RÉPUPLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOQRATIQUE ET POPULIARE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
IBN KHALDOUN TIARET UNIVERSITY
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUE ET L'INFORMATIQUES
Département de mathématiques

MEMOIRE

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialtité:
« Mathematiques »

Option :
« analyse fonctionnelle et équations différentielles »

Presenté Par :

ABDELHAK CHAIMAA
KHALDI INSSAF

Sous L'intitulé :

Les équations différentielles floues

Soutenu publiquement le : 04 /07 / 2023
à tiaret devant le jury composé de:

Mr. ZIANE Mohamed	MCA U.Ibn Kaldoun-Tiaret	Président
Mr. BOUKENKOUL Abderahmene	MCB U.A Belkaid-Tlemcen	Encadreur
Mr. ZENTAR Oualid	MAA U.Ibn Kaldoun-Tiaret	Examinateur

Année universitaire : 2022/2023

INTRODUCTION

Le concept de nombres et de ensembles flous a été introduit par Zadeh [7]. Depuis lors, plusieurs auteurs ont étudié les propriétés et les applications proposées cette théorie.
L'une des principales applications du concept flous est le traitement de systèmes qui apparaissent dans divers domaines tels que l'économie, l'ingénierie et la physique se résument à la résolution d'un système linéaire d'équations. Les nombres flous sont utilisés dans les statistiques, la programmation informatique, l'ingénierie (en particulier les communications) et la science expérimentale. Le concept prend en compte le fait que tous les phénomènes dans l'univers physique ont un degré d'incertitude inhérente.

En général, les opérations arithmétiques sur les nombres flous peuvent être approchées soit par l'utilisation directe de la fonction d'appartenance (par le principe d'extension de Zadeh), soit par l'utilisation équivalente de la représentation α-coupure.

Le but de ce mémoire portera sur l'éclaircissement de certaines approches dans la recherche des solutions pour divers problèmes différentiels à savoir des problèmes aux limites et des problèmes à valeurs initiales et tout ce travail se fait dans le concept de la théorie floue.

Ce mémoire se compose de sept chapitres :

Dans Le premier chapitre nous avons rassemblé des notions préliminaires consternants le concept de la théorie floue (ensembles flous, fonctions multivoques floues et quelques théorèmes et définitions concernant l'axe des réels flous...)et en fin nous avons présenté des théorèmes du point fixe.

Dans le deuxième chapitre On examine des problèmes aux limites flous ;ce chapitre se compose de deux parties.

La première partie est consacrée aux solutions floues pour les problèmes aux limites à valeurs initiales multi-points associés aux équations différentielles du second ordre. Elle est composée de deux sections.

`Dans la première section` nous nous sommes intéresse aux problème à valeurs initiales à trois points :

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t)) \quad t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \quad y(\eta) = y(1) \end{cases} \tag{1}$$

où E^n est un ensemble semi continu supérieurement, convexe, normal et la fonction :

$$f : J \times E^n \to E^n \text{ Continue, } \eta \in]0,1[$$

`Dans la deuxième section` on examine les problèmes à valeurs initiales à quatre points :

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0,1] \\ y(0) = y'(\eta), \quad y(1) = y(\tau). \end{cases} \tag{2}$$

où f et η comme dans le problème (1) et $\tau \in [0,1]$ $f : J \times E^n \to E^n$ continue $\eta \in [0,1]$

La deuxième partie est consacrée aux problèmes aux limites avec des conditions intégrales

$$y''(t) = f(t, y(t)), \text{ pour tout } t \in [0,1], \tag{3}$$

$$y(0) - k_1 y'(0) = \int_0^1 h_1(y(s))ds, \tag{4}$$

$$y(1) + k_2 y'(1) = \int_0^1 h_2(y(s))ds, \tag{5}$$

avec $f : [0,1] \times E^n \to E^n$ est une fonction continue, et E^n est un ensemble semi continu supérieurement, convexe, normal, flou avec α niveau.

Dans troisième chapitre on examinera les solutions floues pour les Problèmes à valeurs initiales reliés aux équations différentielles impulsives

. Ce chapitre se compose de deux sections.

`Dans la première section` nous nous sommes intéressé aux solutions floues pour les problèmes à valeurs initiales reliés aux équations différentielles impulsives du premier ordre

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J = [0, T], \quad t \neq t_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

$$y(t_k^+) = I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

$$y(0) = a \in E^n, \tag{8}$$

où E^n est l'ensemble des nombres réels flous est $f : J \times E^n \to E^n$, $I_k : E^n \to E^n$, avec $k = 1, \ldots, m$ sont des fonctions données $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$, $a \in E^n$ et $y(t_k^-)$ et $y(t_k^+)$ représentent les limites à droite et à gauche de $y(t)$ à $t = t_k$ respectivement.

texttttDans la deuxième section nous donnons le résultat de l'existence des solutions pour les problèmes à valeurs initiales reliés aux équations différentielles impulsives du second ordre

$$y''(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J = [0, T], \quad t \neq t_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

$$y(t_k^+) = I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

$$y'(t_k^+) = \overline{I}_k(y(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

où f, I_k, et η comme dans le problème du premier ordre, $\overline{I}_k : E^n \to E^n$ et $b \in E^n$.

Dans le quatrième chapitre on examinera l'approche qui s'articule sur les ensembles à niveaux et sur les inclusions différentielles .

Table des matières

Chapitre 1

Concept de la théorie floue

1.1 Généralités

C'était en 1965 que la notion d'ensemble flou était introduite par Zadeh [7].

Degré d'appartenance : l'idée d'appartenance d'un élément à un ensemble est généralisée par l'introduction de l'idée du degré d'appartenance.

Argument de base développe par Zadeh : Soit X un ensemble,les parties usuelles de $X(A \subset X)$ sont identifiées à partir de leurs fonctions caractéristiques correspondantes X_A tel que :

$$(x \in A \textit{ respectivement } x \notin A) \Longleftrightarrow (X_A(x) = 1 \textit{ respectivement } X_A(x) = 0).$$

Définition 1.1 *Zadeh appelle ensemble flou en X toute fonction :*

$$u : X \to [0, 1]$$

de cette manière on donne le degré d'appartenance d'un point x de X par $u(x) \in [0, 1]$.

Manifestement ce concept constitue une extension de l'idée habituelle ([8]).

Pour le rendre opérationnel, il est nécessaire d'étendre les définitions et les opérations usuelles telles que (complémentarité, union, intersection....etc).

Considérons les ensembles flous $u : X \to [0,1]$ où X est un espace topologique (souvent $\mathbb{R}^n$).

En premier lieu, remarquons que tout ensemble flou peut être identifié avec une famille (non dénombrable) d'ensembles standards qui remplissent certaines propriétés.

Définition 1.2 *Soit l'ensemble flou :$u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ pour chaque $\alpha \in]0,1[$ on note :*

$$[u]^\alpha = L_\alpha u = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geqslant \alpha, \alpha \in]0,1[\},$$

$[u]^\alpha$ est l'ensemble de niveau α.

Définition 1.3 *On définit le support de u par*

$$L_0 u = supp(u) = \{\overline{x \in X : u(x) \neq 0}\}.$$

Conséquence : Pour $0 \leq \alpha \leq b$ on a : $L_0 u \supseteq L_\alpha u \supseteq L_b u$ i.e.

$$[u]^b \subset [u]^\alpha \subset [u]^0.$$

De cette manière, l'ensemble flou $u : X \to [0,1]$ on peut lui associer la famille $L_\alpha u, \alpha \in [0,1]$ et réciproquement nous avons le résultat suivant du à **Nagoita et Ralescu**.

Théorème 1.1 [5] *Soit X une espace topologique et soit $\{M_\alpha, \alpha \in [0,1]\}$ une famille de parties de X vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $M_0 \subset X$

2) si $\alpha \leq b$, on α $M_b \subset M_\alpha$

3) si $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ..... \leq 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha$,avec

$$M_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}.$$

Alors il existe un unique ensemble flou $u : X \to [0,1]$ tel que $M_\alpha = L_\alpha u$ pour chaque $\alpha \in [0,1]$

Remarque 1.1 *On observe que, si* $u : X \to [0,1]$ *est un ensemble standard i.e.* $u = X_A$ *pour une partie de* X*, alors, la famille* $L_\alpha u, \alpha \in [0,1]$*est la suivante :*

$$L_\alpha u = \begin{cases} \overline{A} & si\ \alpha = 0 \\ A & si\ 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Notation : Notons par $K(\mathbb{R}^n)$ la famille des ensembles compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ ou de (X)

$$K(\mathbb{R}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \neq 0\ et\ A\ compact\}.$$

L'extension adéquate dans le contexte flou de $K(\mathbb{R}^n)$ est la famille $\mathrm{E}(\mathbb{R}^n)$ des compacts flous non vides de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4 $\mathrm{E}(\mathbb{R}^n)$ *est la famille des ensembles flous* $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *qui vérifient les propriétés suivantes :*

1) u est s.c.s (semi continu supérieurement).

2) $L_0(u)$ *est un compact.*

3) L'ensemble $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = 1\}$ *est non vide.*
i.e ; u est normal : $\exists x \in \mathbb{R}^n$ *telle que* $u(x) = 1$.

Résultat : Étant donné un ensemble flou $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, facile de voir l'équivalence suivante

$$u \in \mathrm{E}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow L_\alpha(u) \in K(\mathbb{R}^n),$$

pour tout $\alpha \in [0,1]$.

Remarque 1.2 *Cette caractérisation est essentielle pour aborder les questions mentionnées dans la suite de ce travail.*

Notons par $K^c(\mathbb{R}^n)$ *le sous ensemble de* $K(\mathbb{R}^n)$ *formé des compacts convexes non vides de* $\mathbb{R}^n$

$$K_c(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathbb{R}^n : A \neq 0, compact\ et\ convexe\}.$$

Nous indiquons d'abord la généralisation dans le contexte flou de $K_c(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.5 *L'ensemble flou* $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *est dit convexe flou si :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad , \forall \lambda \in [0,1], \ on \ a :$$
$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min\{u(x), u(y)\}.$$

Autre meut dit :

$$(u\ est\ convexe\ flou) \Longleftrightarrow (L_\alpha(u)\ est\ convexe\ pour\ chaque\ \alpha \in [0,1]).$$

Posons maintenant $\mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n) = \{u \in E(\mathbb{R}^n) : u\ est\ convexe\ flou\}$, *donc*

$$K_c(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n)\ vue\ l'inclusion\ canonique\ A \to X_A$$

d'autre part :

$$u \in \mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow L_\alpha(u) \in K_c(\mathbb{R}^n) \qquad \forall \alpha \in [0,1],$$

l'ensemble $\mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n)$ *peut être muni d'une structure d'espace vectoriel en posant :*

$$(u_1 \oplus u_2)(x) = \sup_{y+z=x} \min\{u_1(y), u_2(z)\}$$

pour $u_1, u_2 \in \mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n)$

$$(\lambda \otimes u)(x) = u(\frac{x}{\lambda})\ si\ \lambda \neq 0\ et\ (\lambda \otimes u)(x) = X_{\{0\}}(x)\ si\ \lambda = 0$$

pour chaque $u \in \mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n)$.

