RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

# MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

**Spécialité :**
« Mathématiques »

**Option :**
« Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles »

**Présenté Par :**

ZIOUIT Anouer Souad et GRINE Fatiha

**Sous L'intitulé :**

# Quelques problèmes hybrides fractionnaires impliquant des opérateurs fractionnaires de type ψ-Hilfer.

Soutenu publiquement le .03 / 07 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mr ZIANE Mohamed | MCA | Université Tiaret | Président |
| Mr ZENTAR Oualid | MAA | Université Tiaret | Encadreur |
| Mr ZITOUNI Ismail | MAA | Université Tiaret | Examinateur |

Année universitaire :2022/2023

# الإهـــــــــــــــــــداء

الحمد لله و كفى و الصلاة على الحبيب المصطفى و أهله و من وفى أما بعد

الحمد لله الذي وفقنا لتثمين هذه الخطوة في مسيرتنا الدراسية بمذكرتنا هذه ثمرة الجهد و النجاح بفضله تعالى مهداة إلى الوالدين الكريمين على كل تضحياتهم و دعمهم و تشجيعهم و حبهم الذي كان سبب نجاحي وفقهم الله الصحة الجيدة و العمل المديد و حفظهما و أدامهما نورا لدربي .

لكل العائلة الكريمة التي ساندتني من إخوة و أخوات و رفيقاتي المشوار مع تمنياتي لهم بالنجاح في مسيرتهم الدراسية .

جامعة ابن خلدون، تيارت.

قريـــــن فتيحـــــة

# الإهـــــــــــــــــــداء

اذا كان الاهداء يعبر ولو بجزء من الوفاء فإهدائي إلى معلم البشرية و منبع العلم نبينا محمد صلى الله عليه وسلم.

الى مثل الأبوة الأعلى والدي العزيز إلى حبيبة قلبي أمي الحنونة إلى جميع إخوتي و أهلي و صديقاتي و كل زملائي إلى كل من أحبني إلى كل من مهدوا الطريق أمامي للوصول إلى هذه اللحظة .

دون أن أنسى من كانتا سندا و مصدر إلهام لي أختي بالطيب نوال و حسان خديجة الأمينة فكل كلمات الشكر و الإمتنان لا توفهن قدرهن .

زويــــط أنــوار سعـــــاد

# الشــــــــــــــــكر

الحمد و الشكر لله أولا و آ خرا.

الحمد الله الذي وفقنا و ألهمنا الصحة و العافية و العزيمة لإتمام هذا العمل .

نتقدم بجزيل الشكر و التقدير إلى الأستاذ المشرف **زنتــار وليــد** على كل ما قدمه لنا من توجيهات و معلومات قيمة ساهمت في إثراء موضوع دراستنا ،كما نتقدم بجزيل الشكر إلى أعضاء لجنة المناقشة الأستاذ الدكتور **زيـــان محمـد** والأستاذ **زيتوني إسماعيل** .

نشكر والدينا و كل من ساعدنا عن قريب أو بعيد في تحقيق هذا النجاح .

كما نتقدم بالشكر لجميع مدرسينا من السنة الأولى ليسانس إلى السنة الثانية ماستر.

# Notation

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Ensemble des nombres réels |
| $\mathbb{N}$ | Ensemble des nombres entiers naturelle |
| $C^n([a,b],\mathbb{R})$ | Espace des fonctions continues n fois dérivables |
| $C([a,b],\mathbb{R})$ | Espace des fonctions continues |
| $L^p[a,b]$ | Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0,+\infty[$ |
| ${}^{RL}\mathbb{D}_a^{\alpha}u$ | Dérivée d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville |
| ${}^{H}\mathbb{D}_a^{\alpha}u$ | Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Hilfer |
| $I_a^{\alpha}u$ | Intégrale fractinnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville |
| $\Gamma(.)$ | La fonction Gamma |
| $B(.,.)$ | La fonction Beta |
| $Eq$ | Équation |
| $EI$ | Équation intégrale |
| $EIF$ | Équation intégrale fractionnaire |
| $EDF$ | Équation différentielle fractionnaire |
| $RL$ | Riemann-Liouville |
| $CL$ | Condition aux limites |
| $PVL$ | Problème des valeurs aux limites |
| $i.e$ | C'est-à-dire |
| $p.p$ | Presque partout |

# Table des matières

# Introduction générale

Le calcul fractionnaire est devenu au fil du temps un outil important pour le développement de nouveaux concepts mathématiques au sens théorique et au sens pratique. Au cours des dernières années, diverses notions ont été proposées sur les 'opérateurs fractionnaires. Ici, nous signalons les types les plus célèbres, y compris les dérivés de Liouville, Caputo, Hadamard, Caputo-Fabrizio, etc. En conséquence, cela a conduit à différentes structures d'équations différentielles d'ordre arbitraire formulées par plusieurs opérateurs fractionnaires. Cependant, il a été compris que la procédure la plus efficace pour discuter d'une telle variété d'opérateurs fractionnaires est de s'adapter aux structures généralisées d'opérateurs fractionnaires qui impliquent de nombreux autres opérateurs.

Ici, nous avons choisi l'opérateur fractionnaire $\psi$-Hilfer [2, 4], outre le fait qu'il s'agit d'un opérateur global, et qu'il en généralise plus de vingt, la liberté de choix de l'opérateur de différenciation classique et le choix de la fonction $\psi$, c'est-à-dire parmi le choix de la fonction $\psi$, l'opérateur de différenciation classique, peut agir sur l'opérateur d'intégration fractionnaire ou bien l'opérateur d'intégration fractionnaire peut agir sur l'opérateur de différenciation classique. Cela permet d'unifier et d'obtenir les propriétés des opérateurs fractionnaires.

Les équations différentielles fractionnaires hybrides ont été étudiées par plusieurs chercheurs. Par équation différentielle hybride, nous entendons que les termes de l'équation sont perturbés soit linéairement, soit quadratiquement, soit par la combinaison des premier et second types. La perturbation se produisant sous la forme de la somme ou de la différence des termes d'une équation est appelée linéaire. D'autre part, si l'équation est perturbée par le produit ou le quotient des termes qu'elle contient, elle est appelée perturbation quadratique. Ainsi l'étude de l'équation différentielle hybride est plus générale et couvre plusieurs systèmes dynamiques comme des cas particuliers. Cette classe d'équations implique la dérivée fractionnaire d'une fonction inconnue hybride avec la non-linéarité qui en dépend.

Dans ce qui suit, nous donnons un aperçu de l'organisation de notre mémoire, qui se compose de trois chapitres définissant le travail contribué.

**Chapitre 1 :** Ce chapitre fournit la notation et les résultats préliminaires, les descriptions, les théorèmes et autres résultats auxiliaires qui seront nécessaires pour cette étude.

**Chapitre 2 :** Dans cette section, nous présentons la définition de l'intégrale fractionnaire d'une fonction $f$ par rapport à une autre fonction $\psi$ et la définition de la dérivée fractionnaire $\psi$-Hilfer. Aussi bien que nous discutons quelques propriétés de l'opérateur fractionnaire : l'identité, est limité, et la relation avec l'opérateur intégral fractionnaire. Enfin, nous présentons une large classe d'intégrales et de dérivées fractionnaires, au moyen de l'intégrale fractionnaire par rapport à une autre fonction.

**Chapitre 3 :** Dans ce chapitre, nous prouvons quelques résultats d'existence des solutions pour une classe de problème de valeur initiale pour des équations différentielles hybrides fractionnaires non linéaires avec des dérivées fractionnaires $\psi$-Hilfer. Les résultats sont basés sur des théorèmes de point fixe dus à Dhage. De plus, des exemples sont fournis pour chaque section afin d'illustrer nos résultats.

Dans la section 3.1, nous établissons les résultats d'existence du problème de valeur initiale non locale avec l'équation différentielle fractionnaire non linéaire de $\psi$-Hilfer :

$$\begin{cases} {}^{H}\mathbb{D}_{0^+}^{\alpha,\beta;\Psi}\left[\dfrac{y(t)}{f(t,y(t))}\right] = g(t,y(t)), \quad \text{p.p} \;\; t \in ]0,T], \\ (\psi(t)-\psi(0))^{1-\gamma} y(t)\Big|_{t=0} = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Puis, dans la section 3.2, nous considérons le problème de la valeur initiale avec équation différentielle fractionnaire hybride non linéaire de type $\psi$-Hilfer :

$$\begin{cases} {}^{H}\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\dfrac{y(t)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right) = U(t,y(t)), \quad t \in ]a,b], \\ c_1 I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}\left(\dfrac{y(t)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right)\Bigg|_{t=a} + c_2\left(\dfrac{y(y)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right)\Bigg|_{t=b} = d. \end{cases}$$

# CHAPITRE 1

# Rappels et quelques outils de base.

Dans ce chapitre, nous discutons des outils mathématiques nécessaires, des notations et des concepts dont nous avons besoin dans les chapitres suivants. Nous examinons quelques propriétés essentielles des opérateurs différentiels fractionnaires. Nous passons également en revue certains des théorèmes du point fixe qui sont cruciaux dans nos résultats concernant les équations différentielles fractionnaires.

## 1.1 Sur les espaces

**Définition 1.1. (Espace de Banach)**

Toute espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{C}$ est appelé espace de Banach.

**Exemple 1.1.** *Les espaces* $L^1(J,\mathbb{R})$, $C(J,\mathbb{R})$, $BM(J,\mathbb{R})$ *munis respectivement des normes suivantes :*

$$\|x\|_{L^1} = \int_0^1 |x(t)|dt, \quad \|x\|_C = \sup_{t\in J} |x(t)|, \quad \|x\|_{BM} = \max_{t\in J} |x(t)|$$

*sont des espaces de Banach sur* $\mathbb{R}$.

**Définition 1.2. (Algèbre)**

Une algèbre $\mathscr{A}$ sur le corps $\mathbb{K}$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ muni d'une **application bilinéaire**, appelée " multiplication" et notée

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathscr{A}\times\mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

telle que

$$\text{pour tout } x,y,z\in\mathscr{A}, \quad \text{on a} \quad (xy)z = x(yz) \text{ (associative)}.$$

**Définition 1.3. (Algèbre de Banach)**

Soit $\mathscr{A}$ une **algèbre** sur $\mathbb{C}$. On dit que $\mathscr{A}$ est un **algèbre de Banach** si :

1) il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathscr{A}$ telle que

$$\forall x,y\in\mathscr{A}, \quad \text{on ait} \quad \|xy\| \le \|x\|\|y\|,$$

2) $\mathscr{A}$ est un espace de Banach ( muni la norme $\|.\|:\mathscr{A}\to\mathbb{R}_+$ )

**Exemple 1.2.** .

1. *Le corps* $\mathbb{C}$ *muni du module* $|\cdot|$ *comme norme est une algèbre de Banach.*
2. *Soit* $\ell^\infty(X,\mathbb{C})$ *l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur un ensemble* $X$ *et à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$,

   $$\text{pour tout } f\in\ell^\infty(X), \text{ on a } \|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|.$$

   *Pour tout* $f,g\in\ell^\infty(X)$, *on pose*

   $$\forall x\in X, \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

   *Alors* $\ell^\infty(X,\mathbb{C})$ *est une algèbre de Banach.*
3. *Soient* $X$ *un espace compact et* $C(X,\mathbb{C})$ *l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $X$ *et à valeurs dans* $\mathbb{C}$. *Alors* $(C(X,\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$ *est une sous-algèbre fermée de* $(\ell^\infty(X),\|\cdot\|_\infty)$, *donc* $(C(X,\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$ *est une algèbre de Banach.*

**Définition 1.4. Ensemble Convexe**

Un sous-ensemble $S$ d'un espace vectoriel $X$, est convexe si :

$$\forall x, y \in S, \ \ \forall t \in [0,1], \qquad xt + (1-t)y \in S.$$

**Exemple 1.3.** .

1. *Toute boule (ouverte ou fermée) d'un espace vectoriel normé est une partie convexe.*
2. *Tout sous espace vectoriel d'un espace vectoriel est convexe.*

## 1.2 Sur les fonctions

**Définition 1.5. Fonction de Carathéodory**

a) Une fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite Carathéodory si :
   1. la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est mesurable sur $J$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   2. la fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est continue pour presque tout $t \in J$.

b) Si de plus la fonction $f$ vérifie la condition suivante :

$$\forall r > 0, \ \ \exists h \in L^1(J, \mathbb{R}) \quad \text{tel que :} \quad \forall t \in J \quad \|f(t,x)\| \leq h(t) \quad \text{pour} \quad \|x\| \leq r,$$

on dit que $f$ est $L^1$-Carathéodory.

