RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« AFED / AFA»

Présenté Par :
Sassi Khalfallah et Belkiseria Naceur

Sous L'intitulé :

Quelques Inégalités Intégrales pour la classe des fonctions convexes

Soutenu publiquement le .20. / .06. / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Pr HALIM Benali	MCA	Université Ibn Khaldoun - Tiaret	Président
Pr BENAISSA Bouharket	MCA	Université Ibn Khaldoun - Tiaret	Examinateur
Pr AZZOUZ Noureddine	MCA	C. Universitaire Nour Bachir Elbayadh	Encadreur

Année universitaire :2022/2023

Page blanche

إهداء خلف الله ساسي

الحمد لله رب العالمين الذي وفقنا لتحقيق هذا العمل المتواضع أهديه

إلى والديا الأعزاء مصدر الحياة و الحب و المودة

و إلى إخوتي و أخواتي

و لكل عائلتي مصدر الأمل

و إلى جميع أصدقائي خاصة ناجي سولة و حاج أكرم

إهداء بلقيصرية الناصر

بسم الله والصلاة والسلام على رسول الله

اهدي هذا العمل

لأمي العزيزة وأبي العزيز ،

لصبرهما وحبهما و شجاعتهما

لأخواتي وإخوتي حمزة و عبدالقادر

لعائلتي

لأصدقائي و زملائي.

دون أن ننسى كل المعلمين سواء الابتدائية والمتوسطة التعليم الثانوي أو العالي

شكر

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

نشكر كافة اساتذة كلية الرياضيات والاعلام الآلي و كما نشكر كل الطاقم الاداري للكلية.

و نقدم شكرنا الخاص الى الاستاذ عزوز نورالدين الذي يستحق الاحترام و التقدير.

و كما نشكر الاستاذ حليم بن علي والاستاذ بن عيسى بوحركات على قبولهما للمشاركة في لجنة التقييم لهذا العمل.

SOMMAIRE

Chap 1- Introduction et préliminaires

1 Introduction :

Les inégalités mathématiques jouent un rôle clé dans la compréhension d'un éventail de problèmes dans divers domaines. Parmi les plus célèbres est l'inégalité de Hermite-Hadamard (H-H en abrégé), qui a eu un grand impact en mathématiques et dans d'autres disciplines connexes.

Comme mentionné par Mitrinovic et Lackovic [1], cette inégalité est d'abord apparue dans la littérature dans les travaux de Hadamard [2], cependant le résultat sous sa forme mathématique a été découvert par Hermite [3]. Suite à ce fait, de nombreux chercheurs ont désigné le résultat comme l'inégalité de Hermite-Hadamard.

Cette inégalité H-H a été déclarée dans la monographie [4] comme premier résultat fondamental pour les fonctions convexes définies dans un intervalle de nombres réels, avec une interprétation géométrique naturelle qui peut être appliquée pour étudier une variété de problèmes. Par conséquent, ces inégalités, par lesquelles de nombreux résultats sont étudiés, jouent un rôle important dans la théorie des fonctions convexes.

La convexité avec ses nombreux types de généralisations peuvent être appliquées dans différents domaines des sciences [5, 6]. De nombreuses généralisations de l'inégalité H-H ont été étudiées. Tout au long du siècle dernier, on remarque une forte croissance de résultats utiles en mathématiques et à travers de vastes problèmes en ingénierie, économie et physique [7, 4].

En raison de l'importance énorme de ces inégalités, de nombreuses extensions, raffinements et généralisations ont été étudiés [8, 9] dont des extensions via le calcul fractionnaire [10, 11].

Dans ce mémoire on présente d'abord la notion de convexité avec différentes variantes, puis une introduire de l'inégalité H-H. Nous présenterons ensuite deux inégalités de base liées à l'inégalité H-H, à savoir l'inégalité trapézoïde et l'inégalité du point-milieu. On clôture par des inégalités de type H-H liées aux intégrales fractionnaires.

2 Préliminaires

2.1 Fonctions convexes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

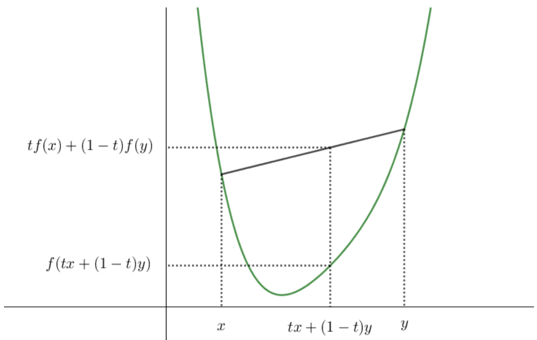
Définitions 1.1 : [12] Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $x, y \in I$ et tout $\alpha, \beta \geq 0$ tel que $\alpha + \beta = 1$ on a

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y). \tag{0.1}$$

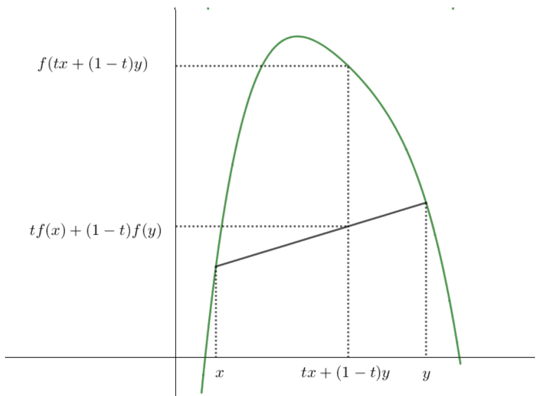
f est dite concave si $(-f)$ est convexe ; c'est-à-dire (avec un autre type de formulation) si pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$

$$f(t\,x + (1-t)\,y) \geq t\,f(x) + (1-t)\,f(y). \tag{0.2}$$

Interprétation Géométrique :



Une fonction est convexe si et seulement si sa courbe représentative est au-dessous de ses cordes



Une fonction est concave si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de ses cordes

Exemples :

i) Les fonctions définies par x^2, e^x sont convexes dans $\mathbb{R}$.

i) La fonction définie par $\ln x$ est concave dans $\mathbb{R}$.

2.2 Fonctions s-convexes:

Définition 1.2 : [12] Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe au second sens si pour tout $x, y \in I$, tout $\alpha, \beta \geq 0$ tel que $\alpha + \beta = 1$ et $s \in]0,1]$ on a :

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{0.3}$$

Cette classe de fonctions est désignée par K_s^2.

Remarque : pour $s = 1$ la s-convexité devient la convexité classique .