bien qu'à la première vue,ces opérations apparaissent étranges,elles sont complètement naturelles si nous pensions en termes d'ensembles à niveaux.En effet la définition précédente de la somme nous permet d'écrire :

$$L_\alpha(u_1 \oplus u_2) = L_\alpha(u_1) + L_\alpha(u_2), \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n)$$

et pour chaque $\alpha \in [0,1]$
et pour le produit on obtient :

$$L_\alpha(\lambda \otimes u) = \lambda L_\alpha(u), \qquad \forall \lambda \in \mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 1.3 *Il ya une outre manière équivalente pour définir la somme dans* $\mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n)$ *c'est à partir de la convolution inférieure d'analyse convexe (pour la démonstration on peut consulter [9,4]).*

On définit une structure sur $\mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n)$ *en posant :*

$$\begin{aligned} d_\infty(u_1, u_2) &= \sup_{\alpha>0} H_d(L_\alpha(u_1), L_\alpha(u_2)) \\ &= \sup_{\alpha\geq 0} H_d([u_1]^\alpha, [u_2]^\alpha) \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{R}^n \hookrightarrow (K(\mathbb{R}_n), H_d) \hookrightarrow (\mathrm{E}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$$

des injections continues. On note

$$\mathrm{E}^n = \{u : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1],\ \textit{tel que u vérifie } (i) - -(iv)\}$$

i) *u est normal i,e ;*$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $u(x_0) = 1$

ii) *u est convexe flou , alors* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ *et* $0 < \lambda \leq 1$

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min\{u(x), u(y)\}$$

iii) *u est semi continuité supérieurement (s.c.s)*

iv) $[u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n u(x) > 0\}}$ *est compact ,*
et pour $0 < \lambda \leq 1$, *on note* $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n u(x) > \alpha\}$,

l'ensemble $[u]^\alpha \in \mathrm{E}_c(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Principe d'extension de Zadeh

Soit $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$une fonction, par le principe d'extension de Zadeh On peut l' étendre g à $\mathrm{E}^n \times \mathrm{E}^n \to E^n$ par la fonction définie par

$$g(u,\overline{u})(z) = \sup_{z=g(x,\overline{z})} min\{u(x), \overline{u}(\overline{z})\},$$

et il est très connu que

$$[g(u,\overline{u})]^\alpha = ([u]^\alpha, [\overline{u}]^\alpha) \qquad \forall u, \overline{u} \in \mathrm{E}^n \text{ et } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ et } g \text{ est continue.}$$

Pour l'addition et la multiplication par un scalaire on a

$$[u+\overline{u}]^\alpha = [u]^\alpha + [\overline{u}]^\alpha; [Ku]^\alpha = K[u]^\alpha.$$

Définition 1.6 *Soit A, B deux sous ensembles fermés non vides de $\mathbb{R}^n$, la distance entre A et B est définie par la métrique d'Hausdorff :*

$$H_d(A,B) = max\{\sup_{\alpha \in A} d(\alpha, B), \sup_{\alpha \in B} d(A, b)\}.$$

La métrique supérieure d_∞, elle est définie sur E^npar

$$d_\infty(u,\overline{u}) = \sup_{0<\alpha<1} H_d([u]^\alpha, [\overline{u}]^\alpha), \qquad \forall u, \overline{u} \in \mathrm{E}^n.$$

(E^n, d_∞) *est un espace métrique complet et* $\forall u, v \in \mathrm{E}^n$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a*

$$d_\infty(u+w, v+w) = d_\infty(u,v),$$
$$d_\infty(\lambda u, \lambda v) = \parallel \lambda \parallel d_\infty(u,v).$$

Définition 1.7 *L'élément $\hat{0} \in \mathrm{E}^n$ est défini par*

$$\hat{0}(x) = \begin{cases} 1 & si \ x = 0, \\ 0 & si \ x \neq 0. \end{cases}$$

Conséquence : (E^n, d_∞) peut être injecté isométriquement comme un cône dans l'espace de Banach X c'est à dire une injection $j : \mathrm{E}^n \longrightarrow X$ définie par :

$$j(u) =< u, \hat{0} >, ou \ u \in \mathrm{E}^n, avec \parallel < u, v > \parallel_X = d_\infty(u,v) \ pour \ u, v \in \mathrm{E}^n.$$

Pour cela ,en particulier,

$$\|ju\|_X = \parallel < u, \hat{0} > \parallel_X = d_\infty(u, \hat{0}), \qquad pour \ u \in \mathrm{E}^n.$$

Définition 1.8 *La métrique supérieure H_1 dans $C(J, \mathrm{E}^n)$ définie par :*

$$H_1(w, \overline{w}) = d_\infty(w(t), \overline{w}(t))$$

à partir de $j : \mathrm{E}^n \longrightarrow C \subset X$ on peut définir l'application

$$\overline{J} : C(J, \mathrm{E}^n) \longrightarrow C(J, X) \text{ par :}$$
$$[\overline{J}x](t) = j(x(t)) = jx(t) \text{ pour } \ t \in [0,1];$$

Ici $x \in C(J, \mathrm{E}^n)$ notons que si $x \in C(J, \mathrm{E}^n)$ et $t_0, t_1 \in [0,1]$, alors, par définition de j nous ourons :

$$\|[\overline{J}x](t) - \overline{J}x](t_0)\|_{C([0,1],X)} = \sup_{t\in[0,1]} \|Jx(t) - Jx(t_0)\| = d_\infty(x(t), x(t_0)),$$

de plus il est simple de vérifier que :

$$\overline{J} : C(J, \mathrm{E}^n) \longrightarrow \overline{J}(C(J, \mathrm{E}^n))$$

est un homéomorphisme .

Preuve :$\overline{J}$ est continue : soit $x_n, n \in \mathbb{N}, x \in C(J, \mathrm{E}^n)$ telle que :

$$H_1(x_n, x) = \sup_{t\in[0,1]} d_\infty(x_n(t), x(t)) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty,$$

et

$$\begin{aligned} \|\overline{J}x_n - \overline{J}x\| &= \sup_{t\in[0,1]} \|Jx_n(t) - Jx(t)\| \\ &= \sup_{t\in[0,1]} d_\infty(x_n(t), x(t)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow +\infty$ et ainsi $\overline{J}$ est continue.

$\overline{J}^{-1}$ est continue : soit $y_n \in J(C([0,1], \mathrm{E}^n)), y \in J(C([0,1], \mathrm{E}^n))$ avec $\|y_n - y\|_{C(J,X)} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, alors il existe $x_n, x \in C(J, \mathrm{E}^n)$ avec $\overline{J}x_n = y_n$ et $y = \overline{J}x$ et ceci :

$$\begin{aligned} H_1(\overline{J}^{-1}y_n, \overline{J}^{-1}y) &= \sup\nolimits_{t\in[0,1]} d_\infty(\overline{J}^{-1}y_n(t), \overline{J}^{-1}y(t)) \\ &= \sup\nolimits_{t\in[0,1]} d_\infty(y_n(t), y(t)) \\ &= \sup\nolimits_{t\in[0,1]} \|j(y_n(t)) - j(y(t))\|_X \\ &= \sup\nolimits_{t\in[0,1]} \|y_n(t) - y(t)\|_X \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow +\infty$. Alors $y_n(t) = jx(t)$ d'où $\overline{j}^{-1}$ est continue.

1.3 Fonctions multivoques floues

1.3.1 Multi-fonction :

Soient X, Y deux ensembles. Désignons par $\mathcal{P}(Y)$ la famille des parties non vides de Y .

Définition 1.9 *a) Une multi-application F de X dans Y est une application de X dans $\mathcal{P}(Y)$.*

b) Le sous ensemble $Dom(F) = \{x \in X/F(x) \neq \emptyset\}$ est appelé domaine de F.
Si $A \subset X$, on note par $F(A) = \cup\{F(x)/x \in A\}$.

c) Le graphe de la multi-application est l'ensemble :

$$Gra(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

d) L'image de F est le sous ensemble de Y donnée par : $F(X) = \cup\{F(x)/x \in X\}$.

1.3.2 Multi-fonction floue

Définition 1.10 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide, on appelle fonction multivoque floue toute application :*

$$H : \mathbb{R}^n \supset A \longrightarrow E(\mathbb{R}^n).$$

Définition 1.11 *a) On dit que $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow E(\mathbb{R}^n)$ est une multi-fonction lipshitz continue si :*

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } d_\infty(H(x), H(z)) \leq \gamma \|x - z\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

b) Le multi fonction H est une contraction si elle vérifie la propriété précédente avec un certain γ de $[0, 1[$.

c) On dit que x est un point fixe de H si $\mathcal{X}_{(x)} \in H(x)$.

Le théorème suivant est la version floue du théorème de Nadler.

Théorème 1.2 [5] *Soit $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow E(\mathbb{R}^n)$ une contraction floue alors H possède au moins un point fixe .*

Définition 1.12 *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré complet et soit* $H : \Omega \longrightarrow E(\mathbb{R}^n)$ *une multifonction floue.*
On dit que H *est mesurable si la multi-fonction* $H_\alpha : \omega \longrightarrow \Bbbk(\mathbb{R}^n)$ *définie par*

$$H_\alpha(\omega) = L_\alpha[H(\omega)]; \qquad \forall \omega \in \Omega \; est \; mesurable \; pour \; chaque \; \alpha \in [0,1].$$

On dit que H *est délimite intégralement si chaque* H_α *l'est.*
Théorème 1.3 [5] *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré complet et soit* $H : \Omega \longrightarrow E(\mathbb{R}^n)$ *une multifonction mesurable et délimité intégralement. Alors il existe un unique ensemble flou* $u \in E(\mathbb{R}^n)$ *avec la propriété suivante :*

$$L_\alpha u = \int_\Omega H_\alpha d\mu \qquad \forall \alpha \in [0,1].$$

L'ensemble u *est par définition l'intégrale de la multi-fonction floue* H *et est notée par*

$$\int_\Omega H d\mu.$$

Avec cette définition de l'intégrale d'une multi-fonction floue réunie avec des conditions convenables, on obtient que :

$$\int_\Omega H d\mu \in E_c(\mathbb{R}^n).$$

En effet, comme conséquence immédiate des propriété de l'intégrale Aumann [10], les ensemble à niveaux $L_\alpha[\int_\omega H d\mu]$ *sont tous compact et convexes. D'autre part, il n'est pas difficile de vérifier que l'intégrale multivoque floue est linéaire dans le sens suivant :*

$$L_\alpha \left[\int_\Omega (H_1 \oplus H_2) d\mu \right] = L_\alpha \int_\Omega H_1 d\mu + \int_\Omega H_2,$$

$$L_\alpha \left[\int_\Omega \lambda \otimes H d\mu \right] = \lambda L_\alpha \int_\Omega H d\mu.$$

Pour plus de détails sur les propriétés de cette intégrale, on peut consulter les références [9] et [4].

1.4 Axe des réels flous

On note par $\mathbb{R}_F$ la classe des sous ensembles flous de l'axe réel i.e l'ensemble :

$$\{u : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : u\ satisfait\ (i)-(iv)\}.$$

(i) $\forall u \in \mathbb{R}_F$, u est normal i.e il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = 1$.
(ii) $\forall u \in \mathbb{R}_F$, u est un ensemble convexe floue i.e.

$$u(tx + (1-t)y) \geq min\{u(x), u(y)\}; \forall t \in [0,1], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(iii) $\forall u \in \mathbb{R}_F$, u est semi-continu supérieurement .
(iv) $\overline{\{x \in \mathbb{R} u(x) > 0\}}$ est compact ou $\overline{A}$ désigne la fermeture de A.

