RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :

« Analyse fonctionnelle et équations différentielles »

Présenté Par :
FERTAS Chaimaa
DAHOU Sarra

Sous L'intitulé :

Quelques nouveaux résultats pour l'intégrale fractionnaire de Hadamard

Soutenu publiquement le 22 / 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. Souid Med Said	PR	Université de tiaret	Président
Mr. Sofrani Mohammed	MAA	Université de tiaret	Encadrant
Mme. Bouazza Zoubida	MCB	Université de tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Résume

Dans ce mémoire, en utilisant l'intégrale fractionnaire de Hadamard pour prouver quelques inégalités intégrales, comme inégalité de Chebychev , type de Gruss et autres inégalités.

Mots clés : *l'intégrale fractionnaire de Hadamard, inégalité intégrale de Chebychev, inégalité de type Gruss.*

Abstract

In this memoir we are using the Hadamard fractional integral to prove some integral inequalities as Chebyshev's, Gruss type and other inequalities.

Key words: *Hadamard fractional integral , Chebyshev's integral inequality, Gruss type inequality.*

خلاصة

في هذه المذكرة إستخدمنا التكامل الكسري لهادامار في اثبات بعض المتباينات التكاملية مثل متباينة تشيبيشاف و تشيبيشاف-غروس و متباينات أخرى.

الكلمات المفتاحية: التكامل الكسري لهادامار, المتباينة التكاملية لتشيبيشاف و تشيبيشاف-غروس.

Table des matières

Remerciements

Je remercie tout d'abord ♡ ALLAH ♡ pour m'avoir donné la capacité de savoir et réussir afin de réaliser ce travail

À mon encadreur Mr : SOFRANI MOHAMED

J'ai eu l'honneur d'être parmi vos étudiants de bénéficier de votre riche enseignement. Vos qualités pédagogiques et humaines sont pour moi un modéle. Votre gentillesse, et votre disponibilité permanente ont toujours suscité mon admiration. Veuillez bien Monsieur recevoir mes remerciements pour le grand honneur que vous m'avez fait d'accepter l'encadrement de cetravail.

Aux membres du jury

Messieurs les membres du jury, vous nous faites un grand honneur en accéptant de juger ce travail. Je dois un remerciement á toute l'équipe d'enseignement pour leurs qualités scientiqúes et pédagogiques. Je tiens à remercier chaleureusement, tous mes proches et tous ceux qui, de prés ou de loin, m'ont apporté leurs sollicitudes pour accomplir ce travail.

Dédicaces

...je dédie ce travail :

À

Mon père Ali et ma mère Boumaza Kheira pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes ètudes .

À

Mes sœurs Hayet,Mimouna,Nour El Houda , pour leurs encouragement permanents, et leur soutien, je souhaite tout le bonheur et la réussite dans leur vie.

À

Ma binôme D. Sarra
qui m'a accompagné dans ce travail,je vous remercie pour votre soutien et vos efforts afin de présenter ce travail de la meilleure façon possible.

À

Tous les enseignants
du département de mathématique qui ont contribué à mon formation

À

Tous mes amis et collègue
surtout ♡ Sabrina ♡ Chahrazed ♡Manel ♡Asma ♡ Ikram ♡

Chaimaa

Dédicaces

...Je dédie ce travail :

À

Ma grande-mère Dahou Mbarka que son âme repose en paix

À

Mon père Kadda et ma mèreHadj Zohra pour tous leurs sacrifices, leur amour,leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes ètudes

À

Mes sœursFatoum,Ouidjdene et mes frèresArbi,Saàd pour leur soutien,leur encouragements et leur aides pendant tous les moments difficiles de ma vie.

À

Tous les professeurs
que soit du primaire,du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

À

Ma binôme F.Chaimaa
je t'exprime tout mon amour d'avoir été à mes côtés durant ce travail et pour ton soutien et ton aide précieuse.

À

Tous mes amis et collègue
surtout Kaltouma,Sara,Manel,Amina,Ahlem,Ikram,Asma,Hafhida,Aida.

Sarra

INTRODUCTION

La dérivée fractionnaire est un sujet ancien que le calcul classique. L'histoire de la derivée d'ordre non entier est célèbre comme un outil trés éfficaces pour la description des phénomènes scientifiques. Ses origines remontent à la fin du $17^{\text{iéme}}$iémé siècle. Newthon et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral voir [12].

Le calcul fractionnaire est le domaine de l'analyse mathématiques qu' étudiée les intégrales et dérivés d'ordre arbitraires. Plusieurs, intégrales fractionnaires connues. Deux ont été étudiér pour leurs applications dans de nombreux domaines des sciences. Le premier est le Riemann-Liouville partie intégrante voir [13].
Le second est l'intégrale fractionnaire de Hadamard introduit par J. Hadamard voir [1].

L'objectif principale de ce mémoire, étudier inégalites intégrales fractionnaires. Nous etablissons quelques inégalites de Chebyshev ponderée et de type de Gruss pour l'intégrale fractionnaire de Hadamard.

Ce mémoire est organisé en trois chapitre. On assemble dans **le premier chapitre** des définitions de base et des propriétés fondamentaux sur les espaces comme l'espaces de fonctions mesurables , l'espaces des fonctions absolument continues et l'espace de fonctions continues avec poids. Aussi quelques définitions sur l'inégalites intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et Hadamard.

Dans **le deuxième chapitre** nous utilisons l'intégrale fractionnare de Hadamard, avec un paramètre et deux paramètres, pour etablisser certaines inégalites intégrales comme, l'inégalité intégrale de type de Gruss.

Dans **le dernier chapitre** , est consacré d'etudier quelques généralisations consernes, l'inégalites intégrales fractionnaires de type de Gruss et de Minkowski inverse.

Chapitre 1

Notions de bases fondamentales

Dans ce chapitre nous donnons quelques définitions et propriétés sur les espaces comme l'espace de lebesgue , l'espaces des fonctions abbsolu-ments continues , l'espace de fonctions continue et continue avec poids. Ainsi quelques définitions sur l'inégalites intégrales et les intégrales fractionnaires comme Riemann-Liouville et Hadamard.

1.1 Espace fonctionnel

1.1.1 Espaces des fonctions intégrales

Définition 1.1.1 *[14, 15]*

Soient $\Omega = (a, b)(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$.

1. Pour $1 \leq p < \infty$, L'espace $L^P(\Omega)$ est l'espace des (classes de)

fonctions f réelles sur Ω telle que f est mesurable et

$$\int_a^b |f\ (x)|^p\ dx < +\infty.$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables f bornées presque partout $(p.p)$ sur Ω.

