RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématique»

Option :
«Analyse fonctionnelle et équation différentielle \ application »

Présenté Par :
Laalali Ahlem et Morsli Rachida

Sous L'intitulé :

Résultat d'existence pour une équation différentielle fractionnaire généralisé sur un domaine nom borné

Soutenu publiquement le 21/ 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Maazouz Kadda	MCA	Université Ibn Khaldoun-Tiaret	Président
Mr Benia Kheireddine	MCB	Université Ibn Khaldoun-Tiaret	Encadreur
Ms Bouazza Zoubida	MCB	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciement

Tout d'abord, nos remerciements vont aux ***ALLAH*** *qui nous a éclairé le chemin du savoir et de nous avoir donné le bon sens et la grande volonté pour réaliser ce modeste travail.*

Nous tenons à remercier notre encadreur, ***M.BENIA KHEIREDDINE****, qui a supervisé notre travail tout en nous laissant une grande marge de liberté, nous le remercions pour son encadrement, sa disponibilité et la pertinence de ses remarques tout au long de la réalisation de ce projet.*

Nous remercions également le président du jury ***M.MAAZOUZ KADDA****, et l ?examinateur* ***M.BOUAZZA ZOUBIDA*** *d'avoir accepté d'évaluer ce travail.*

Nous voulons, à cette occasion avec le plus grand honneur, remercier sincèrement tous nos enseignants. Enfin, nous tenons à exprimer nos sincères gratitudes aux les personnes qui ont vraiment contribué à l'élaboration de la présente de cet mémoire.

Nous espérons que ce travail aura la valeur souhaitée.

Merci à tous !

Dédicaces

Au nom de Dieu, par sa volante et son aide qui enrichit mon savoir. A mon pays sans quoi je n'airais pas franchi les portes de l'université.

À mes très chers parents : mohamed et r.khadija.

Mon très cher frère : Abdelkader.

Mes très chéres sœurs :Ibtissem ,Chourouk ,Hadjer ,Ikram.

À mes très chers sœurs et frères dans l'université.

À ce qui ont pris dans mon cœur, ma chéres amies.

Pour ceux et celles que je n'ai pas cité, ne croyez pas que je vous ai oublié, je vous porte toujours dans mon cœur.

À toute la promotion de master soutenant 2023-2024, a laquelle je souhaite beaucoup de réussite.

À tous sans exception je dédicace modeste travail.

Laalali Ahlem

Au nom de dieu,par sa volante et son aide qui enrichit mon savoir. A mon pays sans quoi je n'airais pas franchi les portes de l'université.

A mes très chers parents : Tayeb et C.Riala et mont grand mère qui m'ont encourage et conseillé pendant mes plus pénibles moments et qui m'ont guidé vers le droit chemin et la recherche du savoir.

Mon très cher frère : Abdelkader, Abderahmane, Cheikh.

Ma très chére sœurs :Abdia.

A mes très chers sœurs et frères dans l'université.

A ce qui ont pris dans mon cœur, mes chéres amies.

Pour ceux et celles que je n'ai pas cité, ne croyez pas que je vous ai oublié, je vous porte toujours dans mon cœur.

A toute la promotion de master soutenant 2023-2024, a laquelle je souhaite beaucoup de réussite.

A tous sans exception je dédicace modeste travail.

Morsli Rachida

Résumé

Ce mémoire traite l'existence de l'ensemble des solutions et sa structure topologique, d'un problème d'une fonction par rapport a une autre fonction(ψ-Riemann Liouville) dans un domaine nom-bornée $[0;\infty]$ dans un espace de Banach spécial. Notre approche est basée sur les théorèmes du point fixe combiné à une mesure de non-compacité. Un exemple est donné pour chaque cas afin de vérifier l'applicabilité de nos résultats.

abstract

This thesis deals with the existence of solution sets and its topological structure for fractional differential equation with ψ-Riemann-Liouville fractional derivative on $[0; \infty]$ in a special Banach space. Our approach is based on a fixed point theorem combined with measure of non-compactness. An example is given to show the applicability.

ملخص

تتناول هذه الأطروحة إيجاد مجموعة الحلول و بنيتها الطوبولوجية، معادلة تفاضلية كسرية مع مشتق كسري ψ ريمان ليوفيل على $(0;\infty)$ في فضاء بناخي مميز. النهج المعتمد هو نظرية النقطة الصامدة مع القياس الامتراص. يتم اعطاء مثال يوضح قابلية التطبيق.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est une branche des mathématiques qui s'intéresse à l'étude de concept mathématique où la dérivée et l'intégrale classique sont remplacées par une intégrale et une dérivée fractionnaire. Ce concept n'est pas nouveau, c'est origine remontent à la fin de 17^{eme} siècle l'époque de Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigne la n^{eme} dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à L'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), L'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des Mathématiques. Tout d'abord, plusieurs mathématiciens ont apporté des contributions importantes jusqu'à la moitié du dernier siècle : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel $(1823-1826)$, H. Holmgren $(1865-67)$, A.K.

Grünwald $(1867-1872)$, A.V. Letnikov $(1868-1872)$, H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), J. Hadamard (1892), O. Heaviside $(1892-1912)$, S. Pincherle (1902), G.H. Hardy and J.E. Littlewood $(1917-1928)$, H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis $(1924-1936)$, A. Zygmund $(1935-1945)$, E.R. Love $(1938-1996)$, A. Erdélyi $(1939-1965)$, H. Kober (1940), D.V. Widder (1941),M. Riesz (1949.

Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, dautres théories on fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo. A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme une théorie abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utilises. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie,la mécanique...

La théorie du point fixe est l'un des outils les plus efficaces et les plus fructueux utilisés en analyse non linéaire pour résoudre les équations intégrales fonctionnelles. Elle s'intéresse aux conditions d'existence d'un ou de plusieurs points fixes d'une cartographie. d'un ou de plusieurs points fixes d'une cartographie d'un espace topologique en lui-même. Brouwer a établi un résultat de point fixe qui est devenu le célèbre théorème de point fixe de Brouwer pour les espaces de dimension finie. espaces de dimension finie. En 1922, Banach a introduit son célèbre principe de contraction de Banach pour les espaces métriques complet qui garantissent l'existence et l'unicité du point fixe. Par la suite, en 1930, Schauder a étendu le théorème du point fixe de Brouwer aux espaces de dimension infinie en utilisant la condition de compacité. Il y a eu de nombreux développements dans le domaine du point fixe. Kuratowski, en 1930, a ouvert une nouvelle direction de recherche en introduisant de mesure de non-compacité, qui donne le degré de non-compacité pour les ensembles bornés. La mesure de non-compacité peut également être utilisée dans l'étude des ensembles monovalents et multivalués. l'étude des mappings monovalents et multivalués, en particulier dans la théorie des points fixes métriques et topologiques. La mesure de non-compacité combinée à certains arguments algébriques est bénéfique pour l'étude de formulations mathématiques, en particulier pour résoudre l'existence de solutions de certains problèmes non linéaires sous certaines conditions. de certains problèmes non linéaires dans certaines situations.

Très récemment, de nombreux articles de recherche ont été publiés concernant les équations différentielles fractionnaires dans les espaces de Banach, certains d'entre eux ont étudié les résultats d'existence des solutions sur des intervalles finis et dans un domaine non borné par des méthodes classiques. sur des intervalles finis et des domaines non bornés à l'aide d'outils classiques de l'analyse fonctionnelle et de la mesure de non compacité, voir par exemple les références suivantes :

Ce mémoire se décompose en quatre chapitres partagés de la façon suivante :

Chapitre 1. Regroupe les notations, les définitions des concepts utilisés de ce manuscrit. Nous introduisons quelques notions importantes pour le calcul fractionnaire, la non-compacité, la mesure et la théorie du point fixe.

Chapitre 2. L'objet du deuxième chapitre on donne une rappelle sur l'intégrale et la dérivé au sens de Riemann-Liouville, la non-compacité et les opérateur condensée, la mesure et la théorie du point fixe. **Chapitre 3.** Nous montrons l'existence de la solution du problème de valeur limite suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\psi} y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (0, +\infty), \\ \mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi} y(0^+) = a, \\ \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi} y(\infty) = b, \end{cases} \tag{0.1}$$

où ${}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha,\psi}$ désigne la dérivée fractionnaire ψ-Riemann-Liouville du côté gauche avec $1 < \alpha < 2$. L'opérateur $\mathfrak{I}_{0^+}^{(2-\alpha),\psi}$ représente l'intégrale fractionnaire ψ-Riemann-Liouville du côté gauche, E est un espace de Banach de norme $\|.\|$, $a, b \in E$, $f : (0, \infty) \times E \to E$. Nous prouvons l'existence de solutions, en appliquant le théorème du point fixe combiné à la technique de la mesure de non-compacité.