- $\mathbb{R}_F$ est l'espace des nombres réels flous.
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_F, \mathbb{R} = \{\mathcal{X}_{\{x\}} : x\ est\ un\ reel\ usuel\}$.

Un nombre flou ou (intervalle) est complètement déterminé par la paire $u = (u^-, u^+)$ des fonctions $u^+, u^- : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définissent les points limites dans les α-coupures satisfaisant les trois conditions suivantes :

(i) $u^- : \alpha \longrightarrow u^-_\alpha \in \mathbb{R}$ est bornée, monotone croissante continue à gauche $\forall \alpha \in]0,1]$ et continue à droite pour $\alpha = 0$.

(ii) $u^+ : \alpha \longrightarrow u^+_\alpha \in \mathbb{R}$ est bornée, monotone décroissante continue à gauche $\forall \alpha \in]0,1]$ et continue à droite pour $\alpha = 0$.

(iii) $u^-_\alpha \leq u^+_\alpha, \forall \alpha \in [0,1]$.
Si $u^-_1 < u^+_1$ nous avons un intervalle, et si $u^-_1 = u^+_1$ nous avons un nombre flou En raison de simplicité nous considérons les nombres flous comme intervalles flous.

1.4.1 Notations

Nous avons les notation suivantes :

1) $u_\alpha = [u^-_\alpha, u^+_\alpha]$ telle que $\alpha \in [0,1]$ désigne explicitement les α-coupures de u. avec :
u^-_α est la coupure inférieure et u^+_α est la coupure supérieure.

2) Un nombre trapézoidal et noté par :$u =< a, b, c, d >$ dont les α-coupures sont :

$$u_\alpha = [a + \alpha(b-a), d - \alpha(d-c)].$$

3) Un nombre triangulaire flou est noté par $u =< a, b, c >$ dont les α-coupures :

$$u_\alpha = [a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)].$$

1.4.2 Notation de calcul de base dans $\mathbb{R}_{\boldsymbol{F}}$

Les opérations arithmétique pour deux nombre flous :
soit $u = (u^-, u^+), v = (v^-, v^+)$ sont définis en termes des α-coupures pour $\alpha \in [0, 1]$:

- Addition :
$$(u + v)_\alpha = [u_\alpha^- + v_\alpha^-, u_\alpha^+ + v_\alpha^+].$$
- Multiplication par un scalaire : étant donné $k \in \mathbb{R}$,
$$(Ku)_\alpha = [min\{Ku_\alpha^-, Ku_\alpha^+\}, max\{Ku_\alpha^-, Ku_\alpha^+\}].$$
- Soustraction :
$$(u - v)_\alpha = [u_\alpha^- - v_\alpha^+, u_\alpha^+ - v_\alpha^-].$$
- Multiplication :
$$(uv)_\alpha = [(uv)_\alpha^-, (uv)_\alpha^+].$$
où
$$(uv)_\alpha^- = min\{u_\alpha^- v_\alpha^-, u_\alpha^- v_\alpha^+, u_\alpha^+ v_\alpha^-, u_\alpha^+ v_\alpha^+\},$$
$$(uv)_\alpha^+ = max\{u_\alpha^- v_\alpha^-, u_\alpha^- v_\alpha^+, u_\alpha^+ v_\alpha^-, u_\alpha^+ v_\alpha^+\}.$$
- Division : si $0 \notin [v_0^-, v_0^+]$,
$$\left(\frac{u}{v}\right)_\alpha = \left[\left(\frac{u}{v}\right)_\alpha^-, \left(\frac{u}{v}\right)_\alpha^+\right].$$
où
$$\left(\frac{u}{v}\right)_\alpha^- = min\left\{\left(\frac{u^-}{v^-}\right)_\alpha, \left(\frac{u^-}{v^+}\right)_\alpha, \left(\frac{u^+}{v^-}\right)_\alpha, \left(\frac{u^+}{v^+}\right)_\alpha\right\},$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)_\alpha^+ = max\left\{\left(\frac{u^-}{v^-}\right)_\alpha, \left(\frac{u^-}{v^+}\right)_\alpha, \left(\frac{u^+}{v^-}\right)_\alpha, \left(\frac{u^+}{v^+}\right)_\alpha\right\}.$$

1.4.3 Opération sur $\mathbb{R}_F$

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}_F$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u \oplus v$ *et* $\lambda \odot u$ sont définies par :

$$[u \oplus v]^r = [u]^r \oplus [v]^r,$$

$$[\lambda \odot u]^r = \lambda \odot [u]^r, \forall r \in [0,1].$$

Rappelons que

$$[u]^r \oplus [v]^r = \{x + y : \ x \in [u]^r, y \in [v]^r\},$$

$$\lambda [u]^r = \{\lambda x, x \in [u]^r\}.$$

1.4.4 Distance sur $\mathbb{R}_F$

Soit $d_\infty : \mathbb{R}_F \times \mathbb{R}_F \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la distance sur $\mathbb{R}_F$ définie par

$$d_\infty(u, v) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \ max\{|u_-^r - v_-^r|, |u_+^r - v_+^r|\};$$

$$[u]^r = [u_-^r, u_+^r] \ et \ [v]^r = [v_-^r, v_+^r].$$

Avec u_-^r branche inférieure, u_+^r branche supérieure.

1.4.5 Propriétés

Propriété 1.1 [*1*] *La distance d_∞ vérifie les propriétés suivantes :*
(i) $d_\infty(u \oplus w, v \oplus w) = d_\infty(u, v), \forall u, v, w \in \mathbb{R}_F.$
(ii) $d_\infty(k \odot u, k \odot v) = |k|.d_\infty(u, v), \forall u, v, w \in \mathbb{R}_F, \forall k \in \mathbb{R}.$
(iii) $d_\infty(u \oplus v, w \oplus e) \leq d_\infty(u, w) + d_\infty(v, e), \forall u, v, w, e \in \mathbb{R}_F, (\mathbb{R}_F, d_\infty)$ *est un espace métrique complet.*

Théorème 1.4 [*1*]
(i) si on note $\hat{0} = \mathcal{X}_{\{0\}}$ *alors* $\hat{0} \in \mathbb{R}_\infty \mathbb{R}_F$ *est l'élément neutre de* $\oplus$ *i.e* $u \oplus \hat{0} = \hat{0} \oplus u = u, \forall u \in \mathbb{R}_F.$
(ii) Pour tout $u \in \mathbb{R}_F$*, possède un inverse dans* $\mathbb{R}_F$ *pour la loi* $\oplus$.
(iii) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ *tel que* $ab \geq 0$ *et* $\forall u \in \mathbb{R}_F$ *on a :*

$$(a + b) \odot u = a \odot u \oplus b \odot v.$$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ *cette propriété n'est pas toujours vraie .*

(iv) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\forall u, v \in \mathbb{R}_F$ *nous avons :*

$$\lambda \odot (u \oplus v) = \lambda \odot u \oplus \lambda \odot v.$$

(v) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}_F$, *on a :*

$$\lambda \odot (\mu \odot v) = (\lambda\mu) \odot v.$$

Théorème 1.5 [1] *Si on définit*

$$j : \mathbb{R}_F \longrightarrow \bar{C}[0,1] \times \bar{C}[0,1]$$

$$u \longrightarrow j(u) = (u_-, u_+)$$

où

$$u_-, u_+ : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, u_-(r) = u_-^r, u_+(r) = u_+^r.$$

Alors $j(\mathbb{R}_F)$ *est un cône convexe de sommet* o *dans* $\bar{C}[0,1] \times \bar{C}[0,1]$.
On remarque que $\bar{C}[0,1] \times \bar{C}[0,1]$ *est un Banach avec la norme*

$$\|(f,g)\| = max\{\|f\|, \|g\|\}.$$

et j *satisfait :*
(i) $j(s \odot u \oplus t \odot v) = sj(u) + tj(v)$.
(ii) $d_\infty(u,v) = \|j(u) - j(v)\|$ *pour tout* $u, v \in \mathbb{R}_F$ *et* $t, s \geq 0$.

1.5 Théorème de point fixe

Théorème 1.6 [11] *Soit* X *un espace absolument retracté et* $F : X \longrightarrow X$ *une application continue et complètement continue, alors* F *admet un point fixe.*
Théorème 1.7 [13] ***Alternatif non linéaire de Leray-Schauder*** *Soient* B *un espace de Banach et* C *un sous ensemble convexe de* B. *On suppose que* U *est un sous-ensemble ouvert de* C *avec* $u_0 \in U$ *et* $T : \overline{U} \longrightarrow C$ *un opérateur continu et compact alors : l'un des énoncés suivants a lieu*

1. *T admet un point fixe,*
2. *Il existe $u \in \partial U$ et $\lambda \in [0,1]$ avec $u = \lambda T(u) + (1-\lambda)u_0$.*

Théorème 1.8 [3] ***Théorème de Schaefer***
Soient X un espace de Banach et $N : X \longrightarrow X$ est un opérateur complètement continu (i.e l'opérateur est continu et l'image de tout borné B de X par l'opérateur N est un ensemble relativement compact dans X).
Si l'ensemble

$$\mathrm{E}(N) = \{x \in X : x = \lambda N x, \ \textit{pour} \ \lambda \in [0,1]\}$$

est borné, alors N admet un point fixe .

Théorème 1.9 [3] ***Théorème de Banach pour les contractions***
Soit E un espace de Banach, si $N : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ est une contraction alors N admet un point fixe unique.

Chapitre 2

Problèmes aux limites flous

L'étude des problèmes aux limites multi-points associés aux équations différentielles du second ordre a été initiée H'in et Moissev [12].
Au début des années 1960, Gupta [2] a étudié les problèmes à trois points associés aux équations différentielles ordinaire du second ordre non linéaires.
Kandel et Byarr [9] ont introduit le concept des équations différentielles floues. Un peu plus tard ce concept a eté impliqué dans les systèmes dynamiques floues .Nieto[6] a étudié le problème le Cauchy pour les équations différentielles floues du premier ordre.
Benchohra et al [11] ont étudié l'existence des solutions floues pour les problèmes aux limites multipoints.
Dans ce chapitre on examine l'existence de solutions pour l'équation différentielle floue avec condition non locale.

2.1 Problèmes aux limites multi-points associés aux équations différentielles du second ordre floues

2.1.1 Problèmes aux limites à trois points

On considère le problème aux limites suivant :

$$y''(t) \quad = \quad f(t, y(t)), \quad t \in [0, 1] \tag{2.1}$$

$$y(0) = 0, \quad y(\eta) = y(1) \tag{2.2}$$

où E^n est un ensemble semi continu superieurement, convexe, normal et la fonction $f : J \times E^n \longrightarrow E^n$ continue et $\eta \in]0,1[$.

Définition 2.1 *La fonction $y \in C([0,1], E^n)$ est dite solution du problème (2.1)–(2.2) si*
(1) y satisfait l'équation (2.1) pour tout $t \in [a,b]$;
(2) y vérifie la condition (2.2).

