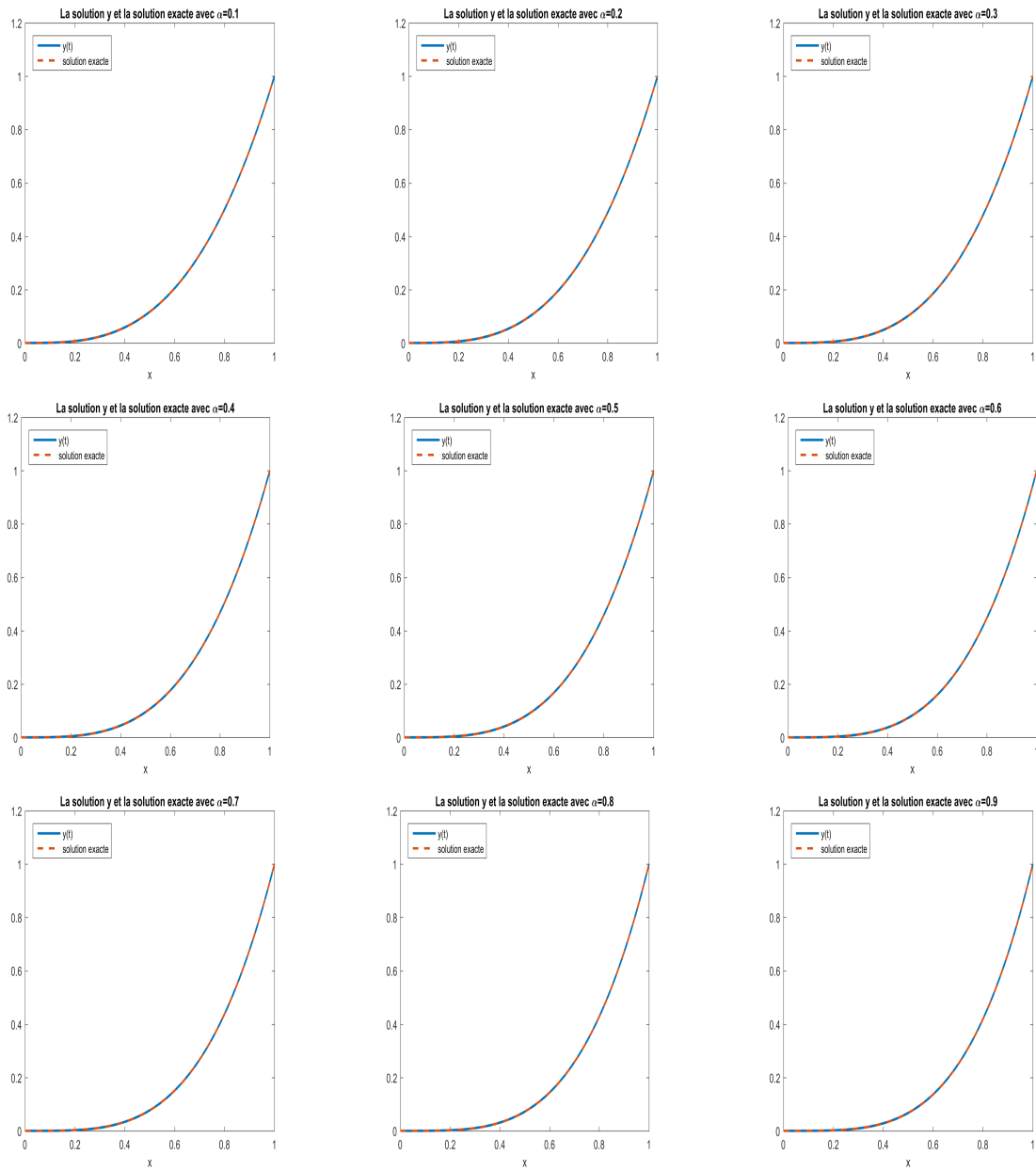


FIGURE 4.1 – la fonction y et la solution exacte pour la dérivée de Caputo tq $\alpha \in [0, 1[$ et $n = 2000$

4.2 Pour la dérivée au sens de Riemann-Liouville

On a :

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D^\alpha y(t) &\approx \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h\Gamma(2-\alpha)}(t-x_0)^{1-\alpha} + \frac{y(x_0) - 2y(x_1) + y(x_2)}{2h\Gamma(2-\alpha)}(t-x_0)^{1-\alpha} \\
 &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1}))}{h\Gamma(2-\alpha)}(t-x_k)^{1-\alpha} \right] + \frac{y(x_{n-2}) - 2y(x_{n-1}) + y(x_n)}{2h\Gamma(2-\alpha)}(t-x_n)^{1-\alpha} \\
 &+ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(x_0)(t-x_0)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Remarque 4.2.

On note $y(x_i)$ par y_i . On peut écrire (4.4) sous la forme suivante :

$${}^{RL}D^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^n a_{i,k} y_k + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(x_0)(t-x_0)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} = f(t_i), \tag{4.5}$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_{i,0} &= \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - (t_i - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 1..n \\
 a_{1,1} &= \frac{(t_1 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{2,1} = \frac{(t_2 - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\
 a_{i,1} &= \frac{(t_i - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_i - x_1)^{1-\alpha} + (t_i - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 3..n \\
 a_{2,2} &= \frac{(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{3,2} = \frac{(t_3 - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \\
 a_{i,2} &= \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_i - x_2)^{1-\alpha} + (t_i - x_3)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 4..n \\
 a_{k,k} &= \frac{(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{k+1,k} = \frac{(t_{k+1} - x_{k-1})^{1-\alpha} - 2(t_{k+1} - x_k)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, k = 3..n-3 \\
 a_{i,k} &= \frac{(t_i - x_{k-1})^{1-\alpha} - 2(t_i - x_k)^{1-\alpha} + (t_i - x_{k+1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, k = 3..n-3, i = k+2..n \\
 a_{n-2,n-2} &= \frac{(t_{n-2} - x_{n-3})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n-1,n-1} = \frac{(t_{n-1} - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n,n} = \frac{(t_n - x_{n-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\
 a_{n-1,n-2} &= \frac{(t_{n-1} - x_{n-3})^{1-\alpha} - 2(t_{n-1} - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n,n-1} = \frac{-2(t_n - x_{n-1})^{1-\alpha} + (t_n - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \\
 a_{n,n-2} &= \frac{(t_n - x_{n-3})^{1-\alpha} - 2(t_n - x_{n-2})^{1-\alpha} + (t_n - x_{n-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}
 \end{aligned}$$

Exemple 4.2.