Chapitre 4. Illustration de l'applicabilité du théorème avec un exemple

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires et les théorèmes utilisé dans ce qui suit.

1.1 Fonctions spéciales

Nous avons besoin de présenter des fonctions qui sont très utilisées et qui permettent en général de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma et la fonction Bêta.

1.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire et la fonction Gamma. Son interprétation est simplement la généralisation du factoriel aux valeurs réelles et complexes.

Définition 1.1 [6] La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est généralement définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \quad z \in \mathbb{C} \;\; et \;\; Re(z) > 0.$$

Proposition 1.1 [6] Pour tout $z \in \mathbb{C}$ telque $Re(z)$>0, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, et $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.1 [6] La fonction Γ et définie et de classe $\mathbb{C}^{\infty} sur\,]0, +\infty[$, ses dérivées successive sont données par la formule

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(ln(x))^{(k)}t^{x-1}dt, z = x \in \,]0, +\infty[$$

Lemme 1.1 [6] Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Rez > 0$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \Gamma(z)$$

1.1.2 Fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.2 [6] La fonction Bêta (ou la fonction de Bessel de seconde espèce) est donnée par : pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ avec de $Re(z) > 0$, on a

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt.$$

Théorème 1.2 [6] soient $(p,q) \in \mathbb{C}^2$, avec $Re(p) > 0$ et $Re(q) > 0$. Alors

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Proposition 1.2 [6] pour tout $p, q \in \mathbb{C} : Re(p) > 0$ et $Re(q) > 0$. On a

1. $B(p,q) = B(q,p)$.
2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$.
3. $B(p,q+1) = \dfrac{q}{p} \times B(p+1,q) = \frac{q}{p+q} B(p,q)$.
4. $B(p+q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sint)^{2p-1} (cost)^{2q-1} dt.$

Proposition 1.3 [6] pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$.

$$\int_a^b (b-u)^{p-1} (u-a)^{q-1} du = (b-a)^{p+q-1} B(p,q).$$

Proposition 1.4 [6]

• La formule des compléments ;

soit $z \in \mathbb{C} : 0 < Re(z) < 1$, alors

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}.$$

• La formule de duplication,

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma((z) + \frac{1}{2}),$$

ou, de manière équivalente

$$B(z, \frac{1}{2}) = 2^{(2z-1)} B(z, z).$$

1.2 Quelques Espaces fonctionnelles

1.2.1 Continuité(Espace topologique)

$x_0 \in \bar{A}$ et $l \in X'$. On dit que f a pour limité l en x_0 si :

$$\forall V' \in \nu_{x'}(l), \exists V_X(x_0), (x \in A \cap V \Rightarrow f(x) \in V')$$

1.2.2 Fonction Continues(Espace métrique)

Définition 1.3 Soient $(X; d)$ et $(Y; d_0)$ deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. On dit que f est continue en un point $a \in X$, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in X; d(x; a) \leqslant \delta \Rightarrow d_0(f(x); f(a)) \leqslant \varepsilon$$

Définition 1.4 (Equicontinuité)

Soit F une partie de $C(X; Y)$ et x_0 un point de X. On dit que F est equicontinue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0, \forall f \in F, \forall y \in X, d_X(x_0, f(y)) < \varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x_0, f(y)) < \varepsilon$$

On dit que F est equicontinue sur X si F est equicontinue en tout point de X. Si l'on a la condition plus forte :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0, \forall f \in F, \forall (x, y) \in X^2, d_X(x, y) < \lambda \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

on dit que F est uniformément équicontinue.

1.2.3 Convexité

La notion de connexité est très importante en topologie.

Définition 1.5 (Ensemble convexe)

un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si

$$\forall x, y \in U, \quad \forall t \in [0,1] \text{ on a } tx + (1-t)y \in U.$$

Autrement dit U est convexe si pour tous points x, y de U, le segment $[x, y]$ est inclus dans U (c'est à dire, $\forall x, y \in U$ on a $[x, y] \subset U$).

Définition 1.6 (Fonction convexe)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe sur U si

$\forall x, y \in U, \quad \forall t \in [0,1]$

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x).$$

Autrement dit pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\alpha + \beta = 1$, on a

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Exemple 1.1 Les fonctions affines $f(x) = ax + b$ sont des fonctions convexes ou bien concaves. En effet, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\alpha + \beta = 1$

on a

$$f(\alpha x+\beta y) = a(\alpha x+\beta y)+b = a(\alpha x+\beta y)+(\alpha+\beta)b = \alpha(ax+b)+\beta(ay+b) \leq \alpha f(x)+\beta f(y).$$

- La somme de deux fonctions convexes est convexe.

- Le produit d'une fonction convexe par un scalaire n'est pas toujours convexe.

1.2.4 Compacité

La notion de compacité est d'une importance fondamentale car c'est elle qui permet par exemple de montrer que des suites admettent des sous-suites convergentes sous des hypothèses favorables portant principalement sur l'espace topologique auquel appartient la suite.

Définition 1.7 Un espace topologique X est compact s'il est séparé et si tout recouvrement de X par des ouverts admet un sous-recouvrement fini. Une partie A d'un espace topologique quelconque X est compacte si, munie de la topologie induite, c'est un espace topologique compact

Exemple 1.2

1. Tous les sous-ensembles finis d'un espace topologique séparé sont compacts.
2. Dans un espace topologique séparé, l'ensemble constitué par une suite convergente et sa limite est compact.
3. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle n'est pas compact, mais $[a, b]$ l'est

1.2.5 Espaces des fonctions continues

Soient $J = [a, b]$, $0 < a < b$ un intervalle fini ou infini du réel $[0, \infty]$ et E un réelle espaces de Banach de norme $\| \cdot \|$. $C(J, E)$ est l'espace des fonctions continues de J a valeurs dans E, muni de la norme

$$\sup_{x \in J} \mid y(x) \mid .$$

Soit $J = [a, b]$, $0 < a < b$ être un intervalle fini ou infini des axes positifs réels $[0, \infty)$ and $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $C^n(J, E)$ a l'espace de E-values fonctions y qui sont n fois continument dérivable sur J avec de norme

$$\|y\|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n} \|y^{(k)}\|_\infty = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in J} \|y^{(k)}(x)\|.$$

En particulier, pour $n = 0$, $C^0(J, E) = C(J, E)$.

Soit maintenant $J = [a, b]$, $0 \leq a < b < \infty$ un intervalle fini et $\mathcal{AC}(J, E)$ l'espace des fonctions à valeur E-qui sont absoluement continue en J. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{AC}^n(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions définie sur l'intervalle J a valeurs dans E qui est définie comme :

$$\mathcal{AC}^n(J, E) = \{y : J \to E : y \in C^n(J, E) \text{ alors } D^n y \in \mathcal{AC}(J, E)\}.$$

1.2.6 Espaces des fonctions mesurables

L'intégrale de Lebesgue désigne à la fois une théorie relative à l'intégration et à la mesure, et le résultat de l'intégration d'une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{R}^n$)muni de la mesure de Lebesgue.

Définition 1.8 (Riemann Liouville) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur l'axe réel et supposée continue par morceaux. Alors, pour tout intervalle fermé $[a, b]$, f est Riemann-intégrable et elle admet une primitive continue sur $[a, b]$. Si F désigne une primitive de f sur $[a, b]$, alors pour tout x dans $[a, b]$:

$$\int_a^x f(u)du = F(x) - F(a)$$

Fonction mesurable

Le couple (T, E) est appelé un espace mesurable. Soit (E, T_E) et (F, T_F) deux espaces mesurables f une application de E dans F. On dit que f est (T_E, T_F)-mesurables si

$$\forall A \in T_F : f^{-1}(A) \subset T_E$$

Intégrale de Lebsgue

Soient $J = [a, b]$, $0 < a < b$ un intervalle fini ou infini du réel $[0, \infty]$ et E un réel espaces de Banach de norme $\| \cdot \|$. On note $L^1(J, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables de Lebesgue y sur J de norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_a^b |y(t)|dt,$$

une fonctions mesurable $y : J \to E$ est intégrable de Bochner si et seulement $\|y\|$ est intégrable de Lebesgue. Soit $L^1(J; E)$ l'espace des fonctions intégrable de Bochner à valeurs E sur J de norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_a^b \|y(t)\|dt,$$

Intégrale de Bochner

l'intégrale de Bochner, qui porte le nom de son créateur Salomon Bochner, étend la définition de l'intégrale de Lebesgue aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach, comme limite d'intégrales de fonctions étagées.