**Définition 1.6. Fonction absolument continue**

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur $[a,b]$, si $\forall \epsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, $]a_k, b_k[_{k=1,2,\ldots,n}$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

**Définition 1.7. Fonction de Lipschitz généralisée**

Soit $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

$f$ est dite lipschitzienne-généralisée s'il existe une fonction $l \in L^1(J, \mathbb{R})$, telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq l(t)\, \|x - y\|, \ \text{pour presque tout} \ \ t \in J,$$

la fonction $l$ est appelée la fonction de Lipschitz correspondante à $f$.

- Si $l(t) = k$ (où $k > 0$ est une constante positive ), $f$ est dite lipschitzienne de constante de Lipschitz $k$.

- Si $0 < k < 1$, $f$ est dite une contractante.

**Exemple 1.4.** .
*La fonction* $x \mapsto \dfrac{x + \sin x}{3}$ *est une* $k$*-contraction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, avec* $k = \dfrac{2}{3}$.

**Définition 1.8**

Pour $z > 0$, la fonction gamma $\Gamma(\cdot)$ est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds.$$

**Définition 1.9**

Soit $z, w > 0$ . Alors, la fonction bêta $B(z,w)$ est définie par

$$B(z,w) = \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{w-1} ds.$$

De plus, la fonction bêta et la fonction gamma ont la relation suivante

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

**Définition 1.10**

La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ est définie par

$$\mathbb{E}_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}.$$

## 1.3 Sur les opérateurs

**Définition 1.11. Opérateur borné**

Soit $A$ un opérateur linéaire défini d'un espace de Banach $X$ dans lui même. $A$ est dit borné s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in X, \quad \|Ax\| \leq c \|x\| \ .$$

**Définition 1.12. Opérateur continu**

Un opérateur $A$ défini d'un espace de Banach $X$ dans lui même est dit continu si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $X$ qui converge vers $x \in X$, la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Ax$.

Soit $C(J,X)$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact $J$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Banach $X$ et soit $M$ un sous ensemble de $C(J,X)$.

**Définition 1.13. Ensemble équicontinu**

$M$ est dit équicontinu si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall t_1, t_2 \in J, \quad \forall f \in M, \quad \Big(\|t_1 - t_2\| \leq \delta\Big) \Rightarrow \Big(\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon\Big).$$

**Définition 1.14. Ensemble uniformément borné**

$M$ est dit uniformément borné si :

$$\exists \ c > 0 : \|f(t)\| \leq c \quad \forall t \in J, \text{ et } \forall f \in M.$$

**Définition 1.15. Ensemble relativement compact**

$M$ est dit relativement compact si $\overline{M}$ (adhérence de $M$) est compact.

**Théorème 1.1. Ascoli Arzela**

$M$ est relativement compact si et seulement si :

1. $M$ est uniformément borné.
2. $M$ est équicontinu.

**Théorème 1.2. Convergence dominé de Lebesgue**

Soit $X$ un espace de Banach. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions de $X$ dans $X$ dont l'intégrale de la norme est fini (i.e. $f_n \in L^1(X,X)$) et soit $f : X \longrightarrow X$. On suppose que :

1. La suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ pour presque tout $x \in X$.
2. Il existe une fonction $g \in L^1(X,\mathbb{R})$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n(x)\| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$.

Alors,

$$f \in L^1(X,X), \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0.$$

Soit $A$ un opérateur défini d'un espace de Banach $X$ dans lui- même.

**Définition 1.16. Opérateur compact**

L'opérateur $A$ est dit compact si l'ensemble $A(X)$ est relativement compact.

**Définition 1.17. Opérateur totalement borné**

L'opérateur $A$ est dit totalement borné si pour tout ensemble borné $B$ de l'espace $X$, l'ensemble $A(B)$ est relativement compact.

**Définition 1.18. Opérateur complètement continu**

L'opérateur $A$ est dit complètement continu s'il est continu et totalement borné.

**Définition 1.19. Opérateur convexe**

L'opérateur $A$ est dit convexe si :

$$\forall t \in [0,1] \text{ et } \forall x,y \in A : \quad A(tx + (1-t)y) \leq tA(x) + (1-t)A(y).$$

**Définition 1.20. Contraction non linéaire**

L'opérateur $A$ est dit $\varphi$-lipschitzien s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et croissante vérifiant

$$\forall x,y \in X : \|Ax - Ay\| \leq \varphi(\|x-y\|) \qquad \text{avec} \quad \varphi(0) = 0.$$

La fonction $\varphi$ est appelée :

- $\varphi$-fonction de Lipschitz si $\varphi(r) = \alpha.r,\ \alpha > 0$ et $A$ est dit lipschitzien avec constante de Lipschitz $\alpha$.

- En particulier si $\alpha < 1$, $A$ est dit contraction et si $\varphi(r) < r$ pour $r > 0$, $A$ est dit contraction non linéaire.

- Si $\varphi(r) = r$, $A$ est dit opérateur non expansif.

## 1.4 Sur les points fixe

Dans cette section, nous énonçons les théorèmes de point fixe qui serons utilisés dans les chapitres suivants.

**Théorème 1.3.** [3]

Soit $S$ un sous-ensemble non vide fermé, convexe et borné de l'algèbre de Banach $X$ et soit $A : X \to X$ et $B : S \to X$ deux opérateurs tels que

1. $A$ est Lipschitzien avec une constante de Lipschitz $L$ ;
2. $B$ est complètement continue ;
3. $y = AyBx \Rightarrow y \in S$ pour tous $x \in S$ et
4. $LM < 1$ avec $M = \sup\{\|Bx\| : x \in S\}$.

Alors, l'équation de l'opérateur $y = AyBy$ admet une solution dans $S$.

**Théorème 1.4.** [7]

Soit $\Omega$ un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de l'algèbre de Banach $X$, soit les opérateur $T_1, T_2 : X \longrightarrow X$ et $T_3 : \Omega \longrightarrow X$ tell que :

1. $T_1$ et $T_2$ sont lipschitzienne, avec des constants de Lipschitze $k_1$ et $k_2$,
2. $T_3$ est continue et compact,
3. $y = T_1yT_3x + T_2x \in \Omega \Rightarrow x \in \Omega$ ; pour chaque $y \in \Omega$,
4. $k_1M + k_2 < 1$ où $M = \sup\{\|T_3x\| : x \in \Omega\}$.

Alors, il existe $y \in \Omega$ tell que : $T_1yT_3y + T_2y = y$.

# CHAPITRE 2

# Éléments de la théorie du calcul fractionnaire.

Dans ce chapitre nous présentons la définition de l'intégral frationnaire d'une fonction $f$ par rapport la fonction $\psi$ et la définition de la dérivée fractionnaire de $\psi$-Hilfer avec quelques propriétés .

## 2.1 L'intégrale fractionnaire de $\psi$-RL

**Définition 2.1.** [2]

Soit $]a,b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) un intervalle de la droite réelle $\mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Soit aussi $\psi$ une fonction monotone croissante et positive sur $]a,b]$,tel que $\psi' \in C(]a,b[,\mathbb{R})$ et $f$ une fonction intégrable définie sur $[a,b]$. Alors,

- l'intégrale fractionnaire $\psi$-Riemann-Liouville d'ordre $\alpha$ de la fonction $f$ est définie par

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} \psi'(s) f(s) ds. \tag{2.1}$$

**Remarque 2.1**

1. Si l'on considère $\psi(t) = t$ dans Eq.(2.1), on a

$$I_{a+}^{\alpha;t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f(t),$$

   l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.
2. Si l'on considère $\psi(t) = t$ et $a = -\infty$ dans Eq.(2.1), on a

$$I_{a+}^{\alpha;t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = {}^{L}I_{0+}^{\alpha} f(t),$$

   l'intégrale fractionnaire de Liouville.
3. Si l'on considère $\psi(t) = t$ et $a = 0$ dans Eq. (2.1), on a

$$I_{a+}^{\alpha;x} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = {}^{R}I_{0+}^{\alpha} f(t),$$

   l'intégrale fractionnaire de Riemann.
4. En choisissant $\psi(t) = \ln t$ et en remplaçant dans Eq.(2.1), on a

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\ln t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{1}{s} (\ln t - \ln s)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s} \\ &= {}^{H}I_{a+}^{\alpha} f(s), \end{aligned}$$

   l'intégrale fractionnaire de Hadamard.

**Lemme 2.1**

Soit $\alpha > 0$ et $\eta > 0$. Si $f(t) = [\psi(t) - \psi(a)]^{\eta-1}$, alors :

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) = \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\alpha+\eta)}(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\eta-1}.$$

*Démonstration.* On a par définition :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}(\psi(s) - \psi(a))^{\eta-1}\psi'(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\eta-2}\left[1 - \frac{\psi(s) - \psi(a)}{\psi(t) - \psi(a)}\right]^{\alpha-1}\left[\frac{\psi(s) - \psi(a)}{\psi(t) - \psi(a)}\right]^{\eta-1}\psi'(s)ds. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable : $z = \dfrac{\psi(s) - \psi(a)}{\psi(t) - \psi(a)}$ et en utilisant la définition de la fonction Beta et la relation $B(\alpha, \eta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\eta)}{\Gamma(\alpha+\eta)}$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) &= \frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\eta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}z^{\eta-1}dz \\ &= \frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\eta-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \eta) \\ &= \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\alpha+\eta)}(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\eta-1}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 2.2. (Semi groupe)**

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors on a la propriété de semi groupe suivant :

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} I_{a+}^{\beta;\psi} f(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta;\psi} f(t).$$

*Démonstration.* On a par définition :

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha;\psi} I_{a+}^{\beta;\psi} f)(t) &= (I_{a+}^{\alpha;\psi}(I_{a+}^{\beta;\psi} f))(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}\psi'(s)(I_{a+}^{\beta;\psi} f)(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}\psi'(s)(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (\psi(s) - \psi(\tau)^{\beta-1}\psi'(\tau)f(\tau)d\tau)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (\psi(t) - \psi(s)^{\alpha-1}\psi'(s)(\int_a^s (\psi(s) - \psi(\tau))^{\beta-1}\psi'(\tau)f(\tau)d\tau)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s \psi(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}\psi'(\tau)(\psi(s) - \psi(\tau))^{\beta-1}f(\tau)d\tau ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \psi'(s)f(s) \int_s^t \psi'(\tau)(\psi(t) - \psi(\tau))^{\alpha-1}(\psi(\tau) - \psi(s))^{\beta-1}d\tau ds. \end{aligned}$$