2.3 Intégrales d'ordre Fractionnaires

Il existe plusieurs formes connues d'intégrales fractionnaires dont deux ont été étudiées extensivement pour leurs applications, les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et ceux de Hadamard. On est concerné par ceux de Riemann-Liouville basées sur la formule de Cauchy qui permet d'exprimer la composition de n-intégrations $(n \in \mathbb{N}^*)$ en une seule intégration

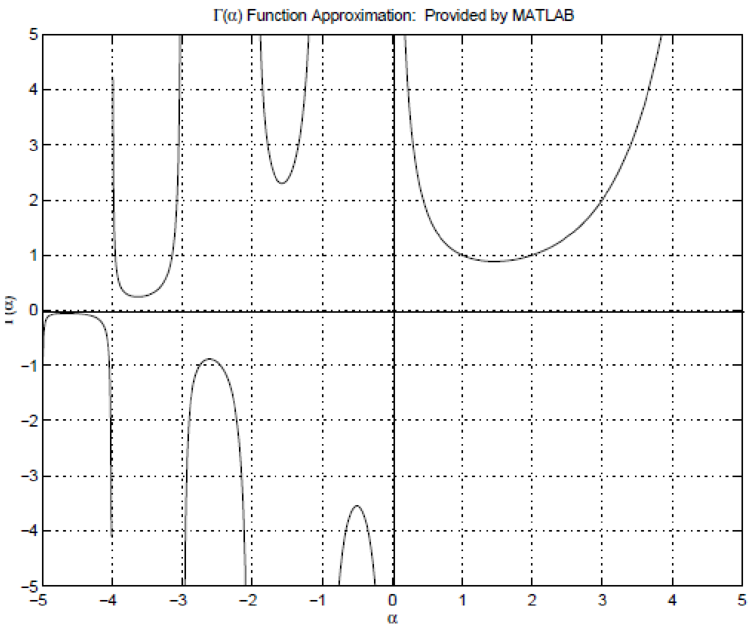
$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt .$$

La fonction Gamma qui est une extension de la fonction factorielle est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-z}\, dt \qquad \mathcal{R}e(z) > 0 .$$

On cite parmi les propriétés de cette fonction

$\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, $\Gamma(1) = 0! = 1$ $\Gamma(2) = 1! = 1$.



Cette fonction permet d'écrire

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt , \qquad \textbf{(0.4)}$$

d'où la généralisation pour $(n \in \mathbb{R}_+^*)$, en utilisant le symbole α au lieu de n, on définit l'intégrale (à gauche) de Riemann-Liouville pour toute fonction intégrable par

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \,, a < x \leq b \,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+^* . \quad \textbf{(0.5)}$$

Par analogie on définit l'intégrale (à droite) de Riemann-Liouville pour par

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt \,, a \leq x < b \,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+^* . \quad \textbf{(0.6)}$$

Il est aussi intéressant de citer une fonction étroitement liée à la fonction Gamma, c'est la fonction Beta définie comme suit

$$B(z,s) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{s-1}\, dt \qquad \mathcal{R}e(z) > 0,\ \mathcal{R}e(s) > 0$$

qui vérifie la relation suivante

$$B(z,s) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(s)}{\Gamma(z+s)} .$$

2.4 <u>Divers</u>

1) on note $f \in L_1([a,b])$ si $\int_a^b f(x)\, dx < \infty$.

2) Une fonction poids w (mesurable et positive) est dite symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$ si $w(\frac{a+b}{2} - x) = w(\frac{a+b}{2} + x)$.

3 Résultats utiles

Dans ce qui suit on aura besoin des résultats suivants

<u>Lemme 1.1 :</u> Si $0 \leq a < b < +\infty$ et $f \in L_1([a,b])$ alors

$$1) \qquad \int_0^1 f(ta + (1-t)b)\, dt = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx,$$

$$2) \qquad \int_0^1 f((1-t)a + tb)\, dt = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx.$$

<u>Preuve :</u>

1) En posant $x = ta + (1-t)b$ on a $dt = \dfrac{dx}{a-b}$ d'où

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\ dt = \int_b^a f(x)\ \frac{dx}{a-b} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx.$$

2) En posant $x=(1-t)a+tb$ on a $dt=\dfrac{dx}{b-a}$ donc on a

$$\int_0^1 f((1-t)a+tb)\ dt = \int_a^b f(x)\ \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx. \qquad \square$$

<u>Lemme 1.2 :</u> Si $0\leq a<b<+\infty$ et $f\in L_1([a,b])$ alors

$$\int_a^b f(a+b-x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

<u>Preuve :</u>

En posant $x=a+b-t$ *alors* $t=a+b-x$ *et* $dt=-dx$ *donc*

$$\int_a^b f(a+b-x)\ dx = -\int_b^a f(t)\ dt = \int_a^b f(x)\ dx. \qquad \square$$

<u>Lemme 1.3 :</u> Si $0\leq a<b<+\infty$, $f\in L^1_w([a,b])$ et w est symétrique par rapport à $\dfrac{a+b}{2}$ **,** alors

$$\int_a^b f(a+b-x)\ w(x)\ dx\ =\ \int_a^b f(x)\ w(x)\ dx.$$

<u>Preuve :</u>

En posant $x=\dfrac{a+b}{2}+t$ *alors* $t=-\dfrac{a+b}{2}+x$ *,* $dt=dx$ *,*

$x=a\implies t=\frac{-a-b}{2}+\frac{2a}{2}=\frac{a-b}{2}$ *et* $x=b\implies t=\frac{-a-b}{2}+\frac{2b}{2}=\frac{b-a}{2}$.

