



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES  
Département de Mathématiques



# MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

**Spécialité :**

« Mathématiques »

**Option :**

« Analyse Fonctionnelle et Équations Différentielles »

**Présenté Par :**

LACENE Nesrine et ZOUKH Soulaf

**Sous L'intitulé :**

---

## Résolution de quelques EDP paraboliques par la méthode des différences finies

---

Soutenu publiquement le 20 / 06 / 2023  
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr LARABI Abderrahmane

MCA Université Tiaret

Président

Mr BENAÏSSA Abdelmalek

MCB Université Tiaret

Encadreur

Mr ELKHIRI Laid

MCB Université Tiaret

Examineur

Année universitaire :2022/2023

# Dédicaces I

Je dédie ce mémoire à la couronne de ma tête et à la lumière de mon chemin mon cher père, à la prunelle de mes yeux et au secret de ma réussite ma chère mère, à ceux qui me soutiennent et me relèvent la tête mes frères "Mohamed Al-Amin", "Sarah" et "Asmaa" et à tous les membres de ma famille, "Lacene" et "Sulli".

Aux professeurs du Département de Mathématiques, chacun en son nom.

À qui j'ai partagé le travail, ma collègue "Zoukh Soulaf".

À ceux qui me sont fraternels et m'ont accompagné sur le chemin du succès, "mes chers amis".

À tous ceux que ma plume a oubliés, et que mon cœur n'a pas oubliés, à tous ceux qui m'ont connue.

## Dédicaces II

À celle qui a été patiente avec mon éducation et a travaillé dur pour moi afin de voir le fruit de ses efforts. À qui je préfère à moi-même, ma chère mère, que Dieu la protège.

À celui qui ne m'a rien épargné dans sa vie, à mon cher père, que Dieu prolonge sa vie.

À mes professeurs du primaire à l'Université.

À mes frères, à tous les membres de ma famille et à mes chers amis.

À tous ceux que j'ai rencontrés dans ma vie universitaire et j'ai été patiente avec eux contre vents et marées, à tous ceux qui me connaissent.

Nous marchons sur les chemins de la vie, et restent ceux qui contrôlent nos esprits sur chaque chemin que nous empruntons.

# Remerciements

En tout premier lieu, nous remercions ALLAH, tout puissant, de nous avoir données la force ainsi que le courage pour dépasser toutes les difficultés.

Ensuite :

Nous tenons à remercier notre rapporteur de mémoire le Docteur **Benaïssa Abdelmalek** qui nous a aidées et soutenues le long de ce travail, qu'il trouve ici l'expression de notre profonde reconnaissance.

Nous remercions le Docteur **Larabi Abderrahmane Reda** qui nous a honorées en acceptant de présider ce jury.

Ainsi que le Docteur **Elkhiri Laid** qui a consacré son précieux temps en lisant ce mémoire et qui nous a données des remarques précieuses.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités sur les équations aux dérivées partielles</b>	<b>8</b>
1.1	Classifications des edp semi-linéaires du second ordre sur le plan . . . . .	8
1.2	Courbes caractéristiques et problème de Cauchy . . . . .	9
1.3	Réduction à la forme standard . . . . .	10
1.3.1	Réduction à la forme standard d'équations hyperboliques . . . . .	11
1.3.2	Réduction à la forme standard d'équations paraboliques . . . . .	13
1.4	Étude de l'équation de la chaleur en dimension 1 . . . . .	14
1.4.1	Principe de maximum . . . . .	14
1.4.2	Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ . . . . .	15
1.4.3	Équation avec second membre sur $\mathbb{R}$ . . . . .	16
1.4.4	Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+$ . . . . .	16
1.5	Étude de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour $0 \leq x \leq L$ . . . . .	17
1.5.1	problème régulier élémentaire . . . . .	17
1.5.2	Étude de $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ; $v(0, t) = A$ ; $v(L, t) = B$ ; $v(x, 0) = f(x)$ . . . . .	18
1.5.3	Étude de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \psi(x, t)$ ; $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ; $u(x, 0) = f(x)$ . . . . .	18
1.5.4	Étude De $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \psi(x, t)$ ; $w(0, t) = \alpha(t)$ , $w(L, t) = \beta(t)$ ; $w(x, 0) = f(x)$ . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Présentation de la méthode des différences finies</b>	<b>20</b>
2.1	Approximation des dérivées . . . . .	20
2.1.1	Approximation des dérivées d'ordre 1 . . . . .	20
2.1.2	Approximation des dérivées d'ordre 2 . . . . .	20
2.1.3	consistance . . . . .	20
2.2	Approximation par différence finie du problème de Poisson 1D . . . . .	22
2.2.1	Présentation de la méthode . . . . .	22
2.2.2	Convergence . . . . .	23
2.2.3	Étude d'un exemple . . . . .	24
2.3	Approximation par différences finis du problème de Poisson 2D . . . . .	27
2.3.1	Schéma à cinq points pour l'opérateur de Laplace . . . . .	27
2.3.2	Écriture matricielle . . . . .	28

2.3.3	Convergence . . . . .	31
2.3.4	Étude d'un exemple . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Application à la résolution des equations aux dérivées partielles paraboliques</b>	<b>36</b>
3.1	Résolution de l'équation de la chaleur 1D par différences finies . . . . .	36
3.1.1	La méthode $\theta$ schéma . . . . .	36
3.1.2	Consistance, stabilité et Convergence . . . . .	38
3.1.3	Étude d'un exemple . . . . .	40
3.2	Résolution de l'équation de la chaleur 2D par différences finies . . . . .	43
3.2.1	Présentation de l'équation de la chaleur sur un domaine rectangle du plan . . . . .	43
3.2.2	La méthode $\theta$ -schéma . . . . .	44
3.2.3	Consistance, stabilité et Convergence . . . . .	45
3.2.4	Étude d'un exemple . . . . .	46

# Introduction

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles occupe une place très importante en ingénierie, en finance et en mathématiques appliquées.

Il existe plusieurs techniques de résolution numérique des équations aux dérivées partielles tel que les différences finies, les éléments finis, les volumes finis et les méthodes spectrales.

Dans ce travail, on se propose d'appliquer la méthode des différences finies pour résoudre quelques problèmes d'évolution linéaires paraboliques.

Dans le premier chapitre, on donne quelques notions fondamentales sur les équations aux dérivées partielles semi-linéaires d'ordre 2 sur le plan, on rappelle leurs classification et on introduit la notion de courbes caractéristiques qui permettent la réduction au forme standard de ces EDP. On s'intéresse en particulier à l'étude de l'équation de la chaleur monodimensionnelle.

Dans le deuxième chapitre, on présente la méthode des différences finies en l'appliquant à la résolution de l'équation de poisson sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{R}^2$ . Cette dernière peut être considérée comme équation de la chaleur stationnaire sur le plan. On donne les résultats sur la consistance qui est une condition suffisante de convergence pour les problèmes linéaires stationnaires bien posés. On termine ce chapitre par la simulation numérique de deux problèmes stationnaires en utilisant l'environnement MATLAB.

Dans le dernier chapitre, on applique la méthodes des différences finies à la résolution de l'équation de la chaleur sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{R}^2$ . On présente le  $\theta$ -schéma et on donne les résultats sur la consistance, la stabilité au sens de Von Neumann et la convergence en se basant sur le théorème d'équivalence de Lax. A la fin de ce chapitre, en utilisant l'environnement MATLAB on simule numériquement à l'aide de la méthode des différences finies l'évolution de la chaleur sur une barre limitée et sur une plaque limitée sachant l'état initial.

# Chapitre 1

## Généralités sur les équations aux dérivées partielles

### 1.1 Classifications des edp semi-linéaires du second ordre sur le plan

On commence cette section par donner quelques définitions voir [1]

**Définition 1.1.1.** On appelle équations aux dérivées partielles semi-linéaire du second ordre sur  $\mathbb{R}^2$  toute équation qui s'écrit sous la forme :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

où  $a, b, c$  sont trois fonctions définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $F$  une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^5$

**Définition 1.1.2.** On pose  $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$  alors on a les définitions suivantes :

1. Si  $\Delta(x, y) > 0$  sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  alors l'équation (1.1) est dite hyperbolique sur  $\Omega$
2. Si  $\Delta(x, y) = 0$  sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  alors l'équation (1.1) est dite parabolique sur  $\Omega$
3. Si  $\Delta(x, y) < 0$  sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  alors l'équation (1.1) est dite elliptique sur  $\Omega$

**Exemple 1.1.1.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , considérons l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

On a  $a(x, y) = 1$ ,  $b(x, y) = 0$  et  $c(x, y) = -\alpha^2$  donc  $\Delta(x, y) = \alpha^2 > 0$  sur  $\mathbb{R}^2$  donc l'équation (1.2) est hyperbolique sur  $\mathbb{R}^2$  elle est connue en physique sous le nom d'équation des ondes.



**Exemple 1.1.2.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , considérons l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

On a  $a(x, y) = 0$ ,  $b(x, y) = 0$  et  $c(x, y) = -\lambda^2$  donc  $\Delta(x, y) = 0$  sur  $\mathbb{R}^2$  donc l'équation (1.3) est parabolique sur  $\mathbb{R}^2$  elle est connue en physique sous le nom d'équation de la chaleur.

**Exemple 1.1.3.** Considérons l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.4)$$

On a  $a(x, y) = 1$ ,  $b(x, y) = 0$  et  $c(x, y) = 1$  donc  $\Delta(x, y) = -1 < 0$  sur  $\mathbb{R}^2$  donc l'équation (1.4) est elliptique sur  $\mathbb{R}^2$  elle est connue en physique sous le nom d'équation de Laplace.

## 1.2 Courbes caractéristiques et problème de Cauchy

**Définition 1.2.1.** On appelle problème de Cauchy relativement à une courbe régulière  $\gamma$  :  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  le système suivant :

$$\begin{cases} a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ u(\phi(t), \psi(t)) = u_0(t) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\phi(t), \psi(t)) = v_0(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $u_0, v_0$  sont deux fonctions données.

**Définition 1.2.2.** Les courbes caractéristique du problème (1.1) sont les courbes régulières de  $\mathbb{R}^2$   $\gamma : x = \phi(t), y = \psi(t)$  qui annulent

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \begin{vmatrix} \phi'(t) & \psi'(t) & 0 \\ 0 & \phi'(t) & \psi'(t) \\ a(\phi(t), \psi(t)) & 2b(\phi(t), \psi(t)) & c(\phi(t), \psi(t)) \end{vmatrix} \\ &= c(\phi(t), \psi(t))[\phi'(t)]^2 - 2b(\phi(t), \psi(t))[\phi'(t)\psi'(t)] + a(\phi(t), \psi(t))[\psi'(t)]^2 \end{aligned}$$

**Définition 1.2.3.** Une courbe régulière de  $\mathbb{R}^2$   $\gamma : x = \phi(t), y = \psi(t)$  n'est pas caractéristique en aucun point si pour tout  $t$  de son domaine de définition on a

$$\Delta(t) = c(\phi(t), \psi(t))[\phi'(t)]^2 - 2b(\phi(t), \psi(t))[\phi'(t)\psi'(t)] + a(\phi(t), \psi(t))[\psi'(t)]^2 \neq 0$$

Le théorème suivant caractérise les courbes caractéristiques de l'équation (1.1) :

**Théorème 1.2.1.** 1. Si la fonction  $a$  n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de l'équation (1.1) sont les solutions de l'équation différentielle :

$$a(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x, y) \frac{dy}{dx} + c(x, y) = 0 \quad (1.6)$$

2. Si la fonction  $c$  n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de l'équation (1.1) sont les solutions de l'équation différentielle :

$$c(x, y) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b(x, y) \frac{dy}{dx} + a(x, y) = 0 \quad (1.7)$$

3. Si les fonctions  $a$  et  $c$  sont identiquement nulle ; les courbes caractéristiques de l'équation (1.1) sont les droites  $x = cte$  et les droites  $y = Cte$ .

On donne quelques exemples

**Exemple 1.2.1.** Soit l'équation

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C$$

On a  $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = x^2 y^2 \geq 0$ , donc cette équation est hyperbolique sur  $\mathbb{R}^2 - \{x = 0 \vee y = 0\}$ .