Théorème 1.1.1 *[14, 15]*

Soit $\Omega = (a, b)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

1. Pour $1 \leq p < +\infty$, L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p\ dx)^{1/p}.$$

2. L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\ p.p\ sur\ \Omega\}.$$

1.1.2 Espaces des fonction continues et absolument continues

Définition 1.1.2 *[14, 15]*

Une fonction f est dite absolument continue sur intervalle $[a, b]$, si pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $\eta > 0$ tel que pour tout famille finie d'intervalles ouverts disjoints deux a deux $[a_k, b_k] \subset [a, b], k = 1, 2, ..., n$, tel que

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \eta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1.2 *[14, 15]*

Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini.
On désigne par $AC\ ([a, b])$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est à dire :

$$AC\ ([a, b]) = \{f/\exists\ \varphi \in L([a, b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt\}$$

et on appelle $AC\ ([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

1.1.3 Espaces des fonctions continues avec poids

$$C\lambda\ ([a, b])$$

Définition 1.1.3 *[14, 15]*

Soient $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On désigne par $C\lambda\ ([a, b])$ l'espace des fonctions f définies sur $]a, b]$ telles que la fonction $(x - a)^{\lambda}\ f(x) \in C\ ([a, b])$ c'est à dire :

$$C\lambda\ ([a, b]) = \{f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, (. - a)^{\lambda} f(.) \in C\ ([a, b])\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{C\lambda} = \|(x - a)^{\lambda} f(x)\|_C = \max_{x \in \Omega} \left|(x - a)^{\lambda} f(x)\right|.$$

L'espace $C\lambda\ ([a, b])$ est appelé l'espace des fonctions continues avec poids.
En particulier, $C_0\ ([a, b]) = C\ ([a, b])$.

1.1.4 Espace X_c^p

Définition 1.1.4 *[14, 15]*

L'espace $X_c^p(a,b), (c \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty)$ est l'espace des fonctions f réelles et mesurables sur $[a,b]$, muni de la norme :

$$\|f\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}, (c \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty)$$

$$\|f\|_{X_c^p} = ess \sup_{a \leq t \leq b} (t^c |f(t)|), \quad (p = \infty).$$

1.2 Fonctions spécifiques

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.2.1 *[14, 15]*

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale d'Euler de second espèce

$$\Gamma\ (x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

avec $t^{x-1} = e^{[(x-1)\ lnt]}$.
Cette intégrale est convergente pour tous les réels positifs.

Proposition 1.2.1

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_*^+, t > 0$, on a

1. $\Gamma\ (\alpha + 1) = \alpha \Gamma\ (\alpha)$.
2. $\Gamma\ (\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

1.2.2 Fonction Bêta

Définition 1.2.2 *[14, 15]*

La fonction Bêta est définie par l'intégrale d'Euler de premier espèce

$$B\ (x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}, \quad \forall x, y > 0.$$

Théorème 1.2.1 *[14, 15]*

La fonction Bêta est liée avec la fonction Gamma par la relation suivante

$$B\ (x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \forall x, y > 0.$$

1.3 les Intégrales fractionnaire

Définition 1.3.1 *[13]*

Soit $f \in L^1([a, b])$ L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}(\alpha > 0)$ au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \quad , \alpha > 0, x > a$$

pour $a = 0$ on note :

$$I_0^\alpha f(x) = I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

Définition 1.3.2 *[1]*

Soit $f \in L^1([a,b])$. L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}(\alpha > 0)$ pour tout $x > 1$ est définie par :

$$_{H}D_{1,x}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^x (\ln(\frac{x}{t}))^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} \quad , \alpha > 0, x > 1$$

avec $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$.

1.4 Inégalité de Chebyshev

On considère la fonctionnelle :

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\, dx \right).$$

Si f et g synchrones sur $[a,b]$ alors

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0; \qquad x, y \in [a,b]. \tag{1.1}$$

Si f et g asynchrones sur $[a,b]$ alors

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \leq 0; \qquad x, y \in [a,b].$$

Théorème 1.4.1 *[2, 10]*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si f et g vérifient la condition (1.1), alors

$$\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma\ (\alpha+1)} I_a^{\alpha}(fg)\ (t) \geq I_a^{\alpha} f\ (t) I_a^{\alpha} g\ (t); \qquad \alpha > 0,\ t \in [a,b].$$

où I_a^{α} : l'intégrale fractionnaires de Riemann-Liouville.

Théorème 1.4.2 *[2, 10]*

Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[a,b]$, $\alpha, \beta > 0$, $t \in [a,b]$. alors on a l'inégalité suivante

$$\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma\ (\alpha+1)} I_a^{\alpha}(fg)\ (t) + \frac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma\ (\beta+1)} I_a^{\beta}(fg)\ (t) \geq I_a^{\alpha} f\ (t)\ I_a^{\beta} g\ (t) + I_a^{\beta} f\ (t)\ I_a^{\alpha} g\ (t).$$

Remarque 1.4.1

Si $\alpha = \beta$ on obtient l'inégalité du Théorème 1.3.1.

1.5 Inégalité de Gruss

Théorème 1.5.1 *[11]*

Soient f et g deux fonctions continues définies sur $[a,b]$, telles que $m \leq f\ (x) \leq M,\ q \leq g\ (x) \leq Q$. alors

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f\ (x)\ g\ (x)\ dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\ (x)\ dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g\ (x)\ dx \right) \right| \leq \frac{(M-m)(Q-q)}{4}.$$

Théorème 1.5.2 *[7]*

Soient f et g deux fonctions continues définies sur $[a,b]$ telles que $m \leq f\ (x) \leq M,\ q \leq g\ (x) \leq Q,\quad \alpha > 0$ et $t \in [a,b]$, alors

$$\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma\ (\alpha+1)} I_a^{\alpha} fg\ (t) - I_a^{\alpha} f\ (t)\ I_a^{\alpha} g\ (t) \leq \left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma\ (\alpha+1)}\right]^2 \frac{(M-m)(Q-q)}{4}.$$

Remarque 1.5.1

Si $\alpha = 1$ et $t = b$ on obtient l'inégalité de Gruss.

1.6 Inégalité de Minkowsky

Soient f et $g \in L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p \leq +\infty$, alors

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

1.7 Inégalité de Hôlder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ $,1 \leq p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors on a $f.g \in L^1$, avec

$$\|f.g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}.\|g\|_{L^q}.$$

Proposition 1.7.1 *[1]*

• Si $f(x) = (\ln x)^{\beta-1}$.

$$_H D_{1,x}^{-\alpha} (\ln x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (\ln x)^{\beta+\alpha-1} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
\bullet(_H D_{1,x}^{-\alpha})(_H D_{1,x}^{-\beta}) f(x) &= {}_H D_{1,x}^{-(\alpha+\beta)} f(x) \qquad (\textit{semigroupe}). \\
\bullet(_H D_{1,x}^{-\alpha})(_H D_{1,x}^{-\beta}) f(x) &= (_H D_{1,x}^{-\beta})(_H D_{1,x}^{-\alpha}) f(x) \quad (\textit{commutative}).
\end{aligned}$$

Exemple 1.7.1

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f(x) = (\ln(\frac{x}{a}))^{\beta-1}$.
On a

$$_H D_{1,x}^{-\alpha}(\ln(\tfrac{x}{a}))^{\beta-1} = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^x (\ln \tfrac{x}{t})^{\alpha-1} \ln(\tfrac{t}{a})^{\beta-1} \tfrac{dt}{t},$$

on pose

$$u = \frac{\ln(\frac{x}{t})}{\ln(\frac{x}{a})}$$

alors

$$\begin{aligned} _H D_{1,x}^{-\alpha}(\ln(\tfrac{x}{a}))^{\beta-1} &= \frac{(\ln(\frac{x}{a}))^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du \\ &= \frac{B(\beta,\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(\ln(\tfrac{x}{a}))^{\beta+\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(\ln(\tfrac{x}{a}))^{\beta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

Si $a = 1$, on retrouve l'égalité (1.2).