Lemme 2.1 *Le problème (2.1)-(2.2) est équivaut à l'equation integrale*

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t (t-s)f(s,y(s))ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta - s)f(s,y(s))ds \\ &\quad -\frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (t-s)f(,y(s))ds. \end{aligned}$$

Preuve Si u est une fonction dérivable, on a :

$$u(t) = \int_0^t u'(s)ds + u(0).$$

De même si $u'(t)$ est une fonction dérivable, on a :

$$u'(t) = \int_0^t u''(s)ds + u'(0).$$

$$u''(t) = f(t, u(t)) = F(t).$$

pour $u'(0) = b$.

$$u'(t) = \int_0^t f(s, u(s))ds + b$$

d'où, en posant $u(0) = a$ donc

$$u(t) = \int_0^t \left(\int_0^\tau F(s)ds\right) d\tau + bt + a$$

L'intégrale double est étendue ou domaine triangulaire du plan des variables s, τ

$$0 \le s \le \tau, \quad 0 \le \tau \le t.$$

On a donc le changement d'ordre des intégrations

$$u(t) = \int_0^t (F(s)\int_s^t d\tau)ds + bt + a.$$

a et b seront déterminées grâce aux conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ u(\eta) &= u(1), \end{aligned}$$

d'où

$$u(0) = 0 \quad \text{entraine} \quad a = 0$$

de la condition $u(\eta) = u(1)$ on a

$$\int_0^\eta F(s)(n-s)ds + b\eta = \int_0^1 F(s)(1-s)ds + b$$

alors

$$b(1-\eta) = \int_0^\eta F(s)(\eta - s)ds - \int_0^1 F(s)(1-s)ds; \quad avec 0 \leq \eta \leq 1.$$

donc

$$b = \frac{1}{1-\eta}\left[\int_0^\eta F(s)(\eta-s)ds - \int_0^1 F(s)(1-s)ds\right].$$

par conséquent l'expression de la solution u sera

$$u(t) = \int_0^t F(s)(t-s)ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta-s)F(s)ds - \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)f(s,y(s))ds$$

avec les notations :

$$u = y; \quad F(s) = f(s, y(s)).$$

Finalement on a l'opérateur intégral

$$\begin{aligned} N(y(t)) &= \int_0^t (t-s)f(s,y(s))ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta-s)f(s,y(s))ds \\ &\quad - \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (t-s)f(s,y(s))ds. \end{aligned}$$

Théorème 2.1 *Soit $f : [0,1] \times E^n \longrightarrow E^n$ une fonction continue vérifie les conditions suivantes :*

(A1) Il existe une fonction continue croissante $\Psi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ *et* $p \in L(J, R_+)$ *telle que*

$$d_\infty(f(t, y), \hat{0}) \leq P(t).\psi(d_\infty(y, \hat{0})), \quad \textit{pour } t \in J, y \in E^n.$$

(A2) Il existe $M > 0$*, avec*

$$M - \psi(M)\left(1 + \frac{2}{1-n}\int_0^1 p(s)ds\right) \geq 0,$$

tel que pour chaque $t \in J$ *l'ensemble :*

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^t (t-s)f(s, y(s))ds \\ \displaystyle +\frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta - s)f(s, y(s))ds - \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)f(s, y(s))ds; y \in \mathbb{A} \end{array}\right\}$$

est un sous ensemble de E^n *totalement borné : où*

$$A = \{y \in \mathbb{C}(J, E^n) : d_\infty(y(t), \hat{0}) \leq M, t \in J\}.$$

Alors le problème (2.1)–(2.2) possède au moins une solution floue dans J*.*

Preuve D'après le Lemme 1, la solution du (2.1)–(2.2) est le point fixe de l'opérateur

$$N : \mathcal{C}(J, E^n) \to \mathcal{C}(J, E^n)$$

défini par :

$$N(y(t)) = \int_0^t (t-s)f(s, y(s))ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta - s)f(s, y(s))ds - \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (t-s)f(s, y(s))ds.$$

On pose :

$$A \cong B \equiv \left\{\overline{J_y} \in \mathcal{C}(J, E^n) : y \in \mathcal{C}(J, E^n) \textit{ et } d_\infty(y(t), \widehat{0}) \leq M, t \in J\right\}.$$

On voit que B est un sous ensemble convexe de l'espace de Banach $\mathcal{C}(J, X)$; donc en particulier B est absolument rétracté.
On démontre que l'opérateur :$N : A \to A$ est continu et complètement continu .

Cette preuve se fait en trois étapes.
Étapes 1. Montrons que $N(A) \subset A$.
Soit $y \in A$ et $t \in [0,1]$, d'après $(A1)$ on aura :

$$\begin{aligned}
d_\infty(N(y(t)),\hat{0}) &= d_\infty(\int_0^1 (t-s)f(s,y(s))ds \\
&\quad + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta-s)f(s,y(s))ds \\
&\quad - \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)f(s,y(s))ds;\hat{0}) \\
&\leq \int_0^t (t-s)d_\infty(f(s,y(s)),\hat{0})ds \\
&\quad + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta-s)dsd_\infty(f(s,y(s)),\hat{0})ds \\
&\quad + \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (\mathbb{1}-s)d_\infty(f(s,y(s)),\hat{0})ds \\
&\leq \int_0^1 P(s)\psi(d_\infty(y(s)),\hat{0})ds + \frac{1}{1-\eta}\int_0^1 P(s)\psi(d_\infty(y(s)),\hat{0})ds \\
&\quad + \frac{1}{1-\eta}\int_0^1 P(s)\psi(d_\infty(y(s)),\hat{0})ds \\
&\leq \psi(M)(1+\frac{2}{1-\eta})\int_0^1 P(s)ds \\
&\leq M
\end{aligned}$$

donc $N(A) \subset A$.
Étape 2. L'opérateur N est continu :

Soit y_n une suite de A telle que $y_n \to y$ élément de A dans $\mathcal{C}([0,1],E^n)$.

$$\begin{aligned}
H_1(N(y_n(t),N(y)(t)) &= H_1\Bigg(\int_0^t (t-s)f(s,y_n(s))\,ds \\
&\quad +\frac{t}{1-\eta}\left[\int_0^\eta (\eta-s)f(s,y_n(s))ds\right] \\
&\quad -\frac{t}{1-\eta}\left[\int_0^1 (1-s)f(s,y(s))ds\right], \int_0^t (t-s)f(s,y(s))ds \\
&\quad +\frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta-s)f(s,y(s))ds \\
&\quad -\frac{t}{1-\eta}\left[\int_0^1 (1-s)f(s,y(s))ds\right]\Bigg) \\
&\leq \int_0^1 H_1(f(s,y_n(s)),f(s,y(s)))ds \\
&\quad +\frac{1}{1-\eta}\int_0^1 H_1(f(s,y_n(s)),f(s,y(s)))ds \\
&\quad +\frac{1}{1-\eta}\left[\int_0^1 H_1(f(s,y_n(s)),f(s,y(s)))ds\right].
\end{aligned}$$

Ainsi que

$$H_1(N(y_n),N(y)) \leq (1+\frac{2}{1-\eta})\int_0^1 H_1(f(s,y_n(s)),f(s,y(s)))ds.$$

Soit $\rho(s) = d_\infty(f(s,y_n(s))),f(s,y(s)))$. Puisque f est continue,on aura :

$$\rho_n(t) \to 0 \ quand\ n \to \infty, \quad pour\ t \in [0,1]$$

De l'hypothèse $(A1)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\rho_n(t) &\leq d_\infty(f(t,y_n(t)),\hat{0}) + d_\infty(\hat{0},f(t,y(t))) \\
&\leq p(t)[\psi(d_\infty(f(t,y_n(t)),\hat{0})) + \psi(d_\infty(y(t),\hat{0}))] \\
&\leq 2p(t)\psi(M).
\end{aligned}$$

Donc on a grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \rho_n(s)ds = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\rho_n(s)ds = 0$$

Donc :

$$H_1(N(y_n), N(y)) \to 0, \quad quand\ n \to \infty.$$

Par conséquent $N : A \to A$ est continu.
Étape 3.L'opérateur N est équicontinu .
Soient $l_1, l_2 \in [0,1], l_1 < l_2$ et soit $y \in A$. Alors

$$\begin{aligned}
d_\infty(Ny(l_2), Ny(l_1)) &= d_\infty\Bigg(\int_0^{l_2}(l_2-s)f(s,y(s))\,ds \\
&+ \frac{l_2}{1-\eta}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,y(s))ds - \frac{l_2}{1-\eta}[\int_0^1(1-s)f(s,y(s))ds] \\
&\quad , \int_0^{l_1}(l_1-s)f(s,y(s))ds \\
&+ \frac{l_1}{1-\eta}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,y(s))ds - \frac{l_1}{1-\eta}[\int_0^1(1-s)]f(s,y(s))ds\Bigg) \\
&= d_\infty\Bigg(\int_0^{l_1}(l_1-s)f(s,y(s))ds \\
&+ \int_0^{l_1}(l_2-l_1)f(s,y(s))ds + \int_{l_1}^{l_2}(l_2-s)f(s,y(s))ds] \\
&+ \frac{l_2-l_1}{1-\eta}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,y(s))ds + \frac{l_1}{1-\eta}\int_0^\eta(\eta-s)]f(s,y(s))ds \\
&- \frac{l_2-l_1}{1-\eta}\int_0^1(1-s)f(s,y(s))ds - \frac{l_1}{1-\eta}\int_0^1(1-s)]f(s,y(s))ds, \\
&+ \int_0^{l_1}(l_1-s)f(s,y(s))ds + \frac{l_1}{1-\eta}\int_0^\eta(\eta-s)]f(s,y(s))ds \\
&- \frac{l_1}{1-\eta}[\int_0^1(1-s)f(s,y(s))ds].
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
d_\infty(Ny(l_2, Ny(l_1)) &= d_\infty(\int_0^{l_1}(l_2-l_1)f(s,y(s))ds + \int_{l_1}^{l_2}(l_2-s)f(s,y(s))ds \\
&\quad + \frac{l_2-l_1}{1-\eta}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,y(s))ds \\
&\quad - \frac{l_2-l_1}{1-\eta}\int_0^1(1-s)f(s,y(s))ds, \hat{0}) \\
&\leq l_2\int_{l_1}^{l_2} d_\infty(f(s,y(s))ds,\hat{0})ds + \int_0^{l_1}(l_2-l_1)]d_\infty(f(s,y(s))ds,\hat{0})ds \\
&\quad +2\frac{l_2-l_1}{1-\eta}\int_0^1 d_\infty(f(s,y(s))ds,\hat{0})ds \\
&\leq l_2\int_{l_1}^{l_2} p(s)\psi(y(s),\hat{0}))ds + \int_0^{l_1}(l_2-l_1)p(s)\psi(y(s),\hat{0}))ds \\
&\leq \int_{l_1}^{l_2} l_2 p(s)\psi(M)ds + \int_0^{l_1}(l_2-l_1)\psi(M)ds \\
&\quad +2\frac{l_2-l_1}{1-\eta}\int_0^1 p(s)\psi(M)ds.
\end{aligned}$$