Les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle

$$y^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - x^2 = 0.$$

Un simple calcul nous donne deux familles de courbes :

$$x^2 + y^2 = C_1 \text{ et } x^2 - y^2 = C_2 \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

**Exemple 1.2.2.** soit

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

On a  $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$ , donc cette équation est parabolique sur  $\mathbb{R}^2$ .

Les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle

$$x^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2xy \left( \frac{dy}{dx} \right) + y^2 = 0.$$

Un simple calcul nous donne les courbes  $y = Cx$  où  $C \in \mathbb{R}$

## 1.3 Réduction à la forme standard

On commence cette section par la proposition suivante :

**Proposition 1.3.1.** Le type hyperbolique, parabolique ou elliptique de l'équation (1.1) reste invariant après un changement de système de coordonnées.

*Démonstration.* Soit le changement de variable  $X = \phi(x, y)$ ,  $Y = \psi(x, y)$  tel que :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \neq 0$$

On pose  $u(x, y) = \tilde{u}(X, Y)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \left( \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} A(x, y) &= a(x, y) \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + 2b(x, y) \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + c(x, y) \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \\ B(x, y) &= a(x, y) \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + b(x, y) \left\{ \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \right\} + c(x, y) \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} \\ C(x, y) &= a(x, y) \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + b(x, y) \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + c(x, y) \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

Un simple calcul nous donne

$$B^2 - AC = J^2(b^2 - ac)$$

ce qui achève la preuve de la proposition. □

### 1.3.1 Réduction à la forme standard d'équations hyperboliques

**Théorème 1.3.1.** Soient  $\phi_1(x, y) = k_1$  et  $\phi_2(x, y) = k_2$  les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation hyperbolique.

En posant  $X_1 = \phi_1(x, y)$  et  $X_2 = \phi_2(x, y)$  cette équation deviendra

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} = G \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}, \tilde{u}, X_1, X_2 \right)$$

Et en posant  $Y_1 = X_1 + X_2$  et  $Y_2 = X_1 - X_2$  elle deviendra

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y_2^2} = H \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y_1}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y_2}, \bar{u}, Y_1, Y_2 \right)$$

**Exemple 1.3.1.** On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin(x) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.8)$$

On a  $a(x, y) = 1$ ,  $b(x, y) = -\cos(x)$  et  $c(x, y) = -\sin^2(x)$ , donc les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle :

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \cos(x) \frac{dy}{dx} - \sin^2(x) = 0$$

donc  $\frac{dy}{dx} = -\cos(x) - 1$  ou  $\frac{dy}{dx} = -\cos(x) + 1$  d'où  
 $y + \sin(x) + x = C_1$  ou  $y + \sin(x) - x = C_2$

On pose

$$\begin{cases} X = y + \sin(x) + x \\ Y = y + \sin(x) - x \end{cases}$$

et  $u(x, y) = \tilde{u}(X, Y)$  Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \cos(x) + 1 & \frac{\partial X}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= \cos(x) - 1 & \frac{\partial Y}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= (\cos(x) + 1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + (\cos(x) - 1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\sin(x) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) + (\cos(x) + 1)^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + (\cos(x) - 1)^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} + 2(\cos^2(x) - 1) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= (\cos(x) + 1) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + (\cos(x) - 1) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} + 2 \cos(x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin(x) \frac{\partial u}{\partial y} = -4 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0$$

Donc la forme standard est

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0$$

En intégrant cette dernière équation on obtient

$$\tilde{u}(X, Y) = F(X) + G(Y)$$

D'où la solution générale de l'équation (1.8) est

$$u(x, y) = F(y + \sin(x) + x) + G(y + \sin(x) - x)$$

Où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions arbitraires.

### 1.3.2 Réduction à la forme standard d'équations paraboliques

**Théorème 1.3.2.** Soient  $\phi(x, y) = c$  la famille de courbes caractéristiques d'une équation parabolique.

En posant  $X_1 = \phi(x, y)$  et  $X_2$  une variable indépendante de  $X_1$  c-à-d  $\frac{D(X_1, X_2)}{D(x, y)} \neq 0$  alors cette équation deviendra

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_2^2} = G\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}, \tilde{u}, X_1, X_2\right)$$

**Exemple 1.3.2.** On considère l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.9)$$

On a  $a(x, y) = x^2$ ,  $b(x, y) = xy$  et  $c(x, y) = y^2$ , donc les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle :

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

On trouve une seule famille de courbes caractéristiques  $\frac{y}{x} = C$

On pose

$$\begin{cases} X = \frac{y}{x} \\ Y = y \end{cases}$$

et  $u(x, y) = \tilde{u}(X, Y)$  Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} = -\frac{X}{Y} & \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{1}{x} = \frac{X}{Y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial Y}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{X^2}{Y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{X}{Y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{X^4}{Y^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + 2\frac{X^3}{Y^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{X^2}{Y^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} + 2\frac{X}{Y} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{X^3}{Y^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} - \frac{X^2}{Y^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} - \frac{X^2}{Y} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X \partial Y}\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Y^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} = 0$$

Donc la forme standard est

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} = 0$$

En intégrant cette dernière équation on obtient

$$\tilde{u}(X, Y) = YF(X) + G(X)$$

D'où la solution générale de l'équation (1.9) est

$$u(x, y) = yF\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right)$$

Où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions arbitraires.

## 1.4 Étude de l'équation de la chaleur en dimension 1

### 1.4.1 Principe de maximum

les solutions de l'équation  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  dans le rectangle  $0 \leq t \leq T$ ,  $a \leq x \leq b$  ne peuvent atteindre leur extremum (maximum ou minimum) que pour  $t = 0$  ou  $x = a$  ou  $x = b$ . Ceci implique de nombreuses propriétés et permet d'établir l'unicité des solutions dans un grand nombre de situation voir [2].

#### Lemme de positivité

**Lemme 1.4.1.** Soit  $F$  le rectangle fermé  $0 \leq t \leq T$ ,  $a \leq x \leq b$ . Soit  $\Gamma$  la réunion des trois segments :

$$t = 0, a \leq x \leq b; \quad x = a, 0 \leq t \leq T \quad \text{et} \quad x = b, 0 \leq t \leq T.$$

Désignons par  $u$  une solution de  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  dans  $a < x < b$   $0 < t \leq T$  c-à-d  $F \setminus \Gamma$ . On suppose que  $u$  est continue sur  $F$ .  
Si  $u(x, t) \geq 0$  sur  $\Gamma$  alors  $u(x, t) \geq 0$  sur  $F$ .

### Principe du maximum

**Théorème 1.4.1.** 1. Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions de  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  dans  $F \setminus \Gamma$ , si  $u_1 \leq u_2$  sur  $\Gamma$  alors  $u_1 \leq u_2$  sur  $F$ .

2. Les extrémums d'une solution  $u$  sont atteints sur  $\Gamma$  : si  $m \leq u(x, t) \leq M$  sur  $\Gamma$  alors  $m \leq u(x, t) \leq M$  sur  $F$  ; en particulier si  $u(x, t) = 0$  sur  $\Gamma$  alors  $u(x, t) = 0$  sur  $F$

3. si  $u$  n'est pas constante sur  $\Gamma$  alors  $m < u(x, t) < M$  sur  $F$  : les extrémums sont atteints sur  $\Gamma$  et seulement sur  $\Gamma$ .

### Application à l'étude de l'unicité

Le principe du maximum permet souvent d'établir l'unicité de certains problèmes. Nous allons le montrer sur un exemple. On cherche une solution de  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  pour  $a < x < b$  et  $0 < t \leq T$  et  $u$  continue sur  $F$  : On veut que

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) & \forall x \in [a, b] \\ u(a, t) &= f(t) & \forall t \in [0, T] \\ u(b, t) &= g(t) & \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions de ce problème, leur différence est nulle sur  $\Gamma$ , elle est donc nulle sur  $F$  et  $u_1 = u_2$ .

**Remarque 1.4.1.** Le principe du maximum se généralise d'une part à  $\mathbb{R}^n$  et d'autre part aux équations paraboliques autres que celle de la chaleur.

### 1.4.2 Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

Nous chercherons une solution  $u(x, t)$  telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)| dx < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right| dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| dx < \infty$$

de sorte que les fonctions  $x \rightarrow u(x, t)$ ,  $x \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  et  $x \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$  ont pour chaque valeur de  $t$  une transformée de Fourier.

Nous désignerons la transformée de Fourier de  $x \rightarrow u(x, t)$  par  $F(\nu, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\nu x) u(x, t) dx$ .

Nous supposons qu'il existe  $\eta \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\forall t \quad \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right| \leq \eta(x)$  et que  $g \in L^1(\mathbb{R})$ .

L'égalité  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  entraîne donc que  $\frac{\partial F}{\partial t}(\nu, t) + 4\pi^2\nu^2 F(\nu, t) = 0$ .  
 soit  $G(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\nu x)g(x)dx$  alors  $F(\nu, 0) = G(\nu)$  et  $F(\nu, t) = \exp(-4\pi^2\nu^2 t)G(\nu)$ .  
 Or

$$\exp(-4\pi^2\nu^2 t) = F \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) \right]$$

Donc  $u(x, t) = g * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$  pour tout  $t > 0$  fixé.

**Théorème 1.4.2.** Une solution de  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = g(x)$  où  $g \in L^1(\mathbb{R})$  est

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] g(y) dy$$

### 1.4.3 Équation avec second membre sur $\mathbb{R}$

Nous allons procéder de la même façon que dans ce qui précédé nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 1.4.3.** une solution de  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t)$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = g(x)$  est :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] g(y) dy + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4s}\right] h(y, t-s) dy$$

### 1.4.4 Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+$

Le problème de valeur initiale sur  $\mathbb{R}^+$  est un problème où on se fixe  $u(x, 0)$  pour  $x \geq 0$  mais aussi  $u(0, t)$  pour  $t > 0$  Nous allons indiquer trois résultats très simples dont la combinaison permet de résoudre d'autres problèmes.

**Théorème 1.4.4.** une solution de  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  pour  $x > 0$  et  $t > 0$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$  et  $u(0, t) = 0$  est :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(y) \left[ \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right) - \exp\left(\frac{-(x+y)^2}{4t}\right) \right] dy$$

**Définition 1.4.1.** On appelle fonction d'erreur et on note  $erf$  et fonction d'erreur complémentaire et on note  $erfc$  les fonctions définies par :

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-s^2) ds,$$

$$erfc(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \exp(-s^2) ds$$



**Théorème 1.4.5.** Soit  $\varphi$  une fonction "à croissance exponentielle" sur  $\mathbb{R}^+$  (c'est à dire qu'il existe  $K$  et  $M$  telle que  $|\varphi(t)| \leq K \exp(Mt) \quad \forall t$  )

Une solution de  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0 \quad \forall x > 0 \quad \text{et} \quad u(0, t) = \varphi(t)$$

est

$$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{4s}\right) \varphi(t-s) ds$$

**Théorème 1.4.6.** Soit  $g$  une fonction "à croissance exponentielle" sur  $\mathbb{R}^+$ .

Une solution de  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t)$$

est :

$$u(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(s)}{\sqrt{t-s}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-s)}\right] ds = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(t-v)}{\sqrt{v}} \exp\left[-\frac{x^2}{4v}\right] dv$$

## 1.5 Étude de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour $0 \leq x \leq L$

### 1.5.1 problème régulier élémentaire

On cherche une fonction  $u$  telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L \quad t > 0 \tag{1.10}$$

avec

$$u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0 \tag{1.11}$$

et

$$u(x, 0) = f(x) \tag{1.12}$$

Soit  $u(x, t) = X(x)T(t)$

L'équation (1.10) s'écrit  $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$

L'équation (1.11) s'écrit  $X(0)T(t) = 0, \quad X(L)T(t) = 0$

et nous savons que  $X$  et  $T$  sont solution des problèmes suivants :

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0 \quad \text{et} \quad T'(t) = \lambda T(t).$$

Les valeurs propres de l'opérateur  $A = \frac{d^2}{dx^2}$  sont

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n \geq 1$$

Les fonctions propres associées sont :

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n \geq 1$$

Ces fonctions propres forment une base orthonormée de  $L^2(0, L)$ , développons  $f$  suivant cette base :

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \left[ \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L f(y) \sin \frac{n\pi y}{L} dy \right] \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

soit  $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} X_n(x) T_n(t)$  alors  $u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} T_n(0) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$ .