Théorème 1.3 Soit fn une suite de fonctions mesurables sur G à valeurs dans E. Si $fn \longrightarrow f$ simplement, alors f est mesurable. Comme dans le cas complexe on définit les fonctions simple comme une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles de mesure fini, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1} \mu a_i 1_{Ai},$$

où $a_i \in E \; et \; \mu(A_i) < \infty$

Définition 1.9 (μ-mesurabilité) Soient (G, M, μ) un espace mesuré et $f : G \longrightarrow E$. On dit que f est μ-mesurable, s'il existe une suite de fonctions simples qui converge μ-presque partout vers f.

Théorème 1.4 Soit fn une suite de fonctions μ-mesurables sur G à valeurs dans E. Si $fn \longrightarrow f$ presque partout, alors f est μ-mesurable.

Définition 1.10 Une fonction $f : G \longrightarrow E$ est dite intégrable s'il existe une suite de fonctions simples (s_n) telle que

(i) $s_n \longrightarrow$ μ-presque partout,

(ii) $\int_G \parallel s_n - f \parallel d\mu \longrightarrow 0$

On dit que s_n est une suite approximante de f.

Théorème 1.5 ((Critère d'intégrabilité) Une fonction $f : G \rightarrow E$ est intégrable si et seulement si f est μ-mesurable et $\int_G \parallel f \parallel d\mu < \infty$.

Définition 1.11 Soit $f : G \longrightarrow E$ intégrable, on définit l'intégrale de f comme suit

$$\int_G f d\mu = \lim_n \int_G s_n d\mu$$

où s_n est une suite approximante.

Chapitre 2

Les intégrale et les dérivés fractionnaire

Dans ce chapitre nous présentons quelques définitions, résultats et théories. propriétés principalement liées aux intégrales et aux dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, la mesure de nom compacité et opérateur condensée et quelque théorème de point fixe.

2.1 Les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires

2.1.1 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 2.1 [10] Soit $f : [a; b\} \to \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue,b pouvant être fini ou infini. Une primitive de f est donnée par :

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)dt \right) ds$$

Le théorème de Fubini nous ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x-t) f(t)dt$$

Puis une itération donne

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

Définition 2.2 [10] Soit $f : [a; b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle d'ordre intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale suivante :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

où est un réel (ou même complexe) convenablement choisi.

2.1.2 Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.3 [6] Soient α un réel strictement positif,

$n \in \mathbb{N}$ telle que $[\alpha] = n + 1$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

une fonction définie par

$$D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

On note

$$(I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

2.1.3 Intégrale et dérivée fractionnaire par rapport une autre fonction

Définition 2.4 [8] Les définitions et certaines propriétés des intégrales fractionnées et des dérivés d'une fonction par rapport a une autre fonction ψ sont présentées dans cette section. Soit $(a, b)(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ un intervalle fini ou infini de la droite réelle $\mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Soit aussi $\psi(x)$ une fonction monotone croissante et positive sur $(a, b]$, ayant un dérivé continu $\psi'(x)$ en (a, b). L'intégrale fractionnaire d'une fonction f par rapport à une autre fonction ψ sur [a, b] et défini par :

$$(I_{a+}^{\psi;\alpha})f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\psi(x) - \psi(0))^{\alpha-1} \psi'(t) f(t) dt$$

où

$$x > a; \alpha > 0,$$

Dans ce que suit en prend la notation :

$$(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha} = \psi_{\alpha}(x, t)$$

alors

$$(I_{a+}^{\psi;\alpha})f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi_{\alpha-1}(x, t) \psi'(t) f(t) dt$$

où

$$x > \alpha; \alpha > 0,$$

Si $a = 0$ et, nous utiliserons la notation suivant :

$$(I_{0+}^{\psi;\alpha})f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \psi_{\alpha-1}(x,t)\psi'(t)f(t)dt$$

où

$$x > 0; \alpha > 0,$$

Proposition 2.1 [8] Soit $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. Alors

$$(I_{0+}^{\psi;\alpha} \exp^{\lambda\psi(t)})(x) = \lambda^{-\alpha} \exp^{\lambda\psi(x)}.$$

La propriété de semi-groupe est également valable.

Lemme 2.1 [8] Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Puis les relations

$$(I_{a+}^{\psi;\alpha} I_{a+}^{\psi;\beta})f(x) = (I_{a+}^{\psi;\alpha+\beta})f(x)$$

et

$$(I_{0+}^{\psi;\alpha} I_{0+}^{\psi;\beta})f(x) = (I_{0+}^{\psi;\alpha+\beta})f(x)$$

Soit $\psi'(x) \neq 0(-\infty \leqq a < x < b \leqq \infty)$ et $\alpha \geqq 0(\alpha \neq 0)$. Aussi $n = [\alpha] + 1$ ainsi que $D = \dfrac{d}{dx}$. La fraction Riemann-Liouville et Liouville dérivées d'une fonction y par rapport à ψ d'ordre $\alpha(\alpha) \geqq 0; \alpha \neq 0)$, correspondant aux intégrales de Riemann-Liouville et de Liouville dans, sont définis par

$$(D_0^{\psi;\alpha})y(x) := \left(\frac{1}{\psi'(x)} D\right)^n (I_{a+}^{\psi;n-\alpha})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(x)} D \right)^n \int_0^x \psi_{n-\alpha-1}(x,t)\psi'(t) f(t) dt (x > a),$$

et

$$(D_{0+}^{\psi;\alpha} y)(x) := \left(\frac{1}{\psi'(x)} D \right)^n (I_{0+}^{\psi;n-\alpha})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(x)} D \right)^n \int_0^x \psi_{n-\alpha-1}(x,t)\psi'(t) f(t) dt (x > 0).$$

respectivement.

Remarque 2.1 [8] Lorsque $\psi(x) = x$, correspond à Riemann-Liouville. Dérivés fractionnaires et

$$(D_{a+}^{x;\alpha} y)(x) = (D_{a+}^{\alpha}) y(x)$$

avec des dérivés fractionnels de Liouville et

$$(D_{0+}^{x;\alpha} y)(x) = (D_{0+}^{\alpha}) y(x)$$

Lorsque $\alpha = n \in N$, les dérivées fractionnaires générales ci-dessus ont les formulaires suivants :

$$(D_{a+}^{\psi;n} y)(x) = (D_{a+}^{\psi;n}) y(x) = \left(\frac{1}{\psi(x)} \frac{d}{dx} \right)^n y(x),$$

En particulier, nous avons

$$(D_{a+}^{\psi;1} y)(x) = (D_{a+}^{\psi;1}) y(x) = \frac{y'(x)}{\psi(x)}.$$

Les résultats qui suivent généralisent et sont comparables

Lemme 2.2 [8][4] soit $(\alpha \geqslant 0)$ et $(\beta) > 0$. si $y_+(x) = [\psi(x) - \psi(\alpha)]^{\beta-1}$ alors

$$(D_{0+}^{\psi;\alpha} y+)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} [\psi(x) - \psi(0)]^{\beta-\alpha+1}$$

Lemme 2.3 [8][4] $\alpha, \xi \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons

1. $\mathfrak{I}_{0^+}^{\alpha,\psi}\psi_{\xi-1}(t,0) = \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\psi+\xi)}\psi_{\psi+\xi-1}(t,0)$.

2. si $1 < \alpha < 2$, nous avons

   (i_1) ${}^{RL}D_{0+}^{\psi;\alpha-1}\psi_{\alpha-1}(t,0) = \Gamma(\alpha)$ et ${}^{RL}D_{0+}^{\psi;\alpha-1}\psi_{\alpha-2}(t,0) = 0$,

   (i_2) ${}^{RL}D_{0+}^{\psi;\alpha-1}\psi_{\alpha-1}(t,0) ={}^{RL} D_{0+}^{\psi;\alpha-1}\psi_{\alpha-2}(t,0) = 0$.

