



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES  
Département de Mathématiques



# MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

**Spécialité :**  
« Mathématiques »

**Option :**  
« Analyse fonctionnelle et Application »

**Présenté Par :**  
**BENHAMADI OUMAIMA GOUTA**  
**CHERMAT HIBET ELLAH**

**Sous L'intitulé :**

---

**La méthode des éléments finis et ses  
application aux EDP**

---

Soutenu publiquement le 21/06/2023  
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr BENALI HALIM	MCA Université de Tiaret	Président
Mr BENIA KHEIR EDDINE	MCB Université de Tiaret	Encadreur
Mme SABIT SOUHILA	MCA Université de Tiaret	Examineur

Année universitaire :2022/2023

# *Remerciement*

✓ Nous remercions avant tout **ALLAH** qui nous a donné la force et la volonté pour élaborer cette œuvre.

✓ Nous devons exprimer notre gratitude a **Mr Benia Kheireddine** d'avoir accepter de nous encadrer avec beaucoup d'attention ainsi que sa gentillesse, sa disponibilité et ses conseils qui nous ont permis d'avancer, non seulement dans le cadre du mémoire, mais aussi dans nos études.

✓ Nous tenons a remercier chaleureusement **Mr Benali Halim** pour l'honneur qu'il nous fait de présider le jury de cette thèse.

✓ Nous remercions également **Mme Sabit Souhila** d'avoir accepter d'examiner ce modeste travail.

✓ Enfin nous adressons nos remerciements à tous ceux qui ont contribué par leurs conseils ou leurs encouragements à l'aboutissement de ce travail : nos familles, nos amis, nos enseignants.

## Résumé

Cette thèse couvre les notions de base pour résoudre les équations en utilisant les formulations variationnelles. L'approche approuvée est la méthode des éléments finis, et figurant sur la méthode propre de Galerkin. Ensuite la définition des bases de ces éléments à partir du degré le plus bas et la notion d'élément finie, puis donner un exemple pour l'application.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaire</b>	<b>9</b>
1.1	<b>Rappels sur l'analyse fonctionnelle</b> . . . . .	9
1.1.1	Espaces vectoriels normés, Normes et semi-norme . . . . .	9
1.1.2	Espaces de Banach . . . . .	11
1.1.3	Espace pré-hilbertien . . . . .	11
1.2	Rappels sur l'analyse mathématique . . . . .	15
1.2.1	La théorie de Distributions . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Introduction aux EDP</b>	<b>24</b>
2.1	Notions élémentaires sur la théorie des problèmes aux limites elliptiques . . . . .	24
2.1.1	Problème en dimension un . . . . .	25
2.1.1.1	Position générale du problème aux limites . . . . .	25
2.1.1.2	Formulation variationnelle . . . . .	27
2.1.1.3	Cadre fonctionnel de la formulation varia- tionnelle . . . . .	28
2.1.1.4	Propriétés de la formulation variationnelle . . . . .	31

2.1.2	problèmes en dimension supérieure . . . . .	35
2.1.2.1	position générale des problème aux limites .	35
2.1.3	Formulation variationnelle . . . . .	40
2.1.4	Cadre fonctionnel de la formulation variationnelle . .	41
2.2	Théorie élémentaire des problèmes variationnels . . . . .	43
2.2.1	Position du problème variationnel . . . . .	44
2.2.2	Unicité et stabilité de la solution du problème varia- tionnel . . . . .	45
2.2.3	Existence d'une solution au problème variationnel .	48
2.2.4	La méthode de Galerkin . . . . .	50
2.2.5	Principe de base d'une méthode de Galerkin . . . . .	51
2.2.6	Le problème discret . . . . .	53
2.2.7	Convergence d'une méthode de Galerkin . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Introduction à la méthode des éléments finis</b>	<b>60</b>
3.1	principe de base . . . . .	60
3.1.1	Élément géométrique . . . . .	60
3.1.2	Fonctions de forme . . . . .	62
3.1.3	Conditions de raccord . . . . .	65
3.2	Eléments finis usuels de plus bas degré . . . . .	70
3.2.1	Eléments finis de plus bas degré monodimensionnels .	70
3.2.2	Eléments finis bidimensionnels . . . . .	72
3.3	Notion d'élément finie . . . . .	80



## Introduction

Dans le domaine de l'ingénierie, l'analyse des problèmes se termine souvent à développer un modèle mathématique( une équation ou un système d'équations différentielles, aux quelles sont ajoutées des conditions aux limites) pouvant représenter d'une manière aussi réaliste que possible le problème recherché, en appuyant sur des théories de base et des hypothèses simplificatrice.

La résolution analytique d'équations différentielles pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. En fait, elle n'est possible que pour des cas très simples. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d'une solution analogue à la solution recherchée peut s'avérer coûteux en temps et en moyens, avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes. Il est plus possible qu'au paravent de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles très complexe.

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les

plus puissantes utilisées dans ce genre de problèmes.

L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes.

En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis.

Le but de ce mémoire consiste à fournir les outils de base nécessaires, à l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Parmi les outils de base, il y a les concepts de distribution, espace de Hilbert, les espaces de Sobolev .

Ce mémoire est structuré par quatre chapitres et une conclusion générale.

1. Le premier chapitre, présente des notations sur l'analyse fonctionnelle, l'espaces de Hilbert et de Banach, avec un rappelle sur l'espace de Sobolev, de Lebesgue et la distribution.
2. Le deuxième chapitre, nous allons basé sur une formulation variationnelle des problèmes d'équations aux dérivées partielles, posées sur un domaine de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \leq 3$  généralement dans les problèmes d'ingénierie), avec des conditions appropriées sur la solution au bord de ce domaine, sont nommés problèmes aux limites. La méthode des éléments finis apparait alors comme une méthode de Galerkin particulière. Ce for-



malisme nous permettra, non seulement d'avoir un cadre général pour la description de cette méthode, mais en plus de bien comprendre ses limites de validité : en particulier, les situations où elle engendre un procédé de résolution instable.

3. Le troisième chapitre présenter les méthodes d'éléments finis les plus simples, qui restent aussi les plus utilisées, pour la résolution des problèmes aux limites du 2ème chapitre .
4. Enfin, on verra une application de La méthode des éléments finis sur un exemple résolu analytique .

## **BREF HISTORIQUE**

Historiquement, l'origine de la méthode peut se trouver dans les travaux de Fermat et Bernouilli( 1743) avec le calcul des variations, puis il faut attendre le début du XX ème siècle avec les progrès en analyse avec la méthode de Galerkin se basant sur des théorèmes de projection dans les espaces de Hilbert.

En 1943, Robert Courant introduit le principe variationnel avec des fonctions de base a support locaux ouvrant la voie a une division d'un domaine considéré en( elements ). Cependant ce n'est qu'avec le développement des ordinateurs que ces travaux trouve leurs applications avec les travaux pionniers de Zienkiewiz et Argyris qui définiront la méthode en 1960.

Ce qui amené le succès de la méthode et sa puissance est l'apport du calcul matriciel, introduit par un ingénieur civil anonyme. La méthode connaît alors un développement fulgurant accompagné par les progrès de l'informatique.

La méthode des éléments-finis est une méthode puissante basée sur une théorie mathématique rigoureuse.

Aujourd'hui, les éléments-finis sont un outil majeur, incontournable en mécanique (fluides et solides, interactions, structures ), et applicable dans de nombreux domaines impliquant des problèmes d'EDP aux limites comme par exemple en mathématiques financières ou l'électromagnétisme.

De nombreux codes industriels( solveurs) existent et sont généralement couplés à un logiciels de CAO 1 ou Computer Aided Design (CAD) en Anglais. Citons Ansys, Abaqus, Robot, LS-dyna, Feap, Code-Aster, Cast3M et bien d'autres.

# Chapitre 1

## Préliminaire

L'objectif de ce chapitre est de donner les outils de base nécessaires à l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Parmi les outils de base, on retrouve les notions de distribution, des espaces de Hilbert et de Sobolev.

Nous omettrons toutefois quelques détails qui ont bien sûr leur importance mais qui ne sont pas essentiels pour une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

## 1.1 Rappels sur l'analyse fonctionnelle

### 1.1.1 Espaces vectoriels normés, Normes et semi-norme

Dans la suite,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

#### **Définition 1.1 :**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Une norme sur  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui satisfait les propriétés suivantes.

1. Pour tous  $x \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a  $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$  (la norme est dite positivement homogène).
2. Inégalité triangulaire : si  $x, y \in E$ , alors  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .
3. Propriété de séparation : si  $x \in E$ ,  $N(x) = 0 \iff x = 0$ .

Une application qui satisfait les propriétés (1) et (2) mais pas forcément (3) est appelé une semi-norme sur  $E$ .

Habituellement une norme est notée par  $N(x) = 0 \iff \|x\|$  ou  $N(x) = |x|$ .

Il est important de retenir l'inégalité suivante, conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire : si  $\|\cdot\|$  est une semi-norme sur  $E$ , alors

$$\forall x, y \in E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Un espace vectoriel normé est la donnée d'un espace vectoriel  $E$  et d'une norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$ .

**Définition 1.2 (Semi-norme) :**

Une **semi-norme** sur  $E$  est une application  $N$  de  $E$  dans l'ensemble des nombres réels positifs vérifiant les axiomes dit d'homogénéité e de sous-additivité, ils s'expriment de la manière suivante :

1. **Homogénéité** :  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \mathcal{N}((\lambda * x) + y) = |\lambda|\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$ .

La propriété manquante est celle de la séparation, qui assure que la norme d'un vecteur est nulle seulement si le vecteur est nul. Cette propriété confère à la semi-norme le statut de norme.

2. **Séparation** :  $\forall x \in E, \mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ .

### 1.1.2 Espaces de Banach

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On dit que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy si

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \quad n, m \geq n_\varepsilon \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans  $E$  est convergente( par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme ).

### 1.1.3 Espace pré-hilbertien

**Définition 1.3 (Forme bilinéaire et produit scalaire) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -space vectoriel.

Une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire si toutes les application partielles  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  et  $y \mapsto \langle x, y \rangle$  sont linéaires

1. Elle est **symétrique** si  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  pour tous  $x, y \in E$ .
2. Elle est **définie positive** si

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in E \quad \text{et si } (\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0).$$

3. Un **produit scalaire** est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

**Définition 1.4 (Espace pré-hilbertien) :**

Un espace pré-hilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est alors un espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On dira par abus de notation que  $E$  est un espace pré-hilbertien si on le considère muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , faisant alors du couple  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace pré-hilbertien.

**Proposition 1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) :**

Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire  $(\langle \cdot, \cdot \rangle)$  (un espace pré-hilbertien). Alors, pour tout vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ ,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

**Espace de Hilbert****Définition 1.5 :**

Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet, c'est-à-dire un espace de Banach dont la norme  $\|\cdot\|$  découle d'un produit scalaire  $(\langle \cdot, \cdot \rangle)$  par la formule

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**Définition 1.6 (Orthogonal) :**

Soit  $H$  un espace de Hilbert

1. Soit  $u, v \in H$ . On dit que  $u$  et  $v$  sont orthogonaux ( et on note  $u \perp v$ ) si  $\langle u, v \rangle = 0$ .
2. Soit  $A \subset H$ . On appelle orthogonale de l'ensemble  $A^\perp = \{u \in H; \langle u, v \rangle = 0 \text{ pour tout } v \in A\}$ .

**Théorème 1.1 (Théorème de décomposition) :**

Soit  $V$  un sous-espace vectoriel fermé de  $H$  ( $H$  désigne un espace de Hilbert). On note l'espace orthogonal à  $V$  :

$$V^T = \{u \in H / (u, u^*) = 0 \quad \forall u^* \in V\}.$$

On a alors

$$H = V \oplus V^T.$$

**Espace de  $LP$** 

Un espace  $LP$  est un espace vectoriel de classes des fonctions dont la puissance d'exposant  $p$  est intégrable au sens de Lebesgue, où  $p$  est un nombre réel strictement positif. Le passage à la limite de l'exposant aboutit à la construction des espaces  $L^\infty$  de fonctions bornées. Les espaces  $LP$  sont appelés **espaces de Lebesgue**.

**Espace mesuré, espace et fonction mesurable**

Nous avons réuni certaines définitions des acquisitions tribales.

**Définition 1.7 (Espace mesuré) :**

Soit  $E$  un ensemble et  $T \subseteq \wp(E)$  une famille de parties de  $E$ . On dit que  $T$  est une tribu sur  $E$  si satisfait les propriétés suivantes :

1.  $A \in T \implies A^c \in T$ , (stabilité par passage au complémentaire).
2. si  $A_n \in T$  pour tout  $n \geq 1$ , alors  $\cup_{n \geq 1} A_n \in T$ , (stabilité par réunion dénombrable).

On dit aussi que  $T$  est une  $\sigma$ -algèbres, ou plus exactement  $\sigma$ -algèbres de Boule, de parties de  $E$ .

**Définition 1.8 :**

On appelle espace mesuré un triplet  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , où  $X$  est un ensemble,  $\mathcal{A}$  une tribu sur  $X$  et  $\mu$  une mesure sur  $\mathcal{A}$ . Le couple  $(X, \mathcal{A})$  est alors appelé un espace mesurable.

**Définition 1.9 (Fonctions mesurables) :**

Le couple  $(T, E)$  est appelé un espace mesurable, Soit  $(E, T_E)$  et  $(F, T_F)$  deux espaces mesurables,  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

On dit que  $f$  est  $(T_E, T_F)$ - mesurable si

$$\forall A \in T_F : f^{-1}(A) \in T_E$$

**Définition 1.10 (Exposant fini) :**

La norme  $p$  sur l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{R}^n$  s'étend aux fonctions continues sur un segment  $[a, b]$  par

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

et en plus généralement aux fonctions mesurables sur un espace mesuré  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  et à valeurs réelles ou complexes et de puissance  $p$  intégrable par

$$\|f\|_p = \left( \int |f(t)|^p d\mu \right)^{1/p},$$

or une fonction positive est d'intégrale nulle si et seulement si elle s'annule presque partout, c'est-à-dire sur le complémentaire d'un ensemble négligeable. L'espace  $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  est alors défini comme quotient de l'espace



des fonctions mesurables  $p$  intégrables, souvent noté :  $\mathcal{L}p(X, A, \mu)$ , par le sous-espace vectoriel des fonctions presque partout nulles. Ce quotient identifie donc les fonctions qui sont dans la même classe pour la relation d'équivalence  $\ll f \sim g \gg$  ssi  $\ll f$  et  $g$  sont égales presque partout  $\gg$ .

**Définition 1.11 (Exposant infini) :**

L'espace  $\mathcal{L}(X, A, \mu)$  est défini comme l'espace vectoriel des fonctions  $\mu$ -essentiellement bornées( c'est-à-dire les fonctions bornées sur le complémentaire d'un ensemble négligeable), muni de la semi-norme borne supérieure essentielle .

Ensuite, l'espace vectoriel normé  $L^\infty(X, A, \mu)$  est, comme précédemment, le quotient de  $\mathcal{L}(X, A, \mu)$  par le sous-espace des fonctions nulles presque partout.

**Proposition 1.2 :**

L'espace  $L^2(X, A, \mu)$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_2$ , est un espace de Hilbert( réel) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :

$$\|f\|_{L_2(\mu)} = (f, f)_{L^2(\Omega)}^{1/2} = \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

## 1.2 Rappels sur l'analyse mathématique

### 1.2.1 La théorie de Distributions

Une distribution( également appelée fonction généralisée) est un objet qui généralise la notion de fonction et de mesure. La théorie des distributions étend la notion de dérivée à toutes les fonctions localement intégrables

et au-delà, et est utilisée pour formuler des solutions à certaines équations aux dérivées partielles. Elles sont importantes en physique et en ingénierie où beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement à des équations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions ordinaires.

**Définition 1.12 (Espace de fonctions-test) :**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^N$  dont le support est un compact  $K$  contenu dans  $\Omega$  ( c'est à dire nulles hors de  $K$  ). On note  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  l'ensemble des restrictions à  $\overline{\Omega}$  des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ .

**Exemple 1.1 :**

On sait que la fonction :

$$\theta_1(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

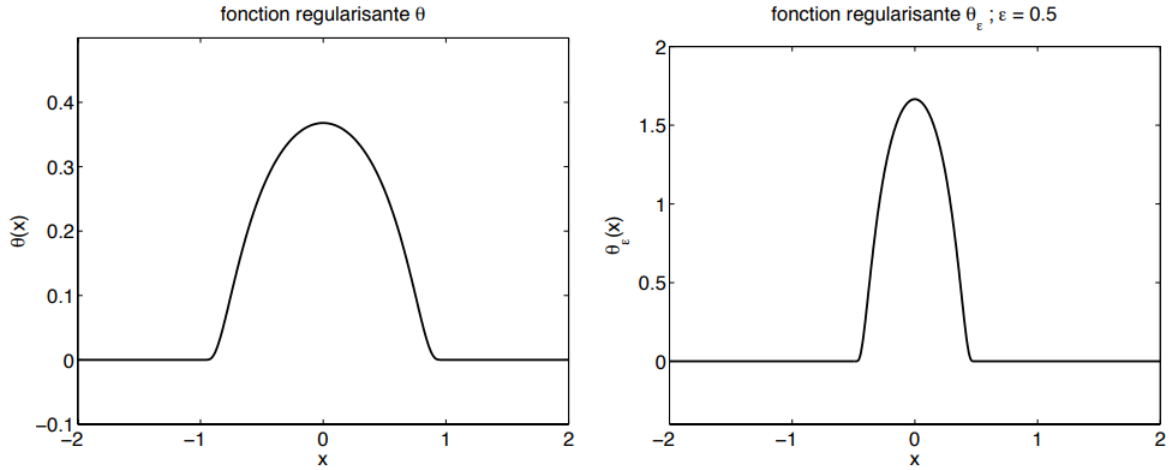
est de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Donc la fonction  $\theta(x) = \theta_1(1 - |x|^2)$  pour  $x \in \mathbb{R}^N$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\text{supp} = ] - 1, 1[$ .

**Famille régularisante** — Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{\theta(x/\varepsilon)}{\int_{\mathbb{R}^N} \theta(y/\varepsilon) dy}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

1. Support :  $\text{Supp}(\theta_\varepsilon) = B(0, \varepsilon)$ .



2. Positivité :  $\theta_\epsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$ .
3. Intégrale :  $\int_{\mathbb{R}^N} \theta_\epsilon(x) dx = 1$ .
4. C'est une fonction-test sur  $\mathbb{R}^N$  :  $\theta_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ .

L'intérêt de cette fonction  $\theta_\epsilon$  réside dans le lemme suivant ;

**Lemme 1.1 :**

1. Soit  $f \in C(\mathbb{R}^N)$ , alors  $f * \theta_\epsilon \in C(\mathbb{R}^N)$  Si de plus le support de  $f$  est compact, alors  $f * \theta_\epsilon$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}^N$  et  $f * \theta_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ .
2. Soit  $f \in C(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors  $f * \theta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  *etsi*  $p + \infty$  alors  $f * \theta$  converge vers  $f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^N)$ .

**Notation :**

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$  un multi-entier. On note :

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \quad \text{avec} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N.$$

**Définition 1.13 :**

On dit que  $u$  est une distribution sur  $\Omega$  si  $u$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\Omega)$

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle u, \varphi \rangle,$$

qui vérifie la propriété de continuité suivante : Pour tout  $K$  compact de  $\Omega$ , il existe un entier  $k$  et une constante  $C_k$  tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ avec } \text{sup}(\varphi) \subset K, \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq k} \{ \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \}.$$

On note  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'espace des distributions sur  $\Omega$ .

**Remarque 1.1 :**

Lorsque, dans cette définition, l'entier  $k$  peut être choisi indépendant de  $\varphi$ , on dit que la distribution est d'ordre fini. La plus petite valeur de  $k$  possible est appelée l'ordre de  $u$ .

**Distributions particulières**

Deux classes particulières de distributions d'ordre fini sont particulièrement utiles ( la première est incluse dans la seconde ) :

1. **Distributions à support compact** : On note  $\xi(\Omega)$  — ou  $C^\infty(\Omega)$  — l'espace de fréchet des fonctions indéfiniment dérivables sur  $\Omega$ . Son dual topologique  $\xi'(\Omega)$  s'identifie de la manière suivante à l'ensemble des distributions à support compact : l'inclusion  $\mathcal{D}(\Omega) \subset \xi(\Omega)$ , continue et d'image dense, induit une injection linéaire  $\xi'(\Omega) \mapsto \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $S \mapsto$

$S_{\mathcal{D}(\Omega)}$ , dont l'image est exactement le sous-espace vectoriel des distributions  $T$  telles que  $\text{supp}(T)$  soit compact,  $\text{sup}$  désignant ici le support d'une distribution.

2. **Distributions tempérées** : Les distributions tempérées sont celles qui s'étendent continûment. Elles jouent un rôle très important car la notion de transformée de Fourier peut être étendue à ces dernières.

### Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

#### Définition 1.14 :

On dit qu'une suite de distributions  $u_n$  converge au sens des distributions vers  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  ssi :

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle u_n, \varepsilon \rangle \mapsto \langle u, \varepsilon \rangle \text{ dans } \mathbb{R}.$$

On notera dans ce cas  $u_n \mapsto u$ .

#### Remarque 1.2 :

Soit  $u_n$  est une suite de distributions telle que,  $\forall \varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ , la suite numérique  $\langle u_n, \varepsilon \rangle$  vers une limite. Alors, si l'on note  $\langle u, \varepsilon \rangle$  cette limite,  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

#### Lemme 1.2 :

1. Si  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^1(\Omega)$  alors  $f_n \rightarrow f$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .
2. On a  $\theta_\varepsilon \rightarrow \delta_0$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Dérivation des distributions

### Définition 1.15 :

Soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Pour  $1 \leq i \leq N$ , on note  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Pour  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , on note

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in \mathcal{D}'(\Omega)^N.$$

De même, si  $\alpha$  est un multi-entier, on note  $\partial^\alpha u$  la distribution

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

### Remarque 1.3 :

1. Si  $f \in C^1(\Omega)$ , on a de façon classique et par simple intégration par parties sur un segment,  $\varphi$  étant nulle au voisinage de  $\partial\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

La dérivée de  $f$  au sens des distributions est donc la dérivée usuelle.

2. La dérivation est une opération continue sur  $\mathcal{D}'(\Omega)$  il est facile de voir que si  $u_n \rightarrow u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , alors  $\forall \alpha$  multi-entier,  $\partial^\alpha u_n \rightarrow \partial^\alpha u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

### Exemple 1.2 (Dérivée de la fonction de Heaviside $H$ ) :

La fonction de Heaviside est définie comme suit :  $H(x) = 1$  pour  $x > 0$  et  $H(x) = 0$  sinon.

Alors, la dérivée de  $H$  est la masse de Dirac en 0. En effet, pour  $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , on a

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} H \varphi' dx = - \int_0^{+\infty} \varphi' dx = \varphi(0) \langle \delta, \varphi \rangle.$$

### L'espace de Sobolev :

En analyse mathématique, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme  $LP$  de la fonction elle-même et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre.

Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach.

Intuitivement, un espace de Sobolev est un espace de Banach de fonctions pouvant être dérivées suffisamment ou deux fois, pour donner sens par exemple à une équation aux dérivées partielles et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction.

Les espaces de Sobolev sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

Les espaces de Sobolev  $H^1(\Omega)$

#### Définition 1.16 :

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On pose

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \partial u / \partial x_i \in L^2(\omega), \forall i = 1, \dots, N\}.$$

Bien entendu, la dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction  $u \in L^2(\Omega)$  est dans  $H^1(\Omega)$ , s'il existe des fonctions  $v_1, \dots, v_n$  dans  $L^2(\Omega)$  telles que :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\omega} v_i \varphi dx, \forall \varphi \in D(\omega) \forall i = 1, \dots, N.$$

on lui associe le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left( uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

et la norme associée est notée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (v, v)_{H^1(\Omega)}^{1/2} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

### Proposition 1.3 :

L'espace  $H^1(\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$  est un espace de Hilbert séparable.

### Généralisation :

On définit plus généralement les familles d'espaces suivantes :

- Les espaces  $H^m(\Omega)$ , définis pour  $m \in \mathbb{N}$  par :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \forall \alpha \text{ multi-entier tel que } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^2\}.$$

Munis du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx,$$



et de la norme

$$\|u\|_{H^m} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

ce sont des espaces de Hilbert.

- Les espaces  $W^{m,p}(\Omega)$ , définis pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \text{ multi-entier tel que } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

Munis de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}, \quad \text{pour } p < +\infty$$

et

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}$$

ce sont des espaces de Banach. Dans le cas  $p = 2$ , les normes  $\|\cdot\|_{W^{m,2}}$  et  $\|\cdot\|_{H^m}$  sont équivalentes.

L'espace de Sobolev  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$

**Définition 1.17 :**

Maintenant un autre espace de Sobolev qui est  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites.

L'espace de Sobolev  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  est défini comme étant l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ .

**Définition 1.18 :**

Nous dirons qu'un ouvert  $\Omega$  est borné dans une direction s'il existe un vecteur unitaire  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^N$  et une constant  $A > 0$  tels que  $\Omega \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : -A \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} \leq A\}$ .

# Chapitre 2

## Introduction aux EDP

### 2.1 Notions élémentaires sur la théorie des problèmes aux limites elliptiques

En analyse numérique, la méthode des éléments finis( MEF, ou FEM pour finite element method en anglais) est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques( mécaniques, thermodynamiques, acoustiques, etc ).

Cette méthode permet par exemple de calculer numériquement le comportement d'objets même très complexes, à condition qu'ils soient continus et d'écrits par une équation aux dérivées partielles linéaire : mouvement d'une corde secouée par l'un de ses bouts, comportement d'un fluide arrivant à grande vitesse sur un obstacle, déformation d'une structure métallique, etc.

## 2.1.1 Problème en dimension un

### 2.1.1.1 Position générale du problème aux limites

La forme générale des problème aux limites elliptiques est la suivante : il s'agit de déterminer une fonction inconnue  $u$  sur l'intervalle  $]0, L[$ , qui est le **domaine** où est posé le problème aux limites elliptique, qui satisfait les conditions suivantes.

1. **Une équation aux dérivées partielles** ( équation différentielle ici puisqu'il n'y a qu'une variable de dérivation dans un problème en dimension un )

$$-\partial_x(a(x)\partial_x u)(x) + a_0(x)u(x) = f(x), x \in ]0, L[. \quad (2.1)$$

2. **Des conditions aux limites** : sur la frontière du domaine (ici les points  $x = 0$  et  $x = L$ ). Nous prendrons ici pour d'écrire les différentes situations qui peuvent se présenter en pratique :

- (a) **Condition de Dirichlet** en  $\{x = 0\}$

$$u(0) = g_0. \quad (2.2)$$

- (b) **Condition de Fourier-Robin** : pour  $(\lambda \neq 0)$ , **de Neumann** (pour  $\lambda = 0$ ), en  $\{x = L\}$

$$(a\partial_x u)(L) + \lambda u(L) = h_0. \quad (2.3)$$

Les données peuvent être classées suivant les rubriques suivantes.

### 3. Coefficients de l'EDP :

Ce sont les deux fonctions  $a$  et  $a_0$ , (éventuellement définies seulement presque partout sur  $]0, L[$ ). Les propriétés physiques du système étudié assurent que le coefficient  $a$  vérifie la propriété suivante ( qui caractérise le caractère elliptique du problème et qui sera fondamentale aussi bien d'un point de vue théorique que pour les propriétés des schémas d'approximation numérique) : il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta, \quad \text{pour tout } x \in ]0, L[ \quad (2.4)$$

Le coefficient  $a_0$  est généralement nul. Il apparait lorsqu'on utilise une semi-discrétisation en temps pour un problème évoluant avec le temps ou s'il y a une absorption d'énergie par des forces de frottement. Il vérifie : il existe une constante  $\beta_0$  telle que

$$0 \leq a_0(x) \leq \beta_0, \quad \text{pour tout } x \in ]0, L[ \quad (2.5)$$

#### (a) Second membre de l' EDP :

Il est donné par la fonction  $f$  qui peut être définie seulement presque partout sur  $]0, L[$ . Nous préciserons la classe fonctionnelle au quelle elle appartient lors de l'étude de l'existence-unicité

d'une solution au problème aux limites.

(b) **Condition aux limites de Dirichlet :**

Elle correspond physiquement à une condition imposée, à une contrainte sur le système. On connaît la solution au point  $x = 0$ . Sa valeur est donnée et égale ici à  $g_0$ .

(c) **Condition de Neumann ou de Fourier-Robin :**

Elle correspond au cas où on laisse le système physique évoluer librement. Le paramètre  $\lambda \geq 0$  traduit une réaction de l'extérieur et, plus précisément une absorption de l'énergie par l'extérieur.

### 2.1.1.2 Formulation variationnelle

L'étude de l'existence-unicité d'une solution pour le problème (2.1,2.2,2.3) et la mise en oeuvre d'un schéma pour sa résolution numérique passent par sa formulation sous forme d'un problème variationnel. La technique de base pour l'effectuer repose sur une formule d'intégration par parties. Pour cela, on considère une fonction test  $v$ , quelconque pour l'instant. On écrit

$$-\int_0^L \partial_x(a\partial_x u)v dx + \int_0^L a_0 uv dx = \int_0^L f v dx. \quad (2.6)$$

Et ensuite :

$$-\int_0^L \partial_x(a\partial_x u)v dx = (a\partial_x u)(L)v(L) - a(\partial_x u)(0)v(0) + \int_0^L a\partial_x u\partial_x v dx. \quad (2.7)$$

En imposant à la fonction test de s'annuler là où est donnée une condition de Dirichlet, on obtient le problème variationnel

$$\begin{cases} u(0) = g_0, \quad \forall v, v(0) = 0, \\ \int_0^L (a \partial_x u \partial_x v + a_0 uv) dx + \lambda u(L)v(L) = \int_0^L f v dx + h_0 v(L). \end{cases} \quad (2.8)$$

Remarquons que, si les conditions de **Dirichlet sont imposées** dans la formulation, celles de **Neumann sont implicites** .

### 2.1.1.3 Cadre fonctionnel de la formulation variationnelle

Le cadre fonctionnel, comme la formulation variationnelle, est important non seulement pour établir rigoureusement un résultat d'existence-unicité de la solution mais aussi pour comprendre la dérivation des schémas numériques d'approximation de celle-ci.

Pour que la formulation variationnelle ait un sens, il faudrait d'abord que toutes les intégrales existent. Comme  $a$ , et  $a_0$  sont bornées , i.e. dans  $L^\infty(]0, L[)$  ceci revient à exiger que  $u, \partial_x u, v \partial_x v$ , et  $f$  soient dans  $L^2(]0, L[)$  les dérivations étant prises au sens des distributions.

On voit donc que l'espace fonctionnel, où on doit chercher la solution et faire varier la fonction test, est l'espace de Sobolev suivant

$$H^1(]0, L[) := \{v \in L^2(]0, L[); \partial_x v \in L^2(]0, L[)\}. \quad (2.9)$$

L'importance de ce cadre fonctionnel vient de la propriété suivante.

**Théorème 2.1 :**

L'espace  $H^1(]0, L[)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(]0, L[)} = \int_0^L (\partial_x u \partial_x v + u, v) dx. \quad (2.10)$$

**Démonstration :**

Il est immédiat de vérifier que l'expression de l'énoncé est un produit scalaire.

Introduisons quelques notations :

$$|v|_{0, (]0, L[)} := \left\{ \int_0^L uv dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad |v|_{1, (]0, L[)} := \left\{ \int_0^L \partial_x u \partial_x v dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

respectivement la norme dans  $L^2(]0, L[)$  et la semi-norme d'ordre 1. La norme associée au produit scalaire est ainsi

$$\|v\|_{1, (]0, L[)} = \left\{ |v|_{1, (]0, L[)}^2 + |v|_{0, (]0, L[)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

Il suffit ainsi de vérifier que si  $\{v_n\}_{n \leq 0}$  est telle que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|v_n - v_m\|_{1, (]0, L[)} = 0, \quad (2.13)$$

alors il existe  $v \in H^1(]0, L[)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{1, (]0, L[)} = 0 \quad (2.14)$$

Mais comme

$$|v_n - v_m|_{0, (]0, L[)} \leq \|v_n - v_m\|_{1, (]0, L[)} \quad , \quad |v_n - v_m|_{1, (]0, L[)} \leq \|v_n - v_m\|_{1, (]0, L[)}$$

et que l'espace  $L^2(]0, L[)$  est **complet**, il existe  $v$  et  $g$  dans  $L^2(]0, L[)$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{0, (]0, L[)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\partial_x v_n - g\|_{0, (]0, L[)} = 0$$

La convergence dans  $L^2$  entraînant la convergence au sens des distributions, on a ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_x v_n = \partial_x v$$

au sens des distributions .

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_x v_n = g$  dans  $L^2$  et donc au sens des distributions, il vient  $\lim_{\infty} \partial_x v = g$ , On a donc bien vérifié 2.13.