Il suffit donc de choisir  $T_n(0) = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L f(y) \sin \left( \frac{n\pi y}{L} \right) dy$ , comme  $T_n(t) = T_n(0) \exp(\lambda_n t)$  on posera :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{L} \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2} \right) \left[ \int_0^L f(y) \sin \left( \frac{n\pi y}{L} \right) dy \right]$$

**Remarque 1.5.1.** Par changement de fonction et de variable, on déduit de ce qui précède la solution de  $k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$  sur  $a \leq x \leq b$  en posant  $y = x - a$  et  $L = b - a$  et  $w(y, t) = u[k(y + a), t]$ . Il est plus simple de refaire le calcul précédent.

### 1.5.2 Étude de $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ; $v(0, t) = A$ ; $v(L, t) = B$ ; $v(x, 0) = f(x)$

On cherche  $v$  sous la forme  $v(x, t) = u(x, t) + U(x)$  avec  $U(0) = A$ ,  $U(L) = B$ .  $U$  doit vérifier  $0 = U''(x)$  donc  $U(x) = A + (B - A) \frac{x}{L}$ , il faut alors trouver  $u$  tel que  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  sur  $[0, L]$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $u(L, t) = 0$  et  $u(x, 0) = f(x) - [A + (B - A) \frac{x}{L}]$ ,  $u$  s'obtient à partir de la formule précédente et :

$$v(x, t) = A + (B - A) \frac{x}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n \geq 1} \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2} \right) \left[ \int_0^L \sin \left( \frac{n\pi y}{L} \right) \left( f(y) - A - (B - A) \frac{y}{L} \right) dy \right]$$

### 1.5.3 Étude de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \psi(x, t)$ ; $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ; $u(x, 0) = f(x)$

On cherche  $u$  sous la forme  $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(t) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$ , en développant  $\psi$  et  $f$  ainsi :

$$\psi(x, t) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ayant déterminé  $u_n(0)$  et  $\beta_n(t)$  on détermine  $u_n(t)$  en écrivant que  $u$  vérifie l'équation et donc que :

$$\sum_{n \geq 1} \left[ u'_n(t) + \frac{n^2 \pi^2}{L} u_n(t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n \geq 1} \beta_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

soit :

$$u'_n(t) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} u_n(t) = \beta_n(t) \quad \text{et} \quad u_n(t) = u_n(0) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}\right) + \int_0^t \beta_n(s) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}(t-s)\right) ds;$$

On pose alors  $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  et on vérifie sur le cas particulier auquel on s'intéresse que  $u$  est bien solution.

#### 1.5.4 Étude De $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \psi(x, t)$ ; $w(0, t) = \alpha(t)$ , $w(L, t) = \beta(t)$ ; $w(x, 0) = f(x)$

On pose  $w(x, t) = u(x, t) + v(x, t)$  où  $v$  vérifie  $v(0, t) = \alpha(t)$  ,  $v(L, t) = \beta(t)$ , on choisit  $v(x, t) = \alpha(t) + \frac{x}{L} (\beta(t) - \alpha(t))$

Alors on est ramené à la résolution du problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[ \psi(x, t) - \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \right]$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x) - v(x, 0)$$

Ce problème est déjà résolu ce qui nous permet de résoudre notre problème.

# Chapitre 2

## Présentation de la méthode des différences finies

### 2.1 Approximation des dérivées

#### 2.1.1 Approximation des dérivées d'ordre 1

**Définition 2.1.1.** 1. La dérivée avant de  $u$  au point  $x$  est donnée par :

$$\frac{du}{dt}(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (2.1)$$

2. La dérivée arrière de  $u$  au point  $x$  est donnée par :

$$\frac{du}{dt}(x) \simeq \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad (2.2)$$

3. La dérivée centrée de  $u$  au point  $x$  est donnée par :

$$\frac{du}{dt}(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \quad (2.3)$$

#### 2.1.2 Approximation des dérivées d'ordre 2

**Définition 2.1.2.** La dérivée d'ordre 2 centrée de  $u$  au point  $x$  est donnée par :

$$\frac{d^2u}{dt^2}(x) \simeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \quad (2.4)$$

#### 2.1.3 consistance

**Définition 2.1.3.** On dit qu'une approximation  $A_k(f)(x)$  de la dérivée d'ordre  $k$  est consistante d'ordre  $p$  s'il existe une constante  $C$  tel que

$$|A_k(f)(x) - f^{(k)}(x)| \leq Ch^p$$

**Proposition 2.1.1.** Si  $f$  est de classe  $C^2$  sur un voisinage  $I = [x - r, x + r]$   $r > 0$  de  $x$  alors les dérivées avant et arrière sont des approximation consistante d'ordre 1 de la dérivée  $u'(x)$

*Démonstration.* le développement de Taylor nous donne

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u'(\theta)$$

où  $\theta \in ]x, x + h[$  On obtient

$$\left| \frac{u(x + h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch$$

où  $C = \sup_{z \in I} |u''(z)|$  Donc la dérivée avant est approximation consistante d'ordre 1 de la dérivée  $u'(x)$

Un raisonnement similaire nous permet de prouver que la dérivée arrière est approximation consistante d'ordre 1 de la dérivée  $u'(x)$   $\square$

**Proposition 2.1.2.** Si  $f$  est de classe  $C^3$  sur un voisinage de  $I = [x - r, x + r]$   $r > 0$  de  $x$ , alors la dérivée centrée est une approximation consistante d'ordre 2 de la dérivée  $u'(x)$

*Démonstration.* le développement de Taylor nous donne

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\theta_1)$$

et

$$u(x - h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\theta_2)$$

où  $\theta_1 \in ]x, x + h[$  et  $\theta_2 \in ]x - h, x[$  D'où

$$\left| \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h} - u'(x) \right| = \left| \frac{h^2}{6} (u^{(3)}(\theta_1) + u^{(3)}(\theta_2)) \right| \leq C_1 h^2$$

où  $C_1 = \sup_{z \in I} |u^{(3)}(z)|$  Ce qui achève la preuve  $\square$

**Proposition 2.1.3.** Si  $f$  est de classe  $C^4$  sur un voisinage  $I = [x - r, x + r]$   $r > 0$  de  $x$  alors la dérivée centrée d'ordre 2 est une approximation consistante d'ordre 2 de la dérivée  $u''(x)$

*Démonstration.* Le développement de Taylor à l'ordre 4, nous donne

$$\left| \frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{z \in [a, b]} |u^{(4)}(z)|. \quad (2.5)$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 2.2 Approximation par différence finie du problème de Poisson 1D

### 2.2.1 Présentation de la méthode

Soit le problème de Poisson aux limites :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in ]a, b[ \\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases} \quad (2.6)$$

Le maillage est donné par

$$x_0 = a, x_{N+1} = b \quad \text{et} \quad x_{j+1} = x_j + h, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

où  $h = \frac{b-a}{N+1}$

Alors on obtient le système :

$$u''(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

On remplace la dérivée seconde  $u''(\tilde{x})$  par :

$$\delta^2 u(\tilde{x}) = \frac{u(\tilde{x} + h) - 2u(\tilde{x}) + u(\tilde{x} - h)}{h^2}$$

Ce qui donne le système :

$$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j) \quad , j = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

Les inconnus sont  $(u_1, u_2, \dots, u_N)$  où  $u_j$  est une approximation de  $u(x_j)$  et  $u_0 = \alpha$  et  $u_{N+1} = \beta$

**Remarque 2.2.1.** On peut écrire le système (2.7) sous la forme matricielle suivante :

$$A_h u_h = b_h \quad (2.8)$$

où

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

et

$$b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

**Proposition 2.2.1.** *la matrice  $A_h$  est symétrique définie positive.*

*Démonstration.* soit  $w = \sum_{i=1}^N w_i e_i$  un vecteur de  $\mathbb{R}^N$  muni de la base canonique  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ .

D'une part on a  $w' A_h w = \frac{w_1^2 + (w_2 - w_1)^2 + \dots + (w_{N-1} - w_N)^2 + w_N^2}{h^2} \geq 0$  donc  $A_h$  est positive

D'autre part  $w' A_h w = 0$  si et seulement si  $w_1 = 0, w_2 - w_1 = 0, \dots, w_{N-1} - w_N = 0, w_N = 0$  d'où  $w_1 = 0, w_2 = 0, \dots, w_N = 0$ , donc  $A_h$  est non dégénérée, ce qui achève la preuve de la proposition.  $\square$

## 2.2.2 Convergence

Pour étudier la convergence de la solution approchée  $u_h = (u_1, u_2, \dots, u_N)^t$  vers la solution exacte  $u$  quand  $h \rightarrow 0$ , on commence par étudier l'erreur de consistance donnée par la définition suivante :

**Définition 2.2.1.** *On appelle **erreur de consistance** du schéma numérique définie par (2.7) le vecteur*

$$\epsilon_h(u) = A_h \pi_h(u) - A_h u_h$$

où  $\pi_h(u) = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N))^t$  est la projection de la solution exacte sur le maillage.

**Définition 2.2.2.** *On dit qu'un schéma numérique est **consistant** pour la norme  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{R}^N$  si et seulement si  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\epsilon_h(u)\| = 0$ . Si de plus il existe  $C > 0$  et  $p \in \mathbb{N}^*$  telle que  $\|\epsilon_h(u)\| \leq Ch^p$ , on dit que le schéma numérique est **consistant d'ordre  $p$**  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .*

On a le résultat suivant :

**Proposition 2.2.2.** *Si la solution  $u$  du problème (2.6) est de classe  $C^4$  sur  $[a, b]$ . Alors le schéma numérique définie par (2.7) est consistant d'**ordre 2** pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$*

*Démonstration.* En utilisant la majoration (2.5), on peut vérifier facilement que

$$\|\epsilon_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{z \in [a, b]} |u^{(4)}(z)| \quad (2.10)$$

$\square$

Le lemme suivant qu'on admet sans démonstration, nous permet d'énoncer le théorème de convergence.

**Lemme 2.2.1.** *Si  $A_h$  est la matrice définie par la formule (2.9), alors la norme infinie de la matrice  $(A_h)^{-1}$  est donnée par :*

$$\|(A_h)^{-1}\|_\infty = \frac{1}{8} \quad (2.11)$$

Le résultat de convergence est donné par le théorème suivant :

**Théorème 2.2.1.** *Si la solution  $u$  du problème (2.6) est de classe  $C^4$  sur  $[a, b]$ . Alors on a*

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{z \in [a, b]} |u^{(4)}(z)| \quad (2.12)$$

Donc le schéma numérique définie par (2.7) est convergent d'ordre 2 pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$

*Démonstration.* on a  $\epsilon_h(u) = A_h \pi_h(u) - A_h u_h$

donc  $(A_h)^{-1} \epsilon_h(u) = \pi_h(u) - u_h$

alors  $\|\pi_h(u) - u_h\|_\infty = \|(A_h)^{-1} \epsilon_h(u)\|_\infty$

D'où  $\|\pi_h(u) - u_h\|_\infty \leq \|(A_h)^{-1}\|_\infty \times \|\epsilon_h(u)\|_\infty$  En utilisant (2.10) et (2.11), on obtient

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{z \in [a, b]} |u^{(4)}(z)|$$