On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante [6] :

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\frac{3}{2}}y(t) = f(t) - y(t), \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

avec $0 < t < 1$.

$$\text{ou } f(t) = t^{\frac{5}{2}} + \frac{5,8905}{\sqrt{\pi}}.$$

La solution exacte est : $y(t) = t^{\frac{5}{2}}$.

On a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^\alpha y(t_i) &\approx \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} + \frac{y(x_0) - 2y(x_1) + y(x_2)}{2h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_0)^{1-\alpha} \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1}))}{h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_k)^{1-\alpha} \right] + \frac{y(x_{n-2}) - 2y(x_{n-1}) + y(x_n)}{2h\Gamma(2-\alpha)}(t_i - x_n)^{1-\alpha} \\
&+ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(x_0)(t_i - x_0)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&\approx t_i^{\frac{5}{2}} + \frac{5,8905}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

Puisque $x_0 = 0$ donc $\sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(x_0)(t_i - x_0)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} = 0$.

Donc

$${}^{RL}D^\alpha y(t_i) \approx {}^C D^\alpha y(t_i) \approx f(t_i).$$

Alors on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 1 + a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & 1 + a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^{\frac{5}{2}} + \frac{5,8905}{\sqrt{\pi}} \\ t_2^{\frac{5}{2}} + \frac{5,8905}{\sqrt{\pi}} \\ \vdots \\ t_n^{\frac{5}{2}} + \frac{5,8905}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}.$$

avec

$$\begin{aligned}
a_{i,0} &= \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - (t_i - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 1..n \\
a_{1,1} &= \frac{(t_1 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{2,1} = \frac{(t_2 - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\
a_{i,1} &= \frac{(t_i - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_i - x_1)^{1-\alpha} + (t_i - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 3..n \\
a_{2,2} &= \frac{(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{3,2} = \frac{(t_3 - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \\
a_{i,2} &= \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_i - x_2)^{1-\alpha} + (t_i - x_3)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 4..n \\
a_{k,k} &= \frac{(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{k+1,k} = \frac{(t_{k+1} - x_{k-1})^{1-\alpha} - 2(t_{k+1} - x_k)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, k = 3..n-3 \\
a_{i,k} &= \frac{(t_i - x_{k-1})^{1-\alpha} - 2(t_i - x_k)^{1-\alpha} + (t_i - x_{k+1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, k = 3..n-3, i = k+2..n \\
a_{n-2,n-2} &= \frac{(t_{n-2} - x_{n-3})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n-1,n-1} = \frac{(t_{n-1} - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n,n} = \frac{(t_n - x_{n-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\
a_{n-1,n-2} &= \frac{(t_{n-1} - x_{n-3})^{1-\alpha} - 2(t_{n-1} - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n,n-1} = \frac{-2(t_n - x_{n-1})^{1-\alpha} + (t_n - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \\
a_{n,n-2} &= \frac{(t_n - x_{n-3})^{1-\alpha} - 2(t_n - x_{n-2})^{1-\alpha} + (t_n - x_{n-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Et

$$B(i) = t_i^{\frac{5}{2}} + \frac{5,8905}{\sqrt{\pi}} - y_0 \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - (t_i - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 1..n$$

On va résoudre le système $Ay = B$ avec des méthodes de résolutions.

On calcule l'erreur suivante

$$erreur = \sup_{x_i \in [0,1]} |y(x_i) - y_{exacte}(x_i)|$$

où y est la solution calculé avec la méthode de différences finies et y_{exacte} est la solution exacte. Dans le tableau (4.2), on présente cette erreur en fonction de α et pour différent maillage (n différent) ;

nombres des points	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	$n = 5000$	$n = 10000$	$n = 20000$
erreur	5.376×10^{-2}	3.759×10^{-2}	2.636×10^{-2}	1.655×10^{-2}	1.165×10^{-2}	8.2230×10^{-3}

TABLE 4.2 – L'erreur entre la solution calculé et la solution exacte pour la dérivée de Riemann-Liouville

On remarque que l'erreur approche vers zero pour $\alpha = \frac{3}{2}$ quand on raffine notre maillage. Dans la figure (4.2), on a tracé notre solution y et la solution exacte pour différent n .