Exemple 1.7.2

Si $\beta = 1, f(x) = 1$.

$$_H D_{1,x}^{-\alpha} 1 = \frac{(\ln(x))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{1.3}$$

Chapitre 2

Certaines inégalités intégrales de type de Chebyshev-Gruss via l'intégrale fractionnaire de Hadamard.

Dans ce chapitre, on prouve quelques inégalités intégrales de type de Chebyshev et type de Chebyshev-Gruss aux sens de l'intégrale fractionnaire de Hadamard voir[3, 4].

2.1 Inégalites intégrale fondamontales

Théorème 2.1.1

Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[0, \infty[$. alors pour tout $t > 0, \alpha > 0$ on a

$$\begin{gathered} {}_HD_{1,t}^{-\alpha}1\,{}_HD_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) \geqslant \\ {}_HD_{1,t}^{-\alpha}f(t)\,{}_HD_{1,t}^{-\alpha}g(t) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Preuve

Comme f et g synchrones sur $[0, \infty[$, alors pour tout $x \geqslant 0$,$y \geqslant 0$ on a

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geqslant 0.$$

par conséquant

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) \geqslant f(x)g(y) + f(y)g(x), \tag{2.2}$$

en multipliant (2.2) par $\dfrac{(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)}$, $x \in (1, t)$, $t > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)} f(x)g(x) + \frac{(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)} f(y)g(y) \geqslant \\ &\frac{(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)} f(x)g(y) + \frac{(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)} f(y)g(x). \end{aligned} \tag{2.3}$$

En intégrant (2.3) par rapport à x de 1 à t, on trouve

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln(\tfrac{t}{x}))^{\alpha-1} f(x)g(x) \tfrac{dx}{x} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1} f(y)g(y) \tfrac{dx}{x} \geqslant \\ &\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1} f(x)g(y) \tfrac{dx}{x} + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1} f(y)g(x) \tfrac{dx}{x}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} &{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) + f(y)g(y) {}_H D_{1,t}^{-\alpha} 1 \geqslant \\ &g(y) {}_H D_{1,t}^{-\alpha} f(t) + f(y) {}_H D_{1,t}^{-\alpha} g(t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

en multipliant (2.5) par $\dfrac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\alpha-1}}{y\Gamma(\alpha)}$,$y \in (1, t)$, $t > 0$ on obtient

$$\begin{aligned} &{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) \frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\alpha-1}}{y\Gamma(\alpha)} +_H D_{1,t}^{-\alpha} 1 \frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\alpha-1}}{y\Gamma(\alpha)} f(y)g(y) \geqslant \\ &{}_H D_{1,t}^{-\alpha} f(t) \frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\alpha-1}}{y\Gamma(\alpha)} g(y) +_H D_{1,t}^{-\alpha} g(t) \frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\alpha-1}}{y\Gamma(\alpha)} f(y). \end{aligned} \tag{2.6}$$

En intégrant (2.6) par rapport à y de 1 à t obtient

$$\begin{aligned} & {}_HD_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln(\frac{t}{y}))^{\alpha-1}\tfrac{dy}{y} \\ + & {}_HD_{1,t}^{-\alpha}1\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln(\frac{t}{y}))^{\alpha-1}f(y)g(y)\tfrac{dy}{y} \\ \geq & {}_HD_{1,t}^{-\alpha}f(t)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln(\frac{t}{y}))^{\alpha-1}g(y)\tfrac{dy}{y} \\ + & {}_HD_{1,t}^{-\alpha}g(t)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln(\frac{t}{y}))^{\alpha-1}f(y)\tfrac{dy}{y}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & {}_HD_{1,t}^{-\alpha}1{}_HD_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) +_H D_{1,t}^{-\alpha}1{}_HD_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) \geqslant \\ & {}_HD_{1,t}^{-\alpha}f(t){}_HD_{1,t}^{-\alpha}g(t) +_H D_{1,t}^{-\alpha}f(t){}_HD_{1,t}^{-\alpha}g(t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Théorème 2.1.2

Soient f, g deux fonction synchrones sur $[0, \infty[$ et p, q deux fonctions positives. Alors pour tout $t > 0$ et $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned} & {}_HD_{1,t}^{-\alpha}p(t){}_HD_{1,t}^{-\alpha}(qfg)(t) +_H D_{1,t}^{-\alpha}(q)(t){}_HD_{1,t}^{-\alpha}(pfg)(t) \geqslant \\ & {}_HD_{1,t}^{-\alpha}(pf)(t){}_HD_{1,t}^{-\alpha}(qg)(t) +_H D_{1,t}^{-\alpha}(qf)(t){}_HD_{1,t}^{-\alpha}(pg)(t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Preuve

Comme f et g synchrones sur $[0, \infty[$, alors pour tout $x \geqslant 0$,$y \geqslant 0$ on a

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) \geqslant f(x)g(y) + f(y)g(x). \tag{2.9}$$

En multipliant (2.9) par $\dfrac{(ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)}p(x)$, $x \in (1,t)$, $t > 0$ on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)}p(x)f(x)g(x)+\frac{(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)}p(x)f(y)g(y)\geqslant\\&\frac{(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)}p(x)f(x)g(y)+\frac{(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)}p(x)f(y)g(x).\end{aligned}\tag{2.10}$$

En intégrant par rapport à x de 1 à t obtient

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}p(x)f(x)g(x)\tfrac{dx}{x}\\+&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}p(x)f(y)g(y)\tfrac{dx}{x}\\\geqslant&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}p(x)f(x)g(y)\tfrac{dx}{x}\\+&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\ln(\frac{t}{x}))^{\alpha-1}p(x)f(y)g(x)\tfrac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}&{}_HD_{1,t}^{-\alpha}(pfg)(t)+f(y)g(y){}_HD_{1,t}^{-\alpha}p(t)\geqslant\\&g(y){}_HD_{1,t}^{-\alpha}(pf)(t)+f(y){}_HD_{1,t}^{-\alpha}(pg)(t).\end{aligned}\tag{2.11}$$