On déduit

$$\int_a^b f(a+b-x)\, w(x)\ dx = \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(a+b-\frac{a+b}{2}-t)\, w(\frac{a+b}{2}+t)\ dt$$

$$= \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}-t)\, w(\frac{a+b}{2}+t)\ dt$$

w étant symétrique par rapport à $\dfrac{a+b}{2}$ on obtient

$$\int_a^b f(a+b-x)\,w(x)\ dx = \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}-t)\,w(\frac{a+b}{2}-t)\ dt$$

On pose $x=\dfrac{a+b}{2}-t$ alors $t=-\dfrac{a+b}{2}+x$, $dt=dx$,

$t=\frac{a-b}{2} \implies x=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=a$ et $t=\frac{b-a}{2} \implies x=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=b$.

d'où

$$\int_a^b f(a+b-x)\,w(x)\,dx = \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(\frac{a+b}{2}-t)\,w(\frac{a+b}{2}-t)\,dt = \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx. \quad \square$$

<u>Lemme 1.4 :</u> Si $0 \le a < b < +\infty$ et $f \in L_1([a,b])$ alors

$$1) \qquad J_{a^+}^{\alpha} f(b) = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}\ f(ta+(1-t)b)\ dt$$

$$= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\ f((1-t)a+tb)\ dt.$$

$$2) \qquad J_{b^-}^{\alpha} f(a) = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}\ f((1-t)a+tb)\ dt$$

$$= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\ f(ta+(1-t)b)\ dt.$$

<u>Preuve :</u>

1) *Changement de variable : $u=ta+(1-t)b$; $t=\dfrac{u-b}{a-b}$, $dt=\dfrac{du}{a-b}$;*

$t=0 \implies u=b$ et $t=1 \implies u=a$, alors :

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\ f(ta+(1-t)b)\ dt = \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{a-b}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^\alpha}\ \int_a^b \big(b-u\big)^{\alpha-1} f(u)\ du$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\ J_{a^+}^\alpha f(b).$$

1) bis *Changement de variable :* $v=(1-t)a+tb$ *;* $t=\dfrac{v-a}{b-a}$*,* $dt=\dfrac{dv}{b-a}$ *et*

$1-t=\dfrac{b-v}{b-a}$ *;* $t=0 \implies v=a$ ***et*** $t=1 \implies v=b$ *, alors :*

$$\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\ f((1-t)a+tb)\ dt = \int_a^b \left(\frac{b-v}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)\frac{dv}{b-a}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^\alpha}\ \int_a^b \big(b-v\big)^{\alpha-1} f(v)\ dv$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\ J_{a^+}^\alpha f(b).$$

2) *Changement de variable :* $v=(1-t)a+tb$ *;* $t=\dfrac{v-a}{b-a}$*,* $dt=\dfrac{dv}{b-a}$ *;*

$t=0 \implies v=a$ ***et*** $t=1 \implies v=b$*, alors :*

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\ f((1-t)a+tb)\ dt = \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)\frac{dv}{b-a}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^\alpha}\ \int_a^b \big(v-a\big)^{\alpha-1} f(v)\ dv$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\ J_{b^-}^\alpha f(a).$$

2) bis *Changement de variable :* $u = ta + (1-t)b$ *;* $t = \dfrac{u-b}{a-b}$*,* $dt = \dfrac{du}{a-b}$ *et*

$1 - t = \dfrac{a-u}{a-b}$ *;* $t = 0 \implies u = b$ *et* $t = 1 \implies u = a$ *, alors :*

$$\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\ f(ta + (1-t)b)\ dt = \int_b^a \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{a-b}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\ \int_a^b \big(u-a\big)^{\alpha-1} f(u)\ du$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\ J_{b^-}^{\alpha} f(a).$$

□

Chap 2- Inégalité de Hermite-Hadamard classique

L'inégalité de Hermite Hadamard (H-H en abrégé) joue un rôle essentiel dans la théorie de la convexité.

Cette inégalité donne, pour les fonctions convexes, une estimation de la moyenne intégrale dans un intervalle [a,b] $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$ par rapport à l'image de la moyenne $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et la moyenne des images $\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Dans ce qui suit $a, b \in [0, +\infty[$ avec $a < b$.

1 Cas convexe

Théorème 2.1 : [4] Soit $f : [a,b] \to R$ une fonction convexe, alors l'inégalité suivante dite de Hermite-Hadamard est vérifiée :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.1}$$

Preuve :

On suppose que f est convexe sur $[a, b]$, alors on a :

$$\begin{aligned} f(\frac{a+b}{2}) &= f(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}) \\ &= f(\frac{1}{2}(a+b-x)+\frac{1}{2}x) \\ &\leq \frac{1}{2}f(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x). \end{aligned}$$

On a donc

$$2\ f(\frac{a+b}{2}) \leq f(a+b-x)+f(x). \tag{2.2}$$

On pose $x = ta + (1-t)b$ avec $t \in [0,1]$ on obtient

$$f(a+b-x) + f(x) = f(a+b-ta-(1-t)b) + f(ta+(1-t)b)$$

$$= f((1-t)a+tb) + f(ta+(1-t)b)$$

$$\leq (1-t)f(a) + tf(b) + tf(a) + (1-t)f(b)$$

$$= f(a) + f(b),$$

d'où

$$f(a+b-x) + f(x) \leq f(a) + f(b). \tag{2.3}$$

D'après ***(2.2)*** et ***(2.3)*** on déduit :

$$2f(\frac{a+b}{2}) \leq f(a+b-x) + f(x) \leq f(a) + f(b),$$

en intégrant par rapport à $x \in [a,b]$ *on trouve*

$$2(b-a)\ f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(a+b-x)\ dx + \int_a^b f(x)\ dx \leq (b-a)\ \Big(f(a)+f(b)\Big).$$

D'après le Lemme 1.2 on a $\int_a^b f(a+b-x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$ d'où

$$(b-a)\ f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad \square$$

1.1 <u>Interprétation graphique :</u>

L'inégalité H-H peut s'écrire comme suit

$$(b-a)\ f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

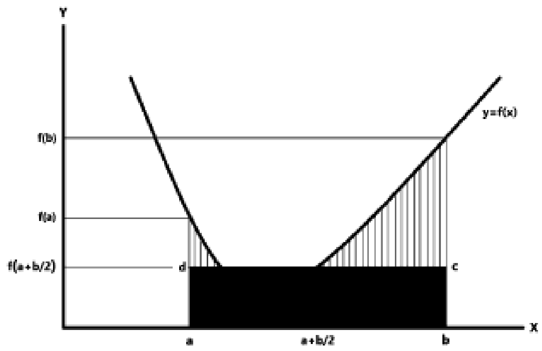
et, en résumée, elle est décrite géométriquement dans [12] comme suit :

✓ **Inégalité du point milieu (mid-point- inequality) :**

$$(b-a)\ f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(x)\ dx$$

La surface sous le graphique de f sur [a, b] (à savoir $\int_a^b f(x)\ dx$) est ***plus grande*** *que l'aire du rectangle de base [a, b] et de hauteur $f(\frac{a+b}{2})$.*

(aire rectangle = $(b-a)\times f(\frac{a+b}{2})$).