Ce qui achève la démonstration. □

### 2.2.3 Étude d'un exemple

Considérons le problème de Poisson

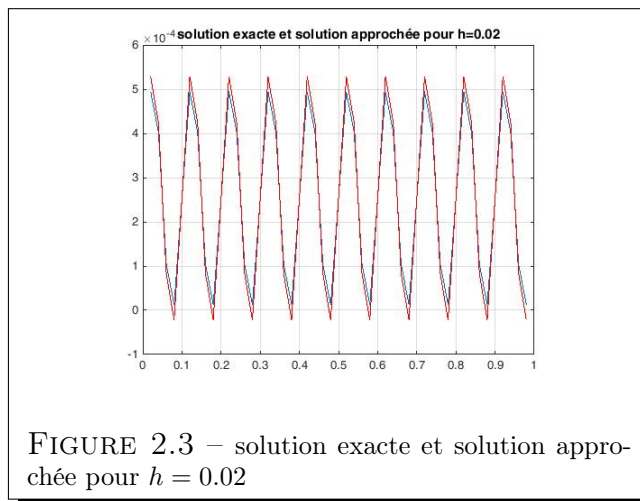
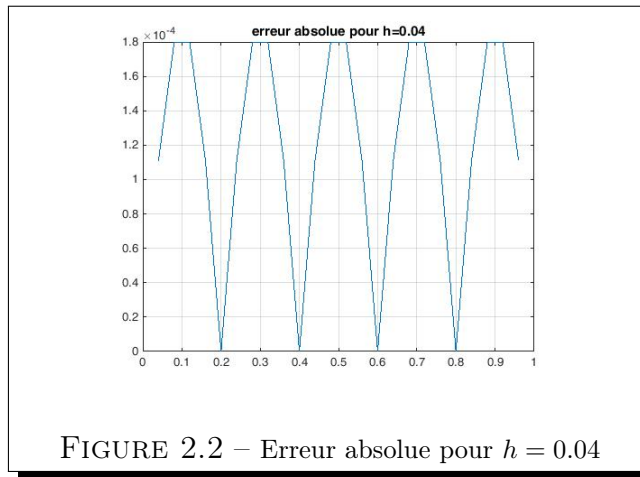
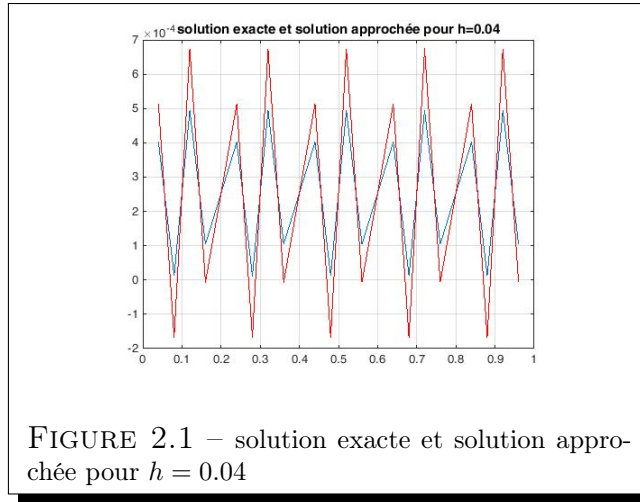
$$\begin{cases} -u''(x) = \sin(20\pi x), & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = \frac{1}{(20\pi)^2} \end{cases} \quad (2.13)$$

La solution exacte du problème précédent est donnée par

$$u(x) = \frac{\sin(20\pi x)}{(20\pi)^2} + \frac{1}{(20\pi)^2}$$

Les figures suivantes représentent respectivement les résultats de simulation numérique pour  $h = 0.04$ ,  $h = 0.02$  et  $h = 0.01$





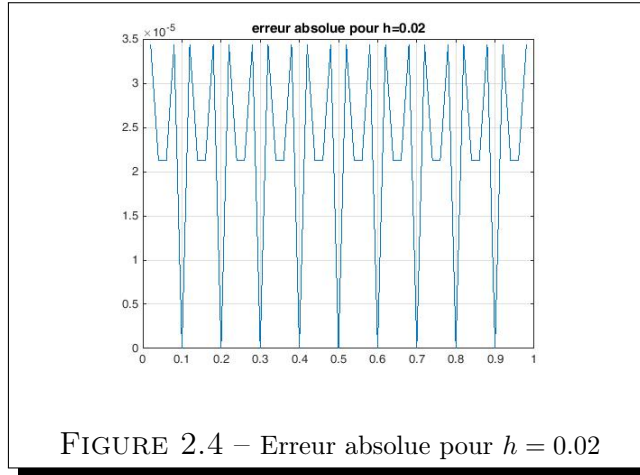


FIGURE 2.4 – Erreur absolue pour  $h = 0.02$

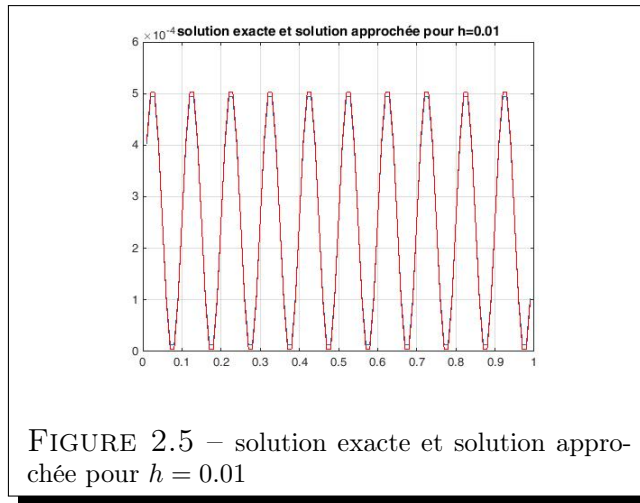


FIGURE 2.5 – solution exacte et solution approchée pour  $h = 0.01$

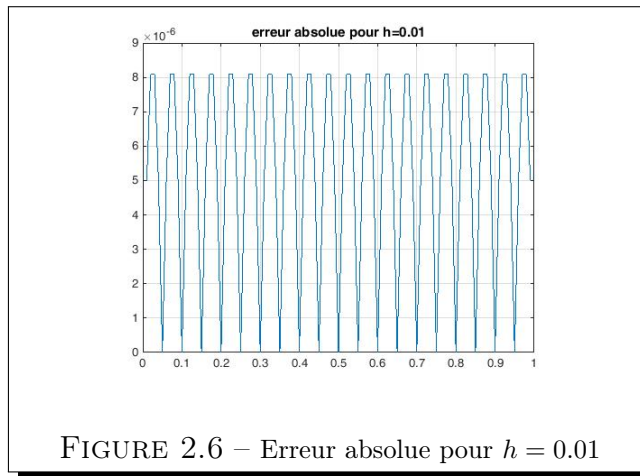


FIGURE 2.6 – Erreur absolue pour  $h = 0.01$

Le tableau suivant donne  $eqm = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u(x_i) - u_i|^2}$  en fonction de  $h$ .

$h$	0.04	0.02	0.01
$eqm$	$0.1364 \times 10^{-03}$	$0.0258 \times 10^{-03}$	$0.0060 \times 10^{-03}$

**Remarque 2.2.2.** Les résultats donnés dans le tableau précédent affirme que la convergence est quadratique (d'ordre 2)

## 2.3 Approximation par différences finis du problème de Poisson 2D

### 2.3.1 Schéma à cinq points pour l'opérateur de Laplace

On considère le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega \subset R^2 \\ u(x, y) = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.14)$$

où

$$\Omega = ]a, b[ \times ]c, d[$$

soit

$$\Delta_x = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N_x+1}\}$$

$$x_0 = a, \quad x_{N_x+1} = b, \quad h_x = \max(x_{i+1} - x_i)$$

soit

$$\Delta_y = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N_y+1}\}$$

$$y_0 = c, \quad y_{N_y+1} = b, \quad h_y = \max(y_{i+1} - y_i)$$

Le produit cartésien  $\Delta_h = \Delta_x \times \Delta_y$  définit la grille de calcul sur  $\Omega$  et  $h = \max(h_x, h_y)$  est le pas de discrétisation.

On cherche les valeurs  $u_{i,j}$  qui approche  $u(x_i, y_j)$ . On supposera pour simplifier les calculs que  $h_x$  et  $h_y$  sont constants.

On a les approximations :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \delta_x^2 u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \delta_y^2 u_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} \end{cases} \quad (2.15)$$

En remplaçant dans  $-\Delta u = f$  pour les nœuds intérieurs de  $\Delta_h$ , on obtient le système :

$$-(\delta_x^2 u_{i,j} + \delta_y^2 u_{i,j}) = f_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (2.16)$$

où  $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$

Considérons les conditions aux limites de Dirichlet

$$u_{i,j} = g_{i,j} \quad (x_i, y_j) \in \partial\Delta_h$$

où  $\partial\Delta_h$  est l'ensemble des nœuds situés sur la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

On suppose de plus que  $h_x = h_y = h$ , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{-1}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) = f_{i,j} \\ i = 1, 2, \dots, N_x, \quad j = 1, 2, \dots, N_y \end{cases} \quad (2.17)$$

**Remarque 2.3.1.** [4]

- (1) Cette méthode est appelée schéma à cinq points pour l'opérateur de Laplace
- (2) En utilisant les conditions aux limites de Dirichlet alors le système(2.17)ne comporte que  $N = N_x \times N_y$  inconnues.

### 2.3.2 Écriture matricielle

On range les nœuds selon l'ordre lexicographique c-à-d en numérotant les nœuds (les inconnues) de gauche à droite et de bas en haut. On obtient le système

$$Au = f$$

où

$$A = \text{tridiag}(D, T, D)$$

$A$  comporte  $N_y$  ligne et  $N_y$  colonnes.

$D \in \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_x}$  est une matrice diagonale et ses coefficients sont  $\frac{-1}{h_y^2}$

$T$  est une matrice tridiagonale de taille  $N_x \times N_x$

$$T = \text{tridiag}\left(\frac{-1}{h_x^2}, \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}, \frac{-1}{h_x^2}\right)$$

**Remarque 2.3.2.** Pour illustrer l'écriture matricielle, on prend  $N_x = 4$  et  $N_y = 3$  et on pose  $K = 4(j - 1) + i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $1 \leq j \leq 3$  Alors on obtient :

$$\begin{aligned} j = 1, \\ i = 1, \quad & -\frac{1}{h^2}(u_{0,1} + u_{1,0} - 4u_{1,1} + u_{2,1} + u_{1,2}) = f_{1,1} \\ i = 2, \quad & -\frac{1}{h^2}(u_{1,1} + u_{2,0} - 4u_{2,1} + u_{3,1} + u_{2,2}) = f_{2,1} \\ i = 3, \quad & -\frac{1}{h^2}(u_{2,1} + u_{3,0} - 4u_{3,1} + u_{4,1} + u_{3,2}) = f_{3,1} \end{aligned}$$

$$i = 4, -\frac{1}{h^2}(u_{3,1} + u_{4,0} - 4u_{4,1} + u_{5,1} + u_{4,2}) = f_{4,1}$$

$$j = 2, \\ i = 1, -\frac{1}{h^2}(u_{0,2} + u_{1,1} - 4u_{1,2} + u_{2,2} + u_{1,3}) = f_{1,2}$$

$$i = 2, -\frac{1}{h^2}(u_{1,2} + u_{2,1} - 4u_{2,2} + u_{3,2} + u_{2,3}) = f_{2,2}$$

$$i = 3, -\frac{1}{h^2}(u_{2,2} + u_{3,1} - 4u_{3,2} + u_{4,2} + u_{3,3}) = f_{3,2}$$

$$i = 4, -\frac{1}{h^2}(u_{3,2} + u_{4,1} - 4u_{4,2} + u_{5,2} + u_{4,3}) = f_{4,2}$$

$$j = 3, \\ i = 1, -\frac{1}{h^2}(u_{0,3} + u_{1,2} - 4u_{1,3} + u_{2,3} + u_{1,4}) = f_{1,3}$$

$$i = 2, -\frac{1}{h^2}(u_{1,3} + u_{2,2} - 4u_{2,3} + u_{3,3} + u_{2,4}) = f_{2,3}$$

$$i = 3, -\frac{1}{h^2}(u_{2,3} + u_{3,2} - 4u_{3,3} + u_{4,3} + u_{3,4}) = f_{3,3}$$

$$i = 4, -\frac{1}{h^2}(u_{3,3} + u_{4,2} - 4u_{4,3} + u_{5,3} + u_{4,4}) = f_{4,3}$$

On trouve le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{h^2}(4z_1 - z_2 - z_5) = f_{1,1} + \frac{1}{h^2}(u_{0,1} + u_{1,0}) \\ \frac{1}{h^2}(-z_1 + 4z_2 - z_3 - z_6) = f_{2,1} + \frac{1}{h^2}(u_{2,0}) \\ \frac{1}{h^2}(-z_2 + 4z_3 - z_4 - z_7) = f_{3,1} + \frac{1}{h^2}(u_{3,0}) \\ \frac{1}{h^2}(-z_3 + 4z_4 - z_8) = f_{4,1} + \frac{1}{h^2}(u_{2,0} + u_{5,1}) \\ \frac{1}{h^2}(-z_1 + z_5 - z_9) = f_{1,2} + \frac{1}{h^2}(u_{0,2}) \\ \frac{1}{h^2}(-z_2 - z_5 + 4z_6 - z_7 - z_{10}) = f_{2,2} \\ \frac{1}{h^2}(-z_3 - z_6 + 4z_7 - z_8 - z_{11}) = f_{3,2} \\ \frac{1}{h^2}(-z_4 - z_7 + 4z_8 - z_{12}) = f_{4,2} + \frac{1}{h^2}(u_{5,2}) \\ \frac{1}{h^2}(-z_5 + 4z_9 - z_{10}) = f_{1,3} + \frac{1}{h^2}(u_{0,3} + u_{1,4}) \\ \frac{1}{h^2}(-z_6 - z_9 + 4z_{10} - z_{11}) = f_{2,3} + \frac{1}{h^2}(u_{2,4}) \\ \frac{1}{h^2}(-z_7 - z_{10} + 4z_{11} - z_{12}) = f_{3,3} + \frac{1}{h^2}(u_{3,4}) \\ \frac{1}{h^2}(-z_8 - z_{11} + 4z_{12}) = f_{4,3} + \frac{1}{h^2}(u_{4,3} + u_{5,3}) \end{array} \right.$$