Lemme 2.4 si $\alpha > 0$ alors

1. $$ {}^{RL}D_{a+}^{\psi;\alpha}f(x) = D_{a+}^{\psi;\alpha}f(x) - \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n-1}(\psi(x)-\psi(a))^{x-k}\right]. $$

2. $$ D_a^{\psi;\alpha}I_a^{\psi;\alpha} = f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k\left(\psi(x)-\psi(a)\right)^{x-k}. $$

Proposition 2.2 [8] soit $\alpha \geqq 0(\alpha \neq 0)$et $\lambda > 0$.

$$ (D_{0+}^{\psi;\alpha}e^{\lambda\psi(t)})(x) = \lambda^{\alpha}e^{\lambda\psi(t)} $$

Semblable à la fraction de Riemann-Liouville et aux propriétés de la fraction de Liouville dérivés, il existe les propriétés correspondantes pour les dérivées fractionnaires générales

2.2 Mesures de non-compacité (MNC) et les opérateurs condensés

La mesure de non compacité est un outil trais utile dans les espaces de Banach, ils sont largement utilisé dans la théorie du point fixe, les équations différentielles, les équations fonctionnelles, les intégrales et équations integro-différentielles,....etc [3]

2.2.1 Généralité sur la mesure de non-compacité

Définition 2.5 [2] Soit D un sous-ensemble borné de E. La mesure de Kuratowski de non-compacité ϑ du sous-ensemble D est définie comme :

$$\vartheta(D) = \inf\{e > 0 : \ D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i \text{ pour certains } D_i \text{ avec } diam(D_i) \leq e \text{ pour } 1 \leq i \leq n < \infty\}.$$

Ici, $diam(D)$ désigne le diamètre d'un ensemble $D \subset E$, c'est-à-dire,

$$diam(D) := \sup\{d(x, y) | x, y \in D\}.$$

Une autre mesure importante de la nom-compacité est la mesure dite de Hausdorff(ou boule) de la nom-compacité définie comme suit :

Définition 2.6 [2] Soit D un sous-ensemble borné de E. La mesure de Hausdorff de non-compacité du sous-ensemble D est définie par :

$$\chi(D) = \inf\{\varepsilon : D \text{ a un fini } \ \varepsilon\text{-net dans in } E\}.$$

Remarque 2.2 [2] Les mesures χ et ϑ sont équivalentes, c'est-à-dire que pour tout sous-ensemble borné D de E, l'estimation suivante est valable,

$$\chi(D) \leq \vartheta(D) \leq 2\chi(D)$$

Définition 2.7 [2] Une fonction $\mu : M_E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est dite mesure de non-compacité sur E si les conditions suivantes sont remplies :

1. La famille $ker\mu = X \in M_E : \mu(X) = 0$ est non vide et $ker\mu \subset N_E$;
2. $X \subset Y \implies \mu(X) \leq \mu(Y)$;
3. $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$;
4. $\mu(convX) = \mu(X)$;
5. $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ pour $\lambda \in [0,1]$;
6. Si (X_n) est une séquence d'ensembles classés de M_E
   telle que $X_{n+1} \subset X_n, \bar{X}_n = (n = 1, 2, \cdots)$ et si $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$, puis l'ensemble d'intersection$X_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} X_n$ est nom vide et $X_\infty \in ker\mu$.

Définition 2.8 [2] La famille $ker\mu$ décrite dans l'axiome 1 est appelée le noyau de la mesure de non-compacité μ. Une mesure μ est dite sous-linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. $\mu(X + Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.

La Mesure de non-compacité de Kuratowskii

[9] Kuratowski fut le premier (1930) a introduire et étudier la notion de la mesure de non-compacité

Définition 2.9 [1][7] Soit$D \in S_b(E)$. La mesure de la non-compacité de Kuratowski ϑ du sous-ensemble D est défini comme suit :

$\vartheta(D) = \inf\{e > 0 : \ D\}$ admet une couverture finie par des ensembles de diamètre $\leq e\}$.

Lemme 2.5 Soit $D \in S_b(E)$ et $\varepsilon > 0$. Ensuite, il y a une séquence $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$, de telle sorte que

$$\vartheta(D) \leq 2\vartheta(\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}) + \varepsilon.$$

Lemme 2.6 [5] Si D est un sous-ensemble equicontinue et borné de $\mathcal{C}([a,b],E)$, alors $\vartheta(D(.)) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^+)$

$$\vartheta_{\mathcal{C}}(D) = \max_{r\in[a,b]} \vartheta(D(r)),\ \vartheta\left(\left\{\int_a^b w(r)dr : w \in D\right\}\right) \leq \int_a^b \vartheta(D(r))dr,$$

où $D(r) = \{w(r) : w \in D\}$ et $\vartheta_{\mathcal{C}}$ est la mesure de non-compacité sur l'espace $\mathcal{C}([a,b],E)$.

2.2.2 Opérateur condensé

Définition 2.10 Soit E un espace de Banach.

1. Un opérateur continu $f : D(f) \subset E \longrightarrow E$ est dit χ-condensé si pour tout $\Omega \subset D(f), \chi[f(\Omega)] \geq \chi(\Omega)$ implique Ω est relativement compact. Ou d'une manière équivalente, Un opérateur continu $f : D(f) \subset E \longrightarrow E$ est dit χ-condensé si pour tout $\Omega \subset D(f)$, qui n'est relativement compact, on a

$$\chi[f(\Omega)] < \chi(\Omega).$$

2. Un opérateur continu f est dit (q,χ)-condensé si pour tout $\Omega \subset D(f)$:

$$\chi[f(\Omega)] \leqslant q\chi(\Omega).$$

Définition 2.11 Soit E_1 et E_2 deux espaces de Banach et μ_1 et μ_2 des mesures arbitraires de non compacité sur E_1 et E_2 respectivement. Un opérateur F de E_1 à E_2 est est appelé opérateur (μ_1, μ_2)-condensé s'il est continu et pour tout ensemble non compact borné $D \subset E_1$, l'inégalité suivante est vérifiée,

$$\mu_2(F(D)) < \mu_1(D).$$

Lorsque $E_1 = E_2$ et $\mu_1 = \mu_2$ nous dirons simplement que F est un opérateur μ-condensé. Meir-Keeler a introduit depuis 1969 la notion de Meir-Keeler dans un espace métrique.

Théorème 2.1 Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, $M \subset E_1$ un sous ensemble borné et $f : M \longrightarrow E_2$ un opérateur continu. Supposons que :

(i) f admet une représentation diagonale $f(x) = \phi(x, x)$ où $\phi : M \times E_2 \longrightarrow E_2$;

(ii) Pour tout $y \in E_2$, l'ensemble $\Phi(M \times y)$ est relativement compact ;

(iii) Pour tout $x \in M$ l'opérateur $\phi(x, .)$ est q-Lipschitzien. Alors l'opérateur f est $(q, \chi$-condensé).

Théorème de point fixe pour les opérateurs condensés de type Meir-Keeler

Définition 2.12 Soit C un sous-ensemble non vide d'un espace Banach E et μ un arbitraire une mesure de non-compacité sur E.On dit que $T : C \longrightarrow C$

est un opérateur condensé de type Meir-Keeler si pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\varepsilon \leqslant \mu(X) < \varepsilon + \delta \Longrightarrow \mu(T(X)) < \varepsilon,$$

Théorème 2.2 Soit μ une mesure de non-compacité sur E et G un sous-ensemble fermé, borné et convexe de E et Δ est un opérateur de G en G, Si Δ est un opérateur condensé de type Meir-Keeler et continu, alors l'ensemble $\{w \in G : \Delta(w) = w\}$ est non vide et compact.

2.3 Théorèmes de point fixe

Définition 2.13 Soient (X, d) un espace métrique, une application f est défini par $f : X \to X$, on dit que $x \in X$est un point fixe de $f$si $f(x) = x$.

2.3.1 Théorème de point fixe de Banach

Vers 1922, Banach reconnu le rôle fondamental de la complétude métrique, il énonce le théorème suivant :

Théorème 2.3 (Théorème de Banach(1922)) Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et soit$f : E \to E$ une application α-contraction i.e il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$, pour tout $x, y \in E$. Alors f possède un unique point fixe.

2.3.2 Théorème de point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe.

Théorème 2.4 (Théorème de Brouwer (1910)) Soit C un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.

2.3.3 Théorème de point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder est une généralisation de théorème de Brouwer, il s'énonce ainsi :

Théorème 2.5 (Théorème de Schauder(1930)) Soit C un sous ensemble fermé et convexe d'un espace de Banach E et $f : C \to C$ une application continue telle que $f(C)$ est relativement compact. Alors f possède un point fixe. Plus généralement, si C est un compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.

Chapitre 3

Résultats d'existence du problème

3.1 Le cadre fonctionnelle pour l'opérateur

Ce chapitre étudie l'existence de solutions sur un domaine non borné du problème suivant

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\psi} y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (0, +\infty), \\ \mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi} y(0^+) = a, \\ \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi} y(\infty) = b, \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $\mathcal{D}^{\alpha,\psi}$ désigne la dérivé fractionnelle ψ-Riemann-Liouville à gauche avec $1 < \alpha < 2$. L'opérateur $\mathfrak{I}^{2-\alpha,\psi}$ 0^+ désigne l'intégrale fractionnelle de Riemann-Liouville à gauche, E est un espace Banach avec la norme $\|.\|$, $a, b \in E$, $f : (0, \infty) \times E \times E$ une fonction satisfaisant certains conditions spécifiées et $\psi \in \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ satisfait de $\psi'(t) > 0$, pour tout $t \in [0, \infty)$.