□

Il reste à s'assurer que les conditions de Dirichlet ont un sens de même que le terme  $\lambda u(L)v(L)$ . Le fait qu'on soit en dimension un permet de répondre relativement facilement à cette question. En effet, l'espace  $H^1$  possède les propriétés importantes suivantes qui résultent de celles de l'intégrale de Lebesgue :

-Tout  $v \in H^1(]0, L[)$  est continu sur  $[0, L]$

$$H^1(]0, L[) \subset C^0([0, L]); \quad (2.15)$$

-De plus, la formule d'intégration par parties suivante est vérifiée

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } 0 \leq a < b \leq L, \quad u, v \text{ dans } H^1(]0, L[) \\ \int_a^b (u \partial_x v + v \partial_x u) dx = u(b) \times v(b) - u(a) \times v(a) \end{array} \right. \quad (2.16)$$



En particulier, en prenant  $v = 1$  on déduit de 2.16, la formule suivante :

$$u(x) = u(a) + \int_a^x \partial_x u(t) dt. \quad (2.17)$$

Les deux membres de la formulation variationnelle 2.8 ont ainsi un sens. Pour préparer l'étude de cette formulation, nous l'écrivons à l'aide des notations suivante

$$a(u, v) := \int_0^L (a \partial_x u \partial_x v + a_0 uv) dx + \lambda u(L)v(L), \quad (2.18)$$

$$Lv := \int_0^L f v dx + h_0 v(L) \quad (2.19)$$

$$V := \{v \in H^1(]0, L[); v(0) = 0\} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} u \in H^1(]0, L[) \text{ telque } u - g_0 \in V, \quad \forall v \in V, \\ a(u, v) := Lv. \end{cases} \quad (2.21)$$

#### 2.1.1.4 Propriétés de la formulation variationnelle

Nous allons maintenant mettre en évidence les propriétés de la formulation variationnelle (2.21) qui permettent de vérifier qu'elle admet une solution et une seule et de développer les procédés d'approximation numérique de sa solution.

Les **propriétés algébriques** suivantes sont de vérification immédiate.

**Forme bilinéaire** : L'application

$$(u, v) \in H^1(]0, L[) \mapsto a(u, v) \in \mathbb{R}$$

est bilinéaire, i.e.,  $u \mapsto a(u, v)$ , pour  $v$  fixé, et  $v \mapsto a(u, v)$ , pour  $u$  fixé, sont toutes les deux linéaires.

**Forme linéaire** : L'application

$$v \in H^1(]0, L[) \mapsto Lv \in \mathbb{R}$$

est linéaire.

Ces formes ont en outre des **propriétés de continuité**. Ces propriétés sont importantes en pratique. Elles résultent directement du fait que les applications précédentes sont bien définies.

**Continuité de la forme bilinéaire** : Elle consiste à s'assurer qu'il existe une constante  $M$ , indépendante de  $u$  et  $v$  dans  $H^1(]0, L[)$  telle que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_{1,]0,L[} \|v\|_{1,]0,L[}. \quad (2.22)$$

On va faire cette vérification ici pour voir sur un exemple comment elle résulte du sens qu'on a donné ci-dessus à l'écriture de la formulation variationnelle. En pratique, on ne s'attarde sur cette étude que si elle fait apparaître une instabilité, i.e. lorsque  $M$  dépend d'un paramètre et tend vers  $+\infty$  lorsque ce paramètre tend vers une valeur limite.

Ici, on a clairement une décomposition de  $a(u, v)$  sous la forme d'une somme de trois termes qu'on traite un à un.

On a d'abord par (2.4)

Pour majorer cette inégalité, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_0^L a \partial_x u \partial_x v dx \right| \leq \int_0^L |a| |\partial_x u| |\partial_x v| dx \leq \beta \|u\|_{1,]0,L[} \|v\|_{1,]0,L[} \leq \beta \|u\|_{1,]0,L[} \|v\|_{1,]0,L[}.$$

On a de même

$$\left| \int_0^L a_0 u v dx \right| \leq \beta_0 |u|_{0,]0,L[} |v|_{0,]0,L[} \leq \beta_0 \|u\|_{1,]0,L[} \|v\|_{1,]0,L[}$$

Pour le troisième terme, on utilise la formule 2.17 qui donne

$$\begin{aligned} |u(L)| &= \left| u(x) + \int_x^L \partial_x u(t) dt \right| \leq |u(x)| + \int_x^L |\partial_x u(t)| dt \\ &\leq |u(x)| + \sqrt{L-x} |u|_{1,]0,L[} \end{aligned}$$

On intègre une nouvelle fois entre 0 et  $L$  pour obtenir, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, continue puis discrète, une nouvelle fois,

$$L|u(x)| \leq \sqrt{L} |u|_{0,]0,L[} + \frac{2}{3} L^{\frac{3}{2}} |u|_{1,]0,L[} \leq \sqrt{L} (1 + \frac{4}{9} L^2)^{1/2} \|u\|_{1,]0,L[}$$

soit l'estimation

$$|u(L)| \leq \left( \frac{4}{9} L + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \|u\|_{1,]0,L[}$$

On a alors 2.22 avec  $M = \beta + \beta_0 + \lambda \left( \frac{4}{9} L + \frac{1}{L} \right)^{1/2}$

**Continuité de la forme linéaire** : Elle consiste à s'assurer de l'existence d'une constante  $C$ , indépendant de  $v$  dans  $H^1(]0, L[)$  telle que

$$|Lv| \leq C \|v\|_{1,]0,L[}. \quad (2.23)$$

Cette vérification s'effectue comme pour la forme bilinéaire ci-dessus.

En fait la propriété, **généralement non immédiate**, qui est **cruciale** et dont il faut s'assurer, est la coercivité. C'est une des caractéristiques des problèmes elliptiques.

La coercivité consiste à vérifier la propriété suivante dans  $V$  (et non dans  $H^1(]0, L[)$  tout entier où elle peut être fausse !)

$$\exists \gamma > 0 : a(u, v) \geq \gamma \|v\|_{1,]0, L[}^2, \forall v \in V, \quad (2.24)$$

Remarquons que cette inégalité n'est pas triviale. Par exemple, si  $v$  est constant, le premier membre peut être nul (pour  $a_0$  et  $\lambda$  nuls !), alors que le second membre est  $> 0$ . Le fait que  $v$  soit dans  $V$  est fondamental.

Prenons donc  $v \in V$ . On a

$$a(u, v) = \int_0^L a |\partial_x v|^2 dx + \int_0^L a_0 |v|^2 dx + \lambda |v(L)|^2 \geq \alpha \|v\|_{1,]0, L[}^2 \quad (2.25)$$

car on a juste  $a_0 \geq 0$  et  $\lambda \geq 0$ . Le second membre de (2.25) dépend seulement de la semi-norme d'ordre 1 et non la norme dans  $H^1(]0, L[)$ . Il s'annule sur les constantes par exemple. Le point fondamental dans la vérification de la coercivité est l'inégalité établie dans la proposition suivante

**Proposition 2.1 (Inégalité de Poincaré) :**

Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $v \in V$  telle que

$$\|v\|_{0,]0, L[} \leq C \|v\|_{1,]0, L[}. \quad (2.26)$$

**Démonstration** On utilise là encore la relation (2.17) pour écrire

$$v(x) = \int_0^x \partial_x v(t) dt$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|v(x)|^2 \leq x \|v\|_{1,]0, L[}^2$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et  $L$ , il vient alors

$$|v|_{0,]0,L[}^2 \leq \frac{L^2}{2} |v|_{1,]0,L[}^2$$

D'où l'inégalité avec  $C = L/\sqrt{2}$

On déduit alors immédiatement la coercivité. A partir de (2.25), on écrit

$$a(u, v) \geq \frac{\alpha}{2} |v|_{1,]0,L[}^2 + \frac{\alpha}{2} |v|_{1,]0,L[}^2 \geq \frac{\alpha}{2} |v|_{1,]0,L[}^2 + \frac{\alpha}{L^2} |v|_{1,]0,L[}^2 = \alpha \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{L^2}\right) \|v\|_{1,]0,L[}^2$$

obtenant ainsi l'inégalité (2.24) avec  $\gamma = \alpha \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{L^2})$ .

## 2.1.2 problèmes en dimension supérieure

### 2.1.2.1 position générale des problème aux limites

Le domaine où est posé le problème aux limites est maintenant un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$  ou  $3$ . La géométrie peut être maintenant extrêmement variée et complexe comme le suggère les deux exemples suivants

La forme de la seconde figure se compose de segments parallèles aux axes. Elle peut être écrite assez simplement. La première forme est bien plus complexe.

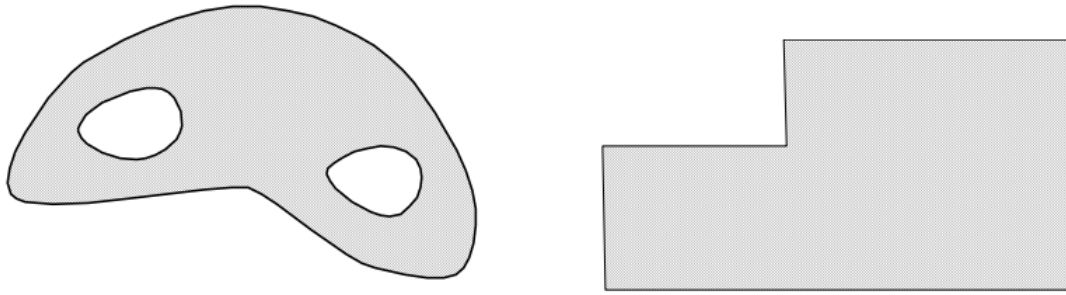


FIGURE 2.1 – Deux types de géométrie

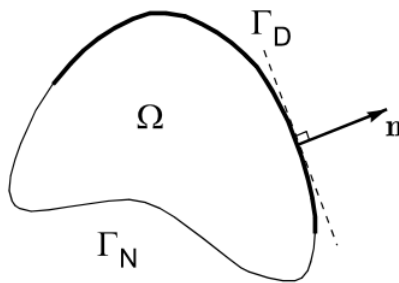
La position générale des problèmes aux limites est alors la suivante.

### 1. Equation aux dérivées partielles

$$-\sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j}u) + a_0u = f \text{ dans } \Omega \quad (2.27)$$

où  $(\sum_{i,j=1}^N)$  est la somme double  $(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N)$

2. **Conditions aux limites** Elles sont posées sur la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ . On effectue une partition sans recouvrement de  $\Gamma$  en  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  (éventuellement  $\Gamma_D$  ou  $\Gamma_N$  peut être vide).



3. **Condition de Dirichlet**  $u = g$  sur  $\Gamma_D$

4. **Conditions de Neumann** (ou de Fourier-Robin pour  $\lambda \neq 0$ )

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_{x_j} u \, n_i = h \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (2.28)$$

où  $n_i$  est la composante relativement à l'axe  $x_i$  de la normale  $\mathbf{n}$  unitaire à  $\Gamma$  orientée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

Pour les données, nous reprenons la classification de la dimension un mais maintenant  $g, h$  et  $\lambda$  sont des fonctions.

### 1. Coefficients de l'EDP

Ce sont maintenant  $N^2 + 1$  fonctions :  $a_{ij}, i, j = 1, \dots, N$ , et  $a_0$  qu'on supposera dans  $L^\infty(\Omega)$  pour couvrir les besoins des applications en pratique. Nous supposerons que  $a_0$  vérifie l'analogie de condition 2.5 en remplaçant  $]0, L[$  par le domaine  $\Omega$ . L'inégalité 2.4 se généralise par **l'inégalité d'ellipticité suivante** :

$$\exists \alpha > 0 : \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \xi_j \xi_i \geq \alpha \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \quad (2.29)$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et tout système  $\xi_1, \dots, \xi_N$  nombres réels.

### 2. Coefficient dans la condition de Fourier-Robin

La fonction  $\lambda$  joue un rôle sur  $\Gamma_N$  analogue à celui de  $a_0$  sur  $\Omega$ . On

suppose qu'elle est dans  $L^\infty(\Gamma_N)$  et qu'elle vérifie

$$\lambda(x) \geq 0, \text{ pour presque tout } x \in \Gamma_N. \quad (2.30)$$

### 3. Second members

- (a) **Second membre de L'EDP.** Comme en dimension un, on supposera simplement que  $f$  est dans  $L^2(\Omega)$ .
- (b) **Second membre de la condition de Neumann.** Si on n'a pas besoin de travailler avec les conditions minimales de régularité, il suffit de supposer que  $h \in L^2(\Gamma_N)$
- (c) **Second membre de la condition de Dirichlet.** La condition de Dirichlet est plus difficile à poser car la solution du problème aux limites n'est plus forcément continue comme en dimension un. Cependant, ces difficultés n'apparaissent pas au niveau du schéma de résolution numérique. Comme en dimension un, où la condition a été exprimée par  $u - g_0$  s'annule en  $\{x = 0\}$ , nous supposons que la fonction  $g$  est en fait définie sur  $\Omega$  et qu'elle est dans la même classe fonctionnelle que la solution  $u$ . La condition  $u = g$  sur  $\Gamma_D$  est alors prise au sens où  $u - g$  s'annule sur  $\Gamma_D$  dans une signification qui sera précisée par la suite.



Pour terminer sur la position du problème aux limites, notons qu'on condense souvent l'écriture en utilisant la notation matricielle. Ceci donne une forme pour l'équation 2.27 et la condition aux limites (2.28) analogue respectivement à l'équation (2.1) et à la condition (2.3). On note donc

4. **Matrice  $\mathbf{A}$**  :matrice  $N \times N$ , de coefficients  $a_{ij}$ ,
5. **Gradient de la solution** :c'est le vecteur  $\nabla u$  colonne de composante  $\partial_{x_j} u$

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_N} u \end{bmatrix},$$

6. **Divergence  $\nabla \cdot \mathbf{v}$**  d'un vecteur colonne  $\mathbf{v}$  à N composante  $v_1, \dots, v_n$

$$\nabla \cdot v := \partial_{x_1} v_1 + \dots + \partial_{x_N} v_N,$$

7. **Produit scalaire** de deux vecteurs colonne  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$ , de composantes respectives  $v_1, \dots, v_N$  et  $w_1, \dots, w_N$ ,

$$(v, w) = u_1 v_1 + \dots + u_N v_N.$$

A l'aide de ces notations, le problème aux limites se réécrit

$$\begin{cases} -\nabla \cdot A \nabla u + a_0 u v = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \Gamma_D, \quad A \nabla u \cdot n + \lambda u = h & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (2.31)$$

### 2.1.3 Formulation variationnelle

On utilise là aussi une intégration par parties basée sur la formule de Green suivante

$$\int_{\Omega} \partial_{xi} w dx = \int_{\Gamma} w n_i d\Gamma \quad (2.32)$$

qui donne ici

$$- \int_{\Omega} \partial_{xi} (a_{ij} \partial_{xj} u) v dx = \int_{\Omega} a_{ij} \partial_{xj} u \partial_{xi} v dx - \int_{\Gamma} v a_{ij} \partial_{xj} u n_i d\Gamma$$

.

En multipliant donc l'équation (2.27) par la fonction test  $v$  et en intégrant par parties, on obtient

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \partial_{xj} u \partial_{xi} v dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma} v a_{ij} \partial_{xj} u n_i d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx.$$

En imposant  $v = 0$  sur  $\Gamma_D$  et en utilisant la condition (2.28), on arrive à l'équation variationnelle

$$a(u, v) = Lv \quad (2.33)$$

avec

$$a(u, v) := \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \partial_{xj} u \partial_{xi} v dx + \int_{\Gamma_N} \lambda u v d\Gamma \quad (2.34)$$

$$Lv := \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_N} h v d\Gamma \quad (2.35)$$

### 2.1.4 Cadre fonctionnel de la formulation variationnelle

Tout comme en dimension un, pour que les intégrales sur  $\Omega$  soient définies, il suffit que  $u$  et  $v$  soient dans L'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega); \partial_{x_j} v \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, N\} \quad (2.36)$$

En adaptant la démonstration de la dimension un, on obtient directement que  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \partial_{x_j} u \partial_{x_j} v dx + \int_{\Omega} u v dx.$$

On note là encore

$$|v|_{0,\Omega} := \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad (2.37)$$

$$|v|_{1,\Omega} := \left\{ \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} |\partial_{x_j} u|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad (2.38)$$

$$\|v\|_{1,\Omega} := \{|v|_{1,\Omega}^2 + |v|_{0,\Omega}^2\}^{1/2}. \quad (2.39)$$

On doit maintenant définir la condition aux limites de Dirichlet ou les intégrales sur  $\Gamma_N$ . Malheureusement, la propriété  $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$  n'est pas vérifiée en *dimension*  $> 1$ . On a cependant le théorème, dit de trace suivant, qui permet de donner un sens à la condition  $v = 0$  sur  $\Gamma_D$  et à l'intégrale sur  $\Gamma_N$ . Les conditions d'application de ce théorème nécessitent un minimum de régularité pour la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ . Ces conditions

sont difficiles à décrire en général bien qu'elles soient satisfaites dans la quasi-totalité des situations pratiques et plus encore dans celles où une résolution numérique est envisageable. C'est pourquoi nous supposons implicitement qu'elles sont vérifiées.

**Théorème 2.2 (Théorème de trace) :**

L'application, définie pour  $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  par  $v|_{\Gamma}$  se prolonge en une application linéaire, continue, de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma)$ .

La démonstration de théorème, assez compliquée, sera admise. En gros, ce théorème énonce que, pour  $v$  dans  $H^1(\Omega)$ ,  $v|_{\Gamma}$  a un sens comme fonction de  $L^2(\Gamma)$ . Observons qu'on ne peut pas définir  $v|_{\Gamma}$  à partir de la seule donnée de  $v$  dans  $L^2(\Omega)$ .