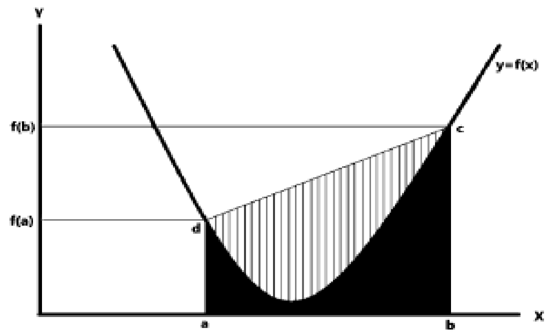
Inégalité du pont moyen

✓ **Inégalité du trapézoïde :**

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

La surface sous le graphique de f sur [a, b] ($\int_a^b f(x)\ dx$) est ***plus petite*** *que l'aire du trapèze de hauteur [a, b] et de base f(a) et f(b) .*

(aire trapèze = $(b-a)\times \frac{f(a)+f(b)}{2}$).



Inégalité du trapézoïde

2 *Cas convexe avec poids*

Dans [9] ; F. Chen a introduit l'inégalité d'Hermite-Hadamard avec poids pour une fonction convexe, dite inégalité d'Hermite-Hadamard-Fejér :

Théorème 2.2 : soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ est fonction positive intégrable et symétrique par rapport a $\frac{a+b}{2}$ .alors on a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)w(x)\ dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)\ dx$$

Preuve :

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x}{2})$$

$$\leq \frac{1}{2}f(a+b-x) + \frac{1}{2}f(x).$$

On a donc

$$2\ f(\frac{a+b}{2}) \leq f(a+b-x) + f(x). \qquad \textbf{(2.4)}$$

On pose $x = ta + (1-t)b$ avec $t \in [0, 1]$ alors

$$f(a+b-x) + f(x) = f(a+b-ta-(1-t)b) + f(ta+(1-t)b)$$

$$= f((1-t)a+tb) + f(ta+(1-t)b)$$

$$\leq (1-t)f(a) + tf(b) + tf(a) + (1-t)f(b)$$

$$= f(a) + f(b),$$

d'où

$$f(a+b-x) + f(x) \leq f(a) + f(b). \qquad \textbf{(2.5)}$$

D'après ***(2.4)*** et ***(2.5)*** on a :

$$2f(\frac{a+b}{2}) \leq f(a+b-x) + f(x) \leq f(a) + f(b) \qquad \textbf{(2.6)}$$

En multipliant l'inégalité ***(2.6)*** par $w(x)$ et puis on intégrant sur $[a, b]$, on obtient

$$2\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)\;dx$$
$$\leq \int_a^b f(a+b-x)w(x)\;dx + \int_a^b f(x)\,w(x)\;dx$$
$$\leq \big(f(a)+f(b)\big)\int_a^b w(x)\;dx$$

w étant symétrique par rapport à $\dfrac{a+b}{2}$ d'après le Lemme 1.3 on déduit

$$2\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)\;dx \leq 2\int_a^b f(x)\,w(x)\;dx \leq \big(f(a)+f(b)\big)\int_a^b w(x)\;dx,$$

d'où le résultat désiré. □

3 Cas s-Convexe

Dans [13] , Dragomir et Fitzpatrick ont prouvé l'inégalité de Hermite-Hadamard pour les fonctions s-convexe.

Théorème 2.3 : Si $f \in L_1([a,b])$ est une fonction s-convexe dans le second sens et $s \in]0,1]$ alors on a

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\;dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

Preuve :

On suppose que f est s-convexe dans le second sens alors on a

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b)$$

On intègre cette inégalité sur [0, 1] , on trouve

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\;dt \leq \int_0^1 f(a)\,t^s\;dt + \int_0^1 f(b)\,(1-t)^s\;dt$$

$$= f(a)\left[\frac{1}{s+1}t^{s+1}\right]_0^1 + f(b)\left[\frac{1}{s+1}(1-t)^{s+1}\right]_0^1$$

d'où

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\ dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

D'après le Lemme 1.1 on a $\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\ dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$ et on obtient

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

C'est la seconde partie de la double inégalité désirée.

Pour la première partie on remarque que pour tous $x, y \in [0, +\infty[$ et $0 < s \leq 1$, la fonction étant s-convexe dans le second sens, on applique (0.3) pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ on obtient

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2^s}.$$

Posons $x = ta+(1-t)b$ et $y = (1-t)a+tb$ ave $t \in [0,1]$ on aura

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2^s}.$$

En intégrant par rapport à $x \in [0,1]$on trouve

$$2^s \int_0^1 f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\ dt \leq \int_0^1 f(ta+(1-t)b)\ dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)\ dt,$$

et en utilisant le Lemme 1.1 on aura

$$2^{s-1} f\frac{(a+b)}{2} \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\ dx\ . \qquad \square$$

Chap 3- Inégalités de type H-H pour les fonctions différentiables

Un problème intéressant lié à l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad \textbf{(H-H)}$$

et qui attire la curiosité de nombreux chercheurs est la détermination de deux estimations des grandeurs **(3.1)** et **(3.2)** suivantes :

- ✓ ***inégalité du point-milieu*** qui est une estimation de la quantité **(3.1)**, différence entre la partie gauche et la partie centrale de l'inégalité (H-H).

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \qquad \textbf{(3.1)}$$

- ✓ ***inégalité du trapézoïde*** qui est une estimation de la quantité **(3.2)**, différence entre la partie gauche et la partie centrale de l'inégalité (H-H).

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \qquad \textbf{(3.2)}$$

Dans ce qui suit $a < b$, I intervalle ouvert tel que $[a,b] \subset I \subset [0,+\infty[$.

1 Inégalité du type trapézoïde

Le résultat suivant, établi par Dragomir et Agarwal [14], peut être utilisé pour estimer une borne de l'inégalité **(3.2)**.

Pour la preuve on aura besoin du lemme suivant.