Lemme 3.1 Soit $1 < \alpha < 2$,

$$\begin{aligned} y(t) \; &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[b - \textstyle\int_0^\infty \psi'(s) f(s, y(s) ds \psi_{\alpha-1}(t,0)] + \dfrac{a\psi_{\alpha-2}(t,0)}{\Gamma(\alpha-1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \textstyle\int_0^t \psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t,s) f(s, y(s) ds \end{aligned} \tag{3.2}$$

est une solution de problem (3.5)

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\psi} y(t) = h(t), \quad t \in (0, +\infty), \\ \mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi} y(0^+) = a, \\ \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi} y(\infty) = b, \end{cases} \tag{3.3}$$

Démonstration Soit y est une solution de problem(3.5). Si et seulement si

On applique $\mathfrak{I}_{0^+}^{\alpha,\psi}$ au deux cotés de l'équation du problem (3.2). On obtient

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{\alpha,\psi} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\psi} y(t) = \mathfrak{I}_{0^+}^{\alpha,\psi} h(t)$$

D'autre part on a grasse a les propriété de la dérivé de ψ-Riemann-Liouville

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\psi} \left(\mathfrak{I}_{0^+}^{\alpha,\psi} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\psi} - y(t) \right) = 0$$

En utilisant lemme (2.3), on trouve

$$y(t) = -c_1\psi_{\alpha-1} - c_2\psi_{\alpha-2} + \mathfrak{I}_{0^+}^{\alpha,\psi} h(t) \tag{3.4}$$

En applique $\mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi}$ au deux côtés de equation (3.4)

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi} y(t) = -c_1 \mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi} \psi_{\alpha-1} - c_2 \mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi} \psi_{\alpha-2} + \mathfrak{I}_{0^+}^{2,\psi} h(t) = a$$

par le lemme (2.3) on a

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi} \psi_{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2)} \psi_1(t,0)$$

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi}\psi_{\alpha-2} = \Gamma(\alpha-1)$$

En prenant t tends vers 0,On obtient

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi}y(t) = -\left(\Gamma(\alpha-1)\right)c_2 = a$$

alors en trouve

$$-c_2 = \frac{a}{\Gamma(\alpha-1)}$$

En applique $\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi}y(\infty) = b$.

au deux côtés de l'équation (3.4) et en utilise lemme (2.3),

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\psi}y(t) = -c_1\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi}\psi_{\alpha-1} - c_2\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi}\psi_{\alpha-2} + \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi}\mathfrak{I}_{0^+}^{\alpha,\psi}h(t) = b$$

.

En utilisant le lemme (2.3)

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi}\psi_{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)$$

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi}\psi_{\alpha-2} = 0$$

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi}\mathfrak{I}_{0^+}^{\alpha,\psi} = \mathfrak{I}_{0^+}^{1}h(t)$$

Alors on a

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi}y(t) = -c_1\Gamma(\alpha) + \mathfrak{I}_{0^+}^{1}h(t)$$

$$b = -c_1\Gamma(\alpha) + \mathfrak{I}_{0^+}^{1}h(t)$$

$$-c_1 = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} + \mathfrak{I}_{0^+}^{1}h(t)$$

il s'ensuit que

$$-c_2 = \frac{a}{\Gamma(\alpha-1)}$$

$$-c_1 = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} + \mathfrak{I}^1_{0^+}h(t)$$

Alors on obtient

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[b - \int_0^\infty \psi'(s)f(s,y(s)ds]\psi_{\alpha-1}(t,0) + \frac{a\psi_{\alpha-2}(t,0)}{\Gamma(\alpha-1)}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t,s)f(s,y(s)ds.$$

Dans le sens contraire Soit $y \in B$ une solution de l'équation 3.2. En applique $\mathfrak{I}^{2-\alpha,\psi}_{0^+}$ au deux côtés de l'équation(3.2)

$$\mathfrak{I}^{2-\alpha,\psi}_{0^+}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[b - \int_0^\infty \psi'(t)f(t,y(t)dt]\psi_1(t,0) + a + \mathfrak{I}^{2,\psi}_{0^+}f(t,y(t)).$$

Par le lemme (2.3)

$$\mathfrak{I}^{2-\alpha,\psi}_{0^+}\psi_{\alpha-1}(t,0) = 0$$

$$\mathfrak{I}^{2-\alpha,\psi}_{0^+}\psi_{\alpha-2}(t,0) = 0$$

En prenant t tends vers 0,

On trouve $\mathcal{D}^{2-\alpha,\psi}_{0^+}y(0) = a$.

En applique $\mathfrak{I}^{2-\alpha,\psi}_{0^+}$ au deux côtés de (3.2)

$$\mathcal{D}^{2-\alpha,\psi}_{0^+}y(t) = b - \int_0^\infty \psi'(t)f(t,y(t)dt + I^{1,\psi}_{0^+}f(t,y(t)).$$

Par le lemme (2.3)

$$\mathcal{D}^{\alpha-1,\psi}_{0^+}\psi_{\alpha-1} = \Gamma(\alpha-1)$$

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi}\psi_{\alpha-2} = 0$$

En prenant $t \longrightarrow \infty$,

On trouve $\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi}y(\infty) = b$

Ensuite, en applique $\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\psi}$

au deux côtés de (3.2) et en utilisant (2.3),

nous obtenons $\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\psi}y(t) = f(t, y(t))$ les résultats sont complètement prouvés.

$\square$

Soit $I \subset (0, \infty)$ un intervalle compact et notons $\mathcal{C}(I, E)$ l'espace de Banach de fonctions continues $y : I \to E$ avec la norme usuelle

$$\|y\|_\infty = \sup\{\|y(t)\|,\ t \in I\}.$$

$L^1(J, E)$ l'espace des fonctions intégrable de Bochner values E sur J avec la norme

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^{+\infty} \|f(t)\|dt.$$

Définition 3.1 Une fonction $y \in \mathcal{C}_{\alpha,\psi}([0, +\infty))$ est dire une solution de problème(3.5)-(3.3) si y satisfait l'équation ${}^{RL}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t))$ et les conditions (3.2)$-$(3.3).

soit

$$B = \{y \in \mathcal{C}_{\alpha,\psi}([0, \infty), E) : \|y\|_\infty \leq R\},$$

Pour tout $\eta > -1$ et $s, t \in [0, \infty)$ alors $t \geq s$, on pose $\psi_\eta(t,s) = (\psi(t) - \psi(s))^\eta$. Nous considérons l'espace de Banach suivant

$$\mathcal{C}_{\alpha,\psi}([0,\infty), E) = \{y \in \mathcal{C}((0,\infty), E) : \lim_{t\to 0} \psi_{2-\alpha}(t,0)y(t) \text{ et } \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)y(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)} \text{ exists et finite}\}$$

équipé de la norme

$$\|y\|_\alpha^\psi = \sup\left\{\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)\|y(t)\|}{1+\psi_\alpha(t,0)},\ t \in (0,\infty)\right\}.$$

3.1.1 Les hypothèse sur les fonction de problem

On va présenter des hypothèses qui vent nous permettre de prouver l'existence de l'ensemble solution :

(H$_1$) $f : (0,\infty)\times E \to E$ est une fonction permanente et pour tous x, y et $(0,T] \subset (0,\infty)$:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq A\psi_{2-\alpha}(t,0)\|x-y\|, \text{ tel que } t \in (0,T],$$

où $A \in \mathbb{R}^+$.

(H$_2$) Il existe des fonctions non négatives $a, b \in \mathcal{C}([0,\infty), \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\|f(t,u)\| \leq a(t) + \psi_{2-\alpha}(t,0)b(t)\|u\| \text{ pour tout } t \in (0,\infty) \text{ et } \ u \in E,$$

avec

$$\int_0^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]b(s)dt < \Gamma(\alpha),$$

et

$$\int_0^\infty \psi'(s)a(s)dt < \infty.$$

($\mathbf{H_3}$) Il existe une fonction $\ell \in \mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}^+)$, Ainsi pour chaque ensemble non vide, borné $\Omega \subset C_{\alpha,\psi}((0,\infty),E)$

$$\vartheta(f(t,\Omega(t))) \leq \ell(t)\psi_{2-\alpha}(t,0)\vartheta(\Omega(t)), \quad \text{pour tout } t \in (0,\infty) \text{ avec,}$$

$$\int_0^\infty \psi'(s)(1+\psi_\alpha(s,0)\ell(s)ds \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{2}.$$

($\mathbf{H_4}$) Il existe$R > 0$ telle que

$$R > \frac{\|b\| + (\alpha-1)\|a\| + \int_0^\infty \psi'(s)a(s)ds}{\Gamma(\alpha) - \int_0^\infty \psi'(s)(1+\psi_\alpha(s,0))b(s)ds}.$$

Soit

$$B = \{y \in \mathcal{C}_{\alpha,\psi}([0,\infty),E) : \|y\|_\psi^\alpha \leq R\},$$

telle que R soit un réel strictement positif.