Donc on a bien

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} T & D & 0 \\ D & T & D \\ 0 & D & T \end{pmatrix}$$

Où

$$D = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Proposition 2.3.1.** *La matrice  $A$  est symétrique définie positive donc inversible.*

*Démonstration.* Soit  $v \in \mathbb{R}^N$  partitionnant  $v$  en  $N_y$  vecteur  $v_k$  de taille  $N_x$  alors

$$v^t A v = \sum_{k=1}^{N_y} v_k^t T v_k - \frac{2}{h_y^2} \sum_{k=1}^{N_y-1} v_k^t v_{k+1}$$

en effet

$$A = \begin{pmatrix} T & D & 0 & \dots & 0 \\ D & T & D & \dots & \vdots \\ 0 & D & T & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & D \\ 0 & 0 & \dots & D & T \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N_y} \end{pmatrix}$$

on a  $T = \frac{2}{h_y^2}I + \frac{1}{h_x^2}K$  où  $K = \text{tridiag}(-1, 2, -1)$  Donc

$$v^T Av = \frac{1}{h_x^2} \sum_{k=1}^{N_y-1} v_k^t K v_k + \frac{1}{h_y^2} \left( V_1^t v_1 + v_{N_y}^t v_{N_y} + \sum_{k=1}^{N_y-1} (v_k - v_{k+1})^t (v_k - v_{k+1}) \right)$$

si au moins un vecteur  $v_k$  est non nul alors  $v^T Av > 0$  □

### 2.3.3 Convergence

**Définition 2.3.1.** *L'erreur de troncature locale au nœud intérieur  $(x_i, y_j)$  associé aux schéma numérique à cinq points (2.17) est donnée par :*

$$\tau_h(x_i, y_j) = -f(x_i, y_j) - \frac{1}{h^2} [u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1})] \quad (2.18)$$

**Lemme 2.3.1.** *Si  $u$  est de classe  $C^{(4)}(\bar{\Omega})$  alors*

$$\tau_h(x_i, y_j) = \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta) \right] \quad (2.19)$$

où  $x_i - h < \xi < x_i + h$  et  $y_j - h < \eta < y_j + h$

Le lemme précédent nous permet de donner un résultat sur la consistance

**Proposition 2.3.2.** *Si  $u$  est de classe  $C^{(4)}(\bar{\Omega})$  alors*

$$\max_{\Delta_h} |\tau_h(x_i, y_j)| \leq \frac{h^2}{6} M_4 \quad (2.20)$$

où

$$M_4 = \max \left\{ \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}$$

**Corollaire 2.3.1.** *Si  $u$  est de classe  $C^{(4)}(\bar{\Omega})$  alors le schéma numérique à cinq points (2.17) est consistant d'ordre 2.*

**Lemme 2.3.2.** *Si  $v$  est une fonction définie sur l'ensemble des points du maillage  $\Delta_h = (\Delta_h - \partial\Delta_h) \cup \partial\Delta_h$  sur le rectangle  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , alors*

$$\max_{\Delta_h - \partial\Delta_h} |v| \leq \max_{\partial\Delta_h} |v| + \frac{a^2 + b^2}{4} \max_{\Delta_h - \partial\Delta_h} |Lv| \quad (2.21)$$

où

$$Lv_{i,j} = \frac{1}{h^2} (v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}) \quad (2.22)$$

Pour la preuve voir [3].

Le théorème suivant donne la convergence du schéma numérique à cinq points (2.17).

**Théorème 2.3.1.** *Si  $u$  est de classe  $C^{(4)}(\bar{\Omega})$  alors*

$$\max_{\Delta_h} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}| \leq \frac{(a^2 + b^2)h^2}{24} M_4 \quad (2.23)$$

où

$$M_4 = \max \left\{ \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}$$

Donc le schéma numérique à cinq points (2.17) est convergent, de plus la convergence est quadratique

*Démonstration.* Soit  $e_{i,j} = u(x_i, y_j) - u_{i,j}$  On a d'après (2.21)

$$\max_{\Delta_h - \partial\Delta_h} |e_{i,j}| \leq \max_{\partial\Delta_h} |e_{i,j}| + \frac{a^2 + b^2}{4} \max_{\Delta_h - \partial\Delta_h} |Le_{i,j}|$$

Comme  $e_{i,j} = 0$  sur  $\partial\Delta_h$  alors

$$\max_{\Delta_h - \partial\Delta_h} |e_{i,j}| \leq \frac{a^2 + b^2}{4} \max_{\Delta_h - \partial\Delta_h} |Le_{i,j}|$$

D'autre part

$$\begin{aligned} Le_{i,j} &= Lu(x_i, y_j) - Lu_{i,j} \\ &= Lu(x_i, y_j) + f_{i,j} \\ &= -\tau_h(x_i, y_j) \end{aligned}$$

Donc d'après (2.20)

$$\max_{\Delta_h} |Le_{i,j}| \leq \frac{h^2}{6} M_4$$

Ce qui donne

$$\max_{\Delta_h - \partial\Delta_h} |e_{i,j}| \leq \frac{a^2 + b^2}{4} \times \frac{h^2}{6} M_4$$

Ce qui achève la démonstration. □

### 2.3.4 Étude d'un exemple

On considère le problème de poisson

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \\ u(x, y) = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.24)$$

où

$$f(x, y) = 8\pi^2 \sin 2\pi x \cos 2\pi y,$$



et

$$\begin{cases} g(0, y) = g(1, y) = 0 & 0 < y < 1 \\ g(x, 0) = g(x, 1) = \sin 2\pi x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est donnée par

$$u(x, y) = \sin 2\pi x \cos 2\pi y$$

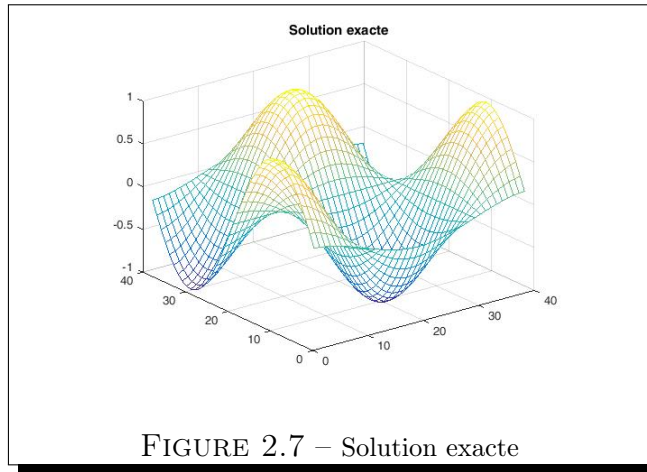
Les figures (2.7),(2.8),(2.9) et (2.10) illustrent les résultats de la simulation numérique.

Le tableau suivant donne  $eqm = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |u(x_i, y_j) - u_{i,j}|^2}$  en fonction de  $h$ .

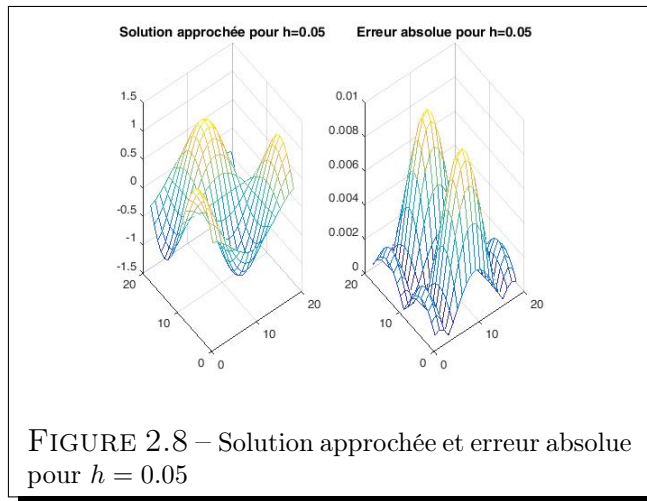
$h$	0.05	0.025	0.0125
$eqm$	$3.6000 \times 10^{-3}$	$8.7765 \times 10^{-4}$	$2.1635 \times 10^{-4}$

**Remarque 2.3.3.** *Les résultats donnés dans le tableau précédent affirme que la convergence est quadratique (d'ordre 2)*

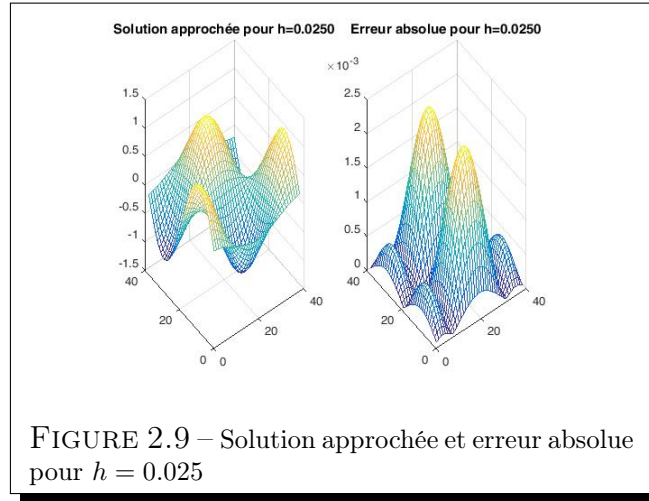
La figure suivante représente la solution exacte :



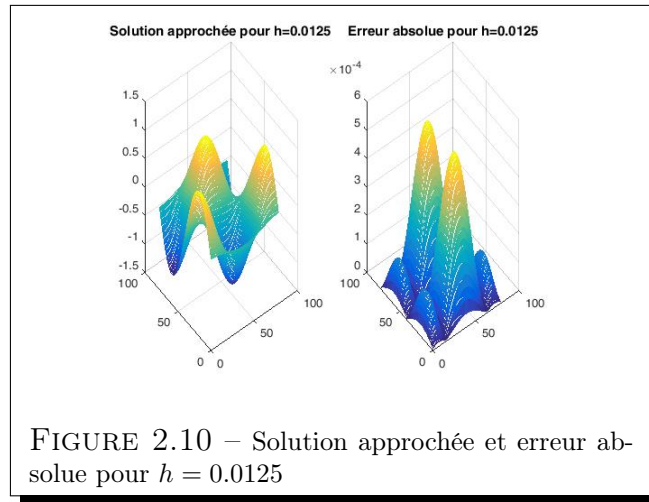
La figure suivante représente la solution approchée et l'erreur absolue pour  $h = 0.05$  :



La figure suivante représente la solution approchée et l'erreur absolue pour  $h = 0.025$  :



La figure suivante représente la solution approchée et l'erreur absolue pour  $h = 0.0125$  :



# Chapitre 3

## Application à la résolution des équations aux dérivées partielles paraboliques

### 3.1 Résolution de l'équation de la chaleur 1D par différences finies

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x) & x \in ]a, b[ \quad t > 0 \quad \mu > 0 \\ u(t, a) = u(t, b) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = u^0(x) & x \in [a, b] \end{cases} \quad (3.1)$$

#### 3.1.1 La méthode $\theta$ schéma

On pose  $x_j = a + hj$   $j = 0, 1, 2, \dots, J+1$  où  $h = \frac{b-a}{J+1}$ . On note  $u_j(t)$  une approximation de  $u(t, x_j)$  pour  $j = 0, 1, \dots, J+1$ .