2.1.2 Problèmes aux limites à quatre points

Considérons le problème suivants

$$y''(t) = f(t,y(t)), \quad t\in[0,1]; \tag{2.3}$$

$$y(0) = y'(\eta), \quad y(1) = y(\tau). \tag{2.4}$$

où f et η comme dans le problème précédent et $\tau \in]0,1[$.
Définition 2.2 *La fonction $y \in \mathcal{C}^2([0,1],E^n)$ est dite solution du problème (2.3)–(2.4) si y satisfait l'équation (2.3) sur $[0,1]$ et elle vérifie la condition (2.4).*
Lemme 2.2 *Le problème (2.3)–(2.4) est équivalent à*

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t(t-s)f(s,y(s))ds + \int_0^\eta f(s,y(s))ds \\
&\quad +\frac{t+1}{1-\tau}\left[\int_0^\tau f(s,y(s)(\tau-s)ds + \int_0^1 f(s,y(s))(1-s)ds)\right].
\end{aligned}$$

Preuve

$$u'(t) = \int_0^t u''(s)ds + u'(0)u''(t) = f(t, u(t)) = F(t)$$

posons

$$u'(0) = bu'(t) = \int_0^t f(s, u(s))ds + b$$

et en posant $u(0) = a$ on aura

$$u(t) = \int_0^t F(s)(t-s)ds + bt + a.$$

$$\begin{cases} u(0) = u'(\eta) \\ u(1) = u(\tau) \end{cases}$$

La première condition :$u(0) = u'(\eta)$ s'écrit alors

$$a = \int_0^t F(s)ds + b.$$

La deuxieme condition (aux limites)

$$\int_0^1 F(s)(1-s)ds + b = \int_0^\tau F(s)ds + b\tau.$$

Donc

$$b = \frac{1}{1-\tau}\int_0^1 F(s)(\tau - s)ds - \int_0^1 F(s)(1-s)ds$$

en l'emportant dans l'expression de u

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t F(s)(t-s)ds + \frac{1}{1-\tau}\left(\int_0^\tau F(s)(\tau - s)ds - \int_0^1 F(s)(1-s)ds\right)t \\ &+ \int_0^\eta F(s)ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t F(s)(t-s)ds + (t + \frac{1}{1-\tau}\left(\int_0^\tau F(s)(\tau - s)ds - \int_0^1 F(s)(1-s)ds\right) \\ &+ \int_0^\eta F(s)ds \end{aligned}$$

en fin prenons $y \equiv u$, d'où l'opérateur

$$\begin{aligned} N_1(y(t)) \ := \ & \int_0^t (t-s) f(s, y(s)) ds + \int_0^\eta f(s, y(s)) ds \\ & + \frac{t+1}{1-\tau} \left[\int_0^\tau f(s, y(s)(\tau - s) ds + \int_0^1 f(s, y(s))(1-s) ds) \right]. \end{aligned}$$

Théorème 2.2 *Soit $f : [0,1] \times E^n \to E^n$ continue et vérifie les conditions :*

(A_3) *Il existe une fonction continue croissante $\psi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ et $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$. tel que*

$$d_\infty(f(t, y), \hat{0}) \leq p(t) \psi(d_\infty(y, \hat{0})) \ pour \ t \in J \ et \ y \in E^n$$

(A_4) *Il existe $M_1 > 0$ avec*

$$M_1 - \psi(M)(3 + \frac{2}{1-\tau} \int_0^1 p(s) ds \leq 0$$

telle que pour chaque $t \in J$ l'ensemble :

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_0^t (t-s) f(s, y(s)) ds + \int_0^n f(s, y(s) ds) \\ \frac{1+t}{1-\tau} \left[\int_0^\tau (\tau - s) f(s, y(s)) ds + \int_0^1 (1-s) f(s, y(s)) ds \right] : y \in A_1 \end{array} \right\}$$

est totalement borné,où

$$A_1 = \{ y \in \mathcal{C}(J, E^n) : d_\infty(y(t), \hat{0}) \leq M_1, t \in J \}.$$

Alors le problème (2.3)–(2.4) admet ou moins une solution floue sur J

Preuve On considère l'opérateur

$$\begin{aligned} N_1(y(t)) \ := \ & \int_0^t (t-s) f(s, y(s)) ds + \int_0^\eta f(s, y(s)) ds \\ + \ & \frac{t+1}{1-\tau} \left[\int_0^\tau f(s, y(s)(\tau - s) ds + \int_0^1 f(s, y(s))(1-s) ds) \right]. \end{aligned}$$

Et l'ensemble

$$A_1 = \{ y \in \mathcal{C}(J, E^n) : d_\infty(y(t), \hat{0}) \leq m_1, t \in J \}$$

Donc A_1 est un ensemble absolument rétracté et on va demontrer que

$$N_1(A_1) \subset A_1$$

Soit $y \in A_1$, alors

$$\begin{aligned}
d_\infty(N_1(y)(t), \widehat{0}) &= d_\infty\Bigg(\int_0^t (t-s)f(s,y(s))ds + \int_0^\eta f(s,y(s))ds \\
&\quad + \frac{1+t}{1-\tau}\left[\int_0^\tau (\tau-s)f(s,y(s))ds - \int_0^1 (1-s)f(s,y(s))ds\right], \widehat{0}\Bigg) \\
&\leq \int_0^t (t-s)d_\infty(f(s,y(s)), \widehat{0})ds + \int_0^\eta d_\infty(f(s,y(s)), \widehat{0})ds \\
&+ \frac{1+t}{1-\tau}\int_0^\tau (\tau-s)d_\infty(f(s,y(s)), \widehat{0})ds \\
&+ \int_0^1 (1-s)d_\infty(f(s,y(s)), \widehat{0})ds \\
&\leq \int_0^1 P(s)\psi(M_1)ds + \int_0^1 P(s)\psi(M_1)ds \\
&+ \frac{2}{1-\tau}\int_0^1 P(s)(M_1)ds + \int_0^1 P(s)\psi(M_1)ds \\
&= \psi(M_1)(3 + \frac{2}{1-\eta})\int_0^1 P(s)ds \\
&\leq M_1
\end{aligned}$$

d'où $N_1(A_1) \subset A_1 et N_1 : A_1 \to A_1$ un opérateur complètement continu de plus $A_1 \in (AR)$ d'après le Théorème 6 l'opérateur N_1 admet un point fixe qui est une solution floue du problème (2.3)–(2.4).

2.1.3 Problèmes aux limites avec des conditions intégrales

Considérons le problème aux limites suivants :

$$y''(t) = f(t, y(t)), \text{pour tout } t \in [0,1], \tag{2.5}$$

$$y(0) - K_1 y'(0) = \int_0^1 h_1(y(s))ds, \tag{2.6}$$

$$y(1) + K_2 y'(1) = \int_0^1 h_2(y(s))ds. \qquad (2.7)$$

Avec $f : [0,1]\times E^n \to E^n$ est une fonction continue, et E^n est ensemble semi continu superieurement, convexe, normal et avec l'ensemble à niveaux, $h_1 : E^n \to E^n (i = 1,2)$ sont des fonctions continues et $K_1 (i = 1,2)$ des constantes positives .

Définition 2.3 *L'application $f : [0,1] \to E^n$ est dite différentiable en $t_0 \in [0,1]$ s'il existe $f'(t_0) \in E^n$ tel que les limites*

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} \quad et \quad \lim_{h\to 0_+} \frac{f(t_0) - f(t_0-h)}{h}$$

existent et égales à $f'(t_0)$.

(Ici les limites sont obtenues dans l'espace métrique (E^n, H_d).)

Si $f : [0,1] \to E^n$ est différentiable en $t_0 \in [0,1]$, alors on dit que $f'(t_0)$ est la *derivée floue* de $f(t)$ au point t_0 où la dérivée au sens de Hukuhara de $f(t)$ en t_0 usuellement notée par $D_H f(t_0)$.Pour le concept de de la mésurabilité floue et continuité floue on se réfère à [13].

Définition 2.4 *L'application $f : [0,1]\times E^n \to E^n$ est continue (ponctuellement) au point $(t_0, x_0) \in [0,1]\times E^n$ si pour tout $\alpha \in [0,1]$ fixé et, un arbitraire $\epsilon > 0$, il existe un $\delta(\epsilon, a) > 0$ tel que*

$$H_d([f(t,x)]^\alpha, [f(t,x_0)]^\alpha) < \epsilon$$

de sorte que $|t - t_0| < \delta(\epsilon, \alpha)$ et $H_d([x]^\alpha, [x_0]^\alpha) < \delta(\epsilon, \alpha)$ pour tout $t \in [0,1], x \in E^n$.

2.1.4 Resultats Principaux

Dans cette partie, nous intéressons à l'existence et l'unicité des solutions pour le problème (2.5)–(2.7).

Définition 2.5 *$y \in \mathcal{C}^2([0,1], E^n)$ est dite solution de (2.5)–(2.6) si y satisfait l'équation $y''(t) = f(t, y(t))$ sur $[0,1]$ et les conditions (2.6)–(2.7).*

Nous aurons besoins des résultats auxiliaires suivants .

Lemme 2.3 [2] *Pour tout $\sigma, \rho_1, \rho_2 \in ([0,1], E^n)$, le problème linéaire non homogène*

$$x''(t) = \sigma(t), \text{ pour tout } t \in [0,1],$$

$$x(0) - k_1x'(0) = \int_0^1 \rho_1(s)ds,$$

$$x(1) + k_2x'(1) = \int_0^1 \rho_2(s)ds,$$

a une solution unique $x \in \mathcal{C}^2((0,1), E^n)$ *donnée par*

$$x(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)\sigma(s)ds,$$

où

$$P(t) = \frac{1}{1+k_1+k_2}\left[(1-t+k_2)\int_0^1 \rho_1(s)ds + (k_1+t)\int_0^1 \rho_2(s)ds\right]$$

est l'unique solution du problème

$$x''(t) = 0, \textit{pour tout } t \in [0,1],$$

$$x(0) - k_1x'(0) = \int_0^1 \rho_1(s)ds,$$

$$x(1) + k_2x'(1) = \int_0^1 \rho_2(s)ds,$$

et

$$G(t,s) = \frac{-1}{k_1+k_2+1}\begin{cases} (k_1+t)(1-s+k_2), & 0 \leq t < s \leq 1, \\ (k_1+s)(1-t+k_2), & 0 \leq s < t \leq 1 \end{cases}$$

est la fonction de Green du problème homogène.

Théorème 2.3 *Supposons que*

$(H1)$ *Il existe une constante d positive telle que*

$$H_d([f(t,u)]^\alpha, [f(t,\overline{u})]^\alpha) \leq dH_d([u(t)]^\alpha, [\overline{u}(t)]^\alpha), \textit{pour tout } t \in [0,1] \textit{ et tout } u, \overline{u} \in E^n.$$

$(H2)$ *Il existe des constantes positives* $d_1, i = 1,2$ *telles que*

$$H_d([h_1(y(t))]^\alpha, [h_1(\overline{y}(t))]^\alpha) \leq d_1H_d([y(t)]^\alpha, [\overline{y}(t)]^\alpha).$$

Si

$$\frac{1+k_2}{1+k_1+k_2}d_1 + d_2(1+k_1) + d \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)| < 1.$$

Alors le problème aux limites (2.5)–(2.7) a une solution floue unique sur $[0,1]$.