Remarque 3.1 il existe un nombre réel positif M telle que

$$\int_0^\infty \psi'(s)\|f(s,y(s))\|ds \leq M, \text{ pour tout } y \in B.$$

Démonstration De ($\mathbf{H_2}$) ,On a :

$$\|f(t,u)\| \leq a(t) + \psi_{2-\alpha}(t,0)b(t)\|u\| \text{ pour tous } t \in (0,\infty) \text{ and } \ u \in E,$$

On multiplié les deux cotés de l'inégalité $\psi'(t)$

$$\psi'(t)\|f(t,u)\| \leq \psi'(t)a(t) + \psi'(t)[\psi_{2-\alpha}(t,0)b(t)]\|u\|,$$

on intégrons sur $[0,\infty[$

$$\int_0^{+\infty} \psi'(s)\|f(t,u)\|ds \leq \int_0^{+\infty} \psi'(s)a(t)ds + \int_0^{+\infty} \psi'(s)[\psi_{2-\alpha}(s,0)b(s)]\|u\|ds,$$

par les conditions $(\mathbf{H_2})$

$$\int_0^\infty \psi'(s)a(t)ds < \infty$$

Si

$$\psi(s,0) \leq 1 \text{ alors } \psi_{2-\alpha}(s,0) \leq 1 + \psi_\alpha(s,0)$$

$$(\psi(s,0) > 1 \text{ alors } \psi_{2-\alpha}(s,0)) \leq 1 + \psi_\alpha(s,0)$$

donc on a

$$\int_0^{+\infty} \psi'(s)[\psi_{2-\alpha}(s,0)b(s)]\|u\|ds \leq \int_0^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]b(s)dt < \Gamma(\alpha)$$

3.1.2 Le theorem d'existence pour le problem fractionnaire nom borné

On définie l'opérateur N (consistance de lemme (3.1) $N : \mathcal{C}_{\alpha,\psi}([0,\infty), E) \to \mathcal{C}_{\alpha,\psi}([0,\infty), E)$ Définie par

$$\begin{aligned} Ny(t) = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}[b - \int_0^\infty \psi'(t)f(t,y(t)dt]\psi_{\alpha-1}(t,0) + \frac{a\psi_{\alpha-2}(t,0)}{\Gamma(\alpha-1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t,s)f(s,y(s)ds. \end{aligned}$$

Le théorème ci-dessous est le résultat principal.

Théorème 3.1 Supposons que les conditions $(\mathbf{H_1})-(\mathbf{H_4})$ Ils sont valides. Puis le problème

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\psi} y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (0, +\infty), \\ \mathfrak{I}_{0^+}^{2-\alpha,\psi} y(0^+) = a, \\ \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-1,\psi} y(\infty) = b, \end{cases} \tag{3.5}$$

possède au moins une solution

Démonstration Par la définition de l'opérateur N par Lemme 2.3, Nous remarquons que les points fixes de l'opérateur N sont des solutions aux problème (3.5) – (3.3). Pour cette raison, Il suffit donc de vérifier les axiomes du théorème 2.2, il est fait en quatre étapes.

Soit

$$B = \{y \in \mathcal{C}_{\alpha,\psi}([0, \infty), E) : \|y\|_\infty \leq R\},$$

telle que R c'est un réel strictement positif.

Étape 1 : N est borné sur B.

Soit $y \in \mathcal{C}_{\alpha,\psi}([0, \infty), E)$, de $(\mathbf{H_2})$

$$\|f(t, u)\| \leq a(t) + \psi_{2-\alpha}(t, 0)b(t)\|u\| \text{ pour tout } t \in (0, \infty) \text{ et } \ u \in E,$$

avec

$$\int_0^\infty \psi'(s)[1 + \psi_\alpha(s, 0)]b(s)dt < \Gamma(\alpha), \ \int_0^\infty \psi'(s)a(s)dt < \infty.$$

Il est facile de déduire que $Ny \in \mathcal{C}_{\alpha,\psi}([0, \infty), E)$. Utiliser $(\mathbf{H_2})$

$$\|f(t, u)\| \leq a(t) + \psi_{2-\alpha}(t, 0)b(t)\|u\| \text{ pour tout } t \in (0, \infty) \text{ et } \ u \in E,$$

avec

$$\int_0^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]b(s)dt < \Gamma(\alpha),\ \int_0^\infty \psi'(s)a(s)dt < \infty.$$

, pour tous $y \in B$ et $t \in (0,\infty)$ On obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)\|N(y)(t)\|}{1+\psi_\alpha(t,0)}\\
&\leq \frac{\psi_{2-\alpha}\|b\|}{1+\psi_\alpha(t,0)\Gamma(\alpha)} + \frac{\psi_{2-\alpha}}{1+\psi_\alpha(t,0)}\int_0^\infty \psi'(t)\|f(t,y(t)\|dt]\psi_{\alpha-1}(t,0)\\
&+ \frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)\|a\|\psi_{\alpha-2}(t,0)}{1+\psi_\alpha(t,0)\Gamma(\alpha-1)}\\
&+ \frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)\int_0^t \psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t,s)\|f(s,y(s)ds\|}{1+\psi_\alpha(t,0)\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

En utilisant la remarque (3.1),

On trouve

$$\frac{\psi_{2-\alpha}\|b\|}{1+\psi_\alpha(t,0)\Gamma(\alpha)} + \frac{\psi_{2-\alpha}}{1+\psi_\alpha(t,0)}\int_0^\infty \psi'(t)\|f(t,y(t)\|dt]\psi_{\alpha-1}(t,0) \leq \frac{\|b\|+M}{\Gamma(\alpha)}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)\|a\|\psi_{\alpha-2}(t,0)}{1+\psi_\alpha(t,0)\Gamma(\alpha-1)} &\leq \frac{\|a\|}{1+\psi_\alpha(t,0)\Gamma(\alpha-1)}\\
&\leq \frac{(\alpha-1)\|a\|}{(\alpha-1)1+\psi_\alpha(t,0)\Gamma(\alpha-1)}\\
&\leq \frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha-1)}
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)\int_0^t \psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t,s)\|f(s,y(s)\|ds}{1+\psi_\alpha(t,0)\Gamma(\alpha)} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \psi'(s)\|f(s,y(s))\|ds \leq M$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)\|N(y)(t)\|}{1+\psi_{\alpha}(t,0)} &\leq \frac{\|b\|+M}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha-1)}+\\ &\leq \frac{\|b\|+2M+(\alpha-1)\|a\|}{\Gamma(\alpha)}.\end{aligned}$$

Donc, NB est borné.

Étape 2 : N est continue.

On réécrit N comme suit

$$\begin{aligned}Ny(t) = \frac{b\psi_{\alpha-1}(t,0)}{\Gamma(\alpha)}+\frac{a\psi_{\alpha-2}(t,0)}{\Gamma(\alpha-1)}-\frac{\psi_{\alpha-1}(t,0)}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty}\psi'(s)f(s,y(s)ds\\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\psi'(s)[\psi_{\alpha-1}(t,s)-\psi_{\alpha-1}(t,0)]f(s,y(s)ds.\end{aligned}$$

Soit $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite Convergentes vers y in $\mathcal{C}_{\alpha,\psi}([0,\infty),E)$ et $\varepsilon>0$,en remarquant que les fonctions $y_n, n\in\mathbb{N}$ et y sont bornée, Cela signifie qu'il existe $M>0$ telle que

$$\|y_n\|_{\alpha}^{\psi}\leq M, n\in\mathbb{N}$$

et

$$\|y\|_{\alpha}^{\psi}\leq M$$

Par Hypothèse $(\mathbf{H_2})$ il existe $L>0$, telle que

$$\int_L^{\infty}\psi'(s)a(t)dt<\frac{\Gamma(\alpha)}{6}\varepsilon,$$

et

$$\int_L^\infty \psi'(s)(1+\psi_\alpha(t,0))b(t)dt < \frac{\Gamma(\alpha)}{6}\varepsilon,$$

et de $(\mathbf{H_1})$

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| \leq A\psi_{2-\alpha}(t,0)\|x-y\|, \text{ pour tous } t \in (0,T],$$

où $A \in \mathbb{R}^+$. il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geq m$ et $t \in (0,L]$,

puis que y_n est continue $\exists m \in \mathbb{N}$

$$y_n \longrightarrow y$$

nous avons

$$\|y_n - y\| < \varepsilon$$

On a :

$$\|f(t,y_n(t)) - f(t,y(t))\| < A\psi_{2-\alpha}(t,0)\|y_n - y\|$$

pour

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{A\psi_{2-\alpha}(t,0)(3\psi_1(L,0)})\varepsilon$$