- Si  $v$  est dans  $H^1(\Omega)$ , on peut ainsi imposer à la fonction  $v|_{\Gamma}$ , qui est dans  $L^2(\Omega)$ , de s'annuler sur  $\Gamma_D$  (presque partout pour la mesure  $d\Gamma$ ). On peut ainsi définir le sous-espace

$$V := \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_D} = 0\} \quad (2.40)$$

On peut alors démontrer le résultat suivant.

**Proposition 2.2 :**

Le sous-espace  $V$  est fermé dans  $H^1(\Omega)$ .

**Démonstration** Elle est une simple conséquence du théorème (2.2). Si  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  est une suite contenue dans  $V$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$  dans  $H^1(\Omega)$ , ce théorème donne

$$\int_{\Gamma} |v|^2 = \int_{\Gamma} |v_n - v|^2 d\Gamma \leq \int_{\Gamma} |v_n - v|^2 d\Gamma \leq C^2 \|v_n - v\|_{1,\Omega}^2.$$

En passant à la limite, pour  $n \rightarrow \infty$ , sur le dernier terme, on obtient

$$\int_{\Gamma} |v|^2 d\Gamma = 0.$$

Ceci exprime exactement que  $v \in V$ .

□

La condition de Dirichlet sera prise au sens suivant : il existe une fonction, toujours notée  $g$ , dans  $H^1(\Omega)$  telle que

$$u - g \in V. \quad (2.41)$$

On peut donner alors la formulation variationnelle dans le cadre précis suivant

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), u - g \in V, \quad \forall v \in V, \\ a(u, v) = Lv. \end{cases} \quad (2.42)$$

Cette formulation a les mêmes propriétés de continuité que la formulation en dimension un. Une extension de l'inégalité de Poincaré, qui demande maintenant, pour être établie, des éléments d'analyse fonctionnelle qui seront abordés dans les chapitres suivants, permet de s'assurer là aussi que la formulation est coercive.

## 2.2 Théorie élémentaire des problèmes variationnels

Nous montrons dans cet section comment le cadre général fourni par le théorème de Lax-Milgram permet de démontrer un résultat d'existence et d'unicité pour la solution des problèmes aux limites du chapitre précédent.

### 2.2.1 Position du problème variationnel

Les formulations variationnelles du section précédent, nous ont permis de poser le problème aux limites de dimension un et en dimension supérieure sous la forme générale suivante

$$\begin{cases} u \in X, u - g \in V, \lambda v \in V, \\ a(u, v) = Lv. \end{cases} \quad (2.43)$$

où

- $X$  est un espace de Hilbert dont nous noterons respectivement la norme et le produit scalaire par

$$\|u\|_X \text{ et } (u, v)_X \text{ pour } u \text{ et } v \text{ dans } X,$$

- $V$  est un sous-espace fermé de  $X$ ,

- $g$  est un élément donné dans  $X$ ,

- $(u, v) \mapsto a(u, v)$  est une forme bilinéaire sur  $X, X$  vérifiant

1. **Continuité sur  $X$**  : il existe une constante  $M$  telle que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \text{ pour tout } u, v \text{ dans } X, \quad (2.44)$$

2. **Coercivité sur  $V$**  : pour tout  $u, v$  dans  $X$

$$\exists \gamma > 0 : a(u, v) \geq \gamma \|v\|_X^2 \text{ pour tout } v \text{ dans } V, \quad (2.45)$$

$-L$  est une forme linéaire continue sur  $X$ , autrement dit  $L$  est un élément donné dans le dual topologique  $X'$  de  $X$ .

On rappelle que  $X'$  est un espace de Hilbert pour la norme (dite duale)

$$\|L\|_{X'} = \sup_{\|v\|_{X'}=1} |Lv|. \quad (2.46)$$

Le théorème de Riesz affirme que l'application

$$J_X : X \rightarrow X' \quad (2.47)$$

définie pour  $z \in X$

$$J_X z(v) := (z, v)_X, \quad \text{pour tout } v \text{ dans } X, \quad (2.48)$$

est une **isométrie** de  $X$  sur  $X'$  :

$$J_X \text{ est un isomorphisme algébrique de } X \text{ sur } X',$$

qui vérifie

$$\|J_X z\|_{X'} = \|z\|_X, \quad \text{pour tout } z \text{ dans } X. \quad (2.49)$$

### 2.2.2 Unicité et stabilité de la solution du problème variationnel

Le théorème suivant établit une inégalité vérifiée par une solution éventuelle du problème variationnel (2.1). Une telle inégalité est appelée **inégalité a priori**. De telles inégalités sont souvent à la base des propriétés d'existence, d'unicité et de dépendance continue par rapport aux données du second membre.

**Théorème 2.3 :**

Toute solution  $u$  du problème (2.1) vérifie

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|L\|_{X'} + \left(1 + \frac{M}{\gamma}\right) \|g\|_X \quad (2.50)$$

et constitue donc l'unique solution de ce problème.

**Démonstration** On a, si  $u$  est une solution du problème (2.1),

$$a(u - g, v) = a(u, v) - a(g, v) = Lv - a(g, v), \forall v \in V.$$

Comme  $u - g \in V$  en utilisant successivement la coercivité, la définition de la norme duale et la continuité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \gamma \|u - g\|_X^2 &\leq a(u - g, u - g) = L(u - g) - a(g, u - g) \\ &\leq \|L\|_{X'} \|u - g\|_X + M \|g\|_X \|u - g\|_X. \end{aligned}$$

Si  $u = g$ , l'inégalité (2.50) est trivialement vérifiée. Sinon, en divisant par  $\gamma \|u - g\|_X$  on arrive à

$$\|u - g\|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|L\|_{X'} + \frac{M}{\gamma} \|g\|_X.$$

L'inégalité triangulaire donne alors

$$\|u\|_X = \|u - g + g\|_X \leq \|u - g\|_X + \|g\|_X$$

et conduit ainsi à l'inégalité (2.50).

Supposons maintenant que  $u_1$  et  $u_2$  sont des solutions correspondant respectivement aux données  $L_1, g_1$  et  $L_2, g_2$ . Il est immédiat que  $u_1 - u_2$  est



solution du problème ((2.50) relativement aux données  $L_1 - L_2$  et  $g_1 - g_2$ . L'inégalité (2.50) montre alors que

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|L_1 - L_2\|_{X'} + \left(1 + \frac{M}{\gamma}\right) \|g_1 - g_2\|_X. \quad (2.51)$$

Le second membre de l'inégalité (2.51) est nul pour  $L_1 = L, g_1 = g, L_2 = L, g_2 = g$  et conduit ainsi à

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq 0 \quad (2.52)$$

qui induit  $u_1 = u_2$

### Remarque 2.1 :

Prenons  $L_1 = L, L_2 = L + \Delta L, g_1 = g_2$  et  $g_2 = g + \Delta g$  où  $\Delta L$  et  $\Delta g$  sont deux perturbations des données. L'inégalité (2.50) et son écriture (2.51) donnent, si on note  $u_1 = u$  et  $u_2 = u + \Delta u$ ,

$$\|\Delta u\|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|\Delta L\|_{X'} + \left(1 + \frac{M}{\gamma}\right) \|\Delta g\|_X$$

Autrement dit, la perturbation  $\Delta u$  résultant de petite perturbations  $\Delta L$  sur  $L$  et  $\Delta g$  sur  $g$  reste petite si la constante de coercivité  $\gamma$  n'est pas trop faible et si la constante de continuité n'est pas trop forte. Les deux constantes  $M$  et  $1/\gamma$  mesurent ainsi la stabilité du problème. Si l'une de ces constantes vient à exploser, la résolution devient délicate.

### 2.2.3 Existence d'une solution au problème variationnel

On va se ramener aux conditions d'application du théorème de Lax-Milgram. Pour cela, on va faire le changement d'inconnue suivant

$$u_0 = u - g. \quad (2.53)$$

On est ainsi ramenée à étudier l'existence d'une solution pour le problème variationnel

$$\begin{cases} u_0 \in V, \forall v \in V, \\ a(u_0, v) = L_0 v, \end{cases} \quad (2.54)$$

où  $L_0$  est la forme linéaire continue sur  $X$ , et à fortiori sur  $V$ , donnée par

$$L_0 v := Lv - a(g, v), \forall v \in X. \quad (2.55)$$

Comme  $V$  est un sous-espace fermé de  $X$ , c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  induit par celui  $(\cdot, \cdot)_X$  de  $X$ . On notera aussi provisoirement par  $\|\cdot\|_V$  la norme induite par celle de  $X$ . L'existence d'une solution au problème (2.54) constitue le théorème de Lax-Milgram.

**Théorème 2.4 (Théorème de Lax-Milgram) :**

Sous les conditions de continuité (2.2) et de coercivité (2.3) pour la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ , pour toute forme linéaire continue  $L_0$  sur  $V$ , le problème variationnel (2.54) admet une solution et une seule.

**Démonstration** Comme  $(u, v) \mapsto a(u, v)$  est une forme bilinéaire continue sur  $V \times V$ , le théorème de Riesz montre que l'identification

$$(Au, v)_V = a(u, v), \quad \forall u, v \in V \quad (2.56)$$

définit un opérateur linéaire continu de  $V$  dans  $V$ .

La coercivité et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent

$$\gamma \|v\|_V^2 \leq a(v, v) = (Av, v)_V \leq \|Av\|_V \|v\|_V,$$

d'où

$$\gamma \|v\|_V \leq \|Av\|_V. \quad (2.57)$$

On va montrer que cette inégalité entraîne que l'opérateur est injectif et que son image

$$R(A) := \{w \in V; \exists v \in V, Av = w\}$$

est fermée.

1.  $A$  est injectif : si  $Av = 0$  alors  $\|Av\|_V = 0$  et donc, par 2.15,  $\|v\|_V = 0$  et ainsi  $v = 0$ .
2.  $R(A)$  est fermé : supposons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Av_n = z$ ; la suite est donc une suite de Cauchy. Appliquons alors l'inégalité 2.15 à l'élément  $v_n - v_m$

$$\|v_n - v_m\|_V \leq \frac{1}{\gamma} \|A(v_n - v_m)\|_V = \frac{1}{\gamma} \|Av_n - Av_m\|_V$$

On en déduit alors que la suite  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  est elle-même une suite de Cauchy. Comme  $V$  est complet, il existe ainsi  $v \in V$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ . La continuité de  $A$  entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Av_n = Av$$

et donc que  $Av = z$ . Ceci montre que  $z \in \mathbb{R}(A)$  et donc que  $\mathbb{R}(A)$  est fermé.

Le problème (2.54) admettra une solution si  $R(A) = V$ . Comme  $R(A)$  est fermé, il suffit de montrer que si  $w \in V$  est orthogonal à tout  $R(A)$ , il est obligatoirement égal à 0. Soit donc un tel  $w$ .

$$(Av, w)_V = 0, \quad \forall v \in V.$$

En particulier, on a

$$(Aw, w)_V = a(w, w) = 0.$$

La coercivité donne alors  $w = 0$ .

□

### 2.2.4 La méthode de Galerkin

La méthode des éléments finis est une méthode de Galerkin particulière mais avec des propriétés spécifiques qui la rendent spécialement attractive dans la résolution des problèmes aux limites. Nous allons la présenter ici comme un cadre général abstrait permettant l'étude de la convergence de

l'approximation par éléments finis qui sont données dans le chapitre suivant.

### 2.2.5 Principe de base d'une méthode de Galerkin

Reprenons le problème abstrait (2.43). Le but est de ramener sa résolution à celle d'un **problème discret**, équivalente à la recherche d'un **nombre fini** de paramètres réels.

Le principe d'une méthode de Galerkin est d'approcher les éléments de l'espace  $X$  par ceux d'un sous espace  $X^h$  de dimension finie. C'est donc, à la base, la construction d'un processus d'approximation des éléments d'un espace de Hilbert  $X$ . L'exposant  $h$  est un paramètre réel  $>0$  caractérisant la discrétisation tendant vers 0 au fur à mesure que la discrétisation devient de plus en plus fine. Cette convention est utile pour les méthodes d'éléments finis où ce paramètre a un sens géométrique précis. La propriété d'approximation est décrite par la condition suivante dit **d'approximation interne**

$$\forall v \in X, \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v^h \in X^h} \|v - v^h\|_X = 0. \quad (2.58)$$

La quantité  $\inf_{v^h \in X^h} \|v - v^h\|_X$  est la distance de  $v$  à  $X^h$ . Comme  $X^h$  est un espace de dimension finie, dès que  $X$  est un **espace normé** (même s'il n'est pas complet), cette distance est caractérisée de la façon suivante.

-Il exist  $z^h \in X^h$  tel que

$$\|v - z^h\|_X = \inf_{v^h \in X^h} \|v - v^h\|_X \quad (2.59)$$

et  $Z^h$  est appelé la meilleure approximation de  $v$  par les éléments de  $X^h$ .

La propriété d'approximation interne peut ainsi être décrite de façon équivalente :  $v \in X$ ,  $\exists \{\omega^h\}_{h>0}$  :

$$v \in X, \exists \{\omega^h\}_{h>0} : \begin{cases} \omega^h \in X^h, \forall h > 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \omega^h = v \text{ dans } X \end{cases} \quad (2.60)$$

-Si  $X$  est un **espace pré-hilbertien**, i.e. si sa norme est associée à un produit scalaire, la meilleure approximation est unique : c'est la projection de  $v$  sur  $X^h$ . Elle est caractérisée par les équations dites normales

$$\begin{cases} z^h \in X^h, \forall v^h \in X^h, \\ (z^h, v^h)_X = (v, v^h)_X. \end{cases} \quad (2.61)$$

Le problème variationnel fait intervenir aussi le sous-espace vectoriel  $V$  de  $X$ . Une façon simple, mais qui ne fonctionne pas toujours, est d'introduire le sous-espace de  $X^h$

$$V^h := X^h \cap V.$$

Pour  $v \in V$ , on a cependant seulement

$$\inf_{v^h \in X^h} \|v - v^h\|_X \leq \inf_{v^h \in V^h} \|v - v^h\|_X$$

puisque'on prend la borne inférieure sur un espace plus restreint. On est amené à faire l'hypothèse supplémentaire que la famille  $\{V^h\}_{h>0}$  constitue une **approximation interne** de  $V$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v^h \in V^h} \|v - v^h\|_X$$

### 2.2.6 Le problème discret

En supposant donc que pour tout  $h > 0$ , on se donne  $g^h \in X^h$  tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} g^h = g \text{ dans } X, \quad (2.62)$$

La méthode de Galerkin consiste simplement à mimer le problème (2.43) dans les sous espaces de dimension finie  $X^h$  et  $V^h$

$$\begin{cases} u^h \in X^h, u^h - g^h \in v^h, \forall u^h \in V, \\ a(u^h, v^h) = Lv^h. \end{cases} \quad (2.63)$$

Le théorème de Lax-Milgram assure bien sûr là aussi que ce problème possède une solution et une seule avec la propriété de stabilité suivante

$$\| u^h \|_X \leq \frac{1}{\gamma} \| L \|_{X'} + \left( \frac{M}{\gamma} + 1 \right) \| g^h \|_X .$$

L'intérêt de la méthode de Galerkin vient du fait que la résolution du problème variationnel peut être ramenée à celle d'un système linéaire. Pour celà, fixons une base  $\{B_i^h\}_{i=1}^{i=N^h}$  de  $V^h$ . On voit immédiatement pourquoi le problème (2.63) est un système discret : sa résolution équivaut à la détermination des coefficients  $x_1, \dots, x_{N^h}$  de  $u^h - g^h$  dans la base  $\{B_i^h\}_{i=1}^{i=N^h}$

$$u^h = g^h + x_1 B_1^h + \dots, x_{N^h}^h. \quad (2.64)$$

Il sera commode d'organiser les coefficients  $x_1, \dots, x_{N^h}$  suivant un vecteur colonne noté  $x$ . De même, la donnée de  $v^h$  dans  $V^h$  équivaut à celle

de ses composantes  $y_1, \dots, y_{N^h}$ , organisées suivant un vecteur colonne  $y$

$$v^h = y_1 B_1^h + \dots + y_{N^h} B_{N^h}^h. \quad (2.65)$$

La restriction de  $a(\cdot, \cdot)$  à  $V^h \times V^h$  est bien sûr une forme bilinéaire sur ce dernier. Comme  $V^h$  est de dimension finie, toute forme bilinéaire sur  $V^h \times V^h$  est complètement caractérisée par une matrice. Dans le cas présent, cette matrice  $A$  est une matrice  $N^h \times N^h$  dont les coefficients sont donnés par

$$A_{ij} = a(B_j^h, B_i^h). \quad (2.66)$$

On alors

$$a(x_1 B_1^h + \dots + x_{N^h} B_{N^h}^h, y_1 B_1^h + \dots + y_{N^h} B_{N^h}^h) = \sum_{ij=1}^{N^h} A_{ij} x_j y_i = y^T A x. \quad (2.67)$$

De même, la forme linéaire  $L$  restreinte à  $V^h$  est complètement caractérisée par un vecteur colonne  $\ell$  de composantes

$$\ell_i := L B_i^h, \quad i = 1, \dots, N^h, \quad (2.68)$$

et la relation

$$L v^h = y^T \ell. \quad (2.69)$$

Exactement, selon la même démarche, le nombre  $a(g^h, v^h)$  s'écrit de façon matricielle sous la forme

$$a(g^h, v^h) = y^T g \quad (2.70)$$



où  $g$  est le vecteur colonne à  $N^h$  composantes

$$a(g^h, B_i^h) = g_i \quad i = 1, \dots, N^h. \quad (2.71)$$

Compte tenu des précédentes relations, en posant en outre

$$b = \ell - g, \quad (2.72)$$

le problème 2.63 se réécrit sous forme matricielle

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^{N^h}, \forall y \in \mathbb{R}^{N^h}, \\ y^\top Ax = y^\top b. \end{cases} \quad (2.73)$$

Clairement, en prenant  $y = Ax - b$ , on vérifie que le problème variationnel (2.73) est équivalent au système linéaire

$$Ax = b. \quad (2.74)$$

On alors le théorème suivant qui est de première importance pour les applications.