En multipliant (2.11) par $\dfrac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\alpha-1}}{y\Gamma(\alpha)}q(y)$,$y \in (1,t)$, $t > 0$ et en intégrant par rapport à y de 1 à t on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}
& {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pfg)(t)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln(\tfrac{t}{y}))^{\alpha-1} q(y)\tfrac{dy}{y} \\
+ \;& {}_H D_{1,t}^{-\alpha}p(t)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln(\tfrac{t}{y}))^{\alpha-1} q(y)f(y)g(y)\tfrac{dy}{y} \\
\geqslant \;& {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pf)(t)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln(\tfrac{t}{y}))^{\alpha-1} q(y)g(y)\tfrac{dy}{y} \\
+ \;& {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pg)(t)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\ln(\tfrac{t}{y}))^{\alpha-1} q(y)f(y)\tfrac{dy}{y}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& {}_H D_{1,t}^{-\alpha}p(t)\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(qfg)(t) + {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(q)(t)\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pfg)(t) \geqslant \\
& {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pf)(t)\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(qg)(t) + {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(qf)(t)\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pg)(t).
\end{aligned}$$

Théorème 2.1.3

Soient f et g deux fonction synchrones sur $[0,\infty[$. alors pour tout $t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ on a

$$\begin{aligned}
& {}_H D_{1,t}^{-\alpha}1\,{}_H D_{1,t}^{-\beta}(fg)(t) + {}_H D_{1,t}^{-\beta}1\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) \geqslant \\
& {}_H D_{1,t}^{-\alpha}f(t)\,{}_H D_{1,t}^{-\beta}g(t) + {}_H D_{1,t}^{-\beta}f(t)\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}g(t)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Preuve

En multipliant (2.5) par $\dfrac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}}{y\Gamma(\beta)}$,$y \in (1,t)$, $t > 0$ on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}}{y\Gamma(\beta)}\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) + \frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}}{y\Gamma(\beta)} f(y)g(y)\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}1 \geqslant \\
& \frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}}{y\Gamma(\beta)} g(y)\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}f(t) + \frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}}{y\Gamma(\beta)} f(y)\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}g(t),
\end{aligned}$$

en intégrant par rapport à y de 1 à t, on obtient

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1} \tfrac{dy}{y}\, {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) \\
+ \; & \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1} f(y)g(y) \tfrac{dy}{y}\, {}_H D_{1,t}^{-\alpha} 1 \\
\geqslant \; & \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1} g(y) \tfrac{dy}{y}\, {}_H D_{1,t}^{-\alpha} f(t) \\
+ \; & \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1} f(y) \tfrac{dy}{y}\, {}_H D_{1,t}^{-\alpha} g(t).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& {}_H D_{1,t}^{-\alpha} 1\, {}_H D_{1,t}^{-\beta}(fg)(t) + {}_H D_{1,t}^{-\beta} 1\, {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) \geqslant \\
& {}_H D_{1,t}^{-\alpha} f(t)\, {}_H D_{1,t}^{-\beta} g(t) + {}_H D_{1,t}^{-\beta} f(t)\, {}_H D_{1,t}^{-\alpha} g(t). \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.1

Si $\alpha = \beta$ on obtient,l'ingalité (2.1) du Théorème 2.1.1.

Théorème 2.1.4

Soient f et g deux fonction synchrones sur$[0, \infty[$ et $p, q : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Alors pour tout $t > 0$, $\alpha > 0, \beta > 0$ on a

$$\begin{aligned}
& {}_H D_{1,t}^{-\alpha} p(t)\, {}_H D_{1,t}^{-\beta}(qfg)(t) + {}_H D_{1,t}^{-\beta}(q)(t)\, {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pfg)(t) \geqslant \\
& {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pf)(t)\, {}_H D_{1,t}^{-\beta}(qg)(t) + {}_H D_{1,t}^{-\beta}(qf)(t)\, {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pg)(t)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Preuve

En multipliant (2.11) par $\dfrac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}}{x\Gamma(\alpha)} q(y)$, $y \in (1, t)$, $t > 0$ on obtient

$$\frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}}{x\Gamma(\alpha)}q(y)_H D_{1,t}^{-\alpha}(pfg)(t) + \frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}}{x\Gamma(\alpha)}q(y)f(y)g(y)_H D_{1,t}^{-\alpha}p(t) \geqslant$$
$$\frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}}{x\Gamma(\alpha)}q(y)g(y)_H D_{1,t}^{-\alpha}(pf)(t) + \frac{(\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}}{x\Gamma(\alpha)}q(y)f(y)_H D_{1,t}^{-\alpha}(pg)(t),$$

en intégrant sur $(1, t)$, alors

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t (\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}q(y)\tfrac{dy}{y}\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pfg)(t) \\
+ \; & \tfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t (\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}q(y)f(y)g(y)\tfrac{dy}{y}\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}p(t) \\
\geqslant \; & \tfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t (\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}q(y)g(y)\tfrac{dy}{y}\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pf)(t) \\
+ \; & \tfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t (\ln(\frac{t}{y}))^{\beta-1}q(y)f(y)\tfrac{dy}{y}\,{}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pg)(t). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Donc

$${}_H D_{1,t}^{-\alpha}p(t)_H D_{1,t}^{-\beta}(qfg)(t) +_H D_{1,t}^{-\beta}q(t)_H D_{1,t}^{-\alpha}(pfg)(t) \geqslant$$
$${}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pf)(t)_H D_{1,t}^{-\beta}(qg)(t) +_H D_{1,t}^{-\beta}(qf)(t)_H D_{1,t}^{-\alpha}(pg)(t). \qquad \square$$

Remarque 2.1.2

Pour $\alpha = \beta$ on obtient,l'inégalité (2.8) du Théorème 2.1.2.

Théorème 2.1.5

Soient f et g deux fonctions définies sur $[1, \infty[$ telle que
$\varphi \leq f(x) \leq \Phi$, $\psi \leq g(x) \leq \Psi$, $\varphi, \Phi, \psi, \Psi \in [1, \infty[$.Alors
pour tout $t > 1, \alpha > 0$

$$\begin{aligned}
& |{}_H D_{1,t}^{-\alpha}1_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) +_H D_{1,t}^{-\alpha}1_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) \\
& -_H D_{1}^{-\alpha}(f)(t)_H D_{1,t}^{-\alpha}(g)(t) -_H D_{1,t}^{-\alpha}(f)(t)_H D_{1,t}^{-\alpha}(g)(t)| \qquad (2.15) \\
& \leq ({}_H D_{1,t}^{-\alpha}1)^2(\Phi - \varphi)(\Psi - \psi).
\end{aligned}$$

Preuve

Car f et g deux fonctions qui vérifier les conditions précédentes, on a

$$|f(x)-f(y)| \leq \Phi-\varphi, \quad |g(x)-g(y)| \leq \Psi-\psi, \qquad x, y \in [1, \infty[,$$

ce qui implique

$$|(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))| \leq (\Phi-\varphi)(\Psi-\psi).$$