Preuve :Transformons le problème en un problème de point fixe. La solution du problème (2.5)–(2.7)est le point fixe de l'opérateur

$$N : \mathcal{C}([0,1], E^n) \to \mathcal{C}([0,1], E^n)$$

défini par :

$$N(y)(t) = P(y)(t) + \int_0^1 G(t,s)f(s,y(s))ds$$

tel que

$$P(y)(t) = \frac{1}{1+k_1+k_2}(1-t+k_2)\int_0^1 h_1(y(s))ds+(k_1+t)\int_0^1 h_2(y(s))ds.$$

Nous montrons que N est une contraction. En effet, considérons $y, \overline{y} \in \mathcal{C}([0,1], E^n)$ et $\alpha \in [0,1]$, alors

$$\begin{aligned}
H_d([N(y)(t)]^\alpha, [N(\overline{y})(t)]^\alpha) &= H_d\left(\left[\frac{1}{1+k_1+k_2}(1-t+k_2)\int_0^1 h_1(y(s))ds\right).\right.\\
&+ \left.(k_1+t)\int_0^1 h_2(y(s))ds + \int_0^1 G(t,s)f(s,ys))ds\right]^\alpha,\\
&\left[\frac{1}{1+k_1+k_2}(1-t+k_2)\int_0^1 h_1(\overline{y}(s))ds\right.\\
&+ \left.(k_1+t)\int_0^1 h_2(\overline{y}(s))ds + \int_0^1 G(t,s)f(s,\overline{y}(s))ds\right]^\alpha\\
&\leq H_d\left(\left[\frac{1}{1+k_1+k_2}(1-t+k_2)\int_0^1 h_1(y(s))ds\right]^\alpha,\right.\\
&\left.\left[\frac{1}{1+k_1+k_2}(1-t+K_2)\int_0^1 h_1(\overline{y}(s))ds\right]^\alpha\right)\\
&+ H_d\left(\left[(K_1+t)\int_0^1 h_2(y(s))ds\right]^\alpha, \left[(k_1+t)\int_0^1 h_2(\overline{y}))ds\right]^\alpha\right)\\
&+ H_d\left(\left[\int_0^1 G(t,s)f(s,y(s))ds\right]^\alpha, \left[\int_0^1 G(t,s)f(s,\overline{y}(s))ds\right]^\alpha\right)\\
&\leq \frac{1}{1+k_1+k_2}(1-t+K_2)H_d\left(\left[\dashv\int_0^1 h_1(y(s))ds\right]^\alpha,\right.\\
&\left.\left[\int_0^1 h_2(\overline{y}(s))ds\right]^\alpha\right)+\\
&+ (k_1+t)H_d\left(\left[\int_0^1 h_2(y(s))ds\right]^\alpha, \left[\int_0^1 h_2(\overline{y}(s))ds\right]^\alpha\right)\\
&+ \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}|G(t,s)|H_d\left(\left[\int_0^1 f(s,y(s))ds\right]^\alpha, \left[\int_0^1 f(s,\overline{y}(s))\right.\right.\\
&\leq \frac{1}{1+k_1+k_2}(1-t+k_2)\int_0^1 H_d([h_1(y(s))]^\alpha, [h_2\overline{y}(s))]^\alpha)ds\\
&+ (k_1+t)\int_0^1 H_d([h_2(y(s))]^\alpha, [h_2(\overline{y}(s))]^\alpha)ds\\
&+ \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}|G(t,s)|\int_0^1 H_d([f(s,y(s))]^\alpha, [f(s,\overline{y}(s))]^\alpha)ds\\
&\leq \frac{1+k_2}{1+k_1+k_2}d_1\sup_{\alpha\in[0,1]} d_\infty(y(t),\overline{y}(t))\\
&+ (k_1+1)d_2 d_\infty(y(t),\overline{y}(t))\\
&+ d\sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}|G(t,s)|d_\infty(y(t),\overline{y}(t))
\end{aligned}$$

Ainsi

$$H_1(N(y), N(\overline{y})) \leq \left(\frac{1+k_2}{1+k_1+k_2} d_1 + d_2(k_1+1) + d \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)| \right) H_1(y, \overline{y}).$$

Donc, N est une contraction et ainsi, par le théorème de Banach du point fixe, N a un unique point fixe qui est solution du (2.5)–(2.7).

Chapitre 3

Solutions floues pour les équations différentielles impulsives

Les équations différentielles avec impulsions représentent un outil de base pour étude des processus dévolutions qui sont le sujet des changements brusques dans leurs états . De telles équations ont naturellement différentes applications comme dans les espaces de métier de contrôle, dans des processus d'inspection, dans des opérations de recherche et dans le domaine biomédical (voir [2,9]).
On établie l'existence de solutions des équations différentielles ordinaires impulsives floues.

3.0.1 Équations différentielles floues impulsives du premierordre

Dans cette section on considère l'existence des solutions floues pour les problèmes à valeurs initiales des équations différentielles ordinaires impulsives du premier ordre. Soit le problème :

$$y'(t) = f(t, (y(t))), \qquad t \in J = [0, T], \qquad t \neq t_k, k = 1, ..., m, \quad (3.1)$$

$$y(t_k^+) = I_k(y(t_k^-)), \qquad k = 1, ..., m, \quad (3.2)$$

$$y(0) = a \in E^n, \quad (3.3)$$

où E^n est l'ensemble des nombres réels flous et la fonction $f : J \times E^n \longrightarrow E^n, I_k : E^n \longrightarrow E^n, k = 1, ..., m$ sont des fonction données, $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T, a \in E^n$ et $y(t_k^-)$ et $y(_k^+)$ représentent les limites à droite et à gauche de $y(t)$ à $t = t_k$, respectivement. On utilise l'espace suivant :

$$PC = \{y : [0,T] \longrightarrow E^n : y \in C(J_k, E^n), \lim_{t \longrightarrow t_{k^-}} y(t) = y(t_k),$$
$$et \lim_{t \longrightarrow t_{k^+}} y(t) \; existe, \; k = 1, ..., m\}.$$

Ici $J_k = [t_k, t_{k+1}[, k = 0, ..., m$ avec $t_0 = 0$ et $t_{m+1} = T$.

Définition 3.1 *La fonction $y \in C^1(J \backslash \{t_k\}, E^n) \cap PC$ est dite solution de (3.1)–(3.3) si y satisfait l'équation $y'(t) = f(t, y(t))$ on $J, t \neq t_k, k = 1, ..., m$ et les conditions $y(t_k^+) = I_k(y(t_k^-)), k = 1, ..., m$ et $y(0) = a$.*

Théorème 3.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

$(H1)$ Il existe une fonction continue croissante $\psi : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$ et une fonction continue $p : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$d_\infty(f(t,y), \hat{0}) \leq p(t)\psi(d_\infty(y, \hat{0})) \; pour \; t \in J \; et \; chaque \; y \in E^n$$

avec

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)ds < \int_{d_\infty(I_k(y(t_k)), \hat{0})}^{T} \frac{du}{\psi(u)}, \qquad k = 0, ..., m \; et \; I_0 = a$$

$(H2)$ pour chaque $t \in J_k, k = 0, ..., m$ l'ensemble

$$\left\{ I_k(y(t_k)) + \int_{t_k}^{t} f(s, y(s))ds : y \in \mathcal{A}_k \right\},$$

est un sous ensemble totalement borné de E^n, ou

$$\mathcal{A}_k = \{y \in C(J_k, E^n) : d_\infty(y(t), \hat{0}) \leq a_k(t), \quad t \in J_k\},$$

$$a_k(t) = M_k^{-1}\left(\int_{t_k}^{t} p(s)ds\right)$$

et

$$M_k(z) = \int_{d_\infty(I_k(y(t_k)), \hat{0})}^{z} \frac{du}{\psi(u)}.$$

Alors le problème à valeur initiale (3.1)–(3.3) admet au moins une solution floue dans $[0,T]$.

Preuve : Nous procéderons dans chaque sous intervalle de la forme $[t_k, t_{k+1}], k = 0, ..., m.$

La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Étape 1 : Considérons le problème suivant :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in [0, t_1] \tag{3.4}$$

$$y(0) = a \in E^n \tag{3.5}$$

Transformons le problème (3.4)–(3.5) en un problème de point fixe. Soit l'opérateur $N : ([0, t_1], E^n) \longrightarrow C([0, t_1], E^n)$ défini par :

$$N(y)(t) = a + \int_0^t f(s, y(s))ds.$$

Soit

$$\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{B}_0 \equiv \{\bar{J}y \in C(J_0, E^n) : y \in C(J_0, E^n) \; et \; d_\infty(y(t), \hat{0}) \leq a_0(t), \;\; t \in J_0\}.$$

Alors, $\mathcal{B}_0$ est un sous ensemble convexe de l'espace de Banach $C(J_0, X)$, donc en particulier $\mathcal{B}_0$ est absolument rétracté. Ce qui résulte que $\mathcal{A}_0$ est absolument rétracté. Nous montrons que l'opérateur N opère de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_0$ est complètement continu .

Assertion 1 : $N : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}$ Soit $y \in \mathcal{A}_0$ *et* $t \in [0, t_1]$. De $(H2)$ nous aurons

$$\begin{aligned}
d_\infty(Ny(t), \hat{0}) &\leq d_\infty(Ny(t), Ny(0)) + d_\infty(a, \hat{0}) \\
&= d_\infty\left(\int_0^t f(s, y(s))ds, \hat{0}\right) + d_\infty(a, \hat{0}) \\
&\leq \int_0^t d_\infty(f(s, y(s), \hat{0}))ds + d_\infty(a, \hat{0}) \\
&\leq \int_0^t p(s)\psi(d_\infty(y(s), \hat{0}))ds + d_\infty(a, \hat{0}) \\
&\leq \int_0^t p(s)\psi(a_0(s))ds + d_\infty(a, \hat{0}) \\
&= \int_0^t a_0'(s)ds + d_\infty(a, \hat{0}) = a_0(t)
\end{aligned}$$

puisqu'on a
$$\int_{d_\infty(a,\hat{0})}^{a_0(t)} \frac{du}{\psi(u)} = \int_0^t p(s)ds.$$
Assertion 2 : N est continu.
Soit $\{y_n\} \in \mathcal{A}_0$ une suite telle que $y_n \longrightarrow y \in \mathcal{A}_0$ dans $C([0,t_1],E^n)$.

$$\begin{aligned} H_1(Ny_n(t), Ny(t)) &= H_1\left(a + \int_0^t f(s,y_n(s))ds, a + \int_0^t f(s,y(s))ds\right) \\ &\leq \int_0^t H_1(f(s,y_n(s)), f(s,y(s)))ds. \end{aligned}$$

D'où
$$H_1(Ny_n, Ny) \leq \int_0^t H_1(f(s,y_n(s)), f(s,y(s)))ds.$$
Soit
$$\rho_n(s) = d_\infty(f(s,y_n(s)), f(s,y(s))).$$
Comme f est continue alors
$$\rho_n(t) \longrightarrow 0 \ quand\ n \longrightarrow \infty\ pour\ t \in [0,t_1]$$
De $(H2)$ on aura donc
$$\begin{aligned} \rho_n(t) &\leq d_\infty(f(t,y_n(t),\hat{0}) + d_\infty(\hat{0}, f(t,y(t))) \\ &\leq p(t)[\psi(d_\infty(y_n(t),\hat{0})) + \psi(d_\infty(y(t),\hat{0}))] \\ &\leq 2p(t)\psi(a_0(t)). \end{aligned}$$
Comme résultat
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^t \rho_n(s)ds = \int_0^t \lim_{n\longrightarrow\infty} \psi_n(s)ds = 0.$$
Alors
$$H_1(Ny_n, Ny) \longrightarrow 0\ as\ n \longrightarrow \infty.$$
Ainsi $N : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathbf{A}_0$ est continu .