**Théorème 2.5 :**

Sous la condition de coercivité (2.45), la matrice  $A$  du système linéaire (2.74) est inversible. De plus, elle admet la décomposition

$$A = LU \quad (2.75)$$

où  $L$  est une matrice triangulaire avec des coefficients diagonaux égaux à 1 et  $U$  une matrice triangulaire. De plus, si la forme  $a(\cdot, \cdot)$  est symétrique, i.e. vérifie

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, \forall v \text{ dans } X, \quad (2.76)$$

alors, la matrice  $A$  est symétrique définie positive.

**Démonstration** Montrer que  $A$  est inversible et admet la décomposition (2.75) revient à s'assurer que les sous-matrices principales  $A^{(p)} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  données par

$$A_{ij}^{(p)} = A_{ij}, \quad i, j, \dots, p,$$

sont toutes inversibles. Soit  $y^{(p)}$  tel que  $A^{(p)}y^{(p)} = 0$ . En complétant éventuellement les composantes de  $y^{(p)}$  par des 0, on a donc

$$(y^{(p)})^\top A^{(p)} y^{(p)} = \begin{bmatrix} (y^{(p)})^\top & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y^{(p)} \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Notant  $v^h = \sum_{j=1}^{j=N^h} y_j B_j^h$ , on a donc

$$a(v^h, v^h) = \begin{bmatrix} (y^{(p)})^\top & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y^{(p)} \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

La coercivité donne alors  $v^h = 0$  et par suite  $y_j = 0$  pour  $j = 1, \dots, p$ , et par suite  $y^{(p)} = 0$ . Si  $(u, v) \mapsto a(u, v)$  est symétrique, on a

$$A_{ij} = a(B_j^h, B_i^h) = a(B_i^h, B_j^h) = A_{ji}$$

et donc  $A$  est symétrique. La coercivité donne une nouvelle fois

$$y^\top A y = a(v^h, v^h) \geq \gamma \|v^h\|_X^2 > 0 \quad \text{si } y \neq 0.$$

**Remarque 2.2 :**

La propriété (2.75) équivaut au fait que le système linéaire (2.74) peut être résolu par l'algorithme de Gauss sans échange de ligne ou de colonne. Cette

propriété sera cruciale pour résoudre à moindre coût dans certaines situations les systèmes résultant de la discrétisation par une méthode d'éléments finis.

### 2.2.7 Convergence d'une méthode de Galerkin

Le point-clé dans l'étude de la convergence d'une méthode de Galerkin est le résultat simple mais important suivant.

#### Lemme 2.1 (lemme de Céa) :

Soient  $u$  et  $u^h$  les solutions respectives des problèmes continue 2.43 et discret 2.63 ; alors

$$a(u^h - u, \omega^h) = 0, \forall \omega^h \in V^h. \quad (2.77)$$

**Démonstration** Soit  $u^h \in V^h$ . Comme  $V^h \subset V$ , on a simplement

$$a(u^h, \omega^h) = L\omega^h = a(u, \omega^h).$$

#### Proposition 2.3 (Estimation de l'erreur de résolution :) :

L'erreur de résolution vérifie l'estimation suivante

$$\underbrace{\|u - u^h\|_X}_{\text{Erreur de résolution}} \leq \left(1 + \frac{M}{\gamma}\right) \underbrace{\left(\inf_{v^h \in V^h} \|u - g - v^h\|_X\right)}_{\text{Erreur d'approximation de la solution}} + \underbrace{\left(\|u - g\|_X\right)}_{\text{Erreur de donnée}} \quad (2.78)$$

La solution du problème discret converge donc si la famille  $\{V^h\}_{h>0}$  est une approximation interne de  $V$  et si

$$\lim_{h \rightarrow 0} g^h = g \text{ dans } X.$$

**Démonstration** Soit  $v^h \in V^h$ . La coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$  sur  $V^h$  donne

$$\gamma \|u^h - g^h - v^h\|_X^2 \leq a(u^h - g^h - v^h, u^h - g^h - v^h). \quad (2.79)$$

L'égalité 2.77, démontrée ci-dessus dans le lemme de Céa, permet alors d'écrire

$$a(u^h - g^h - v^h, u^h - g^h - v^h) = a(u - g^h - v^h, u^h - g^h - v^h),$$

soit en ajoutant et en retranchant  $g$

$$a(u^h - g^h - v^h, u^h - g^h - v^h) = a(u - g - v^h, u^h - g^h - v^h) + a(g - g^h, u^h - g^h - v^h). \quad (2.80)$$

La continuité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  donne alors

$$a(u - g - v^h, u^h - g^h - v^h) \leq M \|u - g - v^h\|_X \|u - g - v^h\|_X, \quad (2.81)$$

et

$$a(g - g^h, u^h - g^h - v^h) \leq M \|g - g^h\|_X \|u^h - g^h - v^h\|_X. \quad (2.82)$$

On déduit alors de (2.79), (2.80), (2.81) et (2.82)

$$\|u^h - g^h - v^h\|_X \leq \frac{M}{\gamma} (\|u - g - v^h\|_X + \|g - g^h\|_X). \quad (2.83)$$

L'inégalité triangulaire permet alors d'écrire

$$\|u - u^h\|_X = \|u - g - v^h + g - g^h - (u^h - g^h - v^h)\|_X \leq \|u - g - v^h\|_X + \|g - g^h\|_X + \|u^h - g^h - v^h\|_X \quad (2.84)$$

L'inégalité (2.84) permet alors d'arriver à (2.78).

La convergence suit de l'approximation de  $u - g$  par les éléments de  $V^h$  et de  $g$  par  $g^h$ .

□

**Remarque 2.3 :**

Si la constante  $M/\gamma$  devient grande devant 1, l'erreur de résolution peut être importante même si l'erreur d'approximation de  $g$  et de  $u - g$  est faible. Typiquement, on observe alors un cas d'instabilité de la méthode.

# Chapitre 3

## Introduction à la méthode des éléments finis

Nous allons dans ce chapitre présenter les méthodes d'éléments finis les plus simples, qui restent aussi les plus utilisées, pour la résolution des problèmes aux limites des chapitres précédents.

Cela nous permettra d'introduire les principes permettant de construire des méthodes de ce type plus générales.

### 3.1 principe de base

#### 3.1.1 Élément géométrique

La résolution des problèmes (2.8) et (2.42) du 2<sup>ème</sup> chapitre par une méthode d'éléments finis est basée sur la construction d'une **approximation interne** de  $H^1(\Omega)$  constituée de **fonctions polynomiales par morceaux**. Plus précisément, on utilise une partition finie sans recouvrement  $\tau^h$  (la signification du paramètre  $h > 0$  sera donnée plus loin) du domaine

de calcul  $\Omega$  en sous-domaines ouverts  $T$  de (**forme simple**)

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \tau^h} \bar{T} \quad (3.1)$$

$$T \cap L = \emptyset \mid \text{ si } T \neq L \quad (3.2)$$

Cette partition est sujette à une condition de compatibilité qui sera précisée plus loin. Elle est appelée **maillage** de  $\Omega$ . On note

$$h_T := \text{diam}T \quad (3.3)$$

le diamètre de  $T$  (i.e  $h_T := \sup_{x,y \in T} |x - y|$ ), et

$$h := \max_{T \in \tau^h} h_T \quad (3.4)$$

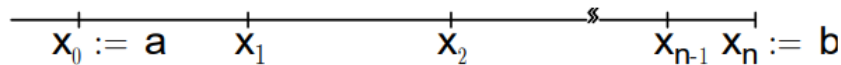
le pas du maillage

**Exemple 3.1 :**

Maillages d'un intervalle et d'un pavé

(1) **Maillage d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  :**  $\Omega = ]a, b[$

Un maillage en dimension 1 correspond seulement à la donnée d'une grille



de points

$$\{x_0 := a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n := b\}$$

non nécessairement répartie de façon uniforme dans  $[a, b]$ . Les éléments géométriques sont des sous-intervalles

$$T := ]x_i, x_{i+1}[.$$

(2) **Maillage d'un pavé de  $\mathbb{R}^N$**  :  $\Omega = \prod_{\kappa=1}^N ]a_\kappa, b_\kappa[$ . Pour chaque  $\kappa$ , on se donne une grille sur l'axe des coordonnées  $x_\kappa$

$$\{x_{0,\kappa} := a_\kappa < x_{1,\kappa} < \dots < x_{n_\kappa-1,\kappa} < x_{n_\kappa,\kappa} = b_\kappa\}.$$

On obtient un maillage par

$$T := \prod_{\kappa=1}^N ]x_{i_\kappa}, x_{i_\kappa} + 1, \kappa[.$$

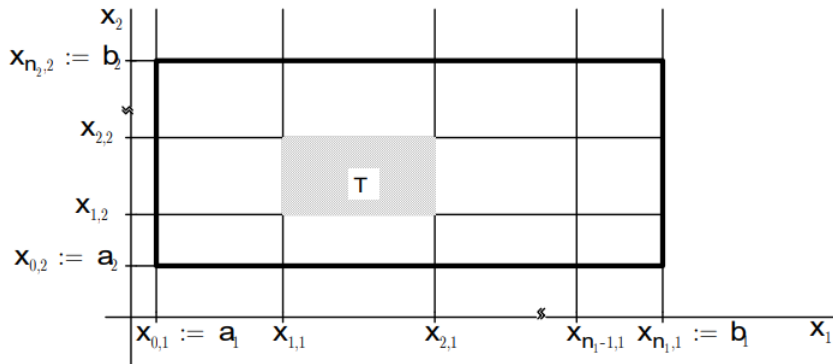


FIGURE 3.1 – D'autres maillages, de forme plus générale, seront introduits par la suite.

### 3.1.2 Fonctions de forme

La seconde étape est la construction d'une approximation interne de  $H^1(\Omega)$  en considérant des fonctions approchantes  $v \in L^\infty(\Omega)$  de forme



“simple” sur chaque élément géométrique

$$v|_T = v_T \in P_T. \quad \forall T \in \tau^h, \quad (3.5)$$

où  $\mathbb{P}_T$  est un espace de dimension finie de fonctions dans  $C^\infty(\bar{T})$ .

Dans la quasi-totalité des cas,  $\mathbb{P}_T$  est un espace de polynômes. Le plus souvent, on utilise l'espace  $\mathbb{P}_m^{(N)}$  des polynômes à  $N$  indéterminées ( $N$  est la dimension du problème, i.e., le nombre de variables des fonctions à approcher)

$$\mathbb{P}_m^{(N)} = \{p \in C^\infty(R^N); p(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \alpha_\alpha x^\alpha, \alpha_\alpha \in \mathbb{R}\}$$

avec les notations suivantes :

- **Multiindice** :  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \alpha_i \in N (i = 1, \dots, N),$
- **Monome** :  $x^\alpha := (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_N^{\alpha_N}).$

### Exemple 3.2 :

Polynômes à une, deux et trois indéterminées.

1. **Polynômes à une indéterminée**  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ ,  
 $a_i \in R$  On a, de façon élémentaire,

$$\dim P_m^{(1)} = m + 1.$$

2. **polynômes à deux indéterminées**

$$p(x) = \sum_{i+j \leq N} a_{ij} x_1^i x_2^j.$$

1. PRINCIPES DE BASE

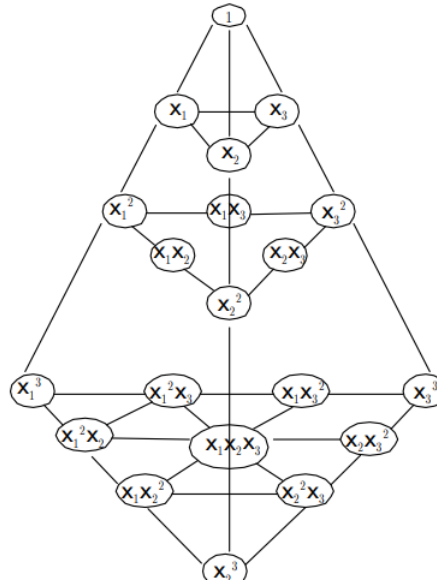


FIGURE 3.2 – Représentation des monômes à trois indéterminées à l’aide d’un tétraèdre

Les différents monômes peuvent être décrits par un tableau triangulaire (de type triangle de Pascal)

degré				
0	1			
1	$x_1$	$x_2$		
2	$x_1^2$	$x_1x_2$	$x_2^2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$m$	$x_1^m$	$x_1^{m-1}x_2$	$x_1^{m-2}x_2^2$	$\cdots x_2^m$

On a directement en comptant le nombre de monômes du tableau

précédent

$$\dim \mathbb{P}_m^{(2)} = (m+1)(m+2)/2.$$

### 3. Polynômes à trois indéterminées

$$p(x) = \sum_{i+j+k \leq N} a_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k.$$

Il y a autant de monômes  $x_1^i x_2^j x_3^k$  de degré total  $\ell = i + j + k$  que de monômes  $x_1^i x_2^j$  degré  $i + j \leq \ell$ . On a donc la formule suivante

$$\dim \mathbb{P}_m^{(3)} = \sum_{\ell=0}^N \dim \mathbb{P}_\ell^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^N (\ell+1)(\ell+2) = \frac{1}{6} (m+1)(m+2)(m+3) \quad (3.6)$$

qu'on pourra vérifier facilement par récurrence. La figure (2) montre que les monômes à trois indéterminées peuvent être représentés à l'aide d'un tétraèdre qui est la généralisation à l'espace tridimensionnel du triangle.

#### 3.1.3 Conditions de raccord

Il faut que les fonctions définies par les conditions (3.5) satisfassent des propriétés de continuité globales, appelées **conditions de raccord**, pour que la fonction  $v \in L^\infty(\Omega)$  correspondante soit dans  $H^1(\Omega)$ . Par exemple, les fonctions en escalier

$$v|_{]x_i, x_{i+1}[} = v_i(x) \in \mathbb{R}, \quad \text{pour } i = 0, \dots, m-1,$$

relativement au maillage ci-dessus du segment  $]a, b[$  ont pour dérivée

$$v' = \sum_{i=1}^{m-1} (v_{i+1} - v_i) \delta_{x_i}, \quad (3.7)$$

où  $\delta_{x_i}$  est la masse de Dirac au point  $x_i$ , et ne sont donc pas dans  $H^1(]a, b[)$ .

Afin de donner le théorème qui précise les conditions de raccord que doivent satisfaire les différentes expressions  $v_T$  d'une fonction  $v$  donnée par (3.5) pour donner lieu à une fonction dans  $H^1(\Omega)$ , nous avons besoin auparavant de la **notion d'interface** entre deux éléments géométriques.

Pour  $T$  et  $L$  deux éléments dans  $\tau^h$ , on appelle interface entre  $T$  et  $L$ , l'ensemble

$G' := \bar{T} \cap \bar{L}$  lorsqu'il vérifie la condition suivante :

1  $G' = a$  en dimension  $N = 1$  (i.e. si  $\Omega$  est intervalle de  $\mathbb{R}$ )

2  $|G'| > 0$  en dimension  $N > 1$ , où  $|G'|$  est la mesure de  $G'$  comme partie du bord  $T'$  de  $T$  (ou  $L'$  de  $L$ )

**Remarque 3.1 :**

Comme le maillage  $\tau^h$  de  $\Omega$  est une partition sans recouvrement, on a

$$\bar{T} \cap \bar{L} = T' \cap L'.$$

**Exemple 3.3 :**

Interfaces de sous-domaines dans les cas mono et multidimensionnels.