$\exists m \in \mathbb{N}$ si $n \geqslant m$ alors

$$\|y_n - y\| \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{A\psi_{2-\alpha}(t,0)(3\psi_1(L,0))}\varepsilon$$

$$\|f(t,y_n(t))-f(t,y(t))\|<\frac{\Gamma(\alpha)}{3\psi_1(L,0)}\varepsilon. \tag{3.6}$$

Alors, pour tous les $t\in(0,\infty)$ et $n>m$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\|N(y_n)(t)-N(y)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \psi'(s)\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|ds\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \psi'(s)\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \psi'(s)\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|ds\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_L^\infty \psi'(s)\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|ds
\end{aligned}$$

En utilisant la convergence on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^L \psi'(s)\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|ds &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^L \psi'(s)\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|ds\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^L \psi'(s)\frac{\Gamma(\alpha)}{3\psi_1(L,0)}\varepsilon\\
&\leq \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

et par la remarque (3.1) on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_L^\infty \psi'(s)\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\|ds &\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)}\int_L^\infty \psi'(s)\|f(s,y_n(s))\|ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_L^\infty \psi'(s)\|f(s,y(s))\|ds\\
&\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)}\int_L^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]b(s)ds\\
&+\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_L^\infty \psi'(s)a(s)ds\\
&\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\|N(y_n)(t)-N(y)(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Donc,

$$\|Ny_n-Ny\|_\alpha^\psi \to 0 \text{ as } n\to\infty.$$

Étape 3 : NB est equicontinue sur tout compacte $[c,d]$ de $]0,\infty[$. Soit $y\in B$ et $t_1,\ t_2\in[c,d]$, où $t_2>t_1$. Puis

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\psi_{2-\alpha}(t_2,0)N(y)(t_2)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{\psi_{2-\alpha}(t_1,0)N(y)(t_1)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right\|\\
&\leq \frac{\|b\|+M}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{\psi_1(t_2,0)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{\psi_1(t_1,0)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right|\\
&+\frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right|\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^{t_2}\psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t_2,s)f(s,y(s))ds\right.\\
&\left.-\int_0^{t_1}\psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t_1,s)f(s,y(s))ds\right\|\\
&\leq \frac{\|b\|+M}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{\psi_1(t_2,0)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{\psi_1(t_1,0)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right|\\
&+\frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right|\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\psi'(s)[\psi_{\alpha-1}(t_2,s)-\psi_{\alpha-1}(t_1,s)]\\
&\|f(s,y(s))\|ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t_2,s)\|f(s,y(s))\|ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\|b\|+M}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{\psi_1(t_2,0)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{\psi_1(t_1,0)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right| \\
&+\frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right| \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\psi'(s)[\psi_{\alpha-1}(t_2,s)-\psi_{\alpha-1}(t_1,s)]a(s)ds \\
&+\frac{R}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\psi'(s)[\psi_{\alpha-1}(t_2,s)-\psi_{\alpha-1}(t_1,s)] \\
&(1+\psi_\alpha(s,0))b(s)ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t_2,s)a(s)ds \\
&+\frac{R}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t_2,s)(1+\psi_\alpha(s,0))b(s)ds \\
&\leq \frac{\|b\|+M}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{\psi_1(t_2,0)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{\psi_1(t_1,0)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right| \\
&+\frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right| \\
&+\frac{a^*+b^*R}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{t_1}\psi'(s)[\psi_{\alpha-1}(t_2,s)-\psi_{\alpha-1}(t_1,s)]ds\right) \\
&+\frac{a^*+b^*R}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t_2,s)ds \\
&+\frac{2b^*R}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{t_2}\psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t_2,s)\psi_\alpha(s,0)ds\right. \\
&\left.-\int_0^{t_1}\psi'(s)\psi_{\alpha-1}(t_1,s)\psi_\alpha(s,0)ds\right) \\
&\leq \frac{\|b\|+M}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{\psi_1(t_2,0)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{\psi_1(t_1,0)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right| \\
&+\frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right| \\
&+\frac{a^*+b^*R}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\psi_\alpha(t_2,0)-\psi_\alpha(t_1,0)-\psi_\alpha(t_2,t_1)\right) \\
&+\frac{a^*+b^*R}{\Gamma(1+\alpha)}\psi_\alpha(t_2,t_1)+\frac{2b^*R\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\psi_{2\alpha}(t_2,t_1),
\end{aligned}
$$

où $a^* = \max_{t\in[c,d]} a(t)$ et $b^* = \max_{t\in[c,d]} b(t)$. comme $t_2 \to t_1$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Dans ce cas NB Il est equicontinue à n'importe quel Compacté $[c,d]$ de $(0,\infty)$.

Étape 4 : Nous vérifions que N satisfait les hypothèses du théorème (2.2).

Tout d'abord, nous montrons maintenant que N est défini de B à B, En effet, pour n'importe quel $y \in B$, selon les conditions ci-dessus. $(\mathbf{H_2})$

$$\int_0^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]b(s)dt < \Gamma(\alpha), \quad \int_0^\infty \psi'(s)a(s)dt < \infty.$$

$(\mathbf{H_4})$

$$R > \frac{\|b\| + (\alpha-1)\|a\| + \int_0^\infty \psi'(s)a(s)ds}{\Gamma(\alpha) - \int_0^\infty \psi'(s)(1+\psi_\alpha(s,0))b(s)ds}.$$

et par un petit calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)N(y)(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right\| &\leq \frac{\|b\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \psi'(s)\|f(t,y(t))\|dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg(\|b\| + (\alpha-1)\|a\| + \int_0^\infty \psi'(s)a(s)ds \\
&+ R\int_0^\infty \psi'(s)(1+\psi_\alpha(s,0))b(s)ds\Bigg) \\
&< R.
\end{aligned}$$

Nous mettons $D = \overline{conv}(NB)$, Il est clair que D est un fermé, sous-ensemble borné et convexe de B. En sachant que $ND \subset NB \subset D$, alors N reste défini de D à D. On désigne par $\vartheta_{(\alpha,\psi)}$ la mesure de Kuratowski de de non-compacité sur $C_{\alpha,\psi}([0,\infty),E)$, nous montrerons l'égalité suivante

$$\vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV) = \sup\left\{\vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right),\ t\in(0,\infty)\right\}, \text{ pour tous } V\subset D. \tag{3.7}$$

Montrons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel nombre $T_\infty > 0$ telle que, pour tout $t_1, t_2 \geq T_\infty$ et $y \in V$, nous avons

$$\|\frac{\psi_{2-\alpha}(t_2,0)Ny(t_2)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)} - \frac{\psi_{2-\alpha}(t_1,0)Ny(t_1)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\| < \varepsilon. \tag{3.8}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
&\|\frac{\psi_{2-\alpha}(t_2,0)N(y)(t_2)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)} - \frac{\psi_{2-\alpha}(t_1,0)N(y)(t_1)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\| \\
&\leq \frac{\|b\|+M}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{\psi_1(t_2,0)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)} - \frac{\psi_1(t_1,0)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right| \\
&+ \frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{1}{1+\psi_\alpha(t_2,0)} - \frac{1}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\frac{\psi_1(t_2,0)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)} - \frac{\psi_1(t_1,0)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right\| \int_0^\infty \psi'(s)\,\|f(s,y(s))\|\,ds.
\end{aligned}$$

On distingue deux cas. If $\lim \psi_1(t,0)) = \infty$, on obtient

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(t,0))}{1+\psi_\alpha(t,0)} = 0$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+\psi_\alpha(t,0)} = 0$$

,

alors, cela montre que

$$\|\frac{\psi_{2-\alpha}(t_2,0)Ny(t_2)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)} - \frac{\psi_{2-\alpha}(t_1,0)Ny(t_1)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\| \to 0 \text{ as } t_1, t_2 \to \infty. \tag{3.9}$$

si $\lim \psi_1(t,0)) = l < \infty$, en remarquant l'inégalité

$$\left\|\frac{\psi_1(t_2,0)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{\psi_1(t_1,0)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\right\| \leq \left\|\frac{\psi_1(t_2,0)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{l}{1+l^\alpha}\right\| + \left\|\frac{\psi_1(t_1,0)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}-\frac{l}{1+l^\alpha}\right\|,$$