On pose

$$k(x, y)=f(x) g(x)+f(y) g(y)-f(x) g(y)-f(y) g(x). \tag{2.16}$$

En multipliant (2.16) par $\dfrac{(ln\frac{t}{x})^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)}$, $x \in$ (1, t) puis intégrer par rapport à x de 1 à t on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1} k(x, y) \tfrac{dx}{x} \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1} f(x) g(x) \tfrac{dx}{x}+\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1} f(y) g(y) \tfrac{dx}{x} \\
&-\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1} f(x) g(y) \tfrac{dx}{x}-\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1} f(y) g(x) \tfrac{dx}{x},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1} k(x, y) \tfrac{dx}{x} \\
= \ & {}_H D_1^{-\alpha}(f g)(t)+f(y) g(y)\, {}_H D_1^{-\alpha} 1 \\
- \ & g(y)\, {}_H D_1^{-\alpha} 1(f)(t)-f(y)\, {}_H D_1^{-\alpha} g(t).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

En multipliant (2.17) par $\dfrac{(ln\frac{t}{y})^{\alpha-1}}{y\Gamma(\alpha)}$, $y \in (1,\, t)$ $t > 1$ et intégrant par rapport à y de 1 à t on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_1^t\int_1^t(ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1}(ln\tfrac{t}{y})^{\alpha-1}k(x,y)\tfrac{dx}{x}\tfrac{dy}{y}\\
&={}_H\,D_{1,t}^{-\alpha}1_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) +_H D_1^{-\alpha}1_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t)\\
&-_H D_{1,t}^{-\alpha}f(t)_H D_{1,t}^{-\alpha}g(t) -_H D_1^{-\alpha}g(t)_H D_{1,t}^{-\alpha}f(t).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Car

$$|k(x,y)| \leq (\Phi-\varphi)(\Psi-\psi),$$

puis

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_1^t\int_1^t(ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1}(ln\tfrac{t}{y})^{\alpha-1}|k(x,y)|\tfrac{dx}{x}\tfrac{dy}{y}\\
\leq\ &{}_H D_{1,t}^{-\alpha}1_H D_{1,t}^{-\alpha}1((\Phi-\varphi)(\Psi-\psi)),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_1^t\int_1^t(ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1}(ln\tfrac{t}{y})^{\alpha-1}k(x,y)\tfrac{dx}{x}\tfrac{dy}{y}\right|\\
\leq\ &\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_1^t\int_1^t(ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1}(ln\tfrac{t}{y})^{\alpha-1}|k(x,y)|\tfrac{dx}{x}\tfrac{dy}{y}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

D'aprés l'égalité (2.18) et les inégalités (2.19), (2.20), on en déduit

$$\begin{aligned}
&|{}_H D_{1,t}^{-\alpha}1_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) +_H D_{1,t}^{-\alpha}1_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t)\\
&-_H D_1^{-\alpha}(f)(t)_H D_{1,t}^{-\alpha}(g)(t) -_H D_{1,t}^{-\alpha}(f)(t)_H D_{1,t}^{-\alpha}(g)(t)|\\
&\leq ({}_H D_{1,t}^{-\alpha}1)^2(\Phi-\varphi)(\Psi-\psi).
\end{aligned} \qquad \square$$

Théorème 2.1.6

Soient f et g deux fonctions définies sur $[1,\infty[$ telle que $\varphi \leq f(x) \leq \phi$, $\psi \leq g(x) \leq \Psi$, $\varphi, \Phi, \psi, \Psi \in [1,\infty[$.
Alors pour tout $t > 1, \alpha > 0, \beta > 0$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} &|{}_H D_{1,t}^{-\beta} 1 {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) +_H D_{1,t}^{-\alpha} 1 {}_H D_{1}^{-\beta}(fg)(t) \\ &-_H D_{1,t}^{-\alpha}(f)(t) {}_H D_{1,t}^{-\beta}(g)(t) -_H D_{1,t}^{-\beta}(f)(t) {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(g)(t)| \\ &\leq ({}_H D_{1,t}^{-\alpha} 1 {}_H D_{1,t}^{-\beta} 1)(\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Preuve

Elle est analogue à celle faite pour le Théorème 2.1.5, il suffit de multiplier l'égalité (2.17) par $\dfrac{(ln\frac{t}{y})^{\beta-1}}{y\Gamma(\beta)}$,$y \in (1,\, t)$ et intègre par rapport à y de 1 à t on obtient l'inégalité (2.21). $\square$

Remarque 2.1.3

Pour $\alpha = \beta$, on obtient l'inégalité (2.15) du Théorème 2.1.5.

Chapitre 3

Quelques nouvelles résultats pour l'intégrale fractionnaire de Hadamard

Dans ce chapitre, nous présent quelques généralisations concernes, l'inégalité intégrales fractionnaires : type de Gruss et Minkowski inverse.

3.1 Résultats généralisés sur l'inégalites intégrales

Théorème 3.1.1 *[6]*

Soient p et q deux fonctions positives sur $[1,\infty[$ et f,g deux fonctions définies sur $[1,\infty[$ telles que $\varphi \leq f(x) \leq \Phi, \quad \psi \leq g(x) \leq \Psi$,$\varphi, \Phi, \psi, \Psi \in [1,\infty[$. On a alors

$$\begin{aligned} &|{}_HD_1^{-\alpha}q(t){}_HD_1^{-\alpha}(pfg)(t) +{}_H D_1^{-\alpha}p(t){}_HD_1^{-\alpha}(qfg)(t) \\ &-{}_H D_1^{-\alpha}(pf)(t){}_HD_1^{-\alpha}(qg)(t) -{}_H D_1^{-\alpha}(qf)(t){}_HD_1^{-\alpha}(pg)(t)| \\ &\leq ({}_HD_1^{-\alpha}p(t){}_HD_1^{-\alpha}q(t))(\Phi-\varphi)(\Psi-\psi). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Preuve

Comme f et g deux fonctions définies sur $[1.\infty[$ vérifier les conditions suivantes $\varphi \leq f(x) \leq \Phi$, $\psi \leq g(x) \leq \Psi$, $\varphi, \Phi, \psi, \Psi \in [1, \infty[$, on a

$$|(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))| \leq (\Phi-\varphi)(\Psi-\psi),$$

en multipliant (2.16) par $\dfrac{(\ln \frac{t}{x})^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)}p(x)$, $x \in (1,t)$ on obtient

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} p(x) k(x,y) \tfrac{dx}{x} \\
= & \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} f(x) g(x) p(x) \tfrac{dx}{x} \\
+ & \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} f(y) g(y) p(x) \tfrac{dx}{x} \\
- & \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} f(x) g(y) p(x) \tfrac{dx}{x} \\
- & \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} f(y) g(x) p(x) \tfrac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} p(x) k(x,y) \tfrac{dx}{x} \\
= & {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pfg)(t) + f(y)g(y)_H D_{1,t}^{-\alpha} p(t) \\
- & g(y)_H D_{1,t}^{-\alpha}(fp)(t) - f(y)_H D_{1,t}^{-\alpha}(gp)(t).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