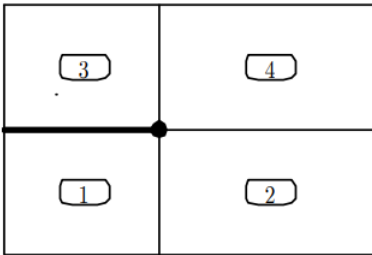
(1) **Interface entre intervalles.**



Interface entre l'élément 1 et 2 :  $x_1$

Interface entre l'élément 2 et 3 :  $x_2$

(2) **Interface entre deux polygones.**

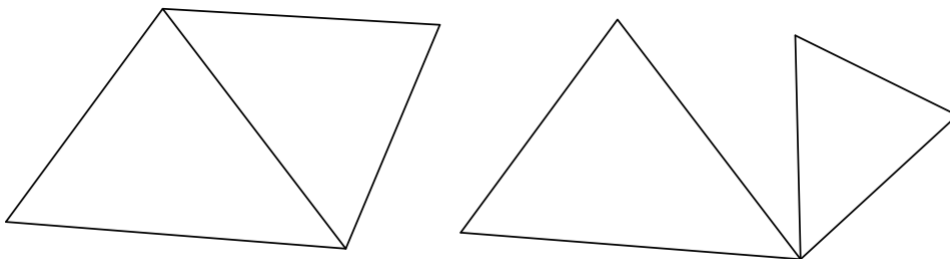


Segment épais : interface entre l'élément 1 et 3.

Le point  $\bullet$  n'est pas une interface entre l'élément 1 et 4.

(3) **Interface entre deux polyèdres.**

Face hachurée : interface entre l'élément 1 et 2.



L'arête (segment épais) n'est pas une interface entre l'élément 1 et 4.

Le point  $\bullet$  n'est pas une interface entre 1 et 8.

### Théorème 3.1 :

Soit  $v \in L^\infty(\Omega)$  vérifiant (3.5) : alors,  $v \in H^1(\Omega)$  si et seulement si  $v \in C^0(\bar{\Omega})$ .

**Démonstration** La démonstration, dans le cas  $N = 1$ , s'obtient simplement à l'aide de la formule des sauts (de façon analogue à (3.7)). Nous pouvons donc nous concentrer sur le cas  $N \geq 2$ .

comme  $v \in L^\infty(\Omega)$  et que  $\Omega$  est borné, on a directement que  $v \in L^2(\Omega)$ . On va calculer  $\partial_{x_j} v$  au sens des distributions et montrer qu'il est dans  $L^2(\Omega)$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . On a

$$\langle \partial_{x_j} v, \varphi \rangle = -\langle v, \partial_{x_j} \varphi \rangle = -\int_{\Omega} v \partial_{x_j} \varphi d\Omega = -\sum_{T \in \mathcal{T}^h} \int_T v_T \partial_{x_j} \varphi dT \quad (3.8)$$

Or  $v_\kappa$  et  $\varphi$  sont dans  $C(\bar{T})$ . La formule de Green dans  $T$  donne alors ( $n_j$  est la composante  $j$  de la normale  $\mathbf{n}$  à  $T'$  orientée vers l'extérieur de  $T$ )

$$-\int_T v_T \partial_{x_j} \varphi dT = -\int_{T'} v_T dT' + \int_T \partial_{x_j} v_T \varphi dT. \quad (3.9)$$

Comme  $\varphi = 0$  sur le bord de  $\Omega$ , l'intégrale sur  $T'$  se réduit seulement à l'intégrale sur les interfaces séparant  $T$  de ses éléments adjacents.

D'où si l'on définit presque partout  $g_j \in L^\infty(\Omega)$  par  $g_j|_{T=} \partial_{x_j} v_T$  pour tout  $T \in \Gamma^h$  on peut réécrire (3.8) en utilisant (3.9) sous la forme

$$\langle \partial_{x_j} v, \varphi \rangle = \int_{\omega} g_j \varphi d\Omega - \sum_{interfaces} \int_{G'} (v_T n_j^T + v_L n_j^L) \varphi dG'.$$

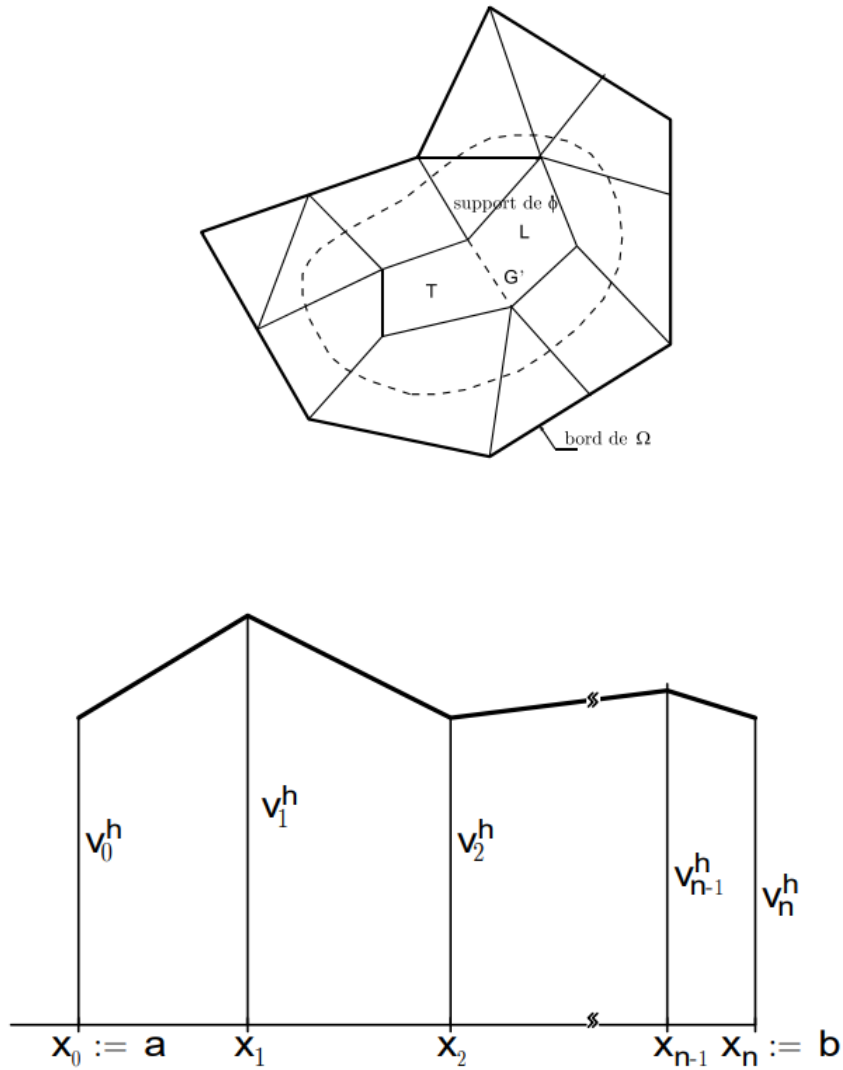


FIGURE 3.3 – Graphe d’une fonction générique de  $X^h$ .

On a ainsi que  $\partial_{x_j} v \in L^2(\Omega)$  si et seulement si les intégrales sur chaque interface sont nulles pour tout  $\varphi$  dans  $D(\Omega)$ . Or sur chaque interface  $G'$  séparant  $T$  de  $L$ , on a  $\mathbf{n}^T + \mathbf{n}^L$ .

Comme  $(v_T)|_{G'} = (v_L)|_{G'}$  si et seulement si  $v$  est globalement continue sur  $\bar{\Omega}$ , ceci termine la démonstration.

□

## 3.2 Eléments finis usuels de plus bas degré

Nous allons dans cette section présenter les éléments finis les plus simples pour résoudre les problèmes variationnels du 2<sup>ème</sup> chapitre. Cette simplicité n'est cependant aucunement en rapport avec une efficacité limitée en tant que procédé de résolution. Il est souvent inutile de recourir à des méthodes plus élaborées en pratique.

### 3.2.1 Eléments finis de plus bas degré monodimensionnels

Le théorème 3.1 montre qu'on doit choisir des fonctions globalement continues pour construire un sous-espace de  $H^1(]a, b[)$ . En se limitant à des fonctions polynômiales sur chaque élément, on est amené à considérer ainsi successivement des fonctions  $\mathbb{P}_0^{(1)}$  sur chaque élément, puis, etc. pour cette construction. On a déjà vu que le choix  $\mathbb{P}_0^{(1)}$  comme espace de fonctions de forme ne peut être retenu car le raccord de fonctions en escalier de façon à construire une fonction globalement continue donne seulement des fonctions constantes sur tout l'intervalle  $]a, b[$ . Ceci ne peut bien sûr être considéré comme un procédé efficace d'approximation de fonctions. On est donc amené de façon naturelle à considérer

$$X^h := \{v^h \in \mathcal{C}^0([a, b]) : v^h|_{T^e} \in \mathbb{P}_1^{(1)}, \text{ pour } e = 0, \dots, n-1\} \quad (3.10)$$



où

$$T^{[e]} := ]x_e, x_{e+1}[ \quad (3.11)$$

est l'élément  $[e]$  du maillage. Comme tout polynôme  $p$  de degré  $\leq 1$  est complètement déterminé dans  $K^{[e]}$  à partir de ses valeurs  $p_1^{[e]} = p(x_e)$  et  $p_2^{[e]} = p(x_{e+1})$ , on obtient donc un sous-espace de fonctions suffisamment riche pour approcher les éléments  $H^1(]a, b[)$ . (voir 9)

Les propriétés de cet espace d'éléments finis, appelés  $\mathbb{P}_1$ -continus, sont d'écrites dans le théorème suivant dont la démonstration est immédiate

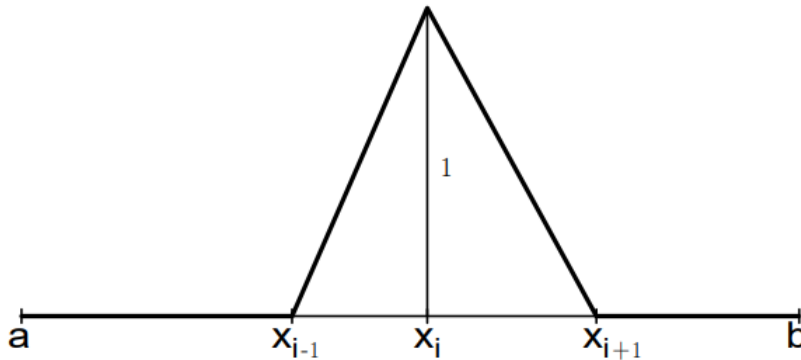


FIGURE 3.4 – Fonction chapeau(avec des modifications adéquates pour les cas  $i = 0$  et  $i = m$ ).

### **Théorème 3.2 :**

Chaque fonction  $v^h \in X^h$  complètement déterminée par ses degrés de li-

berté (ici, ses **valeurs nodales**)

$$v_i^h := v^h(x_i), \text{ pour } i = 0, \dots, n. \quad (3.12)$$

Comme de plus,  $v^h(x) = \sum_{i=0}^{i=n} v_i^h(x) B_i^h(x)$  où  $B_i^h$  est la fonction de  $X^h$  définie par

$$B_i^h(x_j) = \delta_{ij}, i, j = 0, \dots, n = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3.13)$$

$X^h$  est un sous-espace de dimension  $N_s := n + 1$ , le nombre de sommets du maillage .

Les fonctions  $\{B_i^h\}_{i=0}^{i=N}$  sont les fonctions de base de cette méthode d'éléments finis. On les appelle ici fonctions chapeau par référence à leur graphe (voir 3.2.1)

### 3.2.2 Éléments finis bidimensionnels

En prenant le triangle comme élément géométrique, on peut généraliser la construction précédente aux cas des fonctions à deux variables en s'appuyant sur deux propriétés.

La première de ces propriétés est donnée par le résultat suivant.

#### Proposition 3.1 (Coordonnées barycentriques) :

. Soit  $T$  un triangle non dégénéré du plan de sommets  $a_j^T := (a_{1j}^T, a_{2j}^T)(j =$

1, 2, 3) Les condition suivants

$$\begin{cases} \lambda_i^T \in \mathbb{P}_1^{(2)}(i = 1, 2, 3) \\ \lambda_i^T(a_i^T) = \delta_{ij}(i, j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker, caractérisent une base de  $\mathbb{P}_1^{(2)}$  permettant de déterminer tout polynôme  $p \in \mathbb{P}_1^{(2)}$  à l'aide de ses valeurs nodales :  $p_i^T := p(a_i^T)(i = 1, 2, 3)$  (valeurs aux sommets de  $K$ ) par

$$p(x) = \sum_{i=1}^3 p_i^T \lambda_i^T(x). \quad (3.15)$$

**Démonstration** On va déterminer les  $\lambda_i^T$  à partir des conditions nécessaires qu'ils vérifient. Ainsi donc, les  $\lambda_i^T$ , s'ils existent, déterminent en particulier les polynômes 1,  $x_1$  et  $x_2$ .

□

Ils satisfont dès lors les conditions suivantes

$$\begin{cases} \lambda_1^T(x) + \lambda_2^T(x) + \lambda_3^T(x) = 1 \\ a_{11}^T \lambda_1^T(x) + a_{12}^T \lambda_2^T(x) + a_{13}^T \lambda_3^T(x) = x_1 \\ a_{21}^T \lambda_1^T(x) + a_{22}^T \lambda_2^T(x) + a_{23}^T \lambda_3^T(x) = x_2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Le déterminant de ce système est donné par

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{11}^T & a_{12}^T & a_{13}^T \\ a_{21}^T & a_{22}^T & a_{23}^T \end{bmatrix} = \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11}^T & a_{12}^T - a_{11}^T & a_{13}^T - a_{11}^T \\ a_{21}^T & a_{22}^T - a_{21}^T & a_{23}^T - a_{21}^T \end{bmatrix} = \text{Det} \begin{bmatrix} a_{12}^T - a_{11}^T & a_{13}^T - a_{11}^T \\ a_{22}^T - a_{21}^T & a_{23}^T - a_{21}^T \end{bmatrix}$$

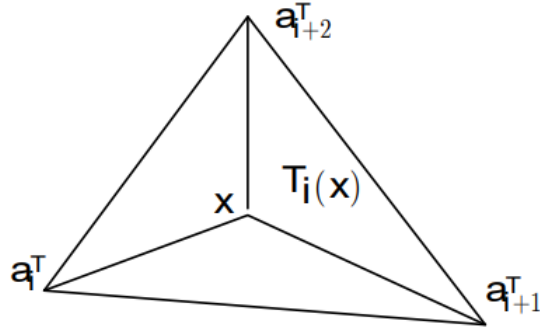


FIGURE 3.5 – Triangle intervenant dans le calcul de la coordonnée barycentrique  $i$

où  $|T| > 0$  est l'aire du triangle  $T$  et  $\varepsilon = \pm 1$  suivant qu'on tourne, en suivant la numérotation des sommets, dans le sens direct ou non. Ceci montre déjà que les  $\lambda_i^T$  sont déterminés de façon unique. On n'a pas encore montré, cependant, qu'ils répondent à la question. Pour cela, on résout le système (3.16) à l'aide des formules de Cramer, soit, en utilisant les propriétés bien connues de permutation des colonnes des déterminants et une permutation circulaire des indices, pour

$$\lambda_i^T(x) = \frac{1}{2\varepsilon|T|} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_{1i+1}^T & a_{1i+2}^T \\ x_2 & a_{2i+1}^T & a_{2i+2}^T \end{bmatrix}, \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

En développant le déterminant du numérateur par rapport à la première colonne, on montre d'abord que  $\lambda_i^T$  est bien un polynôme dans  $\mathbb{P}_1^{(2)}$ . La même réduction que celle effectuée pour le déterminant de la matrice du

système montre ensuite que, pour  $x \in T$ , on a

$$\lambda_i^T(x) = \frac{2\varepsilon|T_i(x)|}{2\varepsilon|T|} = \frac{|T_i(x)|}{|T|} \quad (3.17)$$

où  $T_i(x)$  est le triangle de sommets  $x, a_{i+1}^T, a_{i+2}^T$  ( voir 3.2.2). On termine la démonstration en observant que la formule (3.17) donne  $\lambda_i^T(x)(a_j^T) = \delta_{ij}$  où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

**Remarque 3.2 :**

On déduit du théorème précédent et de sa démonstration les propriétés suivantes.

(1) Les relations (3.16) peuvent être réécrites

$$\lambda_1^T(x) + \lambda_2^T(x) + \lambda_3^T(x) = 1$$

$$\lambda_1^T(x)a_1^T + \lambda_2^T(x)a_2^T + \lambda_3^T(x)a_3^T = x$$

Ces relations expriment que  $x$  est le barycentre des sommets du triangle  $T$  affectés respectivement des poids  $\lambda_1^T(x), \lambda_2^T(x)$  et  $\lambda_3^T(x)$ , d'où la terminologie coordonnées barycentriques pour les fonctions  $\lambda_1^T(x), \lambda_2^T(x)$  et  $\lambda_3^T(x)$

Ces fonctions

interviennent dans un grand nombre de questions et en particulier dans l'étude des méthodes d'éléments finis plus compliquées.