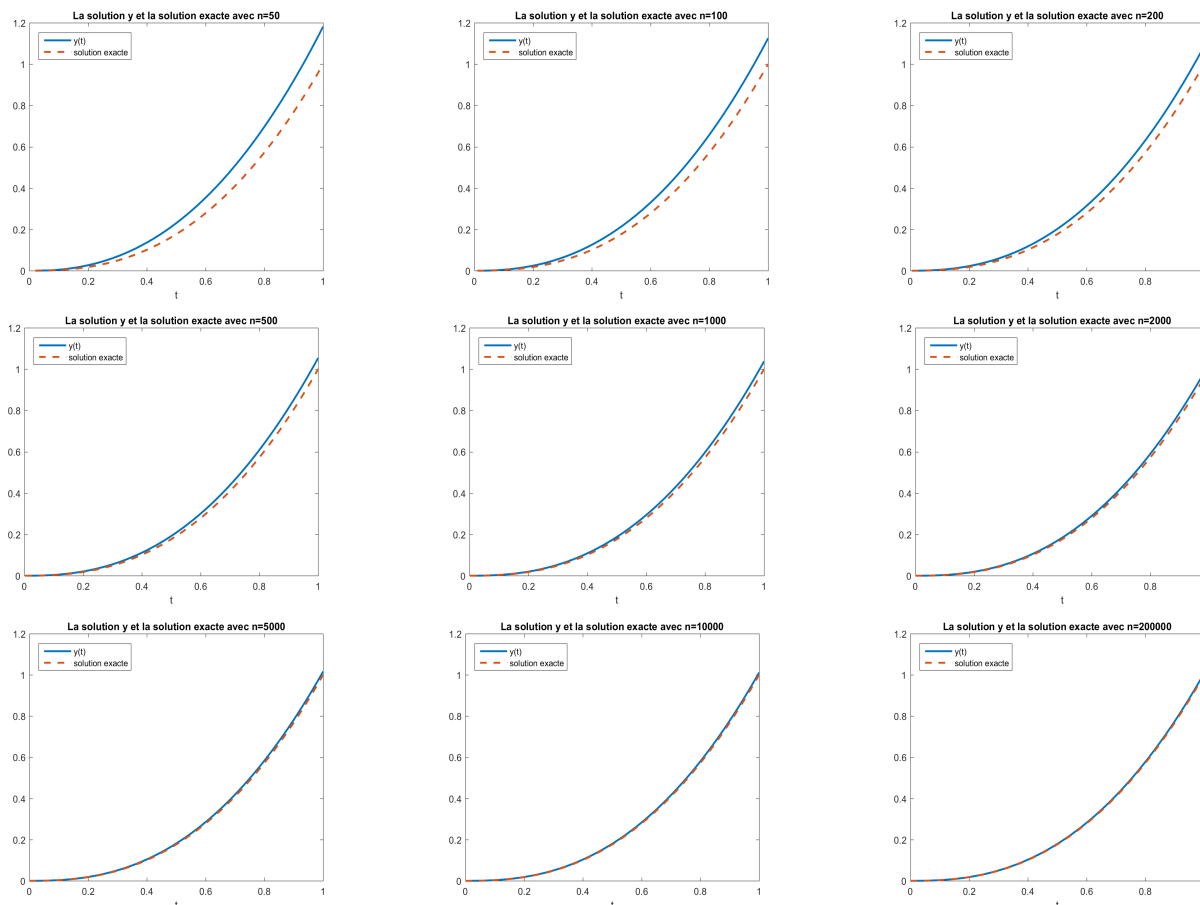


FIGURE 4.2 – la fonction y et la solution exacte pour la dérivée de Riemann-Liouville

4.3 Pour la dérivée au sens de Caputo-Hadamard

On a :

$${}^{CH}D_{a^+}^\alpha y_k = {}^{CH}D_a^\alpha y_k = \frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^k b_{i,k}(y_i - y_{i-1}) = f(t_k), \quad (4.7)$$

tq

$$b_{i,k} = t_i \left(\left(\log \frac{t_k}{t_{i-1}} \right)^{1-\alpha} - \left(\log \frac{t_k}{t_i} \right)^{1-\alpha} \right).$$

La formule (4.7) est équivalente à la suivante :

$$\frac{b_{k,k}}{h\Gamma(2-\alpha)} y_k + \frac{b_{k-1,k} - b_{k,k}}{h\Gamma(2-\alpha)} y_{k-1} + \cdots + \frac{b_{1,k} - b_{2,k}}{h\Gamma(2-\alpha)} y_1 - \frac{b_{1,k}}{h\Gamma(2-\alpha)} y_0 = f(t_k).$$

Si $k = 1$ on a :

$${}^{CH}D_a^\alpha y_1 = f(t_1),$$

(i.e)

$$\frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} (b_{1,1}(y_1 - y_0)) = f(t_1),$$

avec

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= t_1 \left(\left(\log \frac{t_1}{t_0} \right)^{1-\alpha} - \left(\log \frac{t_1}{t_1} \right)^{1-\alpha} \right), \\ &= t_1 \left(\log \frac{a+h}{a} \right)^{1-\alpha} \quad \text{car } t_i = a + ih. \end{aligned}$$

Si $k = 2$ on a :

$${}^{CH}D_a^\alpha y_2 = f(t_2),$$

(i.e)

$$b_{1,2}(y_1 - y_0) + b_{2,2}(y_2 - y_1) = h\Gamma(2-\alpha)f(t_2),$$

avec

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= t_1 \left(\left(\log \frac{t_2}{t_0} \right)^{1-\alpha} - \left(\log \frac{t_2}{t_1} \right)^{1-\alpha} \right), \\ &= t_1 \left(\log \left(\frac{a+2h}{a} \right)^{1-\alpha} - \log \left(\frac{a+2h}{a+h} \right)^{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{2,2} &= t_2 \left(\left(\log \frac{t_2}{t_1} \right)^{1-\alpha} - \left(\log \frac{t_2}{t_2} \right)^{1-\alpha} \right), \\ &= t_2 \left(\log \frac{a+2h}{a+h} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h\Gamma(2-\alpha)f(t_n) - b_{1,k}(y_1 - y_0) - b_{2,k}(y_2 - y_1) - \cdots - b_{k-1,k}(y_{k-1} - y_{k-2})}{b_{k,k}}$$

Exemple 4.3.

On prend comme exemple l'équation ci-dessous qui a la solution exacte $y(t) = \log \frac{t}{3}$ pour $t \in [1, 2]$ avec $0 < \alpha \leq 1$ [4]

$${}^{CH}D_{1+}^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} (\log t)^{1-\alpha}.$$

Alors

$${}^{CH}D_{1+}^{\alpha} y_k = \frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^k b_{i,k} (y_i - y_{i-1}) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} (\log t_k)^{1-\alpha}. \quad (4.8)$$

Pour $k = 1$ on a

$$\frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} b_{1,1} (y_1 - y_0) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} (\log t_1)^{1-\alpha},$$

donc

$$y_1 = \frac{h (\log t_1)^{1-\alpha}}{b_{1,1}} + y_0,$$

avec

$$b_{1,1} = t_1 \left(\log \frac{t_1}{t_0} \right)^{1-\alpha} = t_1 (\log(1+h))^{1-\alpha} \quad (\text{car } t_i = a + ih).$$

Pour $k = 2$ on a

$$\frac{1}{h\Gamma(2-\alpha)} (b_{1,2} (y_1 - y_0) + b_{2,2} (y_2 - y_1)) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} (\log t_2)^{1-\alpha},$$

alors

$$y_2 = \frac{h (\log t_2)^{1-\alpha} - b_{1,2} (y_1 - y_0)}{b_{2,2}} + y_1,$$

avec

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= t_1 \left(\left(\log \frac{t_2}{t_0} \right)^{1-\alpha} - \left(\log \frac{t_2}{t_1} \right)^{1-\alpha} \right) \\ &= t_1 \left(\log(1+2h)^{1-\alpha} - \log \left(\frac{1+2h}{1+h} \right)^{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

et

$$b_{2,2} = t_2 \left(\log \frac{t_2}{t_1} \right)^{1-\alpha} = t_2 \left(\log \left(\frac{a+2h}{a+h} \right) \right)^{1-\alpha}.$$

D'après (4.8) on trouve

$$y_n = \frac{h (\log t_n)^{1-\alpha} - b_{1,k} (y_1 - y_0) - b_{2,k} (y_2 - y_1) - \dots - b_{n-1,k} (y_{n-1} - y_{n-2})}{b_n} + y_{n-1},$$

avec

$$b_i = t_i \left(\left(\log \frac{t_n}{t_{i-1}} \right)^{1-\alpha} - \left(\log \frac{t_n}{t_i} \right)^{1-\alpha} \right).$$

On calcule l'erreur suivante

$$\text{erreur} = \sup_{x_i \in [0,1]} |y(x_i) - y_{\text{exacte}}(x_i)|$$

où y est la solution calculé avec notre méthode et y_{exacte} est la solution exacte.