D'autre part, par le Lemme 2.1, on a :

$$\int_s^t \psi'(\tau)(\psi(t) - \psi(\tau))^{\alpha-1}(\psi(\tau) - \psi(s))^{\beta-1}d\tau = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha+\beta-1}.$$

En fin en tanant de la définition (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi}(I_{a+}^{\beta;\psi}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \psi'(s)f(s)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha+\beta-1}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(s))^{\alpha+\beta-1}\psi'(s)f(s)ds \\ &= (I_{a+}^{\alpha+\beta;\psi}f)(t). \end{aligned}$$

□

**Lemme 2.3**

Soit $\alpha, \eta \geq 0$ et $f \in \mathcal{C}_{1-\eta,\psi}([a,b],\mathbb{R})$. Alors :

$$I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(a) = \lim_{t\to a^+} I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(t) = 0.$$

*Démonstration.* Puisque $f \in \mathcal{C}_{1-\eta;\psi}([a,b],\mathbb{R})$ alors $(\psi(t)-\psi(a))^{1-\eta}f(t)$ est continu sur $[a,b]$, donc, il existe un constant positive $M$ telle que :

$$\mid (\psi(t)-\psi(a))^{1-\eta}f(t) \mid < M,$$

ainsi

$$|f(t)| < M \mid (\psi(t)-\psi(a))^{\eta-1} \mid, \qquad t \in [a,b]. \tag{2.2}$$

Maintenant, on applique l'opérateur $I_{a^+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ des deux membres de Eq. (2.2) et en utilisant le Lemme 2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha;\psi}|f(t)| &< MI_{a^+}^{\alpha;\psi} \mid (\psi(t)-\psi(a))^{\eta-1} \mid \\ &= M\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\alpha+\eta)}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha+\eta-1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Par continuité de $\psi$, à partir de l'inégalité (2.3), on a

$$\lim_{t\to a^+}\left|I_{a^+}^{\mu;\psi}f(t)\right| < \lim_{t\to a^+} I_{a^+}^{\mu;\psi}|f(t)| \quad = 0.$$

□

## 2.2 Les $\psi$ dérivées fractionnaire :

Nous passons en revue quelques définitions, notations et résultats de la dérivée fractionnaire $\psi$-Hilfer de [1].

Soit $[a,b], (0 < a < b < \infty)$ est un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante avec $\psi'(t) \neq 0$, pour tous $t \in [a,b]$.

### 2.2.1 La Dérivée fractionnaire $\psi$-Riemann-Liouville

**Définition 2.2.** [2]

Soient $n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{N}$, $\psi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, et $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Alors, la dérivée fractionnaire $\psi$-Riemann-Liouville de la fonction $f$ d'ordre $\alpha$ est définie par

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha;\psi}_{a^+} f(t) &= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n (I^{n-\alpha;\psi}_{a^+} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (\psi(t)-\psi(s))^{n-\alpha-1}\psi'(s)f(s)ds. \end{aligned} \tag{2.4}$$

**Remarque 2.2**

En utilisant l'opérateur de dérivée fractionnaire $\psi$-Riemann-Liouville Eq. (2.4), nous présentons quelques dérivées fractionnaires en choisissant $\psi$.

1. Considérez le $\psi(t) = t$ et le remplacement dans Eq. (2.4), on a

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;t}_{a+} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha;t}_{a+} f(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds \\ &= {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha}_{a+} f(t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

2. Considérez le $\psi(t) = \ln t$ et en remplaçant dans Eq. (2.4), on a

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathbb{D}^{\gamma;\ln t}_{a+} f(t) &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\gamma;\ln t}_{a+} f(t) \\ &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{n-\gamma-1} f(s)\frac{ds}{s} \\ &= {}^{H}\mathbb{D}^{\gamma}_{a+} f(t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

la dérivée fractionnaire d'Hadamard.

3. Considérez le $\psi(t) = \frac{t^\rho}{\rho}$ et en remplaçant dans Eq. (2.4), on a

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\frac{t^\rho}{\rho}}_{a+} f(t) &= \left(\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha;\frac{t^\rho}{\rho}}_{a+} f(t) \\ &= \left(\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{d}{dt}\right)^n \frac{\rho^{1-(n-\alpha)}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t^\rho - s^\rho)^{n-\alpha-1}\, s^{\rho-1} f(s)ds \\ &= {}^{\rho}\mathbb{D}^{\alpha}_{a+} f(t), \end{aligned} \tag{2.7}$$

la dérivée fractionnaire de Katugampola.

**Lemme 2.4**

Soient $\alpha > 0$ et $\eta > 0$. Si $f(t) = (\psi(t) - \psi(a))^{\eta-1}$, alors :

$$ {}^{RL}\mathbb{D}^{\alpha;\psi}_{a^+} f(t) = \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\eta-\alpha)}(\psi(t)-\psi(a))^{\eta-\alpha-1}.$$

*Démonstration.* En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire $\psi$-RL et le Lemme 2.1

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha;\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\eta-1} &= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha;\psi}(\psi(s)-\psi(a))^{\eta-1})(t) \\
&= \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(n-\alpha+\eta)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)(\psi(t)-\psi(a))^{n-\alpha+\eta-1} \\
&= \frac{\Gamma(\eta)(n-\alpha+\eta-1)}{\Gamma(n-\alpha+\eta)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}(\psi(t)-\psi(a))^{n-\alpha+\eta-2}.
\end{aligned}$$

Et comme $\Gamma(n-\alpha+\eta)=(n-\alpha+\eta-1)\Gamma(n-\alpha+\eta-1)$, alors en répétant le processus de la dérivée $\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)$ à la $(n-1)$ ième étape, on obtient :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha;\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\eta-1} &= \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(n-\alpha+\eta-1)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}(\psi(t)-\psi(a))^{n-\alpha+\eta-2} \\
&\vdots \\
&= \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\eta-\alpha)}(\psi(t)-\psi(a))^{\eta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

□

**Lemme 2.5**

Soient $n>0$ et $f\in C([a,b],\mathbb{R})$. Alors :

$$\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n;\psi}f(t)=f(t).$$

*Démonstration.* En utilisant [2, Lemme 2.4], pour $n-1<\alpha\leq n\in\mathbb{N}$ et $f\in C([a,b],\mathbb{R})$, on a

$$f(t) = {}^{RL}\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha;\psi}I_{a^+}^{\alpha;\psi}f(t)$$

En particulier pour $\alpha=n$, on a

$$\begin{aligned}
f(t)={}^{RL}\mathbb{D}_{a^+}^{n;\psi}I_{a^+}^{n;\psi}f(t) &= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n-n;\psi}I_{a^+}^{n;\psi}f(t) \\
&= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n;\psi}f(t).
\end{aligned}$$

□

**Lemme 2.6**

Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+$ et $n-1\leq\alpha<n$. Alors, pour $f\in\mathcal{C}_{\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$, on a

$${}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\ I_{a+}^{\alpha;\Psi}f(t)=f(t).$$

*Démonstration.* En utilisant le Lemme 2.2 et le Lemme 2.5, on obtient

$$\begin{aligned}
{}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi}\ I_{a+}^{\alpha;\psi}f(t) &\overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha;\psi}I_{a+}^{\alpha;\psi}f(t) \\
&= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n;\psi}f(t) \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

□

### 2.2.2 La Dérivée fractionnaire $\psi$-Hilfer

**Définition 2.3.** [1]

Soient $n-1<\alpha<n$ avec $n\in\mathbb{N}$, et $f,\psi\in C^n([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions. La dérivée fractionnaire $\psi$-Hilfer (côté gauche) ${}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\cdot)$ de la fonction $f$ d'ordre $\alpha$ et de type $0\le\beta\le1$, est défini par

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t)=I_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(t). \tag{2.8}$$

On peut l'écrire comme suite :

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t)=I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(t), \tag{2.9}$$

avec $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$ et $I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}(\cdot)$, ${}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\gamma;\psi}(\cdot)$, tel que définis dans Eq. (2.1), Eq. (2.4).

**Exemple 2.1.** *Soit $\eta\in\mathbb{R}$, considérer la fonction $f(t)=(\psi(t)-\psi(a))^{\eta-1}$, avec $\eta>n$. Alors, pour $n-1<\alpha<n$ et $0\le\beta\le1$, on a*

$$ {}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t)=\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\eta-\alpha)}(\psi(t)-\psi(a))^{\eta-\alpha-1}. \tag{2.10}$$

*En effet, en utilisant le lemme 2.1 et le lemme 2.4 , on obtient :*

$$\begin{aligned}
{}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t)&=I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}{}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\gamma;\psi}f(t)\\
&=I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}{}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\gamma;\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\eta-1}\\
&=I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\left(\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\eta-\gamma)}(\psi(t)-\psi(a))^{\eta-\gamma-1}\right)\\
&=\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\eta-\gamma)}I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\left((\psi(t)-\psi(a))^{\eta-\gamma-1}\right)\\
&=\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\eta-\alpha)}(\psi(t)-\psi(a))^{\eta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

***En particulier***, *si $n\le k\in\mathbb{N}$, on a*

$$ {}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(t)-\psi(a))^k=\frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)}(\psi(t)-\psi(a))^{k-\alpha}.$$

*D'autre part, pour $n>k\in\mathbb{N}_0$, on a*

$$ {}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(t)-\psi(a))^k=0.$$

**Exemple 2.2.** *Soit $t>a$, $1>\alpha>0$, $0\le\beta\le1$. Alors pour $0<\gamma=\beta(1-\alpha)+\alpha<1$, on obtient*

$$\left({}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(s)-\psi(a))^{\gamma-1}\right)(t)=0. \tag{2.11}$$

*D'après 2.8 et le Lemme 2.1, on a*

$$I_{a+}^{n-\gamma;\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}=\Gamma(\gamma),$$

*ensuite nous avons*

$$\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)\left(I_{a+}^{n-\gamma;\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}\right)=0.$$

**Exemple 2.3.** *Soient $\lambda>0, n-1<\alpha<n$ et $0\leq\beta\leq 1$. Considérez la fonction*

$$f(t)=\mathbb{E}_{\alpha}\left(\lambda(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha}\right),$$

*avec $\mathbb{E}_{\alpha}(\cdot)$ est la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre 1.10. Alors,*

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t)=\lambda f(t).$$

*En effet, en utilisant la définition de la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre et (2.10), on obtient*

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t) &= {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\left[\mathbb{E}_{\alpha}\left(\lambda(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha}\right)\right]\\
&\overset{déf}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)}{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{k\alpha}\\
&\overset{(2.10)}{=}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k+1)}\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k-\alpha+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{k\alpha-\alpha}\\
&=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}(\psi(t)-\psi(a))^{(k-1)\alpha}}{\Gamma((k-1)\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

*Remplacer $k$ par $(k-1)$, on obtient*

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t)=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}(\psi(t)-\psi(a))^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}=\lambda f(t).$$

**Remarque 2.3**

En utilisant l'opérateur de dérivée fractionnaire $\psi$-Hilfer Eq. (2.8), nous présentons une large classe de dérivées fractionnaires en choisissant $\psi$, $a$ et en prenant la limite des paramètres $\alpha$ et $\beta$.