En multipliant (3.2) par $\dfrac{(\ln \frac{t}{y})^{\alpha-1}}{y\Gamma(\alpha)}q(y)$ $\quad y \in (1,t)$, $t > 1$ et intégré par rapport a y, on obtient

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_1^t \int_1^t (\ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} (\ln \tfrac{t}{y})^{\alpha-1} p(x) q(y) k(x,y) \tfrac{dx}{x} \tfrac{dy}{y} \\
= & \ {}_H D_{1,t}^{-\alpha} q(t) {}_H D_{1,t}^{-\alpha} (pfg)(t) + {}_H D_{1,t}^{-\alpha} p(t) {}_H D_{1,t}^{-\alpha} (qfg)(t) \\
- & \ {}_H D_{1,t}^{-\alpha} (pf)(t) {}_H D_{1,t}^{-\alpha} (qg)(t) - {}_H D_{1,t}^{-\alpha} (pg)(t) {}_H D_{1,t}^{-\alpha} (qf)(t). \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Car

$$|k(x,y)| \le (\Phi - \varphi)(\Psi - \psi),$$

puis

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_1^t \int_1^t (ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} (ln \tfrac{t}{y})^{\alpha-1} p(x) q(y) |k(x,y)| \tfrac{dx}{x} \tfrac{dy}{y} \\
\le & \ {}_H D_{1,t}^{-\alpha} p(t) {}_H D_{1,t}^{-\alpha} q(t) ((\Phi - \varphi)(\Psi - \psi)), \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
& \left| \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_1^t \int_1^t (ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} (ln \tfrac{t}{y})^{\alpha-1} p(x) q(y) k(x,y) \tfrac{dx}{x} \tfrac{dy}{y} \right| \\
\le & \ \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_1^t \int_1^t (ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} (ln \tfrac{t}{y})^{\alpha-1} p(x) q(y) |k(x,y)| \tfrac{dx}{x} \tfrac{dy}{y}. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

D'après l'égalité (3.3) et les inégalités (3.4), (3.5) on en déduit l'inégalité (3.1). $\square$

Remarque 3.1.1

Appliquée Théorème 3.1.1 pour $p = q = 1$, on obtient l'inégalité (2.15) du Théorème 2.1.5.

Théorème 3.1.2 *[6]*

Soient p et q deux fonctions positives sur $[1.\infty[$ et f,g deux fonctions définies sur $[1,\infty[$ telle que

$$\varphi \leq f(x) \leq \Phi, \psi \leq g(x) \leq \Psi \quad \varphi, \Phi, \psi, \Psi \in R \quad , x \in [1, \infty[,$$

pour tout $t > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors

$$\begin{aligned} & |{}_H D_{1,t}^{-\beta} q(t)\, {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pfg)(t) + {}_H D_{1,t}^{-\alpha} p(t)\, {}_H D_{1,t}^{-\beta}(qfg)(t) \\ & - {}_H D_{1,t}^{-\alpha}(pf)(t)\, {}_H D_{1,t}^{-\beta}(qg)(t) - {}_H D_1^{-\beta}(qf)(t)\, {}_H D_1^{-\alpha}(pg)(t)| \\ & \leq {}_H D_{1,t}^{-\alpha} p(t)\, {}_H D_{1,t}^{-\beta} q(t)(\Phi - \varphi)(\Psi - \psi). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Preuve

On procède de manière similaire de la preuve précédente du Théorème 3.1.1. Il suffit de multiplier l'égalité (3.2) par $\dfrac{(\ln \frac{t}{y})^{\beta-1}}{y\Gamma(\beta)} q(y) \quad y \in (1, t)$, $t > 1$ et intégré par rapport a y, on obtient, l'inégalité (3.6). $\square$

Remarque 3.1.2

• Appliquée Théorème 3.1.2 pour $\alpha = \beta$, on obtient l'inégalité (3.1) du Théorème 3.1.1.
• Appliquée Théorème 3.1.2 pour $p = q = 1$, on obtient l'inégalité (2.21) du Théorème 2.1.6.

Théorème 3.1.3 *[9]*

Soient p, q deux fonctions positives sur $[1, \infty[$ et f, g deux fonctions définies sur $[1, \infty[$, telle que $|f(x) - f(y)| \leq M|g(x) - g(y)|; M > 0,\ x, y \in [1, \infty[$. Alors pour tout $t > 1, \alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned}&|{}_H D_1^{-\alpha} q(t)_H D_1^{-\alpha}(pfg)(t) +_H D_1^{-\alpha} p(t)_H D_1^{-\alpha}(qfg)(t) \\ &-_H D_1^{-\alpha}(pf)(t)_H D_1^{-\alpha}(qg)(t) -_H D_1^{-\alpha}(qf)(t)_H D_1^{-\alpha}(pg)(t)| \\ &\leq M[{}_H D_1^{-\alpha} p(t)_H D_1^{-\alpha}(qg^2)(t) +_H D_1^{-\alpha} q(t)_H D_1^{-\alpha}(pg^2)(t) \\ &- 2_H D_1^{-\alpha}(pg)(t)_H D_1^{-\alpha}(qg)(t)].\end{aligned} \tag{3.7}$$

Preuve

D'après la condition $|f(x) - f(y)| \leq M|g(x) - g(y)|;\ M > 0\,, x, y \in [a, b]$, on conclure l'inégalité

$$|k(x, y)| \leq M(g(x) - g(y))^2 \quad x, y \in (1, t). \tag{3.8}$$

C'est une conséquence immédiate de conclure

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1} p(x)|k(x, y)| \tfrac{dx}{x} \\ &\leq M({}_H D_1^{-\alpha} p(t))(g^2(t) - 2g(t)g(y) + g^2(y)) \\ &\leq M[{}_H D_1^{-\alpha}(pg^2)(t) - 2g(y)_H D_1^{-\alpha}(pg)(t) + g^2(y)_H D_1^{-\alpha} p(t)].\end{aligned} \tag{3.9}$$

On conclut en utilisant l'égalité (3.3) et les inégalités (3.9)et(3.5), l'inégalité (3.7) est vérifie. $\square$

Théorème 3.1.4 *[9]*

Soient p, q deux fonctions positives sur $[1, \infty[$ et f, g deux fonctions définies sur $[1, \infty[$, telle que $|f(x) - f(y)| \leq M|g(x) - g(y)|; M > 0,\ x, y \in [1, \infty[$. Alors pour tout $t > 1, \alpha > 0, \beta > 0$, on ait

$$\begin{aligned}
&|{}_H D_1^{-\beta} q(t)\, {}_H D_1^{-\alpha}(pfg)(t) +_H D_1^{-\alpha} p(t)\, {}_H D_1^{-\beta}(qfg)(t) \\
&-_H D_1^{-\alpha}(pf)(t)\, {}_H D_1^{-\beta}(qg)(t) -_H D_1^{-\beta}(qf)(t)\, {}_H D_1^{-\alpha}(pg)(t)| \\
&\leq M[{}_H D_1^{-\alpha} p(t)\, {}_H D_1^{-\beta}(qg^2)(t) +_H D_1^{-\beta} q(t)\, {}_H D_1^{-\alpha}(pg^2)(t) \\
&- 2_H D_1^{-\alpha}(pg)(t)\, {}_H D_1^{-\beta}(qg)(t)].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Preuve