<u>Lemme 3.1 :</u> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Si $f' \in L([a;b])$ alors nous avons l'identité :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)\ dt. \qquad \textbf{(3.3)}$$

<u>Preuve :</u> En intégrant par parties et d'après le Lemme 1.1

$$I = \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt$$

$$= \frac{f(ta + (1-t)b)}{a-b} (1-2t) \Big|_0^1 + \frac{2}{a-b} \int_0^1 f(ta + (1-t)b) \ dt$$

$$= \frac{f(a) + f(b)}{b-a} - \frac{2}{b-a} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

En multipliant par $\frac{b-a}{2}$ on déduit l'égalité ***(3.3)***. □

<u>Remarque :</u> *En utilisant le changement de la variable $x = ta + (1-t)b, t \in [0,1]$, l'égalité **(3.3)** peut être écrite comme suit*

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'(x) dx.$$

<u>Théorème 3.2</u> **:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application différentiable telle que $f' \in L([a;b])$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$ alors nous avons

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \ dx \right| \leq \frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}. \qquad \textbf{(3.4)}$$

<u>Preuve :</u> En utilisant Lemme précédent, il suit ce

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \ dx \right| = \left| \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) \ dt \right] \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 |1-2t| \ |f'(ta + (1-t)b)| \ dt \right] ,$$

$|f'|$ *étant convexe on obtient*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\ \left[\int_0^1 |1-2t|\ t\,|f'(a)| + |1-2t|\,(1-t)\,|f'(b)|\ dt\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\ \left[|f'(a)|\ \int_0^1 |1-2t|\ t\ dt\ +\ |f'(b)|\int_0^1 |1-2t|\ (1-t)\ dt\right]$$

$$\leq \frac{(b-a)\ (|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}$$

où nous avons utilisé les résultats suivants :

<u>Résultat 1</u> :

$$\int_0^1 |1-2t|\ t\ dt = \int_0^{1/2}(1-2t)t\ dt + \int_{1/2}^1 (2t-1)t\ dt = \int_0^{1/2}(t-2t^2)\ dt + \int_{1/2}^1 (2t^2-t)\ dt$$

$$= \left.\frac{t^2}{2}-2\frac{t^3}{3}\right|_0^{1/2} + \left.2\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right|_{1/2}^1 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}\ .$$

<u>Résultat 2</u> :

$$\int_0^1 |1-2t|\ (1-t)\ dt = \int_0^1 |1-2t|\ dt - \int_0^1 |1-2t|t\ dt = \int_0^{1/2} 1-2t\ dt + \int_{1/2}^1 2t-1\ dt - \frac{1}{4}$$

$$= \left|t-2\frac{t^2}{2}\right|_0^{1/2} + \left|2\frac{t^2}{2}-t\right|_{1/2}^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\ .$$

2 *Inégalité du Point-milieu*

Kirmaci [15] a prouvé les résultats suivants qui donnent une estimation de la quantité ***(3.1)*** *en utilisant les hypothèses de convexité.*

<u>Lemme3.3 :</u> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Si $f' \in L([a;b])$, alors nous avons :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\left[\int_0^{1/2} tf'(ta+(1-t)b)\ dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)\ dt\right].\ \textbf{\textit{(3.5)}}$$

Preuve : par intégration par parties on déduit

$$\int_0^{1/2} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)\ dt$$

$$= \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}t\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\ dt$$

$$+\ \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}(t-1)\Big|_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{1}{a-b}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\ \frac{1}{a-b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+\ \frac{1}{b-a}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\ dt\ ,$$

en utilisant le Lemme 1.1 on trouve

$$\int_0^{1/2} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)\ dt$$

$$= -\frac{1}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{b-a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx.$$

En multipliant par $(b-a)$ on obtient l'identité **(3.5)** .

Théorème 3.4 : soit $f\ :I \to \mathbb{R}$ *une application différentiable telle que* $f' \in L([a;b])$. Si $|f'|$ *est convexe alors nous avons* :

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx - f(\frac{a+b}{2})\right| \leq \frac{b-a}{8}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \qquad \textbf{(3.6)}$$

Preuve : *en utilisant l'identité* **(3.5)** *du lemme 3.3 on obtient*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx - f(\frac{a+b}{2})\right|$$

$$= \left|(b-a)\left[\int_0^{1/2} tf'(ta+(1-t)b)\ dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)\ dt\right]\right|\ ,$$

on déduit

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx - f(\frac{a+b}{2})\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\,|f'(ta+(1-t)b)|\ \ dt + \int_{1/2}^1 |t-1|\ \ |f'(ta+(1-t)b)|\ \ dt\right].$$

De la convexité de $|f'|$ *il s'ensuit que*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx - f(\frac{a+b}{2})\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2}(t^2\ |f'(a)|\ + t\,(1-t)\ |f'(b)|)\ dt + \int_{1/2}^1 (|t-1|\ \ t\,|f'(a)|\ +\ |t-1|\ \ (1-t)\ |f'(b)|)\ \ dt\right]$$

$$= (b-a)\left[|f'(a)|\int_0^{1/2} t^2\ dt + |f'(b)|\int_0^{1/2} t\,(1-t)\ dt + |f'(a)|\int_{1/2}^1 (1-t)\,t\ dt + |f'(b)|\int_{1/2}^1 (1-t)^2\ dt\right]$$

$$\leq \frac{(b-a)\ (|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}$$

où nous avons utilisé les résultats suivants

__Résultat 1__ :

$$\int_0^{1/2} t^2\ dt = \left|\frac{t^3}{3}\right|_0^{1/2} = \frac{1}{24}.$$

__Résultat 2__ :

$$\int_0^{1/2}(1-t)t\ dt = \int_0^{1/2} t - t^2\ dt = \left|\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right|_0^{1/2} = \frac{1}{12}.$$

__Résultat 3__ :

$$\int_{1/2}^1 (1-t)t\ dt = \int_{1/2}^1 t - t^2\ dt = \left|\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right|_{1/2}^1 = \frac{1}{12}.$$

__Résultat 4__ :

$$\int_{1/2}^1 (1-t)^2\ dt = \left|-\frac{(1-t)^3}{3}\right|_{1/2}^1 = \frac{1}{24}. \qquad \square$$

Chap 4- Inégalités de type H-H impliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville

Dans ce qui suit et $[a,b] \subset [0,+\infty[$ avec $a<b$.

1 Inégalité H-H fractionnaire cas convexe

Sarikaya et al. [16] a présenté des inégalités de type H-H impliquant des intégrales fractionnaires de Riemann- Liouville . Les résultats sont présentés ci-dessous.

Théorème 4.1 : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ être une fonction positive et $f\in L_1[a,b]$. Si f est convexe sur $[a,b]$ alors l'inégalité intégrale d'ordre fractionnaire suivante est vérifiée :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{a^-}^\alpha f(a)\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad \textbf{(4.1)}$$

avec $\alpha>0$.