On approche Le problème de Dirichlet (3.1) à l'aide du schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{du_j}{dt}(t) - \frac{\mu}{h^2} [u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)] = f_j(t) & j = 1, 2, \dots, J \quad t > 0 \\ u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0 & t > 0 \\ u_j(0) = u^0(x_j) & j = 0, 1, 2, \dots, J+1 \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $f_j(t) = f(t, x_j)$   $j = 1, 2, \dots, J$

On pose  $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_J(t))^T$ ,  $U^0 = (u^0(x_1), u^0(x_2), \dots, u^0(x_J))^T$  et  $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_J(t))^T$

$$A = \text{tridiag}(-1, 2, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = -\frac{\mu}{h^2}AU(t) + F(t) & t > 0 \\ U(0) = U^0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour intégrer le système différentiel précédent on utilise le  $\theta$ -schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(U^{k+1} - U^k) = -\frac{\mu}{h^2}A[\theta U^{k+1} + (1-\theta)U^k] + \theta F^{k+1} + (1-\theta)F^k & k = 0, 1, \dots \\ U^0 \text{ donné} \end{cases} \quad (3.4)$$

ce qui donne

$$\left(I + \frac{\mu}{h^2}\theta\Delta tA\right)U^{k+1} = \left(I - \frac{\mu}{h^2}(1-\theta)\Delta tA\right)U^k + G^{k+1}. \quad (3.5)$$

où

$$G^{k+1} = \Delta t(\theta F^{k+1} + (1-\theta)F^k)$$

### La méthode explicite (Schéma FTCS)

Pour  $\theta = 0$  On trouve le schéma explicite défini par :

$$U^{k+1} = \left(I - \frac{\mu}{h^2}\Delta tA\right)U^k + \Delta tF^k. \quad (3.6)$$

### La méthode implicite (Schéma BTCS)

Pour  $\theta = 1$  On trouve le schéma implicite défini par :

$$U^{k+1} = \left(I + \frac{\mu}{h^2}\Delta tA\right)^{-1}U^k + \Delta t\left(I + \frac{\mu}{h^2}\Delta tA\right)^{-1}F^{k+1}. \quad (3.7)$$

### la méthode de Crank-Nicolson

Pour  $\theta = \frac{1}{2}$  On trouve le schéma Crank-Nicolson défini par :

$$U^{k+1} = \left(I + \frac{\mu}{2h^2}\Delta tA\right)^{-1}\left(I - \frac{\mu}{2h^2}\Delta tA\right)U^k + \frac{\Delta t}{2}\left(I + \frac{\mu}{2h^2}\Delta tA\right)^{-1}(F^k + F^{k+1}). \quad (3.8)$$

### 3.1.2 Consistance, stabilité et Convergence

#### Étude du schéma explicite

**Définition 3.1.1.** *L'erreur de consistance du schéma explicite est donné par [8] :*

$$\epsilon_j^n(u) = \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\delta t} - \mu \frac{u(t^n, x_{j+1}) - 2u(t^n, x_j) + u(t^n, x_{j-1}))}{h^2} - f(t^n, x_j) \quad (3.9)$$

On pose  $\epsilon^n(u) = (\epsilon_j^n(u))_{1 \leq j \leq J}$

la consistance du schéma explicite est donnée par la proposition suivante ([5]) :

**Proposition 3.1.1.** *Si la solution  $u$  du problème (3.1) est de classe  $C^2$  par rapport à  $t$  et de classe  $C^4$  par rapport à  $x$  alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que*

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \|\epsilon^n(u)\|_\infty \leq C(\delta t + h^2)$$

Donc le schéma explicite est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

*Démonstration.* la preuve est basée sur les formules de Taylor □

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $e^n(u) = (e_j^n(u))_{1 \leq j \leq J}$  le vecteur de l'erreur global au temps  $t^n$  défini par*

$$e_j^n(u) = u_j^n - u(t^n, x_j) \quad 0 \leq n \leq N \quad 0 \leq j \leq J + 1$$

*Si la condition suivante*

$$\mu \frac{\delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.10)$$

*est vérifiée alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que*

$$\|e^n(u)\|_\infty \leq C(\delta t + h^2) \quad 0 \leq n \leq N$$

**Remarque 3.1.1.** 1 *La condition (3.10) est appelée condition (Courant–Friedrichs–Lewy) ou **CFL**.*

2 *On dit que le schéma explicite est conditionnellement convergent dans  $L^\infty$  et la convergence est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace*

#### Étude du $\theta$ -schéma

**Remarque 3.1.2.** *Le  $\theta$ -schéma s'écrit sous la forme :*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} - \mu \left( \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right) = \theta f_j^{n+1} + (1 - \theta) f_j^n \quad (3.11)$$

**Consistance** L'erreur de consistance est donnée par la définition suivante :

**Définition 3.1.2.** L'erreur de consistance du  $\theta$ -schéma (3.11) est donnée par :

$$\begin{aligned}\epsilon_j^n(u) &= \frac{u(t^n, x_j) - u(t^n, x_j)}{\delta t} - (\theta f(t^{n+1}, x_j) + (1 - \theta)f(t^n, x_j)) \\ &\quad - \mu\theta \frac{u(t^{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t^n, x_j) + u(t^n, x_{j-1}))}{h^2} \\ &\quad - \mu(1 - \theta) \frac{u(t^{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t^{n+1}, x_j) + u(t^{n+1}, x_{j-1}))}{h^2}\end{aligned}\tag{3.12}$$

La proposition suivante ([5]) donne la consistance du  $\theta$ -schéma (3.11)

**Proposition 3.1.2.** Si la solution  $u$  du problème (3.1) est de classe  $C^3$  par rapport à  $t$  et de classe  $C^4$  par rapport à  $x$  alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  et  $D \in \mathbb{R}$  telles que

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \|\epsilon^n(u)\|_\infty \leq C|1 - 2\theta|\delta t + D(\delta t^2 + h^2)$$

Donc le  $\theta$ -schéma est consistant pour tout  $\theta$  d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace sauf pour  $\theta = \frac{1}{2}$  où il est d'ordre 2 en temps.

### Convergence et stabilité au sens de Von Neumann

**Définition 3.1.3.** le  $\theta$ -schéma (3.11) est **stable** au sens de Von Neumann si et seulement si  $\rho(L_\theta) \leq 1$

où  $L_\theta = B_\theta^{-1}B_{\theta-1}$  et  $B_\theta = I + \theta\mu \frac{\delta t}{h^2}A$

**Proposition 3.1.3.** 1 Si  $\theta \geq \frac{1}{2}$  alors  $\rho(L_\theta) \leq 1$

2 Si  $\theta \in [0, \frac{1}{2}[$  alors  $\rho(L_\theta) \leq 1$  si et seulement si  $\mu \frac{\delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$

**Théorème 3.1.2.** Si la solution  $u$  du problème (3.1) est de classe  $C^3$  par rapport à  $t$  et de classe  $C^4$  par rapport à  $x$ .

Si  $\theta \geq \frac{1}{2}$  ou  $\mu \frac{\delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$ , alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  et  $D \in \mathbb{R}$  telles que

$$\|e^n(u)\|_2 \leq T [C|1 - 2\theta|\delta t + D(\delta t^2 + h^2)], \quad 0 \leq n \leq N$$

où

$$\|e^n\|_2 = \sqrt{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J |e_j^n|^2}$$

**Remarque 3.1.3.** 1 Si  $\theta > \frac{1}{2}$  le  $\theta$ -schéma est inconditionnellement convergent pour la norme  $\|\cdot\|_2$  d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

- 2 Si  $\theta = \frac{1}{2}$  le schéma de Crank-Nicolson est inconditionnellement convergent pour la norme  $\|\cdot\|_2$  d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace.
- 3 Si  $\theta < \frac{1}{2}$  le  $\theta$ -schéma est convergent pour la norme  $\|\cdot\|_2$  d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace si et seulement si  $\mu \frac{\delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ .

### 3.1.3 Étude d'un exemple

On considère le problème

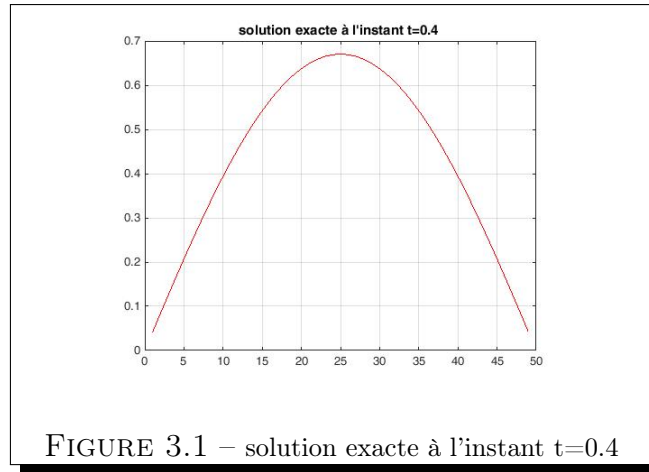
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & x \in ]0, 1[ \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) = \sin(\pi x) & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.13)$$

La solution exacte du problème précédent est

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-t) \quad (3.14)$$

#### La méthode explicite (Schéma FTCS)

En utilisant La méthode explicite (Schéma FTCS) et en respectant la condition  $\frac{\delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ , on prend  $h = 0.0200$  et  $\Delta t = 4.0000 \times 10^{-5}$  on obtient les résultats suivant :





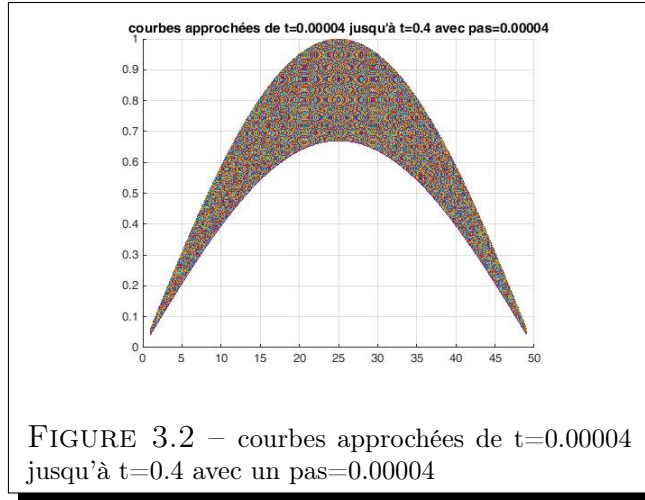


FIGURE 3.2 – courbes approchées de  $t=0.00004$  jusqu'à  $t=0.4$  avec un  $\text{pas}=0.00004$

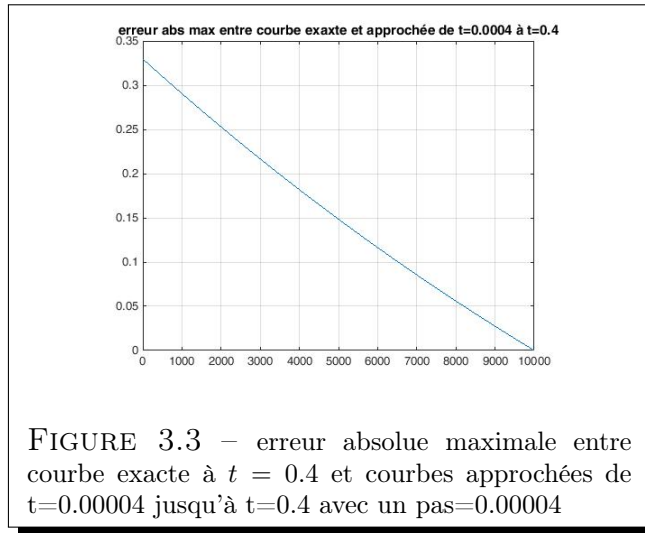
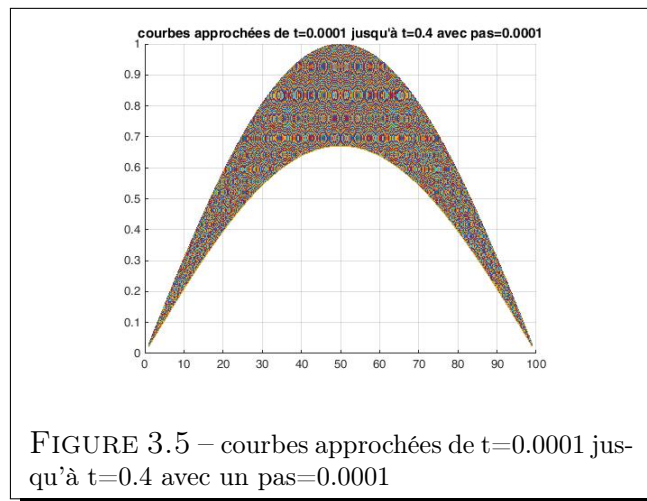
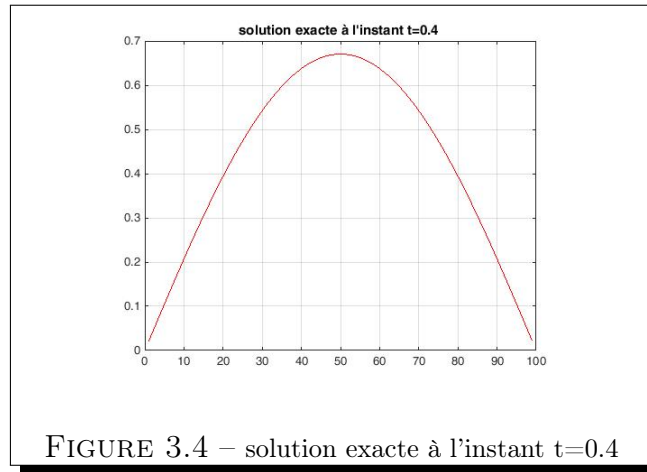