Dans le tableau (4.3), on présente cette erreur en fonction de α et pour différent maillage (n différent) ;

	$\alpha \in [0, 1[$					
nombre des points	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
erreur	5.076×10^{-3}	2.518×10^{-3}	1.254×10^{-3}	5×10^{-4}	2.501×10^{-3}	1.250×10^{-4}

TABLE 4.3 – L’erreur entre la solution calculé et la solution exacte pour la dérivée de Caputo-Hadamard

On remarque que l’erreur approche vers zero pour les differents α quand on raffine notre maillage. Dans la figure (4.3), on a tracé notre solution y et la solution exacte pour différent α et pour $n = 2000$

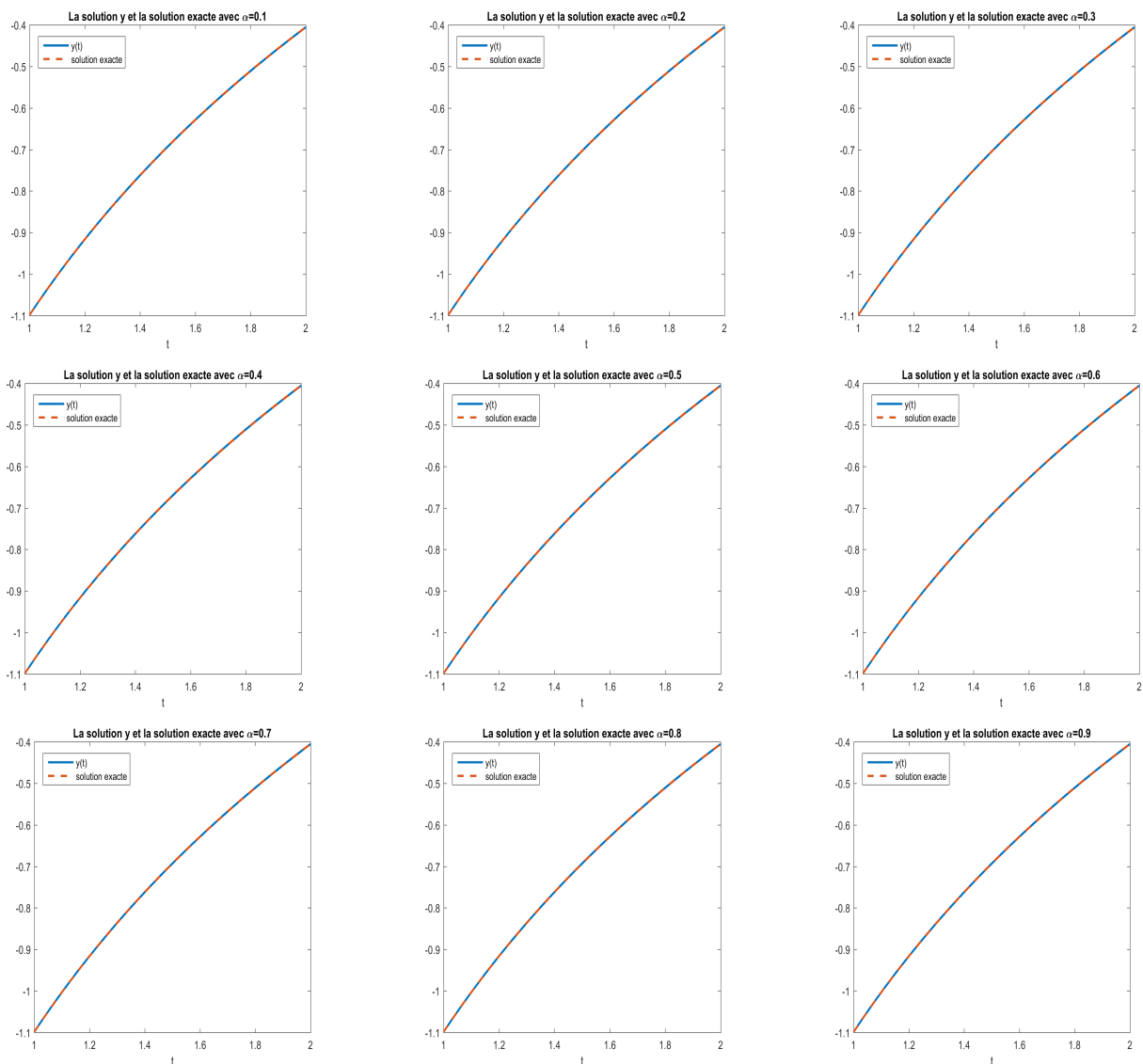


FIGURE 4.3 – la fonction y et la solution exacte pour la dérivée de Caputo-Hadamard tq $\alpha \in [0, 1[$ et $n = 2000$

4.4 Pour la dérivée au sens de Caputo-Katugampola

$${}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} y_k = \frac{h^{1-\alpha} \rho^{\alpha-1}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k}^{\alpha, \rho} (y_{j+1} - y_j) = f(t_k). \quad (4.9)$$

La formule (4.9) est égale à :

$$\frac{h^{1-\alpha} \rho^{\alpha-1}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[b_{0,k}^{\alpha, \rho} (y_1 - y_0) + b_{1,k}^{\alpha, \rho} (y_2 - y_1) + \cdots + b_{k-2,k}^{\alpha, \rho} (y_{k-1} - y_{k-2}) + b_{k-1,k}^{\alpha, \rho} (y_k - y_{k-1}) \right] = f(t_k).$$

avec

$$b_{j,k}^{\alpha, \rho} = \frac{t_j^{(1-\rho)}}{t_{j+1} - t_j} \left((k-j)^{1-\alpha} - (k-j-1)^{1-\alpha} \right), \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, k.$$

Si $k=1$ on a :

$${}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} y_1 = \frac{h^{1-\alpha} \rho^{\alpha-1}}{\Gamma(2-\alpha)} b_{0,1} (y_1 - y_0) = f(t_1),$$

alors

$$y_1 = \frac{\Gamma(2-\alpha) f(t_1)}{h^{1-\alpha} \rho^{1-\alpha} b_{0,1}^{\alpha, \rho}} + y_0,$$

avec

$$b_{0,1}^{\alpha, \rho} = \frac{t_0^{(1-\rho)}}{t_1 - t_0} (k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}).$$