Preuve : f étant convexe sur $[a,b]$, nous avons pour $x,y\in[a,b]$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Posons $x=ta+(1-t)b, y=(1-t)a+tb,$ on obtient

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb). \qquad \textbf{(4.2)}$$

En multipliant les deux côtés de ***(4.2)*** par $t^{\alpha-1}$ puis en intégrant par rapport à t sur $[0,1]$, nous obtenons

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^{\alpha-1}dt \le \int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)a+tb)dt.$$

Après calcul et en appliquant le Lemme 1.4 on aura

$$\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right],$$

d'où la première inégalité dans ***(4.1)***

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{a^-}^{\alpha} f(a)\right].$$

Pour la deuxième inégalité dans ***(4.1)***, on note d'abord que f étant convexe alors pour $t \in [0,1]$,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

et

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

En ajoutant ces inégalités membre à membre nous obtenons

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq tf(a) + (1-t)f(b) + (1-t)f(a) + tf(b).$$

d'où

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq f(a) + f(b). \qquad \textbf{(4.3)}$$

Multiplions les deux côtés de ***(4.3)*** par $t^{\alpha-1}$et intégrons par rapport à t sur $[0,1]$, nous aurons

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a + tb)dt \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1}dt,$$

en appliquant le Lemme 1.4 on obtient

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} [J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{\alpha}.$$

d'où la deuxième inégalité

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} [J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{a^-}^{\alpha} f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \qquad \square$$

<u>Remarque :</u> Si on prend $\alpha = 1$ dans le théorème 4.1, alors l'inégalité ***(4.1)*** devient inégalité ***(2.1)*** du théorème 2.1 .

2 Inégalité fractionnaire du type trapézoïde

Toujours dans [16], une inégalité de type trapézoïde impliquant des intégrales fractionnaires de Riemann- Liouville a été prouvée. On aura besoin du lemme suivant

Lemme 4.2 : soit $f:[a,b]\in\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) .
Si $f'\in L([a;b])$ alors

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a^+}f(b)+J^{\alpha}_{b^-}f(a)\right]=\frac{b-a}{2}\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]f'(ta+(1-t)b)\ dt\ . \quad \textbf{(4.5)}$$

avec $\alpha>0$.

Preuve : notons que

$$I=\int_0^1[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}]f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$=\left[\int_0^1(1-t)^{\alpha}f'(ta+(1-t)b)dt\right]+\left[-\int_0^1t^{\alpha}(ta+f'(ta+(1-t)b)dt\right]$$

$$=I1+I2.$$

Une intégration par parties donne

$$I1=\int_0^1(1-t)^{\alpha}\ f'(ta+(1-t)b)\ dt$$

$$=(1-t)^{\alpha}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^1+\int_0^1\alpha(1-t)^{\alpha-1}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\ dt$$

$$=\frac{f(b)}{b-a}-\frac{\alpha}{b-a}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}\ f(ta+(1-t)b)\ dt,$$

et d'après le Lemme 1.4

$$I1=\frac{f(b)}{b-a}-\frac{\alpha}{b-a}\ \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\ J^{\alpha}_{b-}f(a)=\frac{f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\ J^{\alpha}_{b-}f(a).$$

De la même manière, utilisant toujours le Lemme 1.4, on calcul

$$I2 = -\int_0^1 t^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$= -\frac{t^\alpha f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^1 - \frac{\alpha}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha-1}\ f(ta+(1-t)b)\ dt$$

$$I2 = \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\,\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\ J^\alpha_{a+}f(b)$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\ J^\alpha_{a+}f(b).$$

La somme de I_1 et I_2 donne

$$I = \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\Big[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\Big].$$

En multipliant par $\frac{b-a}{2}$ nous obtenons ***(4.5)***. □

<u>Théorème 4.3 :</u> soit $f:[a,b]\in\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) et $f'\in L([a;b])$. Si $|f'|$ est convexe alors l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires est vérifiée:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\ \left[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\right]\right| \le \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]. \quad \textbf{(4.6)}$$

<u>Preuve :</u> En utilisant le Lemme 4.2 et la convexité de $|f'|$, on trouve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)}\ \left[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\right]\right|$$

$$= \left|\frac{b-a}{2}\int_0^1 \left[(1-t)^\alpha - t^\alpha\right]f'(ta+(1-t)b)\ dt\right|$$

$$\le \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left|(1-t)^\alpha - t^\alpha\right|\ \left|f'(ta+(1-t)b)\right|\ dt$$

$$\le \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left|(1-t)^\alpha - t^\alpha\right|\ \Big(t\,|f'(a)| + (1-t)\,|f'(b)|\Big)\ dt$$

d'où

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^{1/2}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\left(t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^{1}\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]\left(t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right)dt\right].$$

Ainsi

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right|\leq\frac{b-a}{2}\left[K_1+K_2\right], \tag{4.7}$$

où

$$K_1=\int_0^{1/2}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\left(t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right)dt$$

$$=\left|f'(a)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}t\,(1-t)^{\alpha}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha+1}dt\right]+\left|f'(b)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)\,t^{\alpha}dt\right].$$

$$K_2=\int_{1/2}^{1}\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]\left(t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right)dt$$

$$=\left|f'(a)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{\alpha+1}dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}t(1-t)^{\alpha}dt\right]+\left|f'(b)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\,t^{\alpha}dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha+1}dt\right].$$

On calcule les intégrales dans K_1 :

i.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t\,(1-t)^{\alpha}dt=-\frac{t}{\alpha+1}(1-t)^{\alpha+1}\Big|_0^{1/2}+\frac{1}{\alpha+1}\int_0^{1/2}(1-t)^{\alpha+1}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2(\alpha+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\,\frac{1}{\alpha+2}(1-t)^{\alpha+2}\Big|_0^{1/2}$$

$$=-\frac{1}{(\alpha+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}-\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}+\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)},$$

en décomposant les fractions on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t\,(1-t)^{\alpha} dt = -\frac{1}{(\alpha+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2} - \left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}$$

$$= -\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}$$

ii. $$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+1}\, dt = \frac{1}{\alpha+2} t^{\alpha+2}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}$$

iii. $$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha+1}\, dt = -\frac{1}{\alpha+2}(1-t)^{\alpha+2}\Big|_0^{1/2} = -\frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+2}$$

iv.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)\, t^{\alpha} dt = \int_0^{1/2} t^{\alpha} - \int_0^{1/2} t^{\alpha+1}\, dt$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1}\Big|_0^{1/2} - \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}$$

d'où

$$K_1 = \left|f'(a)\right| \left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] + \left|f'(b)\right| \left[\frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \qquad \textbf{(4.8)}.$$

On calcule les intégrales dans K_2 *:*

i.