FIGURE 3.3 – erreur absolue maximale entre courbe exacte à  $t = 0.4$  et courbes approchées de  $t=0.00004$  jusqu'à  $t=0.4$  avec un  $\text{pas}=0.00004$

**Conclusion** On constate que pour  $h = 0.0200$  et  $\Delta t = 4.0000 \times 10^{-5}$  la courbe représentant l'erreur maximale absolue entre la courbe exacte à  $t = 0.4$  et les courbes approchées de  $t = 0.00004$  jusqu'à  $t = 0.4$  avec le  $\text{pas} = \Delta t = 0.00004$  est une courbe strictement décroissante. Ce qui mis en évidence la convergence de la méthode explicite.

## La méthode implicite

En utilisant La méthode implicite et en prenant  $h = 10^{-2}$  et  $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  on obtient les résultats suivant :



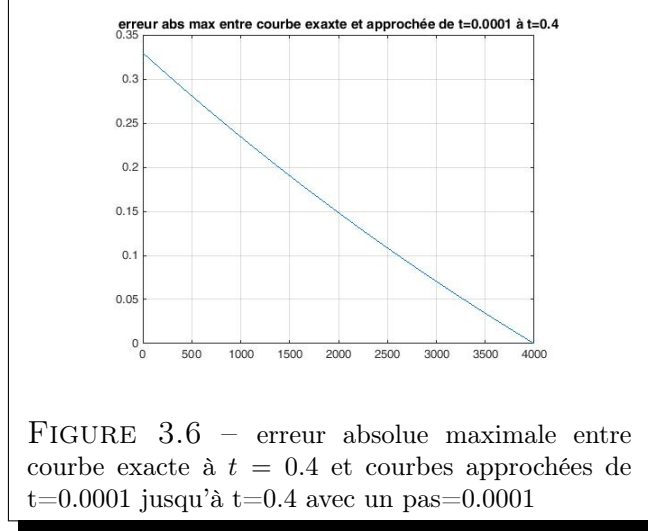


FIGURE 3.6 – erreur absolue maximale entre courbe exacte à  $t = 0.4$  et courbes approchées de  $t=0.0001$  jusqu'à  $t=0.4$  avec un pas= $0.0001$

**Conclusion** On constate que pour  $h = 0.0100$  et  $\Delta t = 1.0000 \times 10^{-4}$  la courbe représentant l'erreur maximale absolue entre la courbe exacte à  $t = 0.4$  et les courbes approchées de  $t = 0.0001$  jusqu'à  $t = 0.4$  avec le pas =  $\Delta t = 0.0001$  est une courbe strictement décroissante. Ce qui mis en évidence la convergence de la méthode Implicite.

**Comparaison entre les deux schémas FTCS et BTCS** Pour le FTSC on atteint l'erreur absolue maximale  $e = 8.2845e - 05$  entre courbe exacte et approchée à  $t = 0.4$  après 10000 itération et pour BTCS on atteint l'erreur absolue maximale  $e = 3.5456e - 05$  entre courbe exacte et approchée à  $t = 0.4$  après 4000 itération. Donc le schéma BTCS est plus rapide de plus il est inconditionnellement convergent.

## 3.2 Résolution de l'équation de la chaleur 2D par différences finies

### 3.2.1 Présentation de l'équation de la chaleur sur un domaine rectangle du plan

On considère l'équation de la chaleur sur un domaine  $\Omega = ]a, b[ \times ]c, d[$  avec condition sur le bord de type Dirichlet et condition initiale donnée par le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) - \mu \Delta(t, x, y) = f(t, x, y) & (x, y, t) \in \Omega \times ]0, T[ \\ u(t, x, y) = 0 & (x, y) \in \delta\Omega \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) & (x, y) \in \Omega \end{cases} \quad (3.15)$$

### 3.2.2 La méthode $\theta$ -schéma

On considère une discrétisation de  $\bar{\Omega}$  définie par les points :  $P_{ij} = (x_i, y_j)$  où  $x_i = a + ih_x$   $i = 1, 2, \dots, m + 1$  et  $y_j = c + jh_y$   $j = 1, 2, \dots, l + 1$ .

Les pas de discrétisation spatiale sont donnés par  $h_x = \frac{b-a}{m+1}$  et  $h_y = \frac{d-c}{l+1}$

$u_{i,j}^n$  est une approximation de  $u(t^n, x_i, y_j)$  à l'instant  $t^n = n\Delta t$ . On procède de la même manière utilisée pour dériver le  $\theta$ -schéma pour l'équation de la chaleur 1D, on obtient le  $\theta$ -schéma suivant :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \mu (\theta \Delta_{h_x h_y} u_{i,j}^{n+1} + (1 - \theta) \Delta_{h_x h_y} u_{i,j}^n) = \theta f_{i,j}^{n+1} + (1 - \theta) f_{i,j}^n. \quad (3.16)$$

où

$$\Delta_{h_x h_y} u_{i,j}^n = \frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{h_y^2}$$

et

$$f_{i,j}^n = f(t^n, x_i, y_j)$$

**Remarque 3.2.1.** 1 Pour  $\theta = 0$  on obtient le schéma FTCS.

2 Pour  $\theta = 1$  on obtient le schéma BTCS.

3 Pour  $\theta = \frac{1}{2}$  on obtient le schéma de Crank-Nicholson.

En utilisant l'ordre lexicographique sur le maillage comme dans le cas stationnaire, le  $\theta$ -schéma s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(I + \theta \Delta t A) U^{n+1} = (I - (1 - \theta) \Delta t A) U^n + \Delta t (\theta F^{n+1} + (1 - \theta) F^n) \quad (3.17)$$

où  $A$  est la matrice tridiagonale par block définie par

$$A = \text{tridiag}(D, T, D)$$

$A$  comporte  $l$  ligne et  $l$  colonnes elle est de taille  $ml \times ml$ .

$D \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  est une matrice diagonale et ses coefficients sont  $\frac{-\mu}{h_y^2}$

$T$  est une matrice tridiagonale de taille  $m \times m$

$$T = \text{tridiag}\left(\frac{-\mu}{h_x^2}, \frac{2\mu}{h_x^2} + \frac{2\mu}{h_y^2}, \frac{-\mu}{h_x^2}\right)$$

et

$$U^n = (u_{11}^n, u_{21}^n, \dots, u_{m1}^n, u_{12}^n, u_{22}^n, \dots, u_{m2}^n, \dots, u_{1l}^n, u_{2l}^n, \dots, u_{ml}^n)^T$$

$$F^n = (f_{11}^n, f_{21}^n, \dots, f_{m1}^n, f_{12}^n, f_{22}^n, \dots, f_{m2}^n, \dots, f_{1l}^n, f_{2l}^n, \dots, f_{ml}^n)^T$$

### 3.2.3 Consistance, stabilité et Convergence

#### Consistance

**Proposition 3.2.1.** *Si la solution  $u$  du problème (3.15) est de classe  $C^3$  par rapport à  $t$  et de classe  $C^4$  par rapport à  $x$  alors le  $\theta$ - Schéma est consistant pour tout  $\theta \in [0, 1]$*

#### Stabilité

La stabilité du  $\theta$ - Schéma est donnée par la proposition suivante ([6]) :

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $\beta = \mu\Delta t \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)$ , alors on a les résultats suivants :*

- 1 *Si  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  alors le  $\theta$ - Schéma est  $L^2$ -stable si  $\beta \leq \frac{1}{2 - 4\theta}$ .*
- 2 *Si  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$  alors le  $\theta$ - Schéma est inconditionnellement  $L^2$ -stable.*
- 3 *Si  $0 \leq \theta < 1$  alors le  $\theta$ - Schéma est  $L^\infty$ -stable si  $\beta \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}$ .*

#### Théorème de Lax

Le théorème suivant donne le théorème fondamentale d'équivalence entre convergence et consistance+stabilité d'un schéma d'approximation d'une edp linéaire d'évolution [7]

**Théorème 3.2.1.** *Pour résoudre un problème évolutif linéaire avec condition initiale bien posé, ceci à l'aide d'un schéma numérique de différences finies consistant, la stabilité de ce schéma est une condition nécessaire et suffisante pour assurer sa convergence.*

#### Convergence

En appliquant le théorème de Lax, on peut formuler le théorème de convergence suivant :

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $\beta = \mu\Delta t \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)$ , si la solution  $u$  du problème (3.15) est de classe  $C^3$  par rapport à  $t$  et de classe  $C^4$  par rapport à  $x$  alors on a les résultats suivants :*

- 1 *Si  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  alors le  $\theta$ - Schéma est convergent dans  $L^2$  si  $\beta \leq \frac{1}{2 - 4\theta}$ .*
- 2 *Si  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$  alors le  $\theta$ - Schéma est inconditionnellement convergent dans  $L^2$  .*
- 3 *Si  $0 \leq \theta < 1$  alors le  $\theta$ - Schéma est convergent dans  $L^\infty$  si  $\beta \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}$ .*

### 3.2.4 Étude d'un exemple

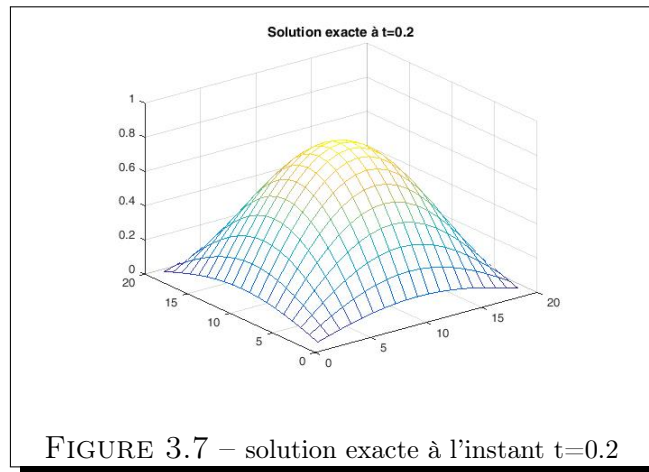
On considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \frac{1}{\pi^2} \Delta u(x, y, t) & (x, y) \in ]0, 1[^2 \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) & (x, y) \in ]0, 1[^2 \\ u(x, 0, t) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(1, y, t) = 0 & 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 1, t) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y, t) = 0 & 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

La solution exacte du problème précédent est

$$u(x, y, t) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-t} \quad (3.19)$$

- (I) En utilisant le schéma implicite avec  $mu = \frac{1}{\pi^2}$ ,  $h = 0.05$ ,  $\Delta t = 0.01$  et  $M = 20$ , on obtient les résultats suivant :