1. En prenant la limite $\beta\to 1$ des deux membres de Eq. (2.8), on a

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,1;\psi}f(t)=I_{a+}^{n-\alpha;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}f(t)={}^{c}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f(t), \tag{2.12}$$

la dérivée fractionnaire $\psi$-Caputo.

2. En prenant la limite $\beta\to 0$ des deux membres de Eq. (2.8), on a

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,0;\psi}f(t)=\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}I_{a+}^{(n-\alpha);\psi}f(t)={}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\psi}f(t), \tag{2.13}$$

la dérivée fractionnaire $\psi$-Riemann-Liouville.

3. Considérons le $\psi(t)=t$ et en prenant la limite $\beta\to 1$ des deux membres de Eq.

(2.8), on a

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,1;t} f(t) &= I_{a+}^{n-\alpha;t}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(s)ds = {}^{C}D_{a+}^{\alpha} f(t), \end{aligned} \tag{2.14}$$

la dérivée fractionnaire de Caputo.

4. Considérons le $\psi(t) = \frac{t^\rho}{\rho}$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ des deux membres de Eq. (2.8), on a

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,0;\frac{t^\rho}{\rho}} f(t) = \left(\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{d}{dt}\right)^{n} {}^{\rho}I_{a+}^{n-\alpha;\frac{t^\rho}{\rho}} f(t) \quad = {}^{\rho}D_{a+}^{\alpha} f(t), \tag{2.15}$$

la dérivée fractionnaire de Katugampola .

5. Pour $\psi(t) = t$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ des deux membres de Eq. (2.8), on obtient

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,0;x} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} I_{a+}^{n-\alpha;x} f(t) \quad = {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(t), \tag{2.16}$$

la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

6. Pour $\psi(t) = \ln t$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ des deux membres de Eq. (2.8), on obtient

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,0;\ln t} f(t) = \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} I_{a+}^{n-\alpha;\ln t} f(t) \quad = {}^{H}D_{a+}^{\alpha} f(t), \tag{2.17}$$

la dérivée fractionnaire de Hadamard.

7. Pour $\psi(t) = \ln t$ et en prenant la limite $\beta \to 1$ des deux membres de Eq. (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,1;\ln t} f(t) &= I_{a+}^{n-\alpha;\ln t}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\left(s\frac{d}{ds}\right)^{n} f(s)\frac{ds}{s} \\ &= {}^{CH}D_{a+}^{\alpha} f(t), \end{aligned} \tag{2.18}$$

la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard.

8. Considérons le $\psi(t) = \frac{t^\rho}{\rho}$ et en prenant la limite $\beta \to 1$ des deux membres de Eq. (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,1;\frac{t^\rho}{\rho}} f(t) &= I_{a+}^{n-\alpha;\frac{t^\rho}{\rho}}\left(\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) \\ &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t^\rho - s^\rho)^{n-\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\rho-1}}\frac{d}{ds}\right)^{n} s^{\rho-1} f(s)ds \\ &= {}^{CK}D_{a+}^{\alpha,\rho} f(t), \end{aligned} \tag{2.19}$$

la dérivée fractionnaire de Caputo-Katugampola (de type Caputo).

9. Considérons le $\psi(t) = \ln t$, par (2.9) et (2.6), on a

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\ln t} f(t) = I_{a^+}^{\gamma-\alpha}\ {}^{H}D_{a^+}^{\gamma} f(t) \quad = {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta} f(t), \tag{2.20}$$

la dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard.

10. Considérons le $\psi(t) = t^\rho$, par (2.9) et (2.7), on a

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;t^\rho} f(t) = {}^{\rho}I_{a^+}^{\gamma-\alpha}\ {}^{\rho}D_{a^+}^{\gamma} f(t) \quad = {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta} f(t), \tag{2.21} $$

la dérivée fractionnaire de Hilfer–Katugampola.

11. Pour $\psi(t) = t, a = 0$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ de part et d'autre de Eq. (2.8), on obtient

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha,0;\psi} f(t) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_{0+}^{n-\alpha;\psi} f(t) \quad = {}^{R}D_{a^+}^{\alpha} f(t), \tag{2.22} $$

la dérivée fractionnaire de Riemann.

12. Pour $\psi(t) = t$, $a = c$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ de part et d'autre de Eq. (2.8), on obtient

$$ \begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{c^+}^{\alpha,0;\psi} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{c^+}^{n-\alpha;\psi} f(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_c^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds \\ &= D_c^{\alpha} f(t), \end{aligned} \tag{2.23} $$

la dérivée fractionnaire de Chen.

13. Considérons les $\psi(t) = t$, $a = 0$, $g(t) = f(t) - f(0)$ et en prenant la limite $\beta \to 0$ des deux membres de Eq. (2.8), on a

$$ \begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha,0;\psi} g(t) &= {}^{H}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha,0;\psi} (f(t) - f(0)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{0}^{n-\alpha;\psi} (f(t) - f(0)) \\ &= D_t^{\alpha} f(t), \end{aligned} \tag{2.24} $$

la dérivée fractionnaire de Jumarie.

**Théorème 2.1**

Si $f \in C^n([a,b],\mathbb{R}), n-1 < \alpha < n$ et $0 \leq \beta \leq 1$, alors :

$$ I_{a^+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-k} I_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a). $$

*Démonstration.* Utilisation du lemme 2.2 et définition de la dérivée fractionnaire $\psi$-Hilfer (2.9), on obtient

$$ \begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) &= I_{a^+}^{\alpha;\psi} \left( I_{a^+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ {}^{RL}D_{a^+}^{\gamma;\psi} f(t) \right) \\ &= I_{a^+}^{\gamma;\psi}\ {}^{RL}D_{a^+}^{\gamma;\psi} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t (\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1} \psi'(s)\ {}^{RL}\mathbb{D}_{a^+}^{\gamma;\psi} f(s)ds. \end{aligned} $$

Par défintion de ${}^{RL}D_{a^+}^{\gamma;\psi}$, on a

$$ I_{a^+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}D_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t (\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1} \psi'(s) \left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^n (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi} f)(s)ds. $$

En utilisant la formule d'intégration par parties. On peut considérer la décomposition,

$$ (\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1} \left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^n (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi} f)(s) = v(s) \times \frac{d}{ds} u(s), $$

où

$$v(s) = (\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1} \quad \text{et} \quad \frac{d}{ds}u(s) = \left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(s).$$

On a

$$\frac{d}{ds}v(s) = -(\gamma-1)\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-2} \quad \text{et} \quad u(s) = \left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(s),$$

et la formule d'intégration par parties indique que

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left[(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-1}\ \left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(s)\right]_a^t \\ &\quad + \frac{\gamma-1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\gamma-2}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(s)ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(a) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(t))^{\gamma-2}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(s)ds. \end{aligned}$$

En répétant le processus d'intégration par parties à la $n$ ième étape, on obtient

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-1} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(a) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\gamma-1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-2}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-2} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(a) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\gamma-2)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(t))^{\gamma-3}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-2} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(s)ds \\ &\quad \vdots \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(\gamma-k+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-k} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(a) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\gamma-n)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(t))^{\gamma-n-1} I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f(s)ds \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\frac{d}{ds}\right)^{n-k} (I_{a^+}^{n-\gamma;\psi}f)(a) \\ &\quad + I_{a^+}^{n-\gamma;\psi} I_{a^+}^{\gamma-n;\psi}f(s)ds. \end{aligned}$$

En suite, nous concluons que

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}\ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-k} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi}f(a).$$

□

**Théorème 2.2**

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta \leq 1$, alors :

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\ I_{a+}^{\alpha;\psi}f(t) = f(t).$$

*Démonstration.* En effet, on a

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) &= I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) \\
&= I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} I_{a+}^{n-\beta n+\beta\alpha;\psi} f(t) \\
&= I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} I_{a+}^{n-(\gamma-\alpha);\psi} f(t) \\
&= I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi\, RL}\mathbb{D}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} f(t).
\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 2.1 et le Lemme 2.3, nous concluons que

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) &= I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}\ {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} f(t) \\
&= f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma+1-k)} \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n-k} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a) \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

□

# CHAPITRE 3

# Sur les équations différentielles fractionnaires $\psi$-Hilfer.

Dans ce chapitre nous présentons l'étude de l'existence de solutions pour un certain type d'équations différentielles fonctionnelles de $\psi$-Hilfer.

On considère l'espace linéaire

$$\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}\left([a,b],\mathbb{R}\right) = \left\{x : ]a,b] \to \mathbb{R} : (\psi(\cdot)-\psi(a))^{1-\gamma}x(\cdot) \in C([a,b],\mathbb{R})\right\},$$

avec une métrique appropriée à savoir

$$d_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} (\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}\|x(t)-y(t)\| < \infty,$$

avec une norme définie par

$$\|x\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} = \sup_{t\in[a,b]} (\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}\|x(t)\|.$$

**Lemme 3.1**

Si $0 < \gamma < 1$ est une constante, alors

1. $d_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}$ est une métrique ;
2. $\left(\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}\left([a,b],\mathbb{R}\right), d_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}\right)$ est un espace métrique complet.

*Démonstration.* :

1. Suppose que $\varepsilon > 0, \quad 0 < \gamma < 1$ alors, on a

$$(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma} > 0, \forall t \in [a,b].$$

Comme $\|x(t)-y(t)\|$ est une norme, vérifiez facilement les propriétés des métriques.

2. Soit $\{x_i(t)\}$ une suite de Cauchy, i.e., pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif $N_\varepsilon$ tel que

$$(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}\|x_i(t)-x_j(t)\| < \varepsilon, \forall i,j > N_\varepsilon, \quad \forall t \in [a,b].$$

Il en résulte que la suite $\{x_i(t)\}$ est uniformément convergente. La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est une fonction continue. Prise $j \to \infty$ on obtient

$$(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}\|x_i(t)-x(t)\| < \varepsilon, \forall i > N_\varepsilon, \quad \forall t \in I,$$

et donc la suite de Cauchy $\{x_i(t)\}$ converge dans la métrique $d_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}$ de $\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$. Par conséquent, $\left(\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}\left([a,b],\mathbb{R}\right), d_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}\right)$ est un espace métrique complet.

□

**Lemme 3.2**

Si $0 < \gamma < 1$ est une constante, alors

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}$ est une norme ;
2. $\left(\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}\left([a,b],\mathbb{R}\right), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}\right)$ est un espace de Banach.

*Démonstration.* :

1. Du point 1 du Lemme 3.1 il résulte que $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}$ est une norme.
2. Du point 2 du Lemme 3.1 et de le point 1 ci-dessus, le lemme suit.

□

**Lemme 3.3**

Soit $\mathbb{X} := \left(\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}\left([a,b],\mathbb{R}\right), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}\right)$, alors $\mathbb{X}$ est une algèbre de Banach avec le produit des vecteurs définis par

$$\forall x, y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}\left([a,b],\mathbb{R}\right), \quad (xy)(t) = x(t)y(t), \quad t \in [a,b].$$

## 3.1 Un premier type de problème

Dans cette section, nous considérons l'équation différentielle fractionnaire hybrides $\psi$-Hilfer suivants de la forme [5] :

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{0^+}^{\alpha,\beta;\psi}\left[\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\right] = g(t,y(t)), \quad \text{p.p} \quad t \in ]0,T], \tag{3.1}$$

$$\left.(\psi(t)-\psi(0))^{1-\gamma}y(t)\right|_{t=0} = y_0 \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

avec $0<\alpha<1$, $0\leq\beta\leq 1$, $\gamma=\alpha+\beta(1-\alpha)$, ${}^{H}\mathbb{D}_{0^+}^{\alpha,\beta;\psi}(\cdot)$ est la dérivée fractionnaire $\psi$-Hilfer d'ordre $\alpha$ et de type $\beta$, $f \in C([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\backslash\{0\})$ est borné et $g \in C([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ est fonction Carathéodory.