Si $k=2$ on a

$${}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} y_2 = \frac{h^{1-\alpha} \rho^{\alpha-1}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(b_{0,2}^{\alpha, \rho} (y_1 - y_0) + b_{1,2}^{\alpha, \rho} (y_2 - y_1) \right) = f(t_2),$$

alors

$$b_{0,2}^{\alpha, \rho} (y_1 - y_0) + b_{1,2}^{\alpha, \rho} (y_2 - y_1) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{h^{1-\alpha} \rho^{\alpha-1}} f(t_2),$$

d'où

$$y_2 = \frac{\Gamma(2-\alpha) f(t_2)}{h^{1-\alpha} \rho^{\alpha-1} b_{1,2}^{\alpha, \rho}} - \frac{b_{0,2}^{\alpha, \rho}}{b_{1,2}^{\alpha, \rho}} (y_1 - y_0) + y_1.$$

avec

$$b_{0,2}^{\alpha, \rho} = \frac{t_0^{(1-\rho)}}{t_1 - t_0} (k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}),$$

et

$$b_{1,2}^{\alpha, \rho} = \frac{t_1^{(1-\rho)}}{t_2 - t_1} \left((k-1)^{1-\alpha} - (k-2)^{1-\alpha} \right).$$

Donc

$$y_k = \frac{\Gamma(2-\alpha) f(t_{k+1})}{h^{1-\alpha} \rho^{\alpha-1} b_{k-1,k}^{\alpha, \rho}} - \frac{b_{0,k}^{\alpha, \rho} (y_1 - y_0) + b_{1,k}^{\alpha, \rho} (y_2 - y_1) + \cdots + b_{k-2,k}^{\alpha, \rho} (y_{k-1} - y_{k-2})}{b_{k-1,k}^{\alpha, \rho}} + y_{k-1}.$$

Exemple 4.4.

On considère la fonction $y(t) = t^\rho$ sur l'intervalle $[1, 2]$, $0 < \alpha \leq 1$ on a l'équation suivante [4] :

$${}^C D_{1^+}^{\alpha, \rho} y(t) = \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} (t^\rho - 1)^{1-\alpha}.$$

Alors

$${}^C D_{1^+}^{\alpha, \rho} y(t_k) = {}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} y_{n+1} = \frac{h^{1-\alpha} \rho^{\alpha-1}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k}^{\alpha, \rho} (y_{j+1} - y_j) = \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} (t_k^\rho - 1)^{1-\alpha}.$$

Pour $k=1$ on a

$$\frac{h^{1-\alpha}\rho^{\alpha-1}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[b_{0,1}^{\alpha,\rho}(y_1 - y_0) \right] = \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} (t_1^\rho - 1)^{1-\alpha},$$

alors

$$y_1 = \frac{\rho(t_1^\rho - 1)^{1-\alpha}}{h^{1-\alpha}b_{0,1}^{\alpha,\rho}} + y_0.$$

Pour $k=2$ on a

$$\frac{h^{1-\alpha}\rho^{\alpha-1}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[b_{0,2}^{\alpha,\rho}(y_1 - y_0) + b_{1,2}^{\alpha,\rho}(y_2 - y_1) \right] = \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} (t_2^\rho - 1)^{1-\alpha},$$

donc

$$y_2 = \frac{\rho(t_2^\rho - 1)^{1-\alpha}}{h^{1-\alpha}b_{1,2}^{\alpha,\rho}} - \frac{b_{0,2}^{\alpha,\rho}}{b_{1,2}^{\alpha,\rho}}(y_1 - y_0) + y_1$$

Alors

$$\frac{h^{1-\alpha}\rho^{\alpha-1}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[b_{0,k}^{\alpha,\rho}(y_1 - y_0) + b_{1,k}^{\alpha,\rho}(y_2 - y_1) + \dots + b_{k-2,k}^{\alpha,\rho}(y_{k-1} - y_{k-2}) + b_{k-1,k}^{\alpha,\rho}(y_k - y_{k-1}) \right] = \frac{\rho^\alpha(t_k^\alpha - 1)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},$$

d'où

$$y_n = \frac{\rho(t_n^\rho - 1)^{1-\alpha}}{h^{1-\alpha}b_{n-1,n}^{\alpha,\rho}} - \frac{b_{0,n}^{\alpha,\rho}(y_1 - y_0) + b_{1,n}^{\alpha,\rho}(y_2 - y_1) + \dots + b_{n-2,n}^{\alpha,\rho}(y_{n-1} - y_{n-2})}{b_{n-1,n}^{\alpha,\rho}} + y_{n-1},$$

avec

$$b_{j,k}^{\alpha,\rho} = \frac{t_j^{(1-\rho)}}{t_{j+1} - t_j} \left((k-j)^{1-\alpha} - (k-j-1)^{1-\alpha} \right), \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, k.$$

On calcule l'erreur suivante

$$erreur = \sup_{x_i \in [0,1]} |y(x_i) - y_{exacte}(x_i)|$$

où y est la solution calculé avec notre méthode et y_{exacte} est la solution exacte.

Dans le tableau (4.4), on présente cette erreur en fonction de α et pour différent maillage(n différent) et différent ρ ;

nombre des points	$\rho = 0.3$			$\rho = 0.8$		
	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
erreur avec $\alpha = 0.1$	1.121×10^{-4}	5.608×10^{-5}	2.804×10^{-5}	1.027×10^{-4}	5.137×10^{-5}	2.568×10^{-5}
erreur avec $\alpha = 0.2$	1.121×10^{-4}	5.608×10^{-5}	2.804×10^{-5}	1.027×10^{-4}	5.137×10^{-5}	2.568×10^{-5}
erreur avec $\alpha = 0.3$	1.121×10^{-4}	5.608×10^{-5}	2.804×10^{-5}	1.027×10^{-4}	5.137×10^{-5}	2.568×10^{-5}
erreur avec $\alpha = 0.4$	1.121×10^{-4}	5.608×10^{-5}	2.804×10^{-4}	1.027×10^{-4}	5.137×10^{-5}	2.568×10^{-5}
erreur avec $\alpha = 0.5$	1.121×10^{-4}	5.608×10^{-5}	2.804×10^{-5}	1.027×10^{-4}	5.137×10^{-5}	2.568×10^{-5}

	$\rho = 1.4$			$\rho = 1.6$		
nombre des points	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
erreur avec $\alpha = 0.5$	4.544×10^{-4}	2.272×10^{-4}	1.136×10^{-4}	8.449×10^{-4}	4.224×10^{-4}	2.112×10^{-4}
erreur avec $\alpha = 0.6$	4.544×10^{-4}	2.272×10^{-4}	1.136×10^{-4}	8.449×10^{-4}	4.224×10^{-4}	2.112×10^{-4}
erreur avec $\alpha = 0.7$	4.544×10^{-4}	2.272×10^{-4}	1.136×10^{-4}	8.449×10^{-4}	4.224×10^{-4}	2.112×10^{-4}
erreur avec $\alpha = 0.8$	4.544×10^{-4}	2.272×10^{-4}	1.136×10^{-4}	8.449×10^{-4}	4.224×10^{-4}	2.112×10^{-4}
erreur avec $\alpha = 0.9$	4.544×10^{-4}	2.272×10^{-4}	1.136×10^{-4}	8.449×10^{-4}	4.224×10^{-4}	2.112×10^{-4}

TABLE 4.4 – L'erreur entre la solution calculé et la solution exacte pour la dérivée de Caputo-Katugampola

On remarque que l'erreur approche vers zero pour les differents α quand on raffine notre maillage.