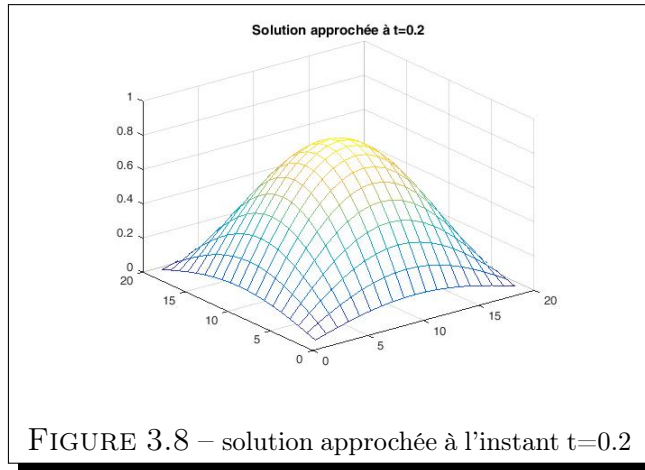


FIGURE 3.8 – solution approchée à l’instant  $t=0.2$

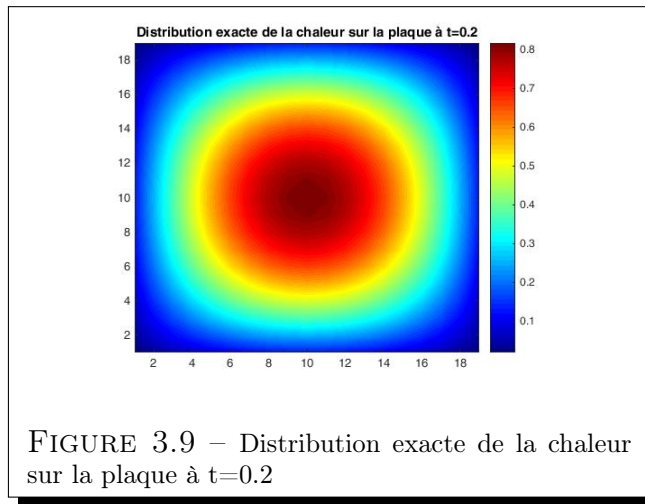


FIGURE 3.9 – Distribution exacte de la chaleur sur la plaque à  $t=0.2$

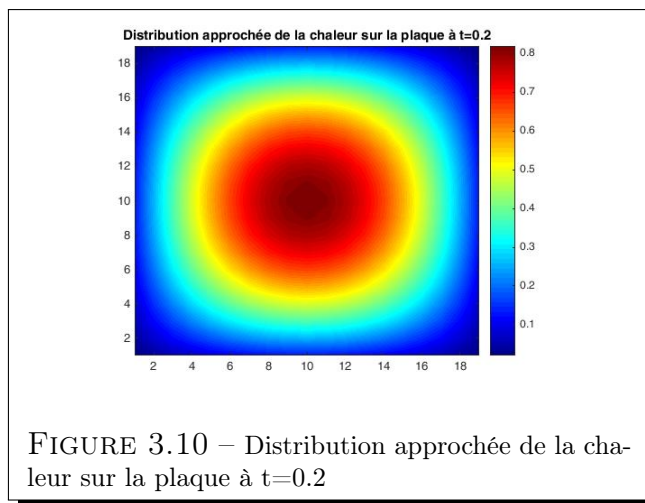
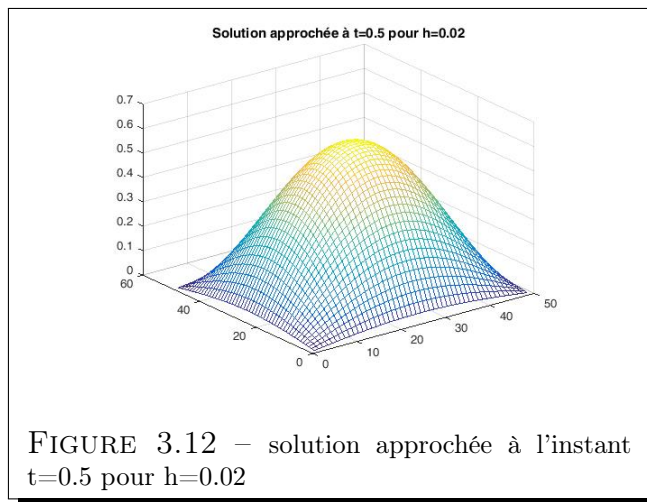
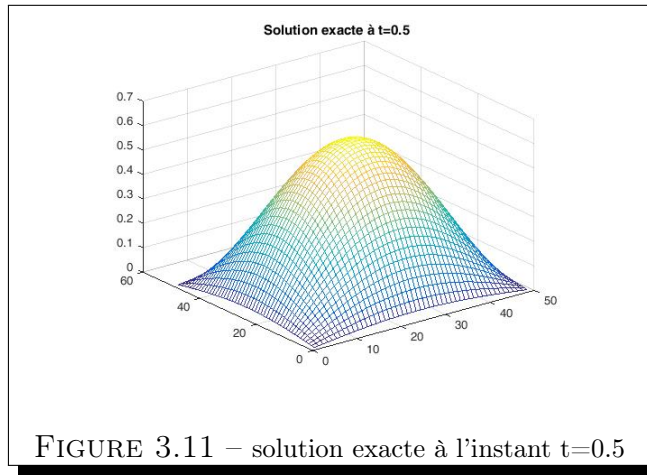
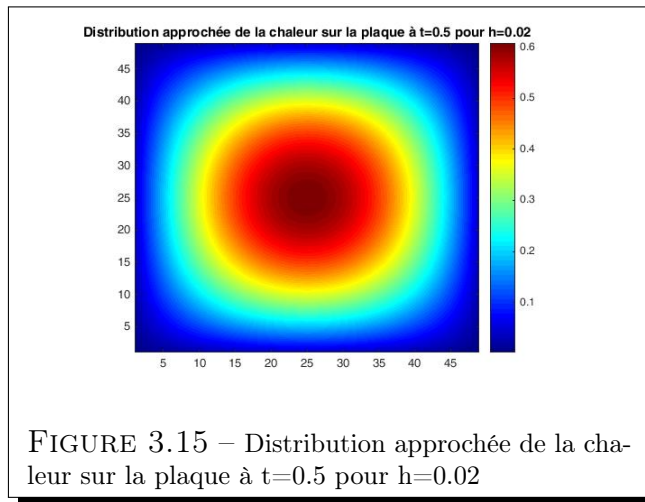
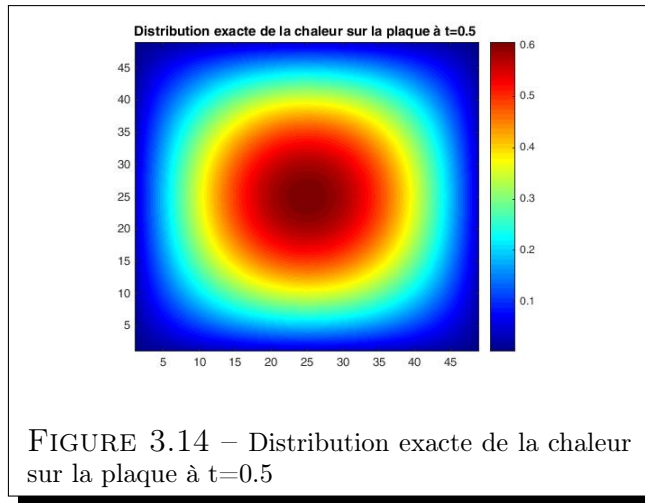
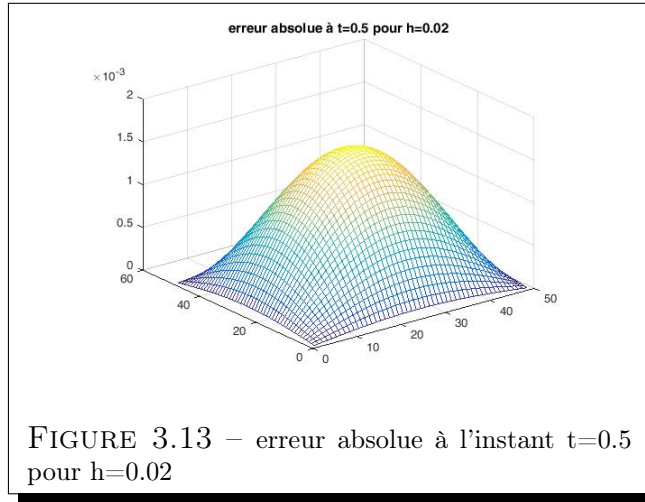


FIGURE 3.10 – Distribution approchée de la chaleur sur la plaque à  $t=0.2$

(II) En utilisant le schéma implicite avec  $mu = \frac{1}{\pi^2}$ ,  $h = 0.02$ ,  $\Delta t = 0.01$  et  $M = 50$ , on obtient les résultats suivant :







**Remarque 3.2.2.** *Les figures précédentes mettent en évidence la convergence du schéma implicite pour le problème (3.18).*

# Conclusion

Dans ce mémoire, après un bref rappel sur les équations aux dérivées partielles semi-linéaires d'ordre 2 sur le plan et l'étude de l'équation de la chaleur monodimensionnelle.

On a étudié en détail la méthode des différences finies. Cette étude porte sur la résolution de l'équation de poisson sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{R}^2$ . En particulier On a donné les résultats sur la consistence qui est une condition suffisante de convergence pour les problèmes linéaires stationnaires bien posés. La simulation numérique de deux problèmes stationnaires 1D et 2D sous environnement MATLAB nous a permis de valider la convergence de la méthode des différences finies pour ces problèmes.

On a terminé ce mémoire par la résolution numérique de l'équation de la chaleur sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{R}^2$ . En utilisant le  $\theta$ -schéma et en citant les résultats de consistence, de stabilité au sens de Von Neumann et de convergence. Cette résolution numérique était réalisée en implémentant la méthode des différences finies sous MATLAB . Les résultats de la simulation numérique nous ont permis de valider la convergence de la méthode des différences finies pour deux problèmes d'évolution linéaires paraboliques.

# Bibliographie

- [1] David.Claire Gosselet.Pierre, Équations aux dérivées partielles Cours et exercices corrigés, 2e édition Dunod, 2015.
- [2] Hervé REINHARD, Équations aux dérivées partielles, bordas paris 1987.
- [3] G.D. SMITH, Numerical Solution of Partial Differential : Equations Finite Difference Methods, 3rd Edition Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series 1985.
- [4] Alfio Quarteroni, Fausto Saleri, Paola Gervasio, Scientific Computing with MATLAB and Octave, Texts in Computational Science and Engineering 2, Springer Berlin Heidelberg 2010
- [5] Christophe Besse, Calcul Scientifique Cours, partie EDP paraboliques et dispersives, Institut de Mathématiques de Toulouse 2015-2017
- [6] J-F Scheid, Méthodes numériques pour la dynamique des fluides Cours Master2 Ingénierie mathématique et Outils Informatiques Option Calcul Scientifique, Université de Lorraine 2011-2012
- [7] Lax PD, Richtmyer RD, Survey of the stability of linear finite difference equations. Communications on Pure and Applied Mathematics 9(2) :267–293 (1956)
- [8] Nicolas Champagnat, Différences finies et analyse numérique matricielle : cours d'harmonisation en IMAFA 15 octobre 2010.

## Résumé

Dans ce travail, après un bref rappel sur les edp semilinéaires sur le plan, on présente la méthode des différences finies en l'appliquant à la résolution de l'équation de Poisson sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{R}^2$  et l'équation de la chaleur sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{R}^2$ . On donne les résultats de convergence. En utilisant l'environnement MATLAB on simule numériquement à l'aide de la méthode des différences finies l'équation de Poisson 1D et 2D et l'équation de la chaleur 1D et 2D.

## Summary

In this work, after a brief reminder of the semilinear pde on the plane, we present the method of finite differences by applying it to the resolution of the Poisson equation on  $\mathbb{R}$  and on  $\mathbb{R}^2$  and the heat equation on  $\mathbb{R}$  and on  $\mathbb{R}^2$ . We give the convergence results. Using the MATLAB environment, the 1D and 2D Poisson equation and the 1D and 2D heat equation are numerically simulated using the finite difference method.

## ملخص

في هذه المذكرة، بعد تذكير قصير حول المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية شبه الخطية على المستوى، نقدم طريقة الفروق المحدودة من خلال تطبيقها على حل معادلة Poisson على  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{R}^2$  ومعادلة الحرارة على  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{R}^2$ . نعطي نتائج التقارب. باستخدام برنامج MATLAB، يتم محاكاة معادلة Poisson 1D و 2D ومعادلة الحرارة 1D و 2D رقمياً باستخدام طريقة الفروق المحدودة.