Il suffit de multiplier l'égalité (3.9) par $\dfrac{(\ln \frac{t}{y})^{\beta-1}}{y\Gamma(\beta)} q(y) \quad y \in (1, t)$, $t > 1$ et intégré par rapport a y, on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_t^x \int_t^y (\ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} (\ln \tfrac{t}{y})^{\beta-1} p(x) q(y) |k(x, y)| \tfrac{dx}{x} \tfrac{dy}{y} \\
&\leq \tfrac{M}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (\ln \tfrac{t}{y})^{\beta-1} q(y) [{}_H D_1^{-\alpha}(pg^2)(t) - 2g(y)\, {}_H D_1^{-\alpha}(pg)(t) + g^2(y)\, {}_H D_1^{-\alpha} p(t)] \tfrac{dy}{y}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_t^x \int_t^y (\ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1} (\ln \tfrac{t}{y})^{\beta-1} p(x) q(y) |k(x, y)| \tfrac{dx}{x} \tfrac{dy}{y} \\
&\leq M[{}_H D_1^{-\alpha} p(t)\, {}_H D_1^{-\beta}(qg^2)(t) +_H D_1^{-\beta} q(t)\, {}_H D_1^{-\alpha}(pg^2)(t) \\
&- 2_H D_1^{-\alpha}(pg)(t) + g^2(y)\, {}_H D_1^{-\beta}(qg)(t)].
\end{aligned} \tag{3.11}$$

D'utiliser l'égalité (3.3) avec deux paramètres α, β. On conclut l'inégalité (3.10). $\square$

Remarque 3.1.3

· Appliquée Théorème 3.1.4 pour $\alpha = \beta$, on obtient l'inégalité (3.7).

Théorème 3.1.5 *[6]*

Soient f et g deux fonctions lipschitziennes sur $[1, \infty[$ et p, q deux fonctions positives sur $[1, \infty[$, alors pour tout $t > 1$,$\alpha > 0$, on ait

$$\begin{aligned} &|{}_HD_1^{-\alpha}q(t){}_HD_1^{-\alpha}(pfg)(t) +_H D_1^{-\alpha}p(t){}_HD_1^{-\alpha}(qfg)(t) \\ &-_H D_1^{-\alpha}(pf)(t){}_HD_1^{-\alpha}(qg)(t) -_H D_1^{-\alpha}(qf)(t){}_HD_1^{-\alpha}(pg)(t)| \\ &\leq L_1L_2({}_HD_1^{-\alpha}q(t){}_HD_1^{-\alpha}(x^2p)(t) +_H D_1^{-\alpha}p(t){}_HD_1^{-\alpha}(x^2q)(t) \\ &- 2{}_HD_1^{-\alpha}(xp)(t){}_HD_1^{-\alpha}(xq)(t)). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Preuve

f, g deux fonctions lipschitziennes sur $[1, \infty[$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq L_1|x - y|,$$
$$|g(x) - g(y)| \leq L_2|x - y|,$$

où

$$|k(x, y)| \leq L_1L_2(x - y)^2, \tag{3.13}$$

alors

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t \int_1^t (\ln \tfrac{t}{x})^{\alpha-1}(\ln \tfrac{t}{y})^{\alpha-1}p(x)q(y)|k(x, y)|\tfrac{dx}{x}\tfrac{dy}{y} \\ &\leq L_1L_2({}_HD_1^{-\alpha}q(t){}_HD_1^{-\alpha}(x^2p)(t) +_H D_1^{-\alpha}p(t){}_HD_1^{-\alpha}(x^2q)(t) \\ &- 2{}_HD_1^{-\alpha}(xp)(t){}_HD_1^{-\alpha}(xq)(t)). \end{aligned} \tag{3.14}$$

En utilisant le même principe précédent, on obtient

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_1^t\int_1^t(\ln\tfrac{t}{x})^{\alpha-1}(\ln\tfrac{t}{y})^{\alpha-1}p(x)q(y)|k(x,y)|\tfrac{dx}{x}\tfrac{dy}{y}\right|\\&\leq L_1L_2({}_HD_1^{-\alpha}q(t){}_HD_1^{-\alpha}(x^2p)(t)+_H D_1^{-\alpha}p(t){}_HD_1^{-\alpha}(x^2q)(t)\\&-2{}_HD_1^{-\alpha}(xp)(t){}_HD_1^{-\alpha}(xq)(t)).\end{aligned}$$

Théorème 3.1.5 est prouvé. □

Théorème 3.1.6 *[6]*

Soient f et g deux fonctions lipschitziennes sur $[1,\infty[$ et p,q deux fonctions positives sur $[1,\infty[$, pour tout $t>1$,$\alpha>0$,$\beta>0$, on ait

$$\begin{aligned}&|{}_HD_1^{-\beta}q(t){}_HD_1^{-\alpha}(pfg)(t)+_H D_1^{-\alpha}p(t){}_HD_1^{-\beta}(qfg)(t)\\&-_H D_1^{-\alpha}(pf)(t){}_HD_1^{-\beta}(qg)(t)-_H D_1^{-\beta}(qf)(t){}_HD_1^{-\alpha}(pg)(t)|\\&\leq L_1L_2({}_HD_1^{-\beta}q(t){}_HD_1^{-\alpha}(x^2p)(t)+_H D_1^{-\alpha}p(t){}_HD_1^{-\beta}(x^2q)(t)\\&-2{}_HD_1^{-\alpha}(xp)(t){}_HD_1^{-\beta}(xq)(t)).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Preuve

Il suffit de multiple (3.13), par

$$\frac{(\ln\frac{t}{x})^{\alpha-1}(\ln\frac{t}{y})^{\beta-1}}{xy\Gamma(x)\Gamma(y)}p(x)q(y)\qquad x,y\in(1,t),$$

puis on intègre x et y sur $(1,t)^2$, on en déduit l'inégalité (3.15). □

Théorème 3.1.7 *[8]*

Soient $\alpha > 0$,$p \geqslant 1$ et f, g deux fonctions positives sur $[1, \infty[$ telles que $t > 1$,$0 <_H D_1^{-\alpha}(f^p),_H D_1^{-\alpha}(g^p) < \infty$. Si $0 < m \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq M < \infty$, $x \in [1, t]$, alors

$$\begin{aligned} &[{}_H D_1^{-\alpha}(f^p)(t)]^{\frac{1}{p}} + [{}_H D_1^{-\alpha}(g^p)(t)]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1 + M(m+2)}{(m+1)(M+1)}[{}_H D_1^{-\alpha}((f+g)^p)(t)]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Preuve