1. Pour $\beta = 0, \psi(t) = t, y_0 = 0$, on a EDF hybrides non linéaires de la forme

$$\begin{aligned} &{}^{RL}\mathbb{D}_{0^+}^{\alpha}\left[\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\right] = g(t,y(t)), \quad \text{p.p} \quad t \in ]0,T], \\ &y(0) = 0. \end{aligned}$$

2. Pour $\alpha = 1, \ \beta = 1, \ \psi(t) = t$, on a les équations différentielles hybrides non linéaires d'ordre entier de la forme

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\right] = g(t,y(t)), \quad \text{p.p} \quad t \in ]0,T], \\ &y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### 3.1.1 Équation intégrale fractionnaire (EIF).

**Lemme 3.4**

Une fonction $y \in \mathbb{X}$ est la solution du problème de Cauchy pour les EDF hybrides (3.1)-(3.2) si et seulement si elle est solution de l'EIF hybride suivant

$$y(t) = f(t,y(t))\left\{\frac{y_0}{f(0,y(0))}(\psi(t)-\psi(0))^{\gamma-1} + I_{0^+}^{\alpha;\psi}g(t,y(t))\right\}, \quad t \in ]0,T]. \tag{3.3}$$

*Démonstration.* Soit $y \in \mathbb{X}$ est la solution du problème de Cauchy pour les EDF hybrides (3.1)-(3.2).

Application de la $\psi$-RL intégrale fractionnaire $I_{0^+}^{\alpha;\psi}$ des deux membres de l'équation (3.1) et en utilisant le Théorème 2.1, on obtient

$$\frac{y(t)}{f(t,y(t))} - \frac{(\psi(t)-\psi(0))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left[I_{0^+}^{1-\gamma;\psi}\frac{y(t)}{f(t,y(t))}\right]_{t=0} = I_{0^+}^{\alpha;\psi}g(t,y(t)), \quad t \in ]0,T].$$

L'équation ci-dessus peut être écrite comme

$$y(t) = f(t, y(t)) \left\{ \frac{C}{\Gamma(\gamma)} (\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1} + I_{0^+}^{\alpha;\psi} g(t, y(t)) \right\}, \quad t \in ]0, T], \tag{3.4}$$

où

$$C = \left[ I_{0^+}^{1-\gamma;\psi} \frac{y(t)}{f(t, y(t))} \right]_{t=0}.$$

Ensuite, nous évaluons la valeur de $C$ en utilisant la condition initiale. En multipliant $(\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma}$ des deux membres de l'équation (3.4), on obtient pour $t \in [0, T]$

$$(\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma} y(t) = \frac{C}{\Gamma(\gamma)} f(t, y(t)) + (\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma} f(t, y(t)) I_{0^+}^{\alpha;\psi} g(t, y(t)).$$

En mettant $t = 0$ dans l'équation ci-dessus et en utilisant la condition initiale (3.2), on obtient

$$C = \frac{y_0 \Gamma(\gamma)}{f(0, y(0))}.$$

En mettant la valeur de $C$ dans l'équation (3.4), on obtient

$$y(t) = f(t, y(t)) \left[ \frac{y_0}{f(0, y(0))} (\psi(t) - \psi(0))^{\xi-1} + I_{0^+}^{\mu;\psi} g(t, y(t)) \right], \quad t \in ]0, T],$$

qui est requis EI fractionnaire hybride équivalent aux EDF hybrides (3.1)-(3.2).

Inversement, soit $y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a, b], \mathbb{R})$ est une solution de l'EI hybride (3.3). Il peut alors s'écrire comme

$$\frac{y(t)}{f(t, y(t))} = \frac{y_0}{f(0, y(0))} (\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1} + I_{0^+}^{\alpha;\psi} g(t, y(t)), \quad t \in ]0, T]. \tag{3.5}$$

Application de la dérivée $\psi$-Hilfer ${}^H\mathbb{D}_{0^+}^{\alpha,\beta;\psi}$ de part et d'autre de l'équation (3.5) et en utilisant le (2.11) et le Théorème 2.2, on obtient

$${}^H\mathbb{D}_{0^+}^{\alpha,\beta;\psi} \left[ \frac{y(t)}{f(t, y(t))} \right] = \frac{y_0}{f(0, y(0))} {}^H\mathbb{D}_{0^+}^{\alpha,\beta;\psi} (\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1} + {}^H\mathbb{D}_{0^+}^{\alpha,\beta;\psi} I_{0^+}^{\alpha;\psi} g(t, y(t)) = g(t, y(t)).$$

Il reste à vérifier la condition initiale (3.2). De l'équation (3.5), nous avons

$$(\psi(t) - \psi(0))^{1-\xi} \frac{y(t)}{f(t, y(t))} = \frac{y_0}{f(0, y(0))} + (\psi(t) - \psi(0))^{1-\xi} I_{0^+}^{\mu;\psi} g(t, y(t)).$$

À $t = 0$, l'équation ci-dessus se réduit à

$$\left[ (\psi(t) - \psi(0))^{1-\xi} y(t) \right]_{t=0} = y_0,$$

ce qui donne la condition initiale (3.2). Ceci achève la preuve. □

### 3.1.2 Existence de solution

Pour prouver l'existence de solution aux EDF hybrides (3.1)-(3.2), nous avons besoin des hypothèses suivantes sur $f$ et $g$ :

(H1) La fonction $f \in C([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \backslash \{0\})$ est bornée et satisfait les conditions suivantes :

1. La fonction $v \to \dfrac{v}{f(t,v)}$ est croissante en $\mathbb{R}$ p.p $t \in ]0,T]$.
2. il existe $L > 0$ tel que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|, \quad t \in [0,T] \text{ et } x, y \in \mathbb{R}.$$

(H2) La fonction $g \in C([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est Carathéodory et il existe une fonction $h \in C([0,T], \mathbb{R})$ telle que

$$|g(t,y)| \leq h(t), \quad \text{p.p} \quad t \in [0,T] \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

**Théorème 3.1**

Supposons que les hypothèses (H1)-(H2) soient vérifiées. Alors les EDF hybrides (3.1)-(3.2) admet une solution $y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([0,T], \mathbb{R})$ à condition que

$$L \left\{ \left| \frac{y_0}{f(0,y(0))} \right| + \frac{\|h\|_\infty (\psi(T) - \psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\} < 1. \tag{3.6}$$

*Démonstration.* Soit

$$S = \left\{ x \in \mathbb{X} \ : \ \|x\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \leq R \right\}$$

avec $R = K \left\{ \left| \dfrac{y_0}{f(0,y(0))} \right| + \dfrac{\|h\|_\infty (\psi(T) - \psi(0))^{\alpha+1-\gamma}}{\Gamma(\alpha+1)} \right\}$ et $K$ est dépendant $f$.

Clairement, $S$ est un sous-ensemble fermé, convexe et borné de $\mathbb{X}$. Définir deux opérateurs $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ et $B : S \to \mathbb{X}$ par

$$Ay(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0,T],$$

$$By(t) = \frac{y_0 (\psi(t) - \psi(0))^{\gamma-1}}{f(0,y(0))} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} g(s, y(s)) ds, \quad t \in ]0,T].$$

En suite, l'EI hybride (3.3) est transformé en l'équation d'opérateur suivante

$$y = AyBy, \quad y \in \mathbb{X}.$$

Nous prouvons que les opérateurs $A$ et $B$ vérifient toutes les conditions du Théorème 1.3. La preuve est donnée dans les étapes suivantes :

**Étape 1 :** $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est l'opérateur de Lipschitz.

En utilisant l'hypothèse (H1)(1), on obtient

$$\begin{aligned}
\left| (\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma} (Ax(t) - Ay(t)) \right| &= \left| (\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma} (f(t,x(t)) - f(t,y(t))) \right| \\
&\leq L \left| (\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma} (x(t) - y(t)) \right| \\
&\leq L \|x - y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}.
\end{aligned}$$

Cela donne
$$\|Ax - Ay\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \leq L\|x - y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}. \tag{3.7}$$

**Étape 2 :** $B : S \to \mathbb{X}$ est complètement continu.

(i) $B : S \to \mathbb{X}$ est continu.

Soit $y_n \to y$ dans $S$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\|By_n - By\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \\
&= \max_{t\in[0,T]} \left|(\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma} (By_n(t) - By(t))\right| \\
&\leq \max_{t\in[0,T]} \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} |g(s, y_n(s)) - g(s, y(s))|\, ds.
\end{aligned}$$

Par la continuité de $g$ et la théorème de convergence dominée de Lebesgue, à partir de l'inégalité ci-dessus, on a
$$\|By_n - By\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$
Cela prouve que $B : S \to \mathbb{X}$ est continu.

(ii) $B(S) = \{By : y \in S\}$ est uniformément borné.

En utilisant l'hypothèse (H2), pour tout $y \in S$ et $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|(\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma} By(t)\right| \\
&\leq \left|\frac{y_0}{f(0, y(0))}\right| + \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}|g(s, y(s))|ds \\
&\leq \left|\frac{y_0}{f(0, y(0))}\right| + \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}h(s)ds \\
&\leq \left|\frac{y_0}{f(0, y(0))}\right| + \|h\|_\infty(\psi(t) - \psi(0))^{1-\gamma} \frac{(\psi(t) - \psi(0))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&\leq \left|\frac{y_0}{f(0, y(0))}\right| + \frac{\|h\|_\infty(\psi(T) - \psi(0))^{\alpha+1-\gamma}}{\Gamma(\alpha + 1)}.
\end{aligned}$$

Donc
$$\|By\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \leq \left|\frac{y_0}{f(0, y(0))}\right| + \frac{\|h\|_\infty(\psi(T) - \psi(0))^{\alpha+1-\gamma}}{\Gamma(\alpha + 1)}. \tag{3.8}$$

(iii) $B(S)$ est équicontinu.

Soient $y \in S$ et $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$. En utilisant l'hypothèse (H2), on a

$$\begin{aligned}
&\left|(\psi(t_2)-\psi(0))^{1-\gamma} By(t_2) - (\psi(t_1)-\psi(0))^{1-\gamma} By(t_1)\right| \\
&= \left| \left\{ \frac{y_0}{f(0,y(0))} + \frac{(\psi(t_2)-\psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha-1} g(s,y(s))ds \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \frac{y_0}{f(0,y(0))} + \frac{(\psi(t_1)-\psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha-1} g(s,y(s))ds \right\} \right| \\
&\leq \left| \frac{(\psi(t_2)-\psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha-1} \mid g(s,y(s)) \mid ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\psi(t_1)-\psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha-1} |g(s,y(s))| ds \right| \\
&\leq \left| \frac{(\psi(t_2)-\psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha-1} h(s)ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\psi(t_1)-\psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha-1} h(s)ds \right| \\
&\leq \left| \frac{(\psi(t_2)-\psi(0))^{1-\gamma}\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha-1} ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\psi(t_1)-\psi(0))^{1-\gamma}\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha-1} ds \right| \\
&= \frac{\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left| (\psi(t_2)-\psi(0))^{\alpha+1-\gamma} - (\psi(t_1)-\psi(0))^{\alpha+1-\gamma} \right|.
\end{aligned}$$

Par la continuité de $\psi$, de l'inégalité ci-dessus, il résulte que

$$\text{si } |t_1 - t_2| \to 0 \text{ alors } \left|(\psi(t_2)-\psi(0))^{1-\gamma} By(t_2) - (\psi(t_1)-\psi(0))^{1-\gamma} By(t_1)\right| \to 0.$$

Des parties (ii) et (iii), il s'ensuit que $B(S)$ est uniformément borné et équicontinu dans $\mathbb{X}$. Alors d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, $B(S)$ est relativement compact.