Dans la figure (4.4), on a tracé notre solution y et la solution exacte pour différent α , différent ρ et pour $n = 2000$

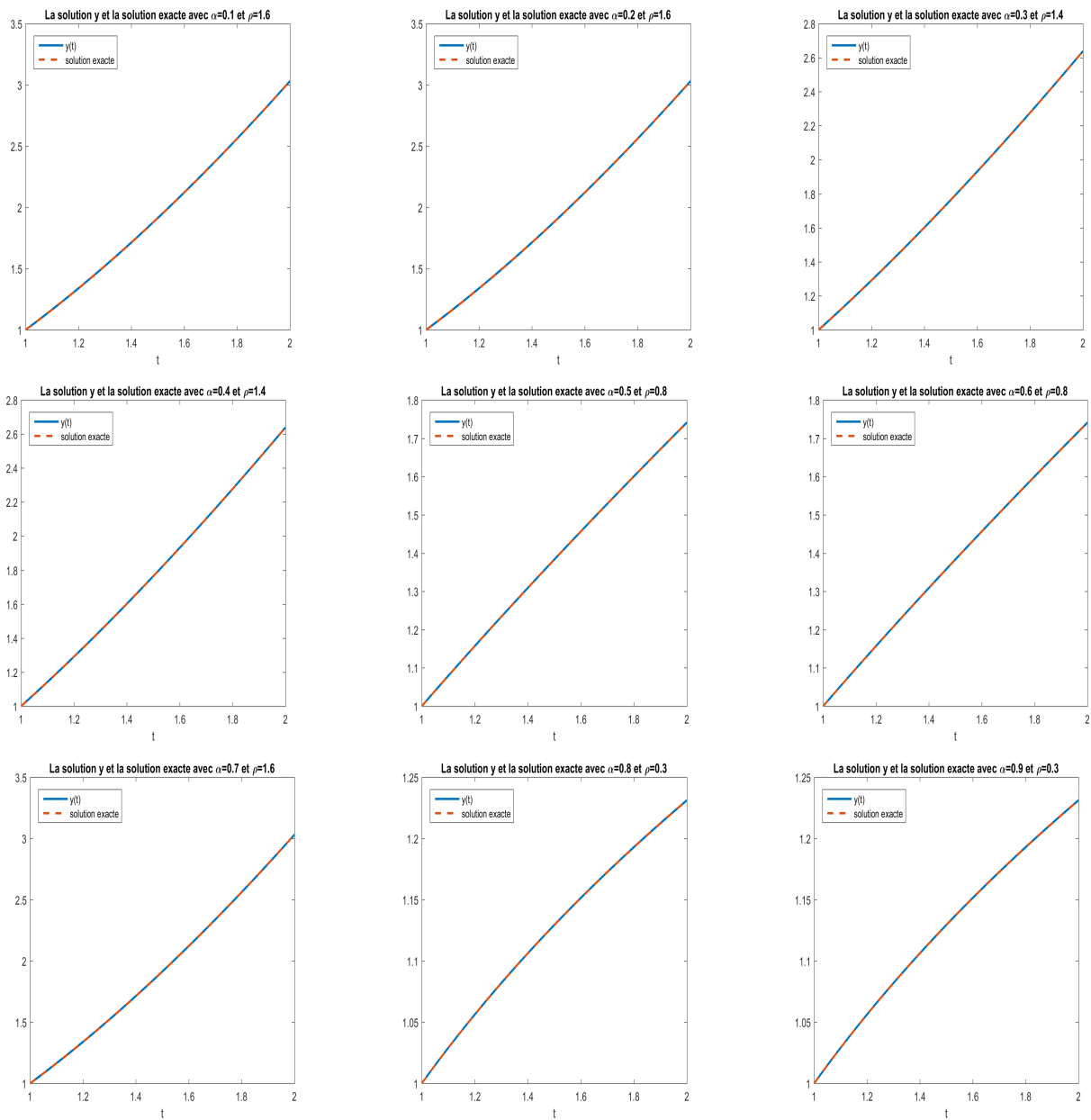


FIGURE 4.4 – la fonction y et la solution exacte pour la dérivée de Caputo-Katugampola tq $\alpha \in [0, 1[$ et $n = 2000$

4.5 Pour la dérivée au sens de Grünwald-Letnikov

Exemple 4.5.

On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante [11] :

$$\begin{cases} {}^{GL}D^\alpha y(t) = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6}t^3 + t^{3+\alpha} - y(t), \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

avec $0 < \alpha < 1$, $0 \leq t \leq T$.

Sa solution exacte est : $y(t) = t^{3+\alpha}$.

On a

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha y_i &= \frac{y(x_0)(t_i - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + {}^C D_a^\alpha y(t_i) \\ &= \frac{y(x_0)(t_i - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=0}^n a_{i,k} y_k = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6}t_i^3 + t_i^{3+\alpha} - y_i. \end{aligned}$$

Pour $i = 1$ on a

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha y_1 &= \frac{y(x_0)(t_1 - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=0}^n a_{1,k} y_k \\ &= \frac{y(x_0)(t_1 - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + a_{1,0}y_0 + a_{1,1}y_1 + \dots + a_{1,n}y_n = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6}t_1^3 + t_1^{3+\alpha} - y_1, \end{aligned}$$

alors

$$(1 + a_{1,1})y_1 + \dots + a_{1,n}y_n = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6}t_1^3 + t_1^{3+\alpha} - \left(\frac{(t_1 - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + a_{0,1} \right) y_0,$$

donc

$$(1 + a_{1,1})y_1 + \dots + a_{1,n}y_n = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6}t_1^3 + t_1^{3+\alpha}, \text{ car } y_0 = 0,$$

avec

$$a_{1,1} = \frac{(t_1 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad a_{1,k} = 0 \text{ pour } k = 2..n.$$