(2) Le triangle  $T_i(x)$  dégénère lorsque  $x$  est sur l'arête  $[a_{i+1}^T, a_{i+2}^T]$  On obtient donc

$$\lambda_i^T(x) = 0 \quad (3.18)$$

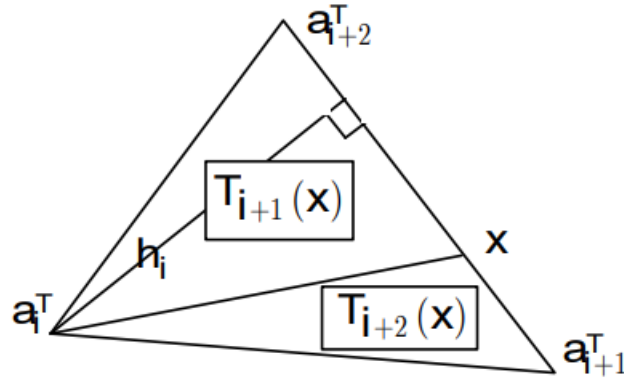


FIGURE 3.6 – Triangles  $T_i(x), T_{i+1}(x), T_{i+2}(x)$  pour  $x \in [a_{i+1}^T, a_{i+2}^T]$

comme équation cartésienne de la droite supportant l'arête opposée au sommet  $a_i^T$ .

Pour énoncer la seconde propriété permettant d'étendre la construction de l'approximation par éléments finis en dimension 1, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.1 :**

Lorsque  $x$  est sur l'arête  $[a_{i+1}^T, a_{i+2}^T]$ , les coordonnées barycentriques  $\lambda_{i+1}(x)$  et  $\lambda_{i+2}(x)$  sont données par

$$\lambda_{i+1}(x) = |x - a_{i+2}^T| / |a_{i+1}^T - a_{i+2}^T|, \lambda_{i+2}(x) = |x - a_{i+1}^T| / |a_{i+2}^T - a_{i+1}^T| \quad (3.19)$$

où  $|x - y|$  désigne la distance de  $x$  et  $y$ .

**Démonstration** Notons par  $h_i$  la hauteur relativement à la base  $|a_{i+1}^T - a_{i+2}^T|$  de  $T$ ;  $h_i$  est aussi hauteur de  $T_{i+1}(x)$  relativement à la base  $|x - a_{i+2}^T|$  et de  $T_{i+2}(x)$  relativement à la base  $|x - a_{i+1}^T|$  (voir 3.2) On a donc  $|T_{i+1}(x)| =$

$h_i|x - a_{i+2}^T|/2$  et  $|T_{i+2}(x)| = h_i|x - a_{i+1}^T|/2$ ; d'où la formule (3.19) en utilisant (3.17).

□

On est alors en mesure de montrer la seconde propriété, nécessaire à l'extension évoquée ci-dessus, qui permet de raccorder deux polynômes dans  $\mathbb{P}_1^{(2)}$  sur toute une arête en raccordant seulement leurs valeurs aux sommets de cette arête. Plus précisément, on a la proposition suivante.

**Proposition 3.2 :**

Soient deux triangles  $T$  et  $L$  non dégénérés du plan partageant une arête en commun  $G' = [a, b]$ .

Soit aussi une fonction  $v$  dans  $L^\infty(D)$  où  $D$  est le quadrilatère dont  $T$  et  $L$  assurent une partition sans recouvrement telle que

$$v|_T = p \in \mathbb{P}_1^{(2)}$$

et

$$v|_L = q \in \mathbb{P}_1^{(2)}$$

alors,  $v \in C^0(\overline{D})$  si et seulement si ces deux fonctions se raccordent aux points  $a$  et  $b$  (i.e.  $v$  est globalement continue sur  $\overline{D}$  si et seulement si elle est continue au points  $a$  et  $b$ )

**Démonstration** Il est clair que la continuité aux points  $a$  et  $b$  est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Notons par  $c$  et  $d$  les sommets

respectifs de  $T$  et  $L$  non sur l'arête  $G'$  (voir Fig. 6). Notons par  $\lambda_a^T, \lambda_b^T$  et  $\lambda_c^T$  les coordonnées barycentriques relatives au triangle  $T$  et  $\lambda_a^L, \lambda_b^L$  et  $\lambda_d^L$  celles relatives au triangle  $L$ . Pour  $x \in G'$ , on a  $\lambda_c^T(x) = \lambda_d^L(x) = 0$ ,

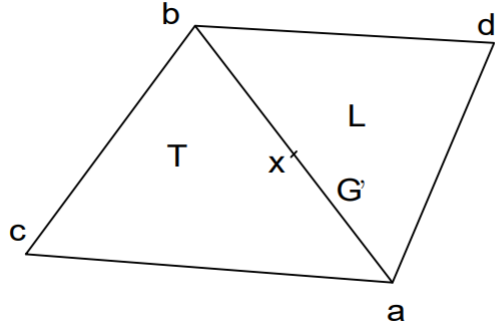


FIGURE 3.7 – Triangles partageant une arête en commun

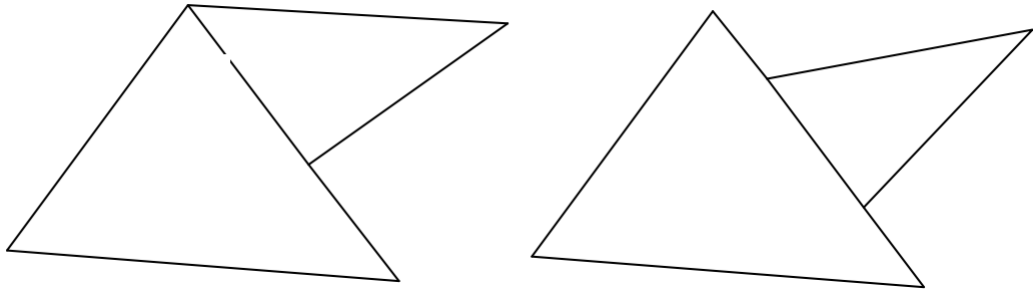


FIGURE 3.8 – Situations interdites

$\lambda_a^T(x) = \lambda_a^L(x) = |x - b|/|a - b|$  et  $\lambda_b^T(x) = \lambda_b^L(x) = |x - c|/|a - c|$ . Il résulte donc des relations ci-dessus que pour  $x \in G'$

$$\begin{aligned} p(x) &= v(a)\lambda_a^T(x) + v(b)\lambda_b^T(x) \\ &= v(a)\lambda_a^L(x) + v(b)\lambda_b^L(x) = q(x) \text{ d'où la proposition.} \end{aligned}$$

A partir des deux propositions précédentes, nous sommes donc amenés à



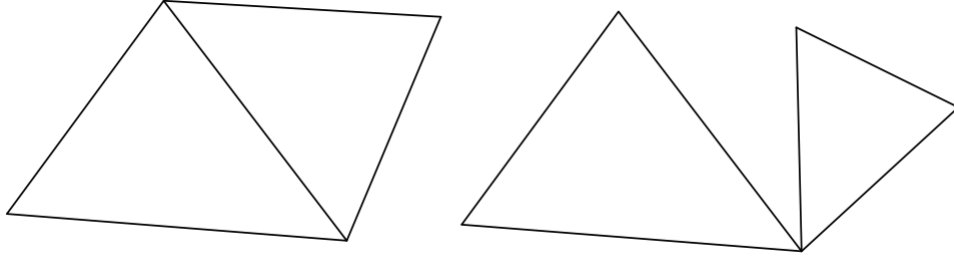


FIGURE 3.9 – Situations permises

mailler  $\Omega$  en triangles vérifiant la **condition de compatibilité** suivante (2.10) L'interface  $G'$  entre deux triangles  $T$  et  $L$  ne peut être qu'une arête commune .

Autrement dit, pour deux triangles  $T$  et  $L$  distincts,  $\bar{T}$  et  $\bar{L}$  ne peuvent avoir qu'une intersection vide, un sommet commun ou toute une arête en commun. Les figures (Fig.7) et (Fig. 8) donnent des exemples de situations conduisant ou non à des maillages utilisables.

A partir des propositions 3.1 et 3.2, on déduit immédiatement la proposition suivante.

□

**Proposition 3.3 :**

Soit un maillage  $\mathcal{T}^h$  en triangles d'un domaine  $\Omega$  polygonal du plan satisfaisant les conditions (3.1), (3.2) et (3.3); alors, l'espace

$$X^h := \{v^h \in C^0(\bar{\Omega}); v^h|_T \in \mathbb{P}_1^{(2)}, \forall T \in \mathcal{T}^h\} \quad (3.20)$$

est un sous-espace de  $H^1(\Omega)$  de dimension  $N_s$  le nombre de sommets du maillage. (Toute fonction  $v^h$  de  $X^h$  est complètement définie à l'aide de ses

degrés de liberté (ici, valeurs nodales)  $v_i^h := v^h(a_i)$  ( $i = 1, \dots, N_s$ ),  $\{a_i\}_{i=1}^{i=N_s}$  étant les sommets du maillage.)

On peut étendre la construction précédente aux maillages de domaines polyédriques  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  en tétraèdres. Cette classe d'éléments finis est appelée méthode d'éléments finis  $\mathbb{P}_1$ -continus.

Nous admettrons enfin le théorème suivant dont la démonstration demande certains développements d'analyse fonctionnelle.

### **Théorème 3.3 :**

La méthode d'éléments finis  $\mathbb{P}_1$ -continus, sur des maillages en segments en dimension un, en triangles en dimension deux et en tétraèdres en dimension trois, donne des approximations internes  $X^h$  de  $H^1(\Omega)$ .

## **3.3 Notion d'élément finie**

Jusqu'à maintenant nous avons parlé d'éléments finis sans vraiment définir cette notion. À partir des constructions précédentes, nous allons dégager la notion d'élément fini. Elle nous permettra par la suite de construire des schémas numériques pour des problèmes plus complexes que les problèmes du second ordre ou d'améliorer certaines caractéristiques du procédé d'approximation comme la précision, le volume de calculs, le stockage, etc.

Une méthode d'éléments finis est caractérisée par les trois données suivantes et les relations qui les lient :

(1) **Domaine géométrique**  $T$ , comme par exemple dans les constructions précédente

(a) Segment  $T := ]a_1^T, a_2^T[$  en dimension un,

(b) Triangle  $T$  de sommets  $\{a_1^T, a_2^T, a_3^T\}$  en dimension deux,

- Tétraèdre  $T$  de sommets  $\{a_1^T, a_2^T, a_3^T, a_4^T\}$  en dimension trois.

(2) **Espace de fonctions de forme**(forme de fonctions approchantes) :

espace  $\mathbb{P}_T$  **de dimension finie** fonctions régulières définies et régulières sur  $\bar{T}$ , comme par exemple ci-dessus,

— Espace  $\mathbb{P}_1^{(1)}$  des polynômes à une indéterminée de degré  $\leq 1$  de dimension 2,

— Espace  $\mathbb{P}_1^{(2)}$  des polynômes à deux indéterminées de degré  $\leq 1$  de dimension 3,

— Espace  $\mathbb{P}_1^{(3)}$  des polynômes à trois indéterminées de degré  $\leq 1$  de dimension 4.

(3) **Système de degrés de liberté**. On se limite dans ce cours aux

degrés de liberté qui sont des **valeurs nodales** qui sont les valeurs d'une fonction ou de certaines de ses dérivées en des points de  $\bar{T}$  appelés **noeuds**. Le système de degrés de liberté doit être unisolvant : la donnée des degrés de liberté  $\ell(p)$  doit déterminer une fonction de

forme  $\mathbb{P} \in P_T$  et en plus de façon unique.

Dans les exemples précédents, on avait

- $\sum_1^{(1)} := \{v(a_1^T), v(a_2^T)\}$
- $\sum_1^{(2)} := \{v(a_1^T), v(a_2^T), v(a_3^T)\}$
- $\sum_1^{(3)} := \{v(a_1^T), v(a_2^T), v(a_3^T), v(a_4^T)\}$

On peut aussi avoir des valeurs nodales qui sont données par la valeur de dérivées ou d'une combinaison de dérivées. On a ainsi successivement lorsque l'élément est un segment, puis un triangle

- Espace  $\mathbb{P}_3^{(1)}, \mathcal{H}_3^{(1)} := \{v(a_1^T), v'(a_1^T), v(a_2^T), v'(a_2^T)\}$
- Espace  $\mathbb{P}_3^{(2)}, \mathcal{H}_3^{(2)} := \{v(a_j^T), (\partial_{x_1} v(a_j^T), \partial_{x_2} v(a_j^T))(j = 1, 2, 3), v(a_0^T)\}$  ou  $a_0^T := (a_1^T + a_2^T + a_3^T)/3$  est le centre de gravité de  $T$ .

Observons qu'un degré de liberté est une forme linéaire sur un espace de fonctions définies régulières sur  $\bar{T}$  contenant  $\mathbb{P}$ .

Une méthode d'éléments finis  $\{T, \mathbb{P}_T, \Sigma\}$  est dite de classe  $C^k$  si les dérivées partielles  $\partial^\alpha p (|\alpha| \leq K)$  d'un élément  $p$  quelconque de  $\mathbb{P}_T$  sur une interface quelconque ne dépendent que des degrés de liberté sur cette interface.

Par exemple, les éléments finis construits ci-dessus sont de classe  $C^0$  mais non de classe  $C^1$ . L'outil algébrique suivant est très utile pour vérifier l'insolvance.

**Proposition 3.4 :**

Soient  $\mathbb{P}$  un espace de dimension finie  $n$  et  $\Sigma$  un système de  $m$  degrés de liberté. Alors,  $\Sigma$  est  $\mathbb{P}$ -unisolvant si et seulement si les deux conditions

suivantes sont vérifiées

- (1) La dimension  $n$  de  $\mathbb{P}$  et le nombre de degrés de liberté  $m$  de  $\Sigma$  sont égaux.
- (2) L'unique  $p \in \mathbb{P}$  qui a tous ses degrés de liberté  $\ell_i(p) = 0 (i = 1, \dots, m)$ , est  $p = 0$

**Démonstration** Soit une base  $\{B_j\}_{j=1}^{j=m}$  de  $\mathbb{P}$ . Par définition, dire que le système  $\Sigma$  est  $\mathbb{P}$ -unisolvant revient à dire que pour chaque système de nombres  $\{b_i\}_{i=1}^{i=n}$  (valeurs des degrés de liberté), il existe un et un seul système de nombres  $\{x_j\}_{j=1}^{j=m}$  (coefficients d'un élément  $p \in \mathbb{P}$  dans la base  $\{B_j\}_{j=1}^{j=m}$ ) tel que

$$\begin{cases} \ell_1(x_1 B_1 + \dots + x_n B_n) = b_1 \\ \vdots \\ \ell_m(x_1 B_1 + \dots + x_n B_n) = b_m \end{cases} \quad (3.21)$$

Le système précédent est en fait un système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_n = b_m \end{cases} \quad (3.22)$$

avec  $a_{ij} := \ell_i(B_j)$ . L'unisolvance est ainsi équivalente au fait que le système linéaire précédent est inversible. On sait que ceci équivaut à  $m = n$  et que le système homogène associé n'admet que la solution nulle. Ceci démontre la proposition.

**Remarque 3.3 :**

De même, pour s'assurer qu'un élément fini  $\{T, P, \Sigma\}$  est de classe  $C^K$ , il suffit de vérifier que si  $p \in P$  a tous ses degrés de liberté sur une interface  $G'$  nuls, alors toutes les dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  sont nulles sur tout  $G'$ .