$$\int_{1/2}^{1} t\,(1-t)^{\alpha} dt = -t\frac{1}{\alpha+1}(1-t)^{\alpha+1}\Big|_{1/2}^{1} + \frac{1}{\alpha+1}\int_{1/2}^{1}(1-t)^{\alpha+1}\, dt$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\,\frac{1}{\alpha+2}(1-t)^{\alpha+2}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2},$$

finalement

$$\int_{1/2}^{1} t\,(1-t)^{\alpha}dt = \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}$$

ii.

$$\int_{1/2}^{1} t^{\alpha+1}dt = \frac{1}{\alpha+2}(t)^{\alpha+2}\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}$$

iii.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)\,t^{\alpha}dt = \int_{1/2}^{1} t^{\alpha}\ dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha+1}\ dt$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\Big|_{1/2}^{1} - \frac{1}{\alpha+2}t^{\alpha+2}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}$$

$$= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}$$

iv.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha+1}dt = -\frac{1}{\alpha+2}(1-t)^{\alpha+2}\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}$$

d'où

$$K_2 = \left|f'(a)\right| \left[\frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] + \left|f'(b)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \qquad \textbf{(4.9)}.$$

*On remplace **(4.9)** et **(4.8)** dans **(4.7)** pour obtenir*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b) + J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left[\left|f'(a)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+2)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}\right] + \left|f'(b)\right|\left[\frac{\alpha+1}{(\alpha+2)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}\right]\right.$$

$$\left. + \left|f'(a)\right|\left[\frac{\alpha+1}{(\alpha+2)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}\right] + \left|f'(b)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+2)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}\right]\right]$$

il s'en suit le résultat ***(4.6)***. □

Remarque : Si on prend $\alpha = 1$ dans le théorème 4.3, alors l'inégalité ***(4.6)*** devient inégalité ***(3.4)*** du théorème 3.2

3 Inégalité fractionnaire du Point-milieu

Zhu et al. [17] ont étudié une nouvelle identité intégrale fractionnaire pour les applications convexes différentiables. Les résultats sont présentés ci-dessous.

Lemme 4.4 : soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application différenciable sur $(a; b)$.

Si $f' \in L_1([a\ b])$ *alors l'égalité intégrale de type fractionnaire suivante est vérifiée :*

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$=\frac{b-a}{2}\left[\int_0^{1/2}f'(ta+(1-t)b)\,dt-\int_{1/2}^{1}f'(ta+(1-t)b)\,dt-\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]f'(ta-(1-t)b)\,dt\right]. \qquad \textbf{(4.10)}.$$

Preuve :

$$I=\int_0^{1/2}f'(ta+(1-t)b)\ dt-\int_{1/2}^{1}f'(ta+(1-t)b)\ dt-\int_0^1[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}]f'(ta+(1-t)b)\ dt$$

$$=\left(\int_0^{1/2}f'(ta+(1-t)b)\ dt\right)+\left(-\int_{1/2}^{1}f'(ta+(1-t)b)\ dt\right)$$

$$+\left(-\int_0^1(1-t)^{\alpha}\,f'(ta+(1-t)b)\ dt\right)+\left(\int_0^1t^{\alpha}\,f'(ta+(1-t)b)\ dt\right)$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Par une intégration on aura

i. $$I_1=\int_0^{1/2}f'(ta+(1-t)b)\ dt=\frac{1}{a-b}f(ta+(1-t)b)\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{b-a}\Big[f(b)-f(\frac{a+b}{2})\Big].$$

ii. $$I_2=-\int_{1/2}^{1}f'(ta+(1-t)b)\ dt=\frac{-1}{a-b}f(ta+(1-t)b)\Big|_{1/2}^{1}=\frac{1}{b-a}\Big[f(a)-f(\frac{a+b}{2})\Big].$$

iii.

$$I_3 = -\int_0^1 (1-t)^{\alpha}\ f'(ta+(1-t)b)\ dt$$

$$= -(1-t)^{\alpha}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \alpha(1-t)^{\alpha-1}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\ dt$$

$$= -\frac{f(b)}{b-a} + \frac{\alpha}{b-a}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\ f(ta+(1-t)b)\ dt,$$

et d'après le Lemme 1.4 on obtient

$$I3 = -\frac{f(b)}{b-a} + \frac{\alpha}{b-a}\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\ J^{\alpha}_{b-}f(a) = -\frac{f(b)}{b-a} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\ J^{\alpha}_{b-}f(a).$$

iv.

$$I4 = \int_0^1 t^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$= \frac{t^{\alpha}f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^1 - \frac{\alpha}{a-b}\int_0^1 t^{\alpha-1}\ f(ta+(1-t)b)\ dt$$

$$= -\frac{f(a)}{b-a} + \frac{\alpha}{b-a}\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\ J^{\alpha}_{a+}f(b)$$

$$= -\frac{f(a)}{b-a} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\ J^{\alpha}_{a+}f(b)\ .$$

En faisant la somme

$$I_1+I_2+I_3+I_4 = \frac{f(b)}{b-a} - \frac{1}{b-a}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}f(\frac{a+b}{2})$$

$$+\ -\frac{f(b)}{b-a} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\ J^{\alpha}_{b-}f(a) - \frac{f(a)}{b-a} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\ J^{\alpha}_{a+}f(b)$$

$$= -\frac{2}{b-a}\ f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\ \Big[J^{\alpha}_{a+}f(b) + J^{\alpha}_{b-}f(a)\Big],$$

en multipliant par $\frac{b-a}{2}$ on obtient le résultat désiré ***(4.10)***. □

Théorème 4.5 : soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application différenciable sur $(a;b)$ et $f'\in L_1([a\ b])$. Si $|f'|$ *alors est convexe sur* $[a;b]$, *alors l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires est vérifiée :*

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a^+}f(b)+J^{\alpha}_{b^-}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le\frac{b-a}{4(\alpha+1)}\left(\alpha+3-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\left[\,|f'(a)|+|f'(b)|\,\right].\ \textbf{(4.11)}.$$

Preuve : *En utilisant l'identité **(4.10)**.du lemme 4.4 précédent et la convexité de* $|f'|$, *on obtient*

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)}\left[J^{\alpha}_{a^+}f(a)+J^{\alpha}_{b^-}f(b)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$=\frac{b-a}{2}\left|\int_0^{1/2}f'(ta+(1-t)b)\,dt-\int_{1/2}^1 f'(ta+(1-t)b)\,dt-\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]f'(ta+(1-t)b)\,dt\right|$$

$$\le\frac{b-a}{2}\int_0^{1/2}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt+\int_{1/2}^1\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt+\int_0^1\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$\le\frac{b-a}{2}\left[\int_0^{1/2}\left[t\,|f'(a)|+\,(1-t)\,|f'(b)|\right]dt+\int_{1/2}^1\left[t\,|f'(a)|+\,(1-t)\,|f'(b)|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_0^{1/2}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\left[t\,|f'(a)|+(1-t)\,|f'(b)|\,dt\right]+\int_{1/2}^1\left[t^{\alpha}-\,(1-t)^{\alpha}\right]\left[t\,|f'(a)|+(1-t)\,|f'(b)|\,dt\right]\right].$$