Pour $i = 2$ on a

$${}^{GL}D_a^\alpha y_2 = \sum_{k=0}^n a_{2,k} y_k = a_{2,0}y_0 + a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \dots + a_{2,n}y_n = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6}t_2^3 + t_2^{3+\alpha} - y_2,$$

alors

$$a_{2,0}y_0 + a_{2,1}y_1 + (1 + a_{2,2})y_2 + \dots + a_{2,n}y_n = \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6}t_2^3 + t_2^{3+\alpha},$$

avec

$$\begin{aligned} a_{2,1} &= \frac{(t_2 - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \quad a_{2,2} = \frac{(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\ a_{2,k} &= 0 \text{ pour } k = 3..n. \end{aligned}$$

De même manière on trouve que :

$$\begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 1 + a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & 1 + a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6}t_1^3 + t_1^{3+\alpha} \\ \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6}t_2^3 + t_2^{3+\alpha} \\ \vdots \\ \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6}t_n^3 + t_n^{3+\alpha} \end{pmatrix}.$$

avec

$$\begin{aligned}
a_{i,0} &= \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - (t_i - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 1..n \\
a_{1,1} &= \frac{(t_1 - x_0)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{2,1} = \frac{(t_2 - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\
a_{i,1} &= \frac{(t_i - x_0)^{1-\alpha} - 2(t_i - x_1)^{1-\alpha} + (t_i - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 3..n \\
a_{2,2} &= \frac{(t_2 - x_1)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{3,2} = \frac{(t_3 - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_3 - x_2)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \\
a_{i,2} &= \frac{(t_i - x_1)^{1-\alpha} - 2(t_i - x_2)^{1-\alpha} + (t_i - x_3)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, i = 4..n \\
a_{k,k} &= \frac{(t_k - x_{k-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{k+1,k} = \frac{(t_{k+1} - x_{k-1})^{1-\alpha} - 2(t_{k+1} - x_k)^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, k = 3..n - 3 \\
a_{i,k} &= \frac{(t_i - x_{k-1})^{1-\alpha} - 2(t_i - x_k)^{1-\alpha} + (t_i - x_{k+1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, k = 3..n - 3, i = k + 2..n \\
a_{n-2,n-2} &= \frac{(t_{n-2} - x_{n-3})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n-1,n-1} = \frac{(t_{n-1} - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n,n} = \frac{(t_n - x_{n-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \\
a_{n-1,n-2} &= \frac{(t_{n-1} - x_{n-3})^{1-\alpha} - 2(t_{n-1} - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, a_{n,n-1} = \frac{-2(t_n - x_{n-1})^{1-\alpha} + (t_n - x_{n-2})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \\
a_{n,n-2} &= \frac{(t_n - x_{n-3})^{1-\alpha} - 2(t_n - x_{n-2})^{1-\alpha} + (t_n - x_{n-1})^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)}, \\
B(i) &= \frac{\Gamma(4+\alpha)}{6} t_i^3 + t_i^{3+\alpha}, i = 1..n
\end{aligned}$$

On va résoudre le système $Ay = B$ avec des méthodes de résolutions. On calcule l'erreur suivante

$$\text{erreur} = \sup_{x_i \in [0,1]} |y(x_i) - y_{\text{exacte}}(x_i)|$$

où y est la solution calculé avec notre méthode et y_{exacte} est la solution exacte.

Dans le tableau (4.5), on présente cette erreur en fonction de α et pour différent maillage(n différent) ;

nombre des points	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
erreur avec $\alpha = 0.1$	8.636×10^{-5}	2.515×10^{-5}	7.241×10^{-5}	1.376×10^{-6}	3.888×10^{-7}	1.091×10^{-7}
erreur avec $\alpha = 0.2$	2.567×10^{-4}	7.843×10^{-5}	2.368×10^{-5}	4.802×10^{-6}	1.425×10^{-6}	4.208×10^{-7}
erreur avec $\alpha = 0.3$	5.781×10^{-4}	1.864×10^{-4}	5.936×10^{-5}	1.294×10^{-5}	4.063×10^{-6}	1.27×10^{-6}
erreur avec $\alpha = 0.4$	1.163×10^{-3}	3.969×10^{-3}	1.34×10^{-4}	3.164×10^{-5}	1.056×10^{-5}	3.516×10^{-6}
erreur avec $\alpha = 0.5$	2.197×10^{-3}	7.964×10^{-4}	2.862×10^{-4}	7.346×10^{-5}	2.615×10^{-5}	9.293×10^{-6}
erreur avec $\alpha = 0.6$	3.974×10^{-3}	1.534×10^{-3}	5.88×10^{-4}	1.645×10^{-4}	6.262×10^{-5}	2.379×10^{-5}
erreur avec $\alpha = 0.7$	6.951×10^{-3}	2.861×10^{-3}	1.171×10^{-3}	3.581×10^{-4}	1.458×10^{-4}	5.931×10^{-5}
erreur avec $\alpha = 0.8$	1.181×10^{-2}	5.190×10^{-3}	2.271×10^{-3}	7.593×10^{-4}	3.31×10^{-4}	1.442×10^{-4}
erreur avec $\alpha = 0.9$	1.958×10^{-2}	9.181×10^{-3}	4.294×10^{-3}	1.57×10^{-3}	7.332×10^{-4}	3.422×10^{-4}

TABLE 4.5 – L'erreur entre la solution calculé et la solution exacte pour la dérivée de Grünwald-Letnikov

On remarque que l'erreur approche vers zero pour les differents α quand on raffine notre maillage. Dans la figure (4.5), on a tracé notre solution y et la solution exacte pour different α et pour $n = 2000$