# Chapitre 4

## Application

### Exemple 4

Le but de ce chapitre est la mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour résoudre le système suivants :

$$\begin{cases} -((1+x)u'(x)) + (4-x)u(x) = -\cos x + 5 \sin x, & x \in ]0, \pi[ \\ u(0) = 0, \quad h_0 = (-1+L), \quad \forall \lambda, L = \pi \end{cases} \quad (4.1)$$

Donc l'équation variationnelle :

$$\int_0^\pi (1+x)u'v' + \int_0^\pi (4-x)u(x)v(x) = \int_0^L f v + h_0 v(L),$$

avec  $v(\pi) = 0$ ,  $v(L) \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(L) = 0$

Alors on a :

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1+x)(\varphi'_i)^2 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x)(\varphi'_i)^2 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (4-x)\varphi_i^2 + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (4-x)\varphi_i^2 \\
&+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1+x)\frac{1}{h^2}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x)\frac{1}{h^2}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (4-x)\frac{(x-x_{i-1})^2}{h^2}dx \\
&+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} (4-x)\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{h^2}dx \\
&= \frac{(-2x_i+8)}{3}h + \frac{(-2x_i+2)}{3h}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

et

$$\varphi_{i+1} = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & [x_i, x_{i+1}] \\ \frac{x_{i+2}-x_0}{h} & [x_{i+1}, x_{i+2}]. \end{cases}$$

$$a_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x)\varphi'_i \varphi'_{i+1}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (4-x)\varphi_i\varphi_{i+1}dx \tag{4.3}$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x) \frac{-1}{h} \frac{1}{h}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (4-x) \frac{x-x_i}{h} \frac{x_{i+1}-x}{h}dx \tag{4.4}$$

$$= \frac{-h^3 + (8-2x_i)h^2 - 6h - 12x_i - 12}{12h} \tag{4.5}$$

$$\tag{4.6}$$

Avec

$$\varphi_{i-1} = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & [x_{i-2}, x_{i+1}] \\ \frac{x_i-x}{h} & [x_{i-1}, x_i]. \end{cases}$$



Donc

$$\begin{aligned}
 a_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1+x) \frac{-1}{h^2} dx + \frac{1}{h} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (4-x) \frac{(x_i-x)(x-x_{i-1})}{h^2} dx \\
 &= \frac{h^3 + (8-2x_i)h^2 + 6h - 12x_i - 12}{12h}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

et

$$\begin{aligned}
 b_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \frac{x-x_i-1}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \frac{x_{i+1}x}{h} dx \\
 &= \frac{-5 \sin(x_{i+1}) + \cos(x_{i-1}) + \cos(x_{i+1}) - 5 \sin(x_{i-1}) - 2 \cos(x_i)}{h} + \frac{10 \sin(x_i)}{h}.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

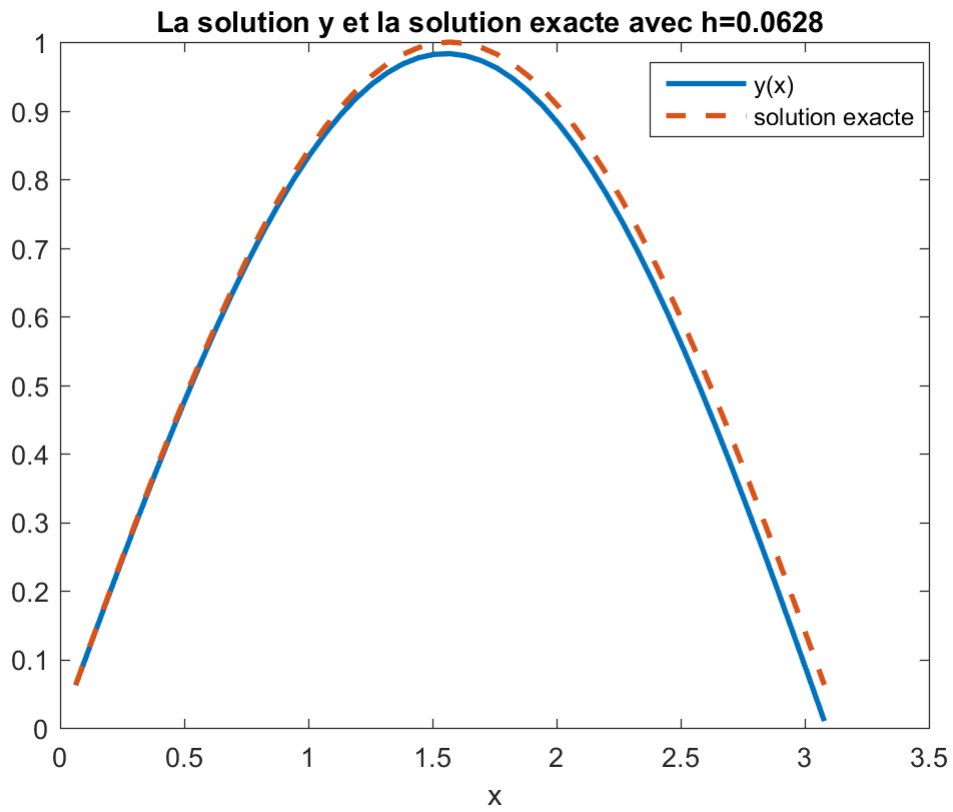
Par suite

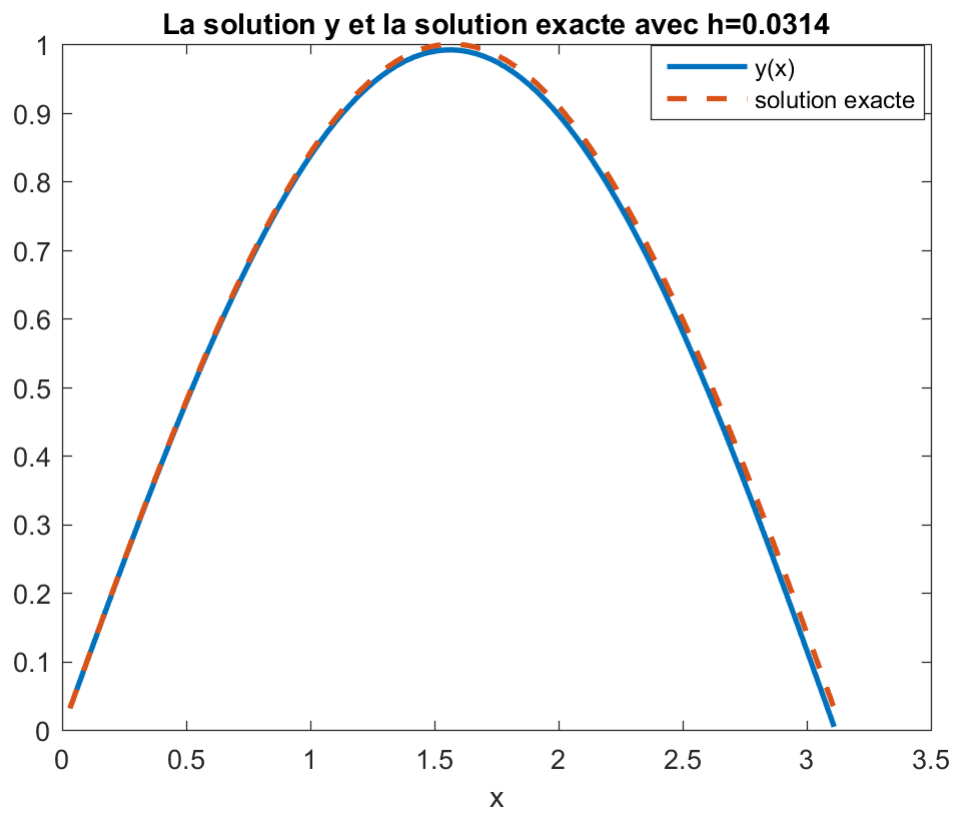
$$Ay = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}$$

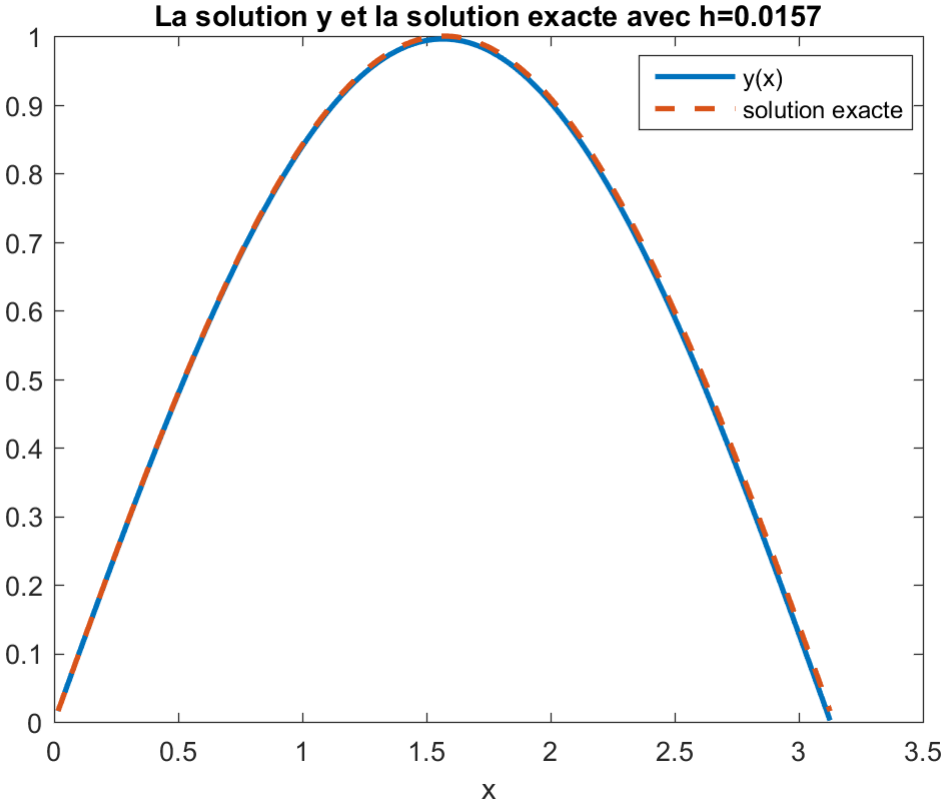
### Exemple 4.1 :

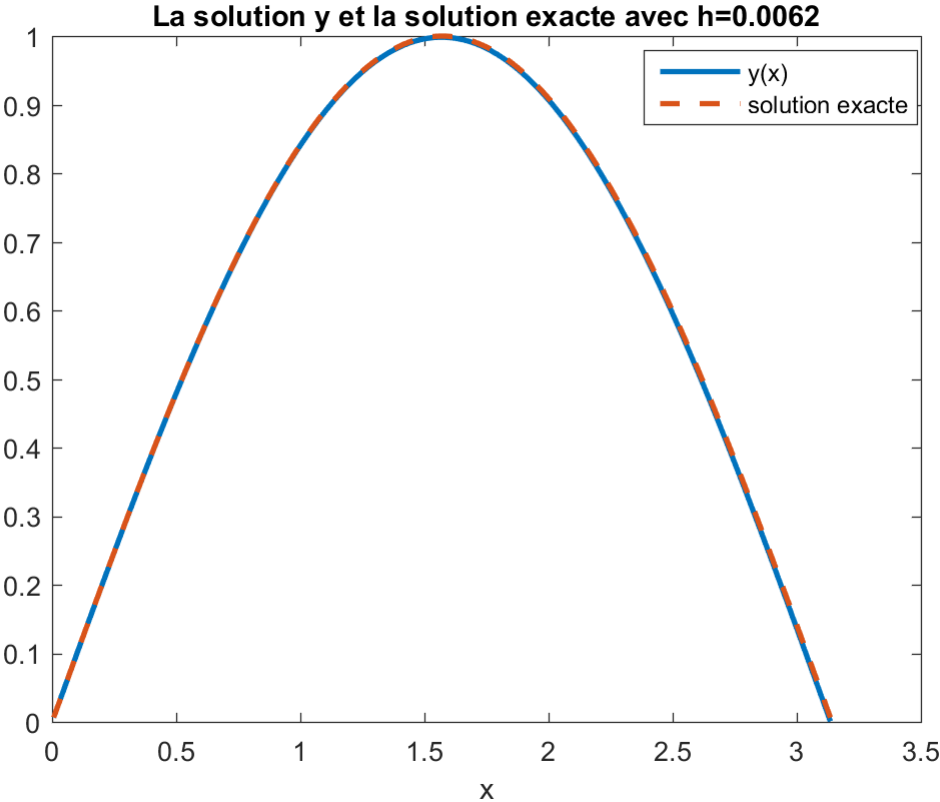
$erreur = \sup_{x \in [0, \pi]} |y - y_{exacte}|$  avec  $y$  est la solution calculée avec notre méthode et  $y_{exacte}$  est la solution exacte de notre problème.

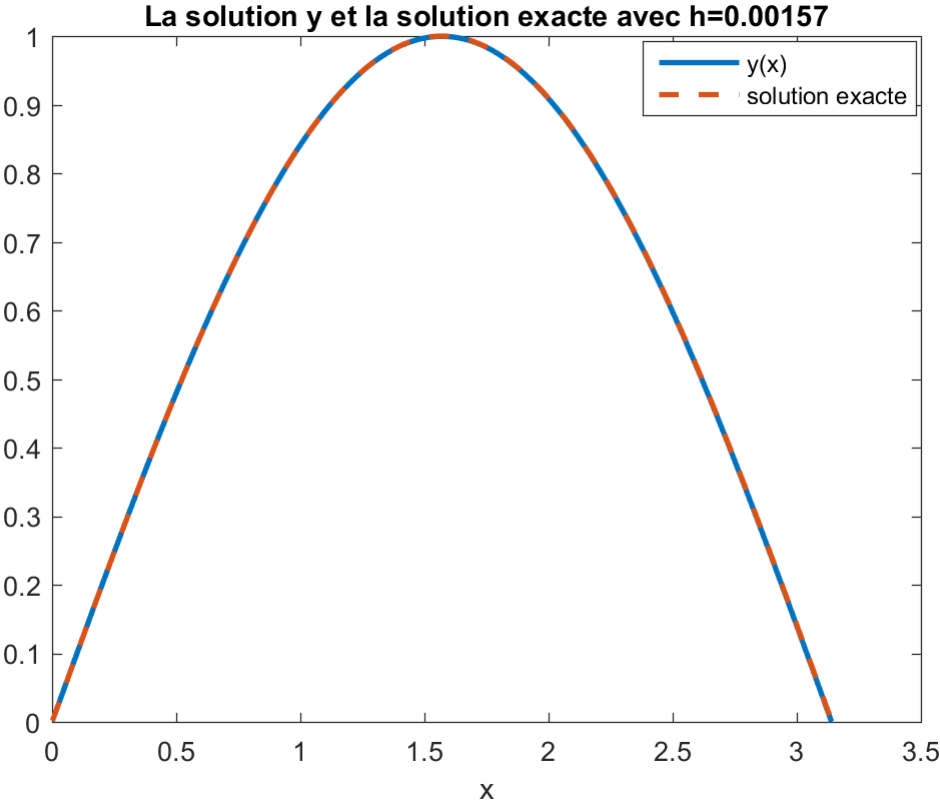
$h$	$6.28 \times 10^{-2}$	$3.14 \times 10^{-2}$	$1.57 \times 10^{-2}$	$6.2 \times 10^{-3}$	$3.1 \times 10^{-3}$	$1.57 \times 10^{-3}$	$6.28 \times 10^{-4}$
erreur	$5.27 \times 10^{-2}$	$2.67 \times 10^{-2}$	$1.34 \times 10^{-2}$	$5.40 \times 10^{-3}$	$2.70 \times 10^{-3}$	$1.35 \times 10^{-3}$	$5.41 \times 10^{-4}$











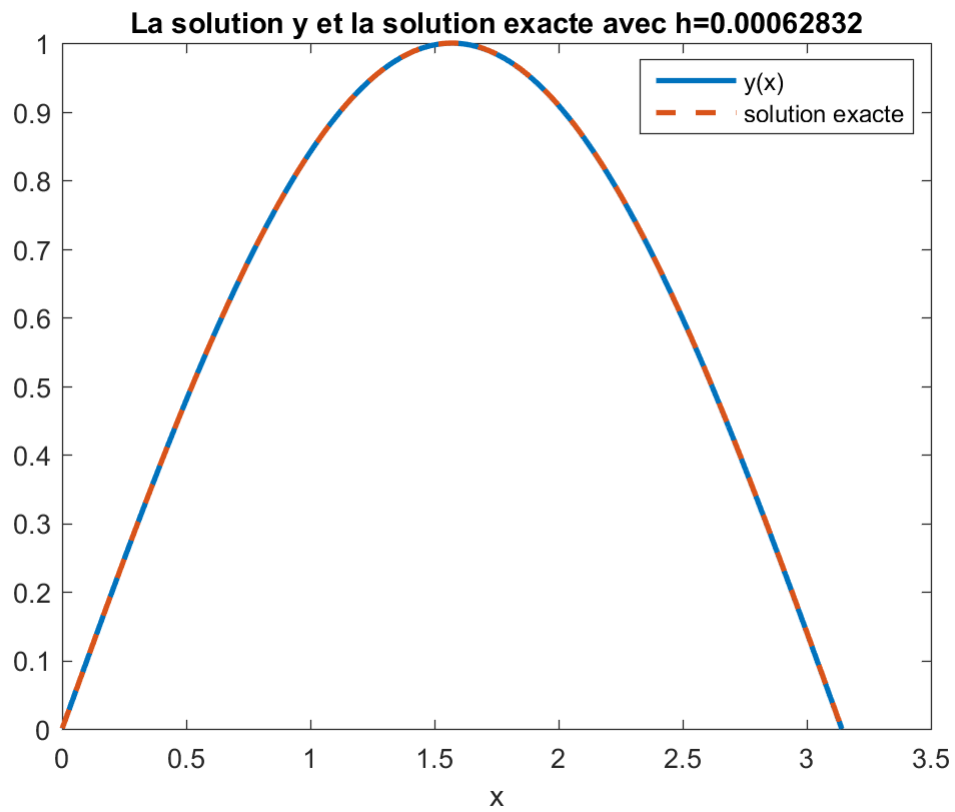


FIGURE 4.1 – La solution exacte et la solution approché par notre méthode pour différent maillages.

## Conclusion

La méthode de l'élément fini est une méthode numérique, elle est conçue dans le procédé de la théorie et du contenu de la pratique informatique . Pour appliquer la théorie de l'utilisation des domaines, nous avons décrit une méthode de Galerkin . On obtient ainsi un produit matrice-vecteur lorsqu'on utilise une formulation Galerkin discontinue . La précision des résultats dépend de la qualité du modèle, mais également du maillage réalisé . Il utilise ensuite les formes de matrice et de vecteur des éléments, Enfin elle combine développe le calcul matriciel approprié en fonction des cas dont nous disposons.