Par conséquent, $B : S \to \mathbb{X}$ est un opérateur compact. Puisque $B : S \to \mathbb{X}$ est l'opérateur continu et compact, il est complètement continu.

**Étape 3 :** Montrons que $y \in \mathbb{X}$, $y = AyBx \Longrightarrow y \in S$ pour tout $x \in S$.

Soit $y \in \mathbb{X}$ et $x \in S$ tel que $y = AyBx$. En utilisant l'hypothèse (H2) et la bornitude de $f$, pour tout $t \in [0.T]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|(\psi(t)-\psi(0))^{1-\gamma}y(t)\right| \\
&= \left|(\psi(t)-\psi(0))^{1-\gamma}Ay(t)Bx(t)\right| \\
&= \left|(\psi(t)-\psi(0))^{1-\gamma}f(t,y(t))\left\{\frac{y_0(\psi(t)-\psi(0))^{\gamma-1}}{f(0,x(0))}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}g(s,x(s))ds\right\}\right| \\
&\leq |f(t,y(t))|\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,x(0))}\right|+\frac{(\psi(t)-\psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}|g(s,x(s))|ds\right\} \\
&\leq K\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,x(0))}\right|+\frac{(\psi(t)-\psi(0))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}h(s)ds\right\} \\
&\leq K\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,x(0))}\right|+\frac{(\psi(t)-\psi(0))^{\alpha+1-\gamma}\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\right\}.
\end{aligned}$$

Cela donne

$$\|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \leq K\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,x(0))}\right|+\frac{(\psi(T)-\psi(0))^{\alpha+1-\gamma}\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\right\} = R.$$

Cela implique, $y \in S$.

**Étape 4 :** Prouver $\alpha M < 1$ où $M = \sup\left\{\|By\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \ : \ y \in S\right\}$.

De l'inégalité (3.8), on a

$$M = \sup\left\{\|By\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} : y \in S\right\} \leq \left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right| + \frac{\|h\|_\infty(\psi(T)-\psi(0))^{\alpha+1-\gamma}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

De l'inégalité (3.7), on obtient $\alpha = L$. Par conséquent, en utilisant la condition (3.6), on a

$$\alpha M \leq L\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right| + \frac{\|h\|_\infty(\psi(T)-\psi(0))^{\alpha+1-\gamma}}{\Gamma(\alpha+1)}\right\} < 1.$$

Des étapes 1 à 4, il s'ensuit que toutes les conditions du Théorème 1.3 sont remplies. Par conséquent, en appliquant le Théorème 1.3, l'équation d'opérateur $y = AyBy$ a une solution dans $S$, qui agit comme une solution des EDF hybrides (3.1)-(3.2).

□

**Exemple 3.1.** *Considérons le problème de la valeur initiale de $\psi$-Hilfer EDF :*

$$^{H}\mathbb{D}_{0^+}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4};t}\left[\frac{10y(t)}{ty(t)+2}\right] = \frac{1}{13(e^{t^2}+2)}\sin(y(t)), \quad p.p \ \ t \in ]0,1], \tag{3.9}$$

$$(t-0)^{\frac{3}{8}}y(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{15}. \tag{3.10}$$

*En comparant le problème ci-dessus avec le $\psi$-Hilfer EDF (3.1)-(3.2), on obtient*

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{5}{8}, \quad 1-\gamma = \frac{3}{8}, \quad \psi(t) = t, \quad y_0 = \frac{1}{15}, \quad T = 1,$$

$$f(t,y(t)) = \frac{ty(t)+2}{10},$$

*et*

$$g(t,y(t)) = \frac{1}{13(e^{t^2}+2)}\sin(y(t)).$$

*En suite, nous montrons que $y$ vérifient les hypothèses (H1) et (H2) du théorème 3.1. Pour tout $p,q \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a*

$$|f(t,p)-f(t,q)| = \left|\frac{tp+2}{10} - \frac{tq+2}{10}\right| = \frac{t}{10}|p-q| \le \frac{1}{10}|p-q|.$$

*Cela prouve que $f$ satisfait la condition de Lipschitz avec une constante $L = \dfrac{1}{10}$.*

*De plus, pour tout $p \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a*

$$|g(t,p)| = \left|\frac{1}{13(e^{t^2}+2)}\sin(y(t))\right| \le \left|\frac{1}{13(e^{t^2}+2)}\right| \le \frac{1}{13} = h(t).$$

*Donc*

$$L\left\{\left|\frac{y_0}{f(0,y(0))}\right| + \frac{\|h\|_\infty(\psi(T)-\psi(0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right\} = \frac{1}{10}\left\{\frac{1/15}{2/10} + \frac{1/13}{\Gamma(1/2+1)}\right\} < 1.$$

*Ceci implique que la condition (3.6) est vérifiée. Puisque toutes les conditions du théorème 3.1 sont satisfaites, les EDF hybrides (3.9) et (3.10) ont au moins une solution dans l'espace $\mathbb{X}$.*

## 3.2 Un deuxième type de problème

Dans cette section, nous étendons une analyse qualitative du problème des valeurs aux limites (PVL) pour les équations différentielles fractionnaires hybrides non linéaires avec des conditions aux limites (CL) hybrides impliquant une dérivée d'ordre fractionnaire $\psi$-Hilfer.

Ici, nous considérons le EDF hybride de type Hilfer par rapport à $\psi$ et les conditions aux limites hybrides [6] :

$$\begin{cases} {}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\dfrac{y(t)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right) = U(t,y(t)), \quad t \in (a,b], \\ c_1 I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}\left(\dfrac{y(t)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right)\Bigg|_{t=a} + c_2\left(\dfrac{y(y)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right)\Bigg|_{t=b} = d, \end{cases} \tag{3.11}$$

où $0<\alpha<1$, $0 \le \beta \le 1$ et $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$. ${}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}$ et $I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}$ sont le dérivée fractionnaire de Hilfer et l'intégrale fractionnaire de RL par rapport à $\psi$, respectivement, $U, G \in C([a,b]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, $Q \in C([a,b]\times\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\{0\})$ et $c_1, c_2, d \in \mathbb{R}$.

### 3.2.1 Équation intégrale fractionnaire (EIF)

Le résultat à venir donne l'équivalent de la formule de solution pour le problème proposé.

**Lemme 3.5**

Soit $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, avec $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$, et soit $H, Z \in C((a,b], \mathbb{R})$ et $W \in C((a,b], \mathbb{R}\backslash\{0\})$. Alors, la fonction $y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b], \mathbb{R})$ est une solution du problème de valeur limite hybride fractionnaire linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\dfrac{y(t)-Z(t)}{W(t)}\right) = H(t), \quad t \in ]a,b], \\ c_1 I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}\left(\dfrac{y(t)-Z(t)}{W(t)}\right)\Big|_{t=a} + c_2\left(\dfrac{y(t)-Z(t)}{W(t)}\right)\Big|_{t=b} = d, \end{cases} \tag{3.12}$$

si et seulement si $y$ satisfait les équations intégrales fractionnaires :

$$y(t) = W(t)\left(\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b}\left[d - c_2\left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(b)\right] + \left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(t)\right) + Z(t), \tag{3.13}$$

où $\Pi_b = c_1\Gamma(\gamma) + c_2(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1} \neq 0$.

*Démonstration.* . Soit $y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b], \mathbb{R})$ une solution de (3.12). Nous devons prouver que $y$ est aussi une solution de (3.13).

Par définition de $\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b], \mathbb{R})$ et du lemme 2.3, on a

$$I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}y(t) \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b], \mathbb{R}).$$

Maintenant, en appliquant $I_{a^+}^{\alpha;\psi}$ sur la première équation de (3.12) et en utilisant le Théorème 2.1, nous pouvons écrire

$$\frac{y(t)-Z(t)}{W(t)} = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}\left(\frac{y(a)-Z(a)}{W(a)}\right) + \left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(t).$$

Définissons $Y_1 = I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}((y(a)-Z(a))/W(a))$, il s'ensuit que

$$y(t) = W(t)\left(\frac{Y_1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1} + \left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(t)\right) + Z(t). \tag{3.14}$$

Prendre la limite $t \longrightarrow b$, on obtient

$$y(b) = W(b)\left(\frac{Y_1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1} + \left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(b)\right) + Z(b),$$

ce qui implique

$$\frac{y(b)-Z(b)}{W(b)} = \frac{Y_1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1} + \left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(b). \tag{3.15}$$

Pour déterminer la constante $Y_1$, nous utilisons la condition aux limites de (3.12). Il a été suivi de

$$Y_1 = \frac{d}{c_1} - \frac{c_2}{c_1}\left[\frac{Y_1}{\Gamma(\gamma)}(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1} + \left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(b)\right],$$

ce qui implique

$$Y_1 = \frac{\Gamma(\gamma)}{c_1\Gamma(\gamma) + c_2(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1}}\left[d - c_2\left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(b)\right].$$

Alors, (3.14) devient

$$y(t) = W(t)\left(\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b}\left[d - c_2\left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(b)\right] + \left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(t)\right) + Z(t),$$

ce qui montre que la formule (3.13) est satisfaite.

Inversement, soit $y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$ satisfait (3.13) qui peut s'écrire (3.12 ). Dans (3.13), en prenant comme limite $t \longrightarrow a$ et $t \longrightarrow b$ puis en utilisant le lemme 2.3, on obtient

$$c_1 I_{a^+}^{1-\gamma;\psi}\left(\frac{y(t)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right)\Big|_{t=a} + c_2\left(\frac{y(y)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right)\Big|_{t=b} = d,$$

Dans le même contexte, on déduit de (3.13) que

$$\frac{y(t)-Z(t)}{W(t)} = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b}\left[d - c_2\left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(b)\right] + \left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(t). \tag{3.16}$$

En appliquant ${}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}$ de part et d'autre de (3.16). Puis, utilisez le (2.11) et le Théorème 2.2 pour obtenir

$$\begin{aligned}{}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\frac{y(t)-Z(t)}{W(t)}\right) &= \frac{\left({}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}(\psi(s)-\psi(a))^{\gamma-1}\right)(t)}{\Pi_b}\left[d - c_2\left(I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(b)\right] \\ &\quad + \left({}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(t) \\ &= \left({}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi} I_{a^+}^{\alpha;\psi}H(s)\right)(t) \\ &= H(t).\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

### 3.2.2 Existence de solution

Dans cette partie, nous prouvons le théorème d'existence du problème (3.11) dans l'espace pondéré au moyen de la technique du point fixe de Dhage.

**Définition 3.1**

Une fonction $y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$ est dite solution de l'EDF (3.11) si

a) La fonction $\left(\frac{y(t)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right) \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$.

b) $y$ satisfait les équations de (3.11).