On a $f(x)/g(x) \leq M$ pour tout, $x \in [1, t]$, on obtient

$$(M+1)^p f^p(x) \leq M^p (f+g)^p(x). \tag{3.17}$$

En multiplie (3.17) par $\dfrac{(\ln \frac{t}{x})^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)}$, $x \in (1.t)$ $t > 1$ puis en intégrant, par rapport à x de 1 à t, on obtient

$$(M+1)^p_H D_1^{-\alpha}(f^p)(t) \leq M^p_H D_1^{-\alpha}((f+g)^p)(t),$$

on conclure

$$\left[{}_H D_1^{-\alpha}(f^p)(t)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{M}{M+1}\left[{}_H D_1^{-\alpha}((f+g)^p)(t)\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.18}$$

D'autre part comme $m \leq f(x)/g(x)$, on obtient

$$(m+1)^p g^p(x) \leq (f+g)^p(x). \tag{3.19}$$

En multiplie (3.19) par $\dfrac{(\ln \frac{t}{x})^{\alpha-1}}{x\Gamma(\alpha)}$, $x \in (1, t)$, $t > 1$ puis en intégrant par rapport à x de 1 à t, on obtient

$$(m+1)^p_H D_1^{-\alpha}(g^p)(t) \leq_H D_1^{-\alpha}((f+g)^p)(t).$$

On peut alors écrire

$$[{}_HD_1^{-\alpha}(g^p)(t)]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{m+1}\left[{}_HD_1^{-\alpha}((f+g)^p)(t)\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.20}$$

D'après l'inégalité (3.18) et l'inégalité (3.20), on obtient finalement l'inégalité (3.16). $\square$

Théorème 3.1.8 *[8]*

Soient $\alpha > 0$,$p \geq 1$ et f, g deux fonction positives sur $[1, \infty[$ telles que $t > 1, 0 <_H D_1^{-\alpha}(f^p)_H D_1^{-\alpha}(g^p) < \infty$. Si $0 < m \leq f(x)/g(y) \leq M < \infty, x \in [1, t]$, alors

$$\begin{aligned}&\left[{}_HD_1^{-\alpha}(f^p)(t)\right]^{\frac{2}{p}} + \left[{}_HD_1^{-\alpha}(g^p)(t)\right]^{\frac{2}{p}} \geq \\ &\left(\frac{(m+1)(M+1)}{M} - 2\right)\left[{}_HD_1^{-\alpha}(f^p)(t)\right]^{\frac{1}{p}}[{}_HD_1^{-\alpha}(g^p)(t)]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Preuve

Multiplier les deux inégalités (3.18) et (3.20),on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{(m+1)(M+1)}{M}\left[{}_HD_1^{-\alpha}(f^p)(t)\right]^{\frac{1}{p}}\left[{}_HD_1^{-\alpha}(g^p)(t)\right]^{\frac{1}{p}} \\ \leq\ &\left(\left[{}_HD_1^{-\alpha}((f+g)^p)(t)\right]^{\frac{1}{p}}\right)^2.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Appliquons l'inégalité de Minkowski pour le coté droit de (3.22), on obtient

$$\left([{}_HD_1^{-\alpha}((f+g)^p)(t)]^{\frac{1}{p}}]\right)^2 \leq \left([{}_HD_1^{-\alpha}(f^p)(t)]^{\frac{1}{p}}] + [{}_HD_1^{-\alpha}(g^p)(t)]^{\frac{1}{p}}\right)^2.$$

Où

$$
\begin{aligned}
&\left([{}_HD_1^{-\alpha}(f^p)(t)]^{\frac{1}{p}}] + [{}_HD_1^{-\alpha}(g^p)(t)]^{\frac{1}{p}}\right)^2 \\
= \;& [{}_HD_1^{-\alpha}(f^p)(t)]^{\frac{2}{p}} + [{}_HD_1^{-\alpha}(g^p)(t)]^{\frac{2}{p}} \\
+ \;& 2[{}_HD_1^{-\alpha}(f^p)(t)]^{\frac{1}{p}}[{}_HD_1^{-\alpha}(g^p)(t)]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Finalement d'après (3.22) et (3.23), on obtient l'inégalité (3.21).□

Conclusion

Dans ce mémoire, on considère quelques inégalités intégrales fractionnaires pour l'intégrale fractionnaire de Hadamard.
Au début, on étudie la fonctionnelle de Chebyshev avec l'intégrale fractionnaire de Hadamard.

Finalement, on présent la fonctionnelle de Chebyshev pondérée, type de Gruss pour l'opérateur de Hadamard.

Bibliographie

[1] D. Baleanu, J.A.T. Machado and C.J. Luo, Fractional Dynamic and Control, Springer, 2012, pp.159-171

[2] S. Belarbi and Z. Dahmani, On some new fractional integral inequality, J. Inequal. Pure and Appl. Math., 10(3)(2009), Art. 86, 5 pp.

[3] V.L. Chinchane and B.D. Pachpatte, A note on some fractional integral inequalities via Hadamard integral, journal of calculus and applications. 4 (2013) 125–129.

[4] V.L. Chinchane and B.D. Pachpatte, On some integral inequalities using Hadamard fractional integral, Malaya journal of matematik 1 (2012) 62–66

[5] P.L. Chebyshev, Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les mmes limites, Proc. Math. Soc. Charkov. 2 (1882) 93–98.

[6] Z. Dahmani, L. Tabharit and S. Taf, Some Fractional Integral Inequalities, Journal of Nonlinearscience. Lett. A. 1 (2010) 155–160.

[7] Z. Dahmani, New inequalities in fractional integrals, Int. J. Nonlinear Sci., 9(4)(2010), 493-497.

[8] Z. Dahmani, On Minkowski and Hermit-Hadamard integral inequa-

lities via fractional integration, Ann. Funct. Anal., 1(1)(2010), 51-58.

[9] Z. Dahmani, Some results associate with fractional integrals involving the extended Chebyshev, Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 27(2011), 217-224.

[10] Z. Dahmani, The Riemann-Liouville operator to genarate some new inequalities, Int. J. Nonlinear Sci., 12(4)(2011), 452-455.

[11] S.S. Dragomir, Some integral inequalities of-Gruss type, RGMIA, 1, (1998).

[12] Erdelyi A,Magnus W,Oberhetting F and Tricomi F ,Higer Transcendental functuons, Vol.III,Krueger Pup, Melbourne,florida,(1981).

[13] R. Gorenflo and F. Mainardi, Fractional calculus : integral and differential equations of fractional order, Springer Verlag, Wien, 1997.

[14] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Application of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amersterdam, 2006.

[15] S.G.Somko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, Fractional Integral and Derivative Theory and Application, Gordon and Breach, Yverdon, Switzerland, 1993.