Pour simplifier on écrit

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)}\left[J^{\alpha}_{a^+}f(a)+J^{\alpha}_{b^-}f(b)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\ \le\ \frac{b-a}{2}\left[k_1+k_2+k_3+k_4\right].$$

On calcule les k_i , $i=1,..,4$ *:*

$$k_1=|f'(a)|\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{1/2}+|f'(b)|\left.\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\right|_0^{1/2}=\frac{1}{8}|f'(a)|+\frac{3}{8}|f'(b)|,$$

$$k_2=|f'(a)|\left.\frac{t^2}{2}\right|_{1/2}^{1}+|f'(b)|\left.\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\right|_{1/2}^{1}=\frac{3}{8}|f'(a)|+\frac{1}{8}|f'(b)|,$$

$$k_3 = |f'(a)|\left[\int_0^{1/2} t(1-t)^\alpha \, dt - \int_0^{1/2} t^{\alpha+1} \, dt\right] + |f'(b)|\left[\int_0^{1/2} (1-t)^{\alpha+1} \, dt - \int_0^{1/2} (1-t) \, t^\alpha \, dt\right]$$

$$= |f'(a)|\Big[-\frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2}\Big]$$

$$+ |f'(b)|\Big[-\frac{1}{\alpha+2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2}\Big]$$

$$= |f'(a)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] + |f'(b)|\left[\frac{1}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]$$

$$k_4 = |f'(a)|\left[\int_{1/2}^{1} t^{\alpha+1} \, dt - \int_{1/2}^{1} t(1-t)^\alpha \, dt\right] + |f'(b)|\left[\int_{1/2}^{1} (1-t)t^\alpha \, dt - \int_{1/2}^{1} (1-t) \, t^{\alpha+1} \, dt\right]$$

$$= |f'(a)|\Big[\frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2}\Big]$$

$$+ |f'(b)|\Big[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2}\Big]$$

$$= |f'(a)|\Big[\frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+2}\Big] + |f'(b)|\Big[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+1}\Big]$$

$$= |f'(a)|\Big[\frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+1}\Big] + |f'(b)|\Big[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{\alpha+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+1}\Big]$$

En additionnant ces résultats, on obtient

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)} \left[J^\alpha_{a^+} f(a) + J^\alpha_{b^-} f(b)\right] - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\right| \leq \frac{b-a}{2} \Big[\frac{\alpha+1}{2(\alpha+1)}|f'(a)| + \frac{\alpha+1}{2(\alpha+1)}|f'(b)|$$

$$+ |f'(a)|\left[\frac{2}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}\right] + |f'(b)|\left[\frac{2\alpha+2}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\Big(2\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}\right]$$

$$+ |f'(a)| \left[\frac{2\alpha+2}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}\right] + |f'(b)| \left[\frac{2}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}\right] \Big]$$

d'où l'inégalité ***(4.11)***

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)} \left[J^\alpha_{a^+} f(b) + J^\alpha_{b^-} f(a)\right] - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\right| \leq \frac{b-a}{4(\alpha+1)}\Big(\alpha+3-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big) \Big[|f'(a)| + |f'(b)| \Big]. \square$$

<u>Remarque :</u> Si on prend α = 1 dans le théorème 4.5, alors l'inégalité ***(4.11)*** devient l'inégalité ***(3.6)*** du théorème 3.4 .

Bibliographie

[1] DS Mitrinovi´c and IB Lackovi´c. Hermite and convexity. Aequationes Mathematicae, 28(1):229–232, 1985.

[2] Jacques Hadamard. ´Etude sur les propri´et´es des fonctions enti`eres et en particulier d'une fonction consid´er´ee par riemann. Journal de math´ematiques pures et appliqu´ees, pages 171–216, 1893.

[3] Ch Hermite. Sur deux limites d'une int´egrale d´efinie. Mathesis, 3(1):1–82, 1883.

[4] SS Dragomir and CEM Pearce. Selected topics on hermite–hadamard inequalities and applications. RGMIA Monographs, 2004.

[5] Fangda Liu, Jun Cai, Christiane Lemieux, and Ruodu Wang. Convex risk functionals: representation and applications. Insurance- Mathematics and Economics, 90:66–79, 2020.

[6] PS Bullen. Handbook of means and their inequalities, vol. 260 kluwer academic publisher. Dordrecht, The Netherlands, 2003.

[7] PS Bullen. Handbook of means and their inequalities, vol. 260 kluwer academic publisher. Dordrecht, The Netherlands, 2003.

[8] O Almutairi. Generalization of Hermite-Hadamard type inequalities and their applications. PhD thesis, Ph. D. Thesis, Universiti Putra Malaysia, Malaysia, 2020.

[9] F. Chen : A note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions. Journal of Applied Mathematics.(2013).

[10] Silvestru Sever Dragomir. Hermite-hadamard type inequalities for generalized riemannliouville fractional integrals of h-convex functions. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019.

[11] Ohud Almutairi and Adem Kili¸cman. Generalized fej´er–hermite–hadamard type via generalized (h- m)-convexity on fractal sets and applications. Chaos, Solitons & Fractals, 147:110938, 2021.

[12] Constantin Niculescu and Lars-Erik Persson. Convex functions and their applications. Springer, 2006.

[13] Sever S Dragomir and Simon Fitzpatrick. The hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense. Demonstratio Mathematica, 32(4):687–696, 1999.

[14] *SS Dragomir and RP Agarwal. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Applied Mathematics Letters, 11(5):91–95, 1998.*

[15] U˘gur S Kirmaci. Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. Applied Mathematics and Computation, 147(1):137–146, 2004.

[16] Mehmet Zeki Sarikaya, Erhan Set, Hatice Yaldiz, and Nagihan Ba¸sak. Hermite-hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematical and Computer Modelling, 57(9-10):2403–2407, 2012.

[17] Chun Zhu, Michal Feˇckan, and JinrongWang. Fractional integral inequalities for differentiable convex mappings and applications to special means and a midpoint formula. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 8(2):21–28, 2012.