Pour prouver l'existence de solution aux EDF hybrides (3.11), nous avons besoin des hypothèses suivantes :

$(A_1)$ Soit $Q : (a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}, G : (a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et $U : (a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues telles que $Q(\cdot,y(\cdot))$, $G(\cdot,y(\cdot)), U(\cdot,y(\cdot)) \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$, pour chaque $y \in \mathcal{C}_{1-\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$.

$(A_2)$ Il existe deux fonctions positives $\mu_Q, \mu_G \in C([a,b],\mathbb{R}^+)$ telles que

$$|Q(\vartheta,v) - Q(t,\bar{v})| \leq \mu_Q|v-\bar{v}|,$$

$$|G(t,v) - G(t,\bar{v})| \leq \mu_G|v-\bar{v}|,$$

pour chaque $v, \bar{v} \in \mathbb{R}$.

$(A_3)$ Il existe deux fonctions $\rho, \sigma \in C([a,b],\mathbb{R})$ telles que

$$|U(t,y)| \leq \rho(t) + \sigma(t)\|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})},$$

pour chaque $(t,y) \in (a,b] \times \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$.

$(A_4)$ Il existe une constante $\mu > 0$ tel que

$$\frac{Q_0 R + G_0}{1 - (\|\mu_Q\| R + \|\mu_G\|)} \leq \mu, \quad \text{et} \quad \|\mu_Q\| R + \|\mu_G\| < 1,$$

où $Q_0 = \max_{t\in[a,b]} \left|(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma} Q(t,0)\right|$, $G_0 = \max_{t\in[a,b]} \left|(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma} G(t,0)\right|$ et

$$R = \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b} d + \left(\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1}|c_2|}{\Pi_b} + 1\right) \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}|c_2|}{\Gamma(\alpha+1)} (\|\rho\| + \|\sigma\|\mu). \tag{3.17}$$

Comme résultat du lemme 3.5, nous présentons le lemme suivante :

**Lemme 3.6**

Soit $0 < \alpha < 1, \ 0 \leq \beta \leq 1$, avec $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$ et $p : ]a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continus. Alors, l'hybride fractionnaire non linéaire (3.11) est équivalent à

$$\begin{aligned} y(t) &= G(t,y(t)) \\ &\quad + Q(t,y(t)) \left[\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b} \left(d - \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \psi'(s)(\psi(b)-\psi(s))^{\alpha} U(s,y(s))ds\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha} U(s,y(s))ds\right]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

**Théorème 3.2.**

Supposons que $(A_1) - (A_4)$ soit valide. Alors, le problème (3.11) admet au moins une solution dans $\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$.

*Démonstration.* Soit

$$\Omega_\mu = \left\{ y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R}) \ : \ \|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \leq \mu \right\}.$$

Évidemment, $\Omega_\mu$ est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de $\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$.

Définir les opérateurs $T_1, T_2 : \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$ et $T_3 : \Omega_\mu \longrightarrow \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$ par

$$T_1 y(t) = Q(t,y(t)), \quad t \in ]a,b],$$

$$T_2 y(t) = G(t,y(t)), \quad t \in ]a,b],$$

$$T_3 y(t) = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b} \left(d - \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \psi'(s)(\psi(b)-\psi(s))^{\alpha} U(s,y(s))ds\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha} U(s,y(s))ds, \quad t \in ]a,b].$$

En suite, nous pouvons exprimer l'équation (3.18) comme suit :

$$y(t) = T_2 y(t) + T_1 y(t) \cdot T_3 y(t), \quad t \in (a, b]. \tag{3.19}$$

Maintenant, nous allons montrer que $T_1, T_2$ et $T_3$ répondent à toutes les exigences du théorème 1.4. Cela sera accompli dans une série d'étapes suivantes.

**Étape 1.** $T_1, T_2$ est Lipschitzien on $\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a, b], \mathbb{R})$.

Soit $y, \omega \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a, b], \mathbb{R})$ et $t \in (a, b]$. Alors, par $(A_2)$, on a

$$\begin{aligned}
\|T_1 y - T_1 \omega\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} &= \sup_{t\in[a,b]} \left| [\psi(t) - \psi(a)]^{1-\gamma} (T_1 y(t) - T_1 \omega(t)) \right| \\
&= \sup_{t\in[a,b]} [\psi(t) - \psi(a)]^{1-\gamma} |Q(t, y(t)) - Q(t, \omega(t))| \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]} [\psi(t) - \psi(a)]^{1-\gamma} \mu_Q(t) |y(t) - \omega(t)| \\
&\leq \|\mu_Q\| \, \|y - \omega\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $T_1$ est lipschitzien sur $\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a, b], \mathbb{R})$ avec la constante de Lipschitz $\|\mu_Q\|$.

De même, nous concluons que $T_2$ est Lipschitzien sur $\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a, b], \mathbb{R})$ ) avec la constante de Lipschitz $\|\mu_G\|$, i.e.,

$$\|T_2 y - T_2 \omega\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \leq \|\mu_G\| \, \|y - \omega\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}.$$

**Étape 2.** $T_3$ est complètement continue.

i) Nous montrons que $T_3$ est continue.

Soit $\{y_n\}$ est une suite telle que $y_n \longrightarrow y$ dans $\Omega_\mu$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\longrightarrow\infty} \left| \, [\psi(t) - \psi(a)]^{1-\gamma} \left( T_3 y_n(t) - T_3 y(t) \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{\Pi_b} \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \psi'(s)(\psi(b) - \psi(s))^\alpha \lim_{n\longrightarrow\infty} |U(s, y_n(s)) - U(s, y(s))| \, ds \\
&\quad + \frac{(\psi(t) - \psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^\alpha \lim_{n\longrightarrow\infty} |U(s, y_n(s)) - U(s, y(s))| \, ds \\
&= \frac{1}{\Pi_b} \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \psi'(s)(\psi(b) - \psi(s))^\alpha (\psi(s) - \psi(a))^{\gamma-1} \\
&\quad \times \lim_{n\longrightarrow\infty} (\psi(s) - \psi(a))^{1-\gamma} |U(s, y_n(s)) - U(s, y(s))| \, ds \\
&\quad + \frac{(\psi(t) - \psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^\alpha (\psi(s) - \psi(a))^{\gamma-1} \\
&\quad \times \lim_{n\longrightarrow\infty} (\psi(s) - \psi(a))^{1-\gamma} |U(s, y_n(s)) - U(s, y(s))| \, ds.
\end{aligned}$$

Puisque $U(\cdot, y(\cdot))$ est une fonction continue avec $U(\cdot, y(\cdot)) \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left|[\psi(t)-\psi(a)]^{1-\gamma}\left(T_3y_n(t)-T_3y(t)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{\Pi_b}\frac{c_2}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{\psi'(s)(\psi(b)-\psi(s))^{\alpha}}{(\psi(s)-\psi(a))^{1-\gamma}}\lim_{n\longrightarrow\infty}\|U(\cdot,y_n(\cdot))-U(\cdot,y(\cdot))\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}ds \\
&\quad+\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}}{(\psi(s)-\psi(a))^{1-\gamma}}\lim_{n\to\infty}\|U(\cdot,y_n(\cdot))-U(\cdot,y(\cdot))\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}ds.
\end{aligned}$$

Puisque $\psi$ est croissant et en utilisant le Lemme 2.1, on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left|[\psi(t)-\psi(a)]^{1-\gamma}\left(T_3y_n(t)-T_3y(t)\right)\right| \\
&\leq \left(\frac{c_2}{\Pi_b}+(\psi(b)-\psi(a))^{1-\gamma}\right)\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha+\gamma-1} \\
&\quad\times\lim_{n\longrightarrow\infty}\|U(\cdot,y_n(\cdot))-U(\cdot,y(\cdot))\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}\longrightarrow 0 \ \text{ comme } \ n\longrightarrow\infty.
\end{aligned}$$

Cela montre que $T_3$ est continu sur $\Omega_\mu$.

ii) Nous montrons que $T_3(\Omega_\mu)$ est uniformément borné dans $\Omega_\mu$.

Pour tout $y\in\Omega_\mu$, on a

$$\begin{aligned}
\|T_3y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} &= \sup_{t\in[a,b]}\left|[\psi(t)-\psi(a)]^{1-\gamma}T_3y(t)\right| \\
&\leq \frac{d}{\Pi_b}+\left|\frac{c_2}{\Pi_b}\right|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\psi'(s)(\psi(b)-\psi(s))^{\alpha}\sup_{t\in[a,b]}|U(s,y(s))|ds \\
&\quad+\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^9\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\sup_{t\in[a,b]}|U(s,y(s))|ds \\
&\leq \frac{d}{\Pi_b}+\left|\frac{c_2}{\Pi_b}\right|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\psi'(s)(\psi(b)-\psi(s))^{\alpha}\sup_{t\in[a,b]}\left(\rho(s)+\sigma(s)\|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}\right)ds \\
&\quad+\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha}\sup_{t\in[a,b]}\left(\rho(s)+\sigma(s)\|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}\right)ds \\
&\leq \frac{d}{\Pi_b}+\left|\frac{c_2}{\Pi_b}\right|\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\|\rho\|+\|\sigma\|\|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}\right) \\
&\quad+\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\|\rho\|+\|\sigma\|\|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}\right) \\
&\leq \frac{d}{\Pi_b}+\left[\left|\frac{c_2}{\Pi_b}\right|(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}+(\psi(b)-\psi(a))^{1}\right]\frac{(\|\rho\|+\|\sigma\|\mu)}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Par (3.17), alors $\|T_3y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}\leq R$ pour chaque $y\in\Omega_\mu$.

iii) Nous prouvons que $T_3(\Omega_\mu)$ est un ensemble équicontinu dans $\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$.

Soit $y \in \Omega_\mu$ et $t_1, t_2 \in (a,b]$ avec $t_1 < t_2$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\Big|[\psi(t_2)-\psi(a)]^{1-\gamma}\, T_3y(t_2) - [\psi(t_1)-\psi(a)]^{1-\gamma}\, T_3y(t_1)\Big| \\
&= \Big|\frac{(\psi(t_2)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_2}\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha}U(s,y(s))ds \\
&\quad - \frac{(\psi(t_1)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}\psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha}U(s,y(s))ds\Big| \\
&= \Big|\frac{(\psi(t_2)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_2}\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha}[\psi(s)-\psi(a)]^{\gamma-1}\Big|[\psi(s)-\psi(a)]^{1-\gamma}U(s,y(s))\Big|ds \\
&\quad - \frac{(\psi(t_1)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}\psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha}[\psi(s)-\psi(a)]^{\gamma-1}\Big|[\psi(s)-\psi(a)]^{1-\gamma}U(s,y(s))\Big|ds\Big|.
\end{aligned}$$

Puisque $U(\cdot, y(\cdot)) \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$ pour chaque $y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$ et $[\psi(\cdot)-\psi(a)]^{1-\gamma}U(\cdot,y(\cdot)) \in C([a,b],\mathbb{R})$ il existe $\xi \in \mathbb{R}$ telle que

$$\Big|[\psi(s)-\psi(a)]^{1-\gamma}U(s,y(s))\Big| \leq \xi, \quad \text{pour tout} \ \ t \in (a,b]. \tag{3.20}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\Big|[\psi(t_2)-\psi(a)]^{1-\gamma}\, T_3y(t_2) - [\psi(t_1)-\psi(a)]^{1-\gamma}\, T_3y(t_1)\Big| \\
&\leq \Big|\frac{(\psi(t_2)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\xi\int_a^{t_2}\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\alpha}[\psi(s)-\psi(a)]^{\gamma-1}ds \\
&\quad - \frac{(\psi(t_1)-\psi(a))^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\xi\int_a^{t_1}\psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(s))^{\alpha}[\psi(s)-\psi(a)]^{\gamma-1}ds\Big|. \\
&= \Big|(\psi(t_2)-\psi(a))^{1-\gamma}\frac{\xi\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}\,[\psi(t_2)-\psi(a)]^{\alpha+\gamma-1} \\
&\quad - (\psi(t_1)-\psi(a))^{1-\gamma}\frac{\xi\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}\,[\psi(t_1)-\psi(a)]^{\alpha+\gamma-1}\Big| \\
&= \Big|\frac{\xi\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}\left([\psi(t_2)-\psi(a)]^{\alpha} - [\psi(t_1)-\psi(a)]^{\alpha}\right)\Big|.
\end{aligned}$$

La continuité de $\psi$ montre que

$$\Big|[\psi(t_2)-\psi(a)]^{1-\gamma}\, T_3y(t_2) - [\psi(t_1)-\psi(a)]^{1-\gamma}\, T_3y(t_1)\Big| \longrightarrow 0 \text{ comme } |t_2-t_1| \longrightarrow 0.$$

Ceci confirme que $T_3(\Omega_\mu)$ est un ensemble équicontinu dans $\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, $T_3$ est complètement continu.