Assertion 3 : $N(\mathcal{A}_0)$ est un ensemble équicontinu de $C([0,t_1],E^n)$.

soit $l_1, l_2 \in [0, t_1], l_1 < l_2$, et soit $y \in \mathcal{A}_0$. Alors

$$\begin{aligned}
d_\infty(Ny(l_2), Ny(l_1)) &= d_\infty\left(a + \int_0^{l_2} f(s, y(s))ds, a + \int_0^{l_1} f(s, y(s))ds\right) \\
&= d_\infty\left(\int_0^{l_2} f(s, y(s))ds, \int_0^{l_1} f(s, y(s))ds\right) \\
&= d_\infty\left(\int_{l_1}^{l_2} f(s, y(s))ds, \hat{0}\right) \\
&\leq \int_{l_1}^{l_2} d_\infty(f(s, y(s), \hat{0})ds \\
&\leq \int_{l_1}^{l_2} p(s)\psi(d_\infty(y(s), \hat{0}))ds \\
&\leq p(s)\psi(a_0(s))ds \\
&= \int_{l_1}^{l_2} a_0'(s)ds = a_0(l_2) - a_0(l_1).
\end{aligned}$$

Comme conséquence des assertions 1 à 3 et $(H2)$ rassemblées avec le théorème d'Arzéla-Ascoli on peut conclure que $N : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_0$ est complètement continu et par le théorème 13, l'opérateur N a un point fixe y_1 lequel est solution du problème (3.4)–(3.5).

Étape 2 : Considérons maintenant le problème suivant :

$$y'(t) = f(t, y(t)), t \in [t_1, t_2], \tag{3.6}$$

$$y(t_1^+) = I_1(y_1(t_1)). \tag{3.7}$$

Considérons l'opérateur $N_1 : C([t_1, t_2], E_n) \longrightarrow C([t_1, t_2], E_n)$ défini par :

$$N_1(y)(t) = I_1(y_1(t_1)) + \int_{t_1}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Ensemble

$$\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_1 \equiv \{\bar{J}y \in (J_1, E^n) : y \in C(J_1, E^n) \; et \; d_\infty(y(t), \hat{0}) \leq a_1(t), \qquad t \in J_1\}$$

$\mathcal{B}_1$ est un sous ensemble convexe de l'espace de Banach $C(J_1, X)$, donc en particulier $\mathcal{B}_1$ est absolument rétracté. Comme résultat on aura $\mathcal{A}_1$

est absolument rétracté.
Maintenant nous prouvons que $N_1(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_1$: Soit $y_2 \in \mathcal{A}_1$, alors

$$N_1 y(t) = I_1(y(t_i)) + \int_{t_1}^{t} f(s, y(s))ds \qquad pour \qquad t \in J_1.$$

de $(H2)$ on obtient :

$$\begin{array}{rcl} d_\infty(N_1 y(t), \hat{0}) & \leq & d_\infty(N_1 y(t), Ny(t_1) + d_\infty(I_1(y_1(t_1)), \hat{0})) \\ & = & d_\infty\left(\int_{t_1}^{t} f(s, y(s))ds, \hat{0}\right) + d_\infty(I_1(y_1(t_1)), \hat{0}) \\ & \leq & \int_{t_1}^{t} d_\infty(f(s, y(s)), \hat{0})ds + d_\infty(I_1(y_1(t_1)), \hat{0}) \\ & \leq & \int_{t_1}^{t} p(s)\psi(d_\infty(y(s)), \hat{0})ds + d_\infty(I_1(y_1(t_1)), \hat{0}) \\ & \leq & \int_{t_1}^{t} p(s)\psi(a_1(s))ds + d_\infty d_\infty(I_1(y_1(t_1)), \hat{0}) \\ & = & \int_{t_1}^{t} a_1'(s)ds + d_\infty(I_1(y_1(t_1)), \hat{0}) \\ & = & \int_{t_1}^{t} a_1'(s)ds + a_1(y_1(t_1)) = a_1(t) \end{array}$$

dés maintenant

$$\int_{d_\infty(I_1(y_1(t_1)), \hat{0})}^{a_1(t)} \frac{du}{\psi(u)} = \int_{t_1}^{t} p(s)ds.$$

Comme dans l'étape 1 nous pouvons démontrer que N_1 est complètement continu et par le théorème 13. Nous déduisons que N_1 admet un point fixe y_2 lequel est solution au problème (3.6)–(3.7)

Étape 3 : Nous continuons ce processus
$y_m := y|_{[t_m, T]}$ est une solution du problème

$$y'(t) = f(t, (t)), \qquad t \in [t_m, T], \tag{3.8}$$

$$y(t_m^+) = I_m(y_{m-1}(t_m^-)). \tag{3.9}$$

La solution y du problème (3.8)–(3.9) est définie par

$$y(t)=\begin{cases} y_1(t), & si\ t\in[0,t_1],\\ y_2(t), & si\ t\in[t_1,t_2],\\ & \vdots\\ y_m(t), & si\ t\in[t_m,T].\end{cases}$$

3.0.2 Équations différentielles floues impulsives du second ordre

Dans cette section nous donnons le résultat d'existence des solutions pour les problèmes à valeurs initiales reliés aux équations différentielles impulsives du second ordre :

$$y''(t)=f(t,y(t)),\quad t\in J=[0,T],t\neq t_k \qquad k=1,...,m, \tag{3.10}$$

$$y(t_k^+)=I_k(y(t_k^-)),\qquad k=1,...,m \tag{3.11}$$

$$y'(t_k^+)=\bar{I}_k(y(t_k^-)),\qquad k=1,...,m \tag{3.12}$$

$$y(0)=a,\quad y'(0)=b \tag{3.13}$$

(en référant aux notation précédentes) et $\bar{I}_k:E^n\longrightarrow E^n,\ et\ b\in E^n$

Définition 3.2 *La fonction* $y\in C^2(J\backslash\{t_k\},E^n)\cap PC$ *est dite solution de (3.10)–(3.12) si* y *satisfait l'équation* $y''(t)=f(t,y(t))$ *sur* $J,t\neq t_k,k=1,...,m$ *et les conditions*
$y(t_k^+)=I_k(y(t_k^-)),y'(t_k^+)=\bar{I}_k(y(t_k^-)),t=t_k,k=1,...,m$ *et* $y(0)=a,y'(0)=b$

Théorème 3.2 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites*
(A1) Il existe la fonction continue croissante $\psi:[0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ *et une fonction continue* $p:J\longrightarrow\mathbb{R}_+$ *telle que*

$$d_\infty(f(t,y),\hat{0})\leq p(t)\psi(d_\infty(y,\hat{0}))\ pour\ tout\ t\in J\ et\ chaque\ y\in E^n$$

et $M_k>0,k=0,...,m(I_0=a,\bar{I}_0=b)$ *avec*

$$\frac{M_k}{d_\infty(I_k(y(t_k))+(t_{k+1}-t_k)\bar{I}_k(y(t_k)),\hat{0})+\psi(M_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-s)p(s)ds}\geq 1,$$

(A2) Pour chaque $t\in J_k,\quad k=0,...,m$ *l'ensemble*

$$\left\{I_k(y(t_k))+(t-t_k)\bar{I}_k(y(t_k))+\int_{t_k}^{t}(t-s)f(s,y(s))ds:y\in\mathcal{A}_k\right\},$$

et un ensemble totalement borné de E^n*, où*

$$\mathcal{A}_k^* = \{y \in C(J_k, E^n) : d_\infty(y(t), \hat{0}) \leq M_k, \quad t \in J_k\}.$$

Alors le problème à valeur initiale (3.10)–(3.12) admet au moins une solution floue dans J .
Preuve : La preuve sera donnée en plusieurs étapes .
Étape 1 : Considérons le problème suivant

$$y''(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, t_1], \tag{3.14}$$

Transformons le problème (3.10)–(3.12) en un problème du point fixe. Considérons l'opérateur $N_* : C([0, t_1], E^n) \longrightarrow C([0, t_1], E^n)$ défini par :

$$N_* y(t) = a + bt + \int_0^t (t-s) f(s, y(s)) ds.$$

Soit

$$\mathcal{A}_0^* = \{y \in C(J_0, E^n) : d_\infty(y(t), \hat{0}) \leq M_0, \quad t \in J_0\}$$

Alors $\mathcal{A}_0^*$ est un sous ensemble convexe de l'espace de Banach $C(J_0, E^n)$. Donc en particulier $\mathcal{A}_0^*$ est absolument rétracté. Nous devons montrer que l'opérateur N_* applique $\mathcal{A}_0^*$ dans $\mathcal{A}_0^*$ est complètement continu, donc il admet un point fixe y_1.
Étape 2 : Considérons maintenant le problème suivant

$$y''(t) = f(t, y(t)), \quad t \in]t_1, t_2], \tag{3.15}$$

$$y(t_1^+) = I_1(y_1(t_1)), \tag{3.16}$$

$$y'(t_1^+) = \bar{I}_1(y_1(t_1)). \tag{3.17}$$

Soit l'opérateur $\bar{N}_* : C([t_1, t_2], E^n) \longrightarrow C([t_1, t_2], E^n)$ défini par :

$$\bar{N}_* y(t) = I_1(y_1(t_1)) + (t - t_1)\bar{I}(y_1(t_1)) + \int_{t_1}^t (t-s) f(s, y(s)) ds.$$

Ensemble

$$\mathcal{A}_1^* = \{y \in C(J_1, E^n) : d_\infty(y(t), \hat{0}) \leq M_1, \quad t \in J_1\}.$$

On a $\mathcal{A}_1$ est un ensemble absolument rétracté le même raisonnement comme dans l'étape 1 monte que $\bar{N}_*$ a un point fixe y_2 lequel est solution du problème (3.15)–(3.17)

Étape 3 : Nous continuons ce processus, on aura $y_m := y|_{[t_m,T]}$ est une solution du problème

$$y''(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_m, T], \tag{3.18}$$

$$y(t_m^+) = I_m(y_{m-1}(t_m^-)), \tag{3.19}$$

$$y'(t_m^+) = \bar{I}_m(y_{m-1}(t_m^-)). \tag{3.20}$$

La solution y du problème (3.10)–(3.11) est alors définie par

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & si\ t \in [0, t_1], \\ y_2(t), & si\ t \in [t_1, t_2], \\ & \vdots \\ y_m(t), & si\ t \in [t_m, T]. \end{cases}$$

Chapitre 4

Solutions Floues par les ensembles à niveaux et inclusions differentielles

On considère dans le concept flou le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où

$$f : [0, a] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

est une fonction continue.