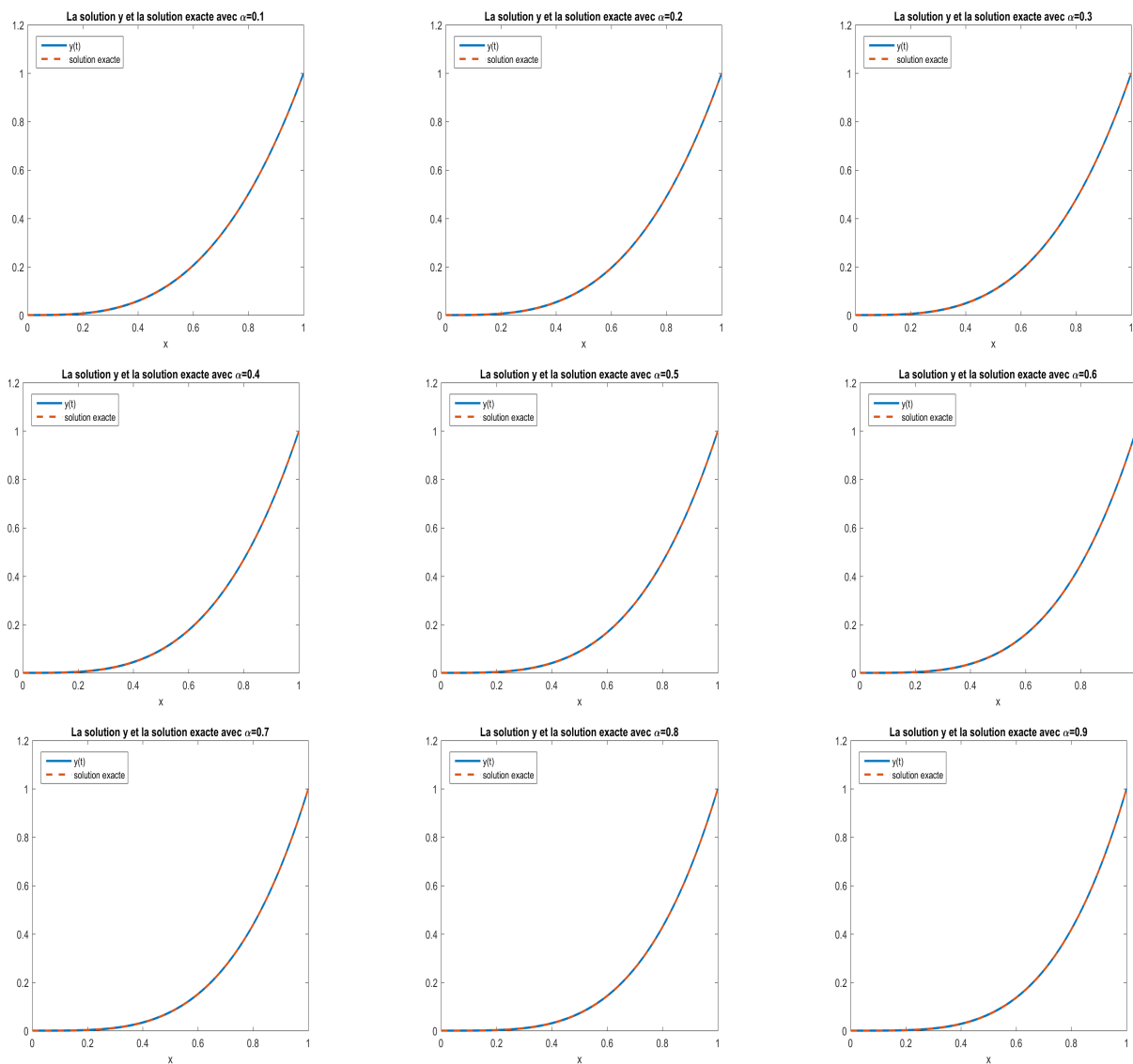


FIGURE 4.5 – la fonction y et la solution exacte pour la dérivée de Grünwald-Letnikov tq $\alpha \in [0, 1[$ et $n = 2000$

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons présenté les approximations des dérivées fractionnaires par la méthode des différences finis. Les étapes de notre recherche ont été les suivantes : D'abord, nous avons désigné les fonctions et les définitions principales dans notre mémoire. D'une autre part, nous avons identifié quelques dérivées et intégrales fractionnaires. En suite, nous sommes entrées dans le cœur de notre thème en définissant le principe de la méthode des différences finis et nous avons donnée les approximations des dérivées fractionnaires mentionnées au chapitre deux par cette méthode. Finalement, nous avons soutenu nos recherches avec des exemples résolus, tout cela pour montrer que la méthode des différences finis est l'une des nombreuses méthodes numériques qui permettent de calculer la solution approchée d'une équation différentielle fractionnaire et on a remarqué la convergence de la méthodes pour les différents dérivées fractionnaires.

Table des figures

4.1	la fonction y et la solution exacte pour la dérivée de Caputo tq $\alpha \in [0, 1[$ et $n = 2000$	31
4.2	la fonction y et la solution exacte pour la dérivée de Riemann-Liouville	34
4.3	la fonction y et la solution exacte pour la dérivée de Caputo-Hadamard tq $\alpha \in [0, 1[$ et $n = 2000$	37
4.4	la fonction y et la solution exacte pour la dérivée de Caputo-Katugampola tq $\alpha \in [0, 1[$ et $n = 2000$	41
4.5	la fonction y et la solution exacte pour la dérivée de Grünwald-Letnikov tq $\alpha \in [0, 1[$ et $n = 2000$	45

Liste des tableaux

4.1	L'erreur entre la solution calculé et la solution exacte pour la dérivée de Caputo	30
4.2	L'erreur entre la solution calculé et la solution exacte pour la dérivée de Riemann-Liouville	34
4.3	L'erreur entre la solution calculé et la solution exacte pour la dérivée de Caputo-Hadamard	37
4.4	L'erreur entre la solution calculé et la solution exacte pour la dérivée de Caputo-Katugampola	40
4.5	L'erreur entre la solution calculé et la solution exacte pour la dérivée de Grünwald-Letnikov	44

Bibliographie

- [1] A.Yahi. Fiche tp5. intégration numérique : méthode du trapèze. *Université Badji Mokhtar , faculté du science de l'ingénieur*, 2018-2019.
- [2] Naga Brahim. Méthodes numériques pour la résolution d'équation différentielle d'ordre non entier. *Université Larbi Ben M'hidi-Oum Bouaghi, faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie*, 2021.
- [3] Maurice Godefroy. La fonction gamma. 2009.
- [4] Bouchama Kaouther. Méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles fractionnaires. *Université Mohamed Boudiaf de M'sila, faculté des mathématiques et de l'informatique*, 2022.
- [5] Adjimi Lobna. Traitement numirique des equations différentielles dordre fractionnelle. *Universite Mohamed Boudiaf de Msila, faculte des mathematiques et de linformatique*, 2018.
- [6] Ben Mebarek Safa. Méthode d'ondelettes pour résoudre une classe d'équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire. *Université Hamma Lakhdar El Oued, faculté des sciences exactes*, 2022.
- [7] Youcef Safia. Quelques méthodes de résolutions numériques des équations différentielles d'ordre fractionnaire. *Université 08 Mai 1945, faculté des mathématiques et de l'informatique*, 2021.
- [8] Vadim Schechtman. Introduction aux fonctions spéciales. *Notes du cours, université de toulous*, 2006.
- [9] Houmor Tarek. Analyse du chaos dans un système d'équations différentielles fractionnaires. *Université Constantine 1, faculté des sciences exactes*, 2014.
- [10] Marc Weilbeer. Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background. *Technical university of Braunschweig*, 2005.
- [11] Xumei Zhang and Junying Cao. A high order numerical method for solving caputo nonlinear fractional ordinary differential equations. *AIMS Mathematics*, pages 13187–13209, 2021.