**Étape 3.** $T_1yT_3\omega + T_2y \in \Omega_\mu$ pour $y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$ et $\omega \in \Omega_\mu$.

Soit $y \in \mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R})$, et $\omega \in \Omega_\mu$ telle que $y = T_1yT_3\omega + T_2y$. Alors,

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq |T_1y(t)||T_3\omega(t)| + |T_2y(t)| \\
&\leq (|Q(t,y(t)) - Q(t,0)| + |Q(t,0)|) \\
&\quad \times \left( \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b} d + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b} \frac{|c_2|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \psi'(s)(\psi(b)-\psi(s))^\alpha |U(s,\omega(s))| ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^\alpha |U(s,\omega(s))| ds \right) + |G(t,y(t)) - G(t,0)| + |G(t,0)| \\
&\leq (\mu_Q(t)|y(t)| + |Q(t,0)|) \\
&\quad \times \left[ \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b} d + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b} |c_2| \left( I_{a^+}^{\alpha;\psi} \left( \rho(s) + \sigma(s) \|\omega\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma,\psi}} \right) \right] (b) \right. \\
&\quad \left. + I_{a^+}^{\alpha;\psi} \left( \rho(s) + \sigma(s) \|\omega\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \right) \right) (t) + \mu_G(t)|y(t)| + |G(t,0)| \\
&\leq (\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1} \left( \|\mu_Q\| \, \|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} + Q_0 \right) \\
&\quad \times \left[ \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b} d + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b} \frac{|c_2|(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left( \|\rho\| + \|\sigma\| \|\omega\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \|\rho\| + \|\sigma\| \|\omega\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma,\psi}} \right) \frac{(\psi(t)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] + (\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1} \left( \|\mu_G\| \, \|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} + G_0 \right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\|x\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} \leq \left( \|\mu_Q\| \|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} + Q_0 \right) R + \|\mu_G\| \|y\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}} + G_0,$$

ce qui implique

$$\|x\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma,\psi}} \leq \frac{Q_0 R + G_0}{1 - (\|\mu_Q\| R + \|\mu_G\|)} \leq \mu.$$

**Étape 4.** La condition (4) du théorème 1.4 est vérifiée. $k_1 M + k_2 < 1$.

À partir de l'étape 2 et (3.17), on obtient

$$\begin{aligned}
M &= \|T_3(\Omega_\mu)\| = \sup_{y \in \Omega_\mu} \left\{ \sup_{y \in [a,b]} |T_3 y(t)| \right\} \\
&\leq \left( \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Pi_b} d + \left( \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1}|c_2|}{\Pi_b} + 1 \right) \frac{(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|\rho\| + \|\sigma\| \mu) \right) \\
&= R.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\mu_Q\| M + \|\mu_G\| \leq \|\mu_Q\| R + \|\mu_G\| < 1,$$

où $k_1 = \|\mu_Q\|$ et $k_2 = \|\mu_z\|$.

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 1.4 sont vérifiées, donc l'équation $y = T_1yT_3y + T_2y$ admet une solution dans $\Omega_\mu$. Par conséquent, le problème (3.11) admet une solution sur $[a,b]$. □

**Exemple 3.2.** *Dans cette partie, nous construisons un exemple pour expliquer les principaux résultats.*
*Considérons l'EDF hybride $\psi$-Hilfer avec des conditions aux limites hybrides :*

$$\begin{cases} {}^H\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\psi}\left(\dfrac{y(t)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right)=U(t,y(t)), \quad t\in(0,1], \\ c_1\mathcal{I}_{a^+}^{1-\gamma;\psi}\left(\dfrac{y(t)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right)\Big|_{t=a}+c_2\left(\dfrac{y(y)-G(t,y(t))}{Q(t,y(t))}\right)\Big|_{t=b}=d. \end{cases} \tag{3.21}$$

*Définir $G :]0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, Q :]0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\backslash\{0\}$, et $U :]0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par*

$$G(t,y(t))=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\left(\frac{y(t)}{1+y(t)}+e^{-t}\right),$$

$$Q(t,y(t))=\left(1+\frac{\sin t}{12}y(y)\right),$$

$$U(t,y(t))=\frac{\psi(t)-\psi(0)}{100}\left(\frac{y(t)}{1+y(t)}+2\right).$$

*Il est facile de montrer que pour tout $y,\omega\in\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([0,1],\mathbb{R})$, on a*

$$|G(t,y(t))-G(t,\omega(t))|\leq\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{3}\right)|y(t)-\omega(t)|,$$

$$|Q(t,y(t))-Q(t,\omega(t))|\leq\frac{\sin t}{12}|y(t)-\omega(t)|,$$

*et pour chaque $y\in\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}([0,1],\mathbb{R})$, on obtient*

$$\begin{aligned} |U(t,y(t))| &\leq \frac{\psi(t)-\psi(0)}{100}|y(t)|+\frac{\psi(t)-\psi(0)}{50} \\ &\leq \frac{(\psi(t)-\psi(0))^\gamma}{100}\|y(t)\|_{\mathcal{C}_{1-\gamma;\psi}}+\frac{\psi(t)-\psi(0)}{50}. \end{aligned}$$

*Par conséquent, les hypothèses $(A_1)-(A_3)$ sont vraies avec*

$$\mu_Q(t)=\frac{\sin t}{12}, \quad \mu_G=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{3}\right), \quad \rho(t)=\frac{[\psi(t)-\psi(0)]^\gamma}{100}, \quad \text{et} \quad \sigma(t)=\frac{(\psi(t)-\psi(0))}{50}.$$

*Alors*

$$\|\mu_Q\|=\frac{1}{12}, \quad \|\mu_G\|=\frac{1}{2}, \quad Q_0=\max_{t\in[0,1]}\left|(\psi(t)-\psi(0))^{1-\gamma}\right|,$$

$$\text{et} \quad G_0=\max_{t\in[0,1]}|\,(\psi(t)-\psi(0))^{1-\gamma}\cos(t/3)e^{-t}\,|.$$

*Par prendre*

$$\theta_1=1/2, \quad \theta_2=0, \quad \theta=1/2, \quad c_1=1/3, \quad c_2=1/3, \quad d=1, \text{ et } \psi(t)=t,$$

*on obtient*

$$\|\rho\|=1/100, \quad \|\sigma\|=1/50, \quad Q_0=1, \quad \text{et} \quad G_0=(1/e)\cos(1/3)\ .$$

*De la condition $(A_4)$,*

$$\|\mu_Q\|R + \|\mu_G\| < 1 \text{ quand } R < 6, \text{ et } \mu \geq \frac{1}{\left(1 - (\frac{1}{12}R + \frac{1}{2})\right)\left(R + \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}.$$

*Aussi,* $\Pi_b \neq 0$, *il résulte de (3.17) que*

$$R = (3/(1+\sqrt{\pi})) + ((1/(1+\sqrt{\pi})) + 1)((1/50\sqrt{\pi}) + (1/25\sqrt{\pi})\mu) < 6.$$

*Ainsi*

$$\mu < (2 - 149\sqrt{\pi} - 300\pi)/(-4 - 2\sqrt{\pi}).$$

*En utilisant le programme MATLAB,* $\mu$ *satisfait l'inégalité* $64.17 < \mu < 159.65$.

*Par conséquent, toutes les hypothèses du théorème 3.2 sont satisfaites, donc le problème (3.21) a au moins une solution sur* $]0,1]$.

**Résumé**

Cette mémoire porte sur l'étude d'une nouvelle dérivée fractionnaire par rapport à une autre fonction, la dérivée fractionnelle dite $\psi$-Hilfer. Nous discutons également de certaines propriétés et des résultats importants de cette dérivée fractionnaire. En ce sens, nous développons et étendons une analyse qualitative pour deux classes de problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires hybrides non linéaires avec des conditions aux limites hybrides impliquant une dérivée d'ordre fractionnaire $\psi$-Hilfer introduite.



**Mots clés :** Calcul fractionnaire, dérivée fractionnaire $\psi$-Hilfer, problème aux limites.



**Abstract**

This thesis deals with the study of a new fractional derivative with respect to another function, the so-called $\psi$-Hilfer fractional derivative. As well as we discuss some properties and important results of this fractional derivative. In this sense, we develop and extend a qualitative analysis for two classes of boundary value problems for nonlinear hybrid fractional differential equations with hybrid boundary conditions involving a $\psi$-Hilfer fractional order derivative introduced.



**Keywords:** Fractional calculus, $\psi$-Hilfer fractional derivative, boundary value problem.

# Bibliographie


[1] J V , Sousa and de Oliveira EC . On the $\psi$-Hilfer fractional derivative. Commun Nonlinear Sci Numer Simul vol. 60, pp. 72-91, 2018..

[2] Kilbas AA , Srivastava HM , Trujillo JJ . Theory and applications of fractional differential equations. North–Holland mathematics studies, Vol. 207. Amsterdam : Elsevier ; 2006 .

[3] B. C. Dhage, On $\alpha$-condensing mappings in Banach algebras, Math. Student, 63(1)(1994), 146-152.

[4] Samko SG , Kilbas AA , Marichev . Fractional integrals and derivatives. Theory and applications, vol. 1993. Yverdon : Gordon and Breach ; 1993

[5] Kucche, K. & Mali, A. On the nonlinear $\psi$-Hilfer hybrid fractional differential equations,(2020), arXiv preprint. *ArXiv Preprint ArXiv :2008.06306*.

[6] Ali, S., Albalawi, W., Abdo, M., Zahran, H. & Abdel-Aty, A. Theory of Fractional Hybrid Problems in the Frame of $\psi$-Hilfer Fractional Operators. *Journal Of Function Spaces.* **2022** (2022)

[7] B. C. Dhage, A fixed point theorem in Banach algebras with applications to functional integral equations, Kyungpook National University, vol. 44, pp. 145–155, 2004.

[8] Nawfal El Hage hassan, Topologie générale et espaces normés, Donod, 2011, ISBN 978-2-100-56948-9.