Il y a plusieurs approches pour définir une dérivée floue, par conséquent il ya plusieurs études de l'équation (4.1)
Backley et Furing sont permis les premiers qui ont généralise la dérivée de Hukuhara sur les fonctions multivoques. Cette généralisation était étudiée par Osmo Kaleva. Il apparait que la solution a un inconvenant, à savoir par exemple que le diamètre de la solution sort du domaine considéré.
Pour corriger cette situation c'est Hullermeiner qui a interprété et a étudié l'équation (4.1) par l'introduction d'une famille d'inclusions différentielles.
On va utiliser cette idée pour résoudre le problème de Cauchy flou (4.1) et on fait appel au Théorème de Negoita et Ralescu (se référer à l'introduction).

4.1 Solution floue

Théorème 4.1 *Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ une fonction différentiable et on note*

$$[F(t)]^{\alpha} = [q_{\alpha}(t), r_{\alpha}(t)].$$

Alors, les fonctions limites $q_{\alpha}(t)$et $r_{\alpha}(t)$ sont différentiables et :

$$[F'(t)]^{\alpha} = [q'_{\alpha}(t), r'_{\alpha}(t)],$$

et

$$[q'_{\alpha}(t) \leq r'_{\alpha}(t)].$$

Ceci donne une procédure pour résoudre l'équation différentielle floue (4.1).
Notons par exemple :

$$[x(t)]^{\alpha} = x_{\alpha}(t) = [u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)], \quad [x_0]^{\alpha} = [u^0_{\alpha}, v^0_{\alpha}],$$

et

$$[f(t, x(t)))]^{\alpha} = [f_{\alpha}(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)), g_{\alpha}(t, u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t))].$$

Est nous procéderons comme suit :
(**i**) Résolvons le système d'équations différentielles ordinaires.

$$\begin{cases} u'_{\alpha}(t) = f_{\alpha}(t, u_{\alpha}, v_{\alpha}(t)), \quad u_{\alpha}(0) = u^0_{\alpha}, \\ \\ v'_{\alpha}(t) = g_{\alpha}(t, u_{\alpha}, v_{\alpha}(t)), \quad v_{\alpha}(0) = v^0_{\alpha} \end{cases} \tag{4.2}$$

(**ii**) S'assurer que $[u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)]$ et$[u'_{\alpha}(t), v'_{\alpha}(t)]$sont des vrais ensembles à niveaux.
(**ii**) En utilisant le théorème de tas et le carambolage des niveaux $[u_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t)]$ à la solution.

Exemples 4.1.1 *Considèrons le problème à valeur initiale flou suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = \sigma(t) \\ \\ x(0) = x_0 \quad pour\ t \geq 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

où

$$x_0(u) = \max(0, 1 - |u|) \quad et \sigma(t) = e^{-t} x_0.$$

En termes d'ensembles à niveaux, nous obtenus le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + u_\alpha(t) = (\alpha-1)e^{-t}, \quad u_\alpha(0) = \alpha - 1; \\ \\ v'_\alpha(t) + v_\alpha(t) = (1-\alpha)e^{-t}, \quad v_\alpha(0) = 1-\alpha. \end{cases} \tag{4.4}$$

lequel a une solution

$$[u_\alpha(t), v_\alpha(t)] = [\alpha-1, 1-\alpha]e^{-t}(1+t).$$

nous pouvons voir immédiatement que pour $t > 0, \alpha < 1$,

$$diam([x(t)]^\alpha) = v_\alpha(t) - u_\alpha(t) > diam[\sigma(t)]^\alpha.$$

Donc la solution du système différentiel ne peut être solution du problème de Cauchy (4.3).
Si nous analysons avec beaucoup de soin, nous voyons que

$$u_\alpha(t) \leq v_\alpha(t) \quad ssi \quad t \geq -1$$

$$u'_\alpha(t) = -te^{-t}(\alpha-1) \quad v'_\alpha(t) = -te^{-t}(\alpha-1)$$

et

$$u'_\alpha(t) \leq v'_\alpha(t) \quad ssi \quad t \leq 0$$

donc par la suite $x(t) = (1+t)e^{-t}x_0$ résoudre le problème (4.3) pour $-1 \leq t \leq 0$.
Un autre choix du terme ajouté :

Choisissons maintenant $\sigma(t) = 2e^{-t}x_0$, ce choix donne la solution

$$[u_\alpha(t), v_\alpha(t)] = [\alpha-1, 1-\alpha]e^{-t}(1+2t)$$

. Laquelle définit une solution dans l'intervalle$[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$.
Changeons le terme ajouté et la valeur initiale :
D'une façon similaire $\sigma(t) = 2e^{-t}x_1 = max(0, 1-\frac{u^2}{4})$ donne les α-niveaux $[\sigma(t)]^\alpha = [-2\sqrt{1-\alpha}, 2\sqrt{1-\alpha}]$ laquelle produit une solution

$$[u_\alpha(t), v_\alpha(t)] = [-(2t\sqrt{1-\alpha} + 1 - \alpha), 2t\sqrt{1-\alpha} + 1 - \alpha]e^{-t}.$$

Et les inégalités $u_\alpha(t) \leq v_\alpha(t)$ et $u'_\alpha(t) \leq v'_\alpha(t)$ sont valides seulement sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha}, 1-\frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha}]$.
Conclusion : Ces exemples montrent que la nature et le comportement des solutions floues dépendent fortement du choix du terme ajouté.

4.2 Solution par inclusions différentielles

On considère dans le concept flou le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.5}$$

supposons alors que :

$$f : [0, \alpha] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$$

obtenue par le principe d'extension de Zadeh de la fonction continue :

$$h : [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Maintenant $f(t, x)$ peut être calculée par terme à niveaux

$$[F(t, x)]^{\alpha} = h(t, [x]^{\alpha}) \quad \forall t \in [0, \alpha], x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \;\; et \;\; 0 \leq \alpha \leq 1$$

Diamond a interprété le problème (4.5) comme un ensemble d'inclusions différentielles

$$\begin{cases} y'_{\alpha}(t) \in f(t, y_{\alpha}(t)) \\ \\ y_{\alpha}(0) \in [x_0]^{\alpha}, 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

Sous des hypothèses appropriées l'ensemble $A_{\alpha}(t)$ est atteint

$$A_{\alpha}(t) = \{y_{\alpha}(t) : y_{\alpha} \text{est solution de} (4.6)\}$$

sont des α -niveaux de l'ensemble flou $x(t)$, lequel est appelé solution de (4.6).

Si nous supposons l'unicité de solution pour le problème à valeur initiale (4.1), il s'ensuit que $A_{\alpha}(t) = [z_1(t), z_2(t)]$ où

$$\begin{cases} z'_1(t) = h(t, z_1(t)), \quad z_1(0) = u^0_{\alpha} \\ \\ z'_2(t) = h(t, z_2(t)), \quad z_2(0) = v^0_{\alpha} \end{cases} \tag{4.7}$$

4.3 Relation entre solution Floue et solution par inclusion différentielles

Nous avons le théorème suivant

Théorème 4.2 *Si h est croissante par rapport au second argument, alors la solution floue du problème de Cauchy ((4.3)) et la solution par inclusions différentielles*

Exemple 4.3.1 *Considérons maintenant le problème à valeur initiale flou :*

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t), \\ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.8}$$

où x_0 est un nombre réel flou triangulaire .

$$x_0(y) = \begin{cases} 3 - y, & si \ \ 2 \leq y \leq 3 \\ \\ y - 1, & si \ \ 1 \leq y \leq 2 \\ \\ 0, & si\ nom. \end{cases}$$

Puisque $h(x) = x^2$ est continue et nous opérons sur $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ on peut résoudre l'équation par niveau.

Comme $h(x)$ est $\nearrow$ pour $x > 0$ nous avons à résoudre le système :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = u^2_\alpha(t), & u_\alpha(0) = 1 + \alpha, \\ \\ v'_\alpha(t) = v^2_\alpha(t), & v_\alpha(0) = 3 - \alpha; \end{cases}$$

Où de nouveau

$$[x(t)]_\alpha = [u_\alpha(t), v_\alpha(t)].$$

Les solutions sont

$$u_\alpha(t) = \frac{-1 - \alpha}{t + t\alpha - 1}$$

et

$$v_\alpha(t) = \frac{3 - \alpha}{-3t + t\alpha - 1}$$

Remarquons que $v_0(t) < \infty$ pour $t < \frac{1}{3}$ et $0 \leq u_\alpha(t) \leq v_\alpha(t)$ pour ces valeurs de t .

Ainsi le problème à valeur initiale flou admet une solution $x(t)$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$.
Maintenant l'équation $x(t)y = \alpha$ a deux solutions

$$y_1 = u_\alpha(t) \quad ; \quad y_2 = v_\alpha(t).$$

Quand, nous résolvons en α ces équations, on obtient finalement les formules de la solution

$$x(t)y = \begin{cases} \frac{-(yt-y+1)}{yt+1}, & \frac{1}{1-t} \leq y \leq \frac{2}{1-2t}, \\ \\ \frac{-(3yt-y+3}{yt+1}, & \frac{2}{1-2t} < y \leq \frac{3}{1-3t} \end{cases}$$

lesquelles sont valides pour $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$.

Bibliographie

[1] B. Bede, I. J. Rudas and A.L. Bencsik, First ordre fuzzy différentiable équations un der généraliser différentiabilité, *Inform. Sci.* **177**, (2007), 1648-1666.

[2] C.P. Gupta, Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second ordre ordinary différentiable équation, *J. Math. Anal. Appl.* **168** (1992), No.2, 540-551.

[3] D.R. Smart, *Fixed Point Théorème*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.

[4] H. Roman-Flores and M. Rojas-Medar, Embedding of level-continuous fuzzy sets on Banach spaces ,*Inform. sci.* **144** (2002), 227-247.

[5] H. Roman-Flores, R.C.Bassanezi and M.A. Rojas-Medar, Topicos en Analisis Fuzzy-Multivoco(minicurso), *Actas Jornada de Matematicas*, **11** Universidad de Tarapaca, Arica, Chile(1993), 153-162.

[6] J.J. Nieto, The Cauchy Problem for continuous fuzzy differential equations ,*Fuzzy Sets and Systems*, **102**(2) (1999), 259-262.

[7] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Inform. and Control*, **8** (1965), 338-353.

[8] M.L. Nagoita and D.Ralescu ,*Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis,* Wiley, New York (1975).

[9] M.L. Puri and D. Ralescu, Strong law oflarge numbers for Banach space valued random sets, *Ann. Probab.* **11** (2), (1983) 222-224.

[10] R. J. Aumann, Integral of Set-Valued Fonctions, *J. Math. Anal. Appl.* **12** (1965), 1-12.

[11] R. P. Agarwal, M. Benchohra, D. O'Regan and A. Ouahab, Fuzzy solutions for multipoint boundary value problemes, *Mem. Differential Equations Math. Phys.* **35** (2005), 1-14.

[12] V. A Il'in and Moissev, *A nonlocal boundary value problem of the first kind for the Sturm-Liouville operator in differential and difference interpretations.* (in Russian) Differentsial'nye **23** (1987), No.7, 1198-1207.

[13] Y. K. Kim, Measurability for Fuzzy valued fonctions. *Fuzzy Sets and Systems*, **129** (2002), No.1, 105-109.