On obtient facilement l'estimation (3.9). De la même manière, nous vérifions que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $0 < T_0 << T_\infty$ telle que, pour tout $t_1, t_2 \leq T_0$ and $y \in V$, nous avons

$$\|\frac{\psi_{2-\alpha}(t_2,0)Ny(t_2)}{1+\psi_\alpha(t_2,0)}-\frac{\psi_{2-\alpha}(t_1,0)Ny(t_1)}{1+\psi_\alpha(t_1,0)}\| < \varepsilon. \tag{3.10}$$

Nous revenons pour montrer l'égalité (3.7), Nous montrons d'abord
$\vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV) \leq \sup_{(0,\infty)} \vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right)$.
Soit $NV|_K$ la restriction de NV sur l'intervalle $K = [T_0, T_\infty]$ et soit ε un nombre réel strictement positif en utilisant le lemme (2.6) La troisième étape, on obtient

$$\vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV|_K) = \sup_K \vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) \leq \sup_{(0,\infty)} \vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right),$$

Cela signifie qu'il existe une partition finie NV_i de NN donc ce $NV = \cup_i NV_i$ et

$$diam(NV_i|_K) < \sup_{(0,\infty)} \vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) + \varepsilon, \quad i = 0,1,\cdots,k. \tag{3.11}$$

Par conséquent, en utilisant les inégalités (3.8) et (3.11), On obtient, pour tous

Ny_1, Ny_2 de NV_i et $t \geq T_\infty$ nous avons

$$\begin{aligned}
&\|\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)Ny_2(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)} - \frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)Ny_1(t))}{1+\psi_\alpha(t,0)}\| \\
&\leq \|\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)Ny_2(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)} - \frac{\psi_{2-\alpha}(T_\infty,0)Ny_2(T_\infty)}{1+\psi_\alpha(T_\infty,0)}\| \\
&+ \|\frac{\psi_{2-\alpha}(T_\infty,0)Ny_2(T_\infty)}{1+\psi_\alpha(T_\infty,0)} - \frac{\psi_{2-\alpha}(T_\infty,0)Ny_1(T_\infty)}{1+\psi_\alpha(T_\infty,0)}\| \\
&+ \|\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)Ny_1(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)} - \frac{\psi_{2-\alpha}(T_\infty,0)Ny_2(T_\infty)}{1+\psi_\alpha(T_\infty,0)}\| \\
&< 3\varepsilon + \sup_{(0,\infty)} \vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)Ny_2(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)} - \frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)Ny_1(t))}{1+\psi_\alpha(t,0)}\| \leq 3\varepsilon + \sup_{(0,\infty)} \vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right). \tag{3.12}$$

En procédant de la même manière et en utilisant les inégalités (3.10) et (3.11), Par la même procédure et en utilisant des inégalités (3.12) est aussi Vrai pour tous Ny_1, Ny_2 de NV_i et $t \leq T_0$. Ensuite, de (3.11) et (3.12), on obtient

$$diam(NV_i) < \sup_{(0,\infty)} \vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) + 3\varepsilon, \quad i = 0, 1, \cdots, k.$$

Ainsi,

$$\vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV) < \sup_{(0,\infty)} \vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) + 3\varepsilon.$$

Depuis ε Il est arbitraire, ce qui nous conduit au résultat.

Au contraire, nous montrons que $\sup_{(0,\infty)} \vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) \leq \vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV)$. Selon la définition de Kuratowski MNC, nous avons, pour tous $\varepsilon > 0$ Nous pouvons trouver une Division finie $NV = \cup_i NV_i$ telle que $diam(NV_i) < \vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV) + \varepsilon$, alors pour tous les $y_1, y_2 \in V$ et $t \in (0,\infty)$, on obtient

$$\|\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)Ny_2(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)} - \frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)Ny_1(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\| \leq \|Ny_2 - Ny_1\|_\alpha^\psi < \vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV) + \varepsilon.$$

D'après $NV(t) = \cup_i NV_i(t)$, Il obtient $\vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) < \vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV)+\varepsilon$, depuis ε est arbitraire, on a alors $\vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) \leq \vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV)$. Donc,

$$\sup_{(0,\infty)} \vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) \leq \vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV).$$

C'est tout ce qu'il souhaite montrer.

Il reste ensuite à prouver que N est un opérateur condensé de Meir-Keeler via la mesure de non-compacité $\vartheta_{(\alpha,\psi)}$, Il s'agit de démontrer l'implication

$$\forall \epsilon > 0, \exists \varrho(\epsilon) : \epsilon \leq \vartheta_{(\alpha,\psi)}(V) < \epsilon + \varrho \Longrightarrow \vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV) < \epsilon, \text{ pour tout } V \subset D. \tag{3.13}$$

Soit ϵ être un réel strictement positif, $V \subset D$ et $t \in (0,\infty)$, pour tout $\iota, \kappa \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $0 < \iota \leq t \leq \kappa$, Définir l'opérateur auxiliaire $N_{\iota,\kappa}$

$$\begin{aligned} N_{\iota,\kappa}y(t) = \frac{b\psi_{\alpha-1}(t,0)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{a\psi_{\alpha-2}(t,0)}{\Gamma(\alpha-1)} - \frac{\psi_{\alpha-1}(t,0)}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\kappa \psi'(s)f(s,y(s)ds \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\iota^t \psi'(s)[\psi_{\alpha-1}(t,s) - \psi_{\alpha-1}(t,0)]f(s,y(s)ds. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de ϑ, On obtient

$$\vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)N_{\iota,\kappa}V(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) \to \left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)NV(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) \text{ as } \iota \to 0 \text{ et } \kappa \to \infty. \tag{3.14}$$

Un argument similaire à celui de la troisième étape, nous montrons que le $N_{\iota,\kappa}V$ Elle est equicontinue et bornée à $[\iota,\kappa]$. A partir des lemmes (2.3),(3.1),(2.5), $(\mathbf{H_3})$

$$\vartheta(f(t,\Omega(t))) \leq \ell(t)\psi_{2-\alpha}(t,0)\vartheta(\Omega(t)), \quad \text{pour tout } t \in (0,\infty) \text{ avec,}$$
$$\int_0^\infty \psi'(s)(1+\psi_\alpha(s,0)\ell(s)ds \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{2}.$$

et les étapes précédentes, nous avons, il y a une séquence $\{X_n\}_{n=0}^\infty \subset V$ telle que

$$\begin{aligned}
\vartheta\left(\frac{\psi_{2-\alpha}(t,0)N_{\iota,\kappa}V(t)}{1+\psi_\alpha(t,0)}\right) &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\vartheta\left\{\int_t^\kappa \psi'(s)f(s,X_n(s))ds, n\in\mathbb{N}\right\} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\vartheta\left\{\int_\iota^t \psi'(s)f(s,X_n(s))ds, n\in\mathbb{N}\right\} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\iota^\kappa \psi'(s)\vartheta\left\{f(s,X_n(s)), n\in\mathbb{N}\right\}ds \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\vartheta_{(\alpha,\psi)}(V)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]\ell(s)ds.
\end{aligned}$$

De (3.14), nous savons que

$$\vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\vartheta_{(\alpha,\psi)}(V)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]\ell(s)ds.$$

Si

$$\vartheta_{(\alpha,\psi)}(NV) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\vartheta_{(\alpha,\psi)}(V)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]\ell(s)ds < \epsilon,$$

ce qui implique que

$$\vartheta_{(\alpha,\psi)}(V) < \frac{\Gamma(\alpha)}{2\int_0^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]\ell(s)ds}\epsilon,$$

Cette implication (3.13) est satisfaite, nous prenons

$$\varrho = \frac{\Gamma(\alpha) - 2\int_0^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]\ell(s)ds}{2\int_0^\infty \psi'(s)[1+\psi_\alpha(s,0)]\ell(s)ds}\epsilon.$$

Alors, N est un opérateur condensée de type Meir-Keeler via $\vartheta_{(\alpha,\psi)}$, Enfin, toutes les hypothèses de théorème(2.2) sont remplies, ce qui nous assure que la solution Ensemble de problèmes (3.5) – (3.3) est non vide et compact.

$\square$

Chapitre 4

Application

4.1 Exemple

Comme application de nos résultats, nous considérons l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$ {}^{RL}\mathcal{D}^{\frac{3}{2},\psi} y(t) = \left(\frac{\sqrt{\psi_{0.5}(t,0)} y_n(t)}{1+\psi_{1.5}(t,0)} + \frac{\sin(t)}{1+e^{2t}} \right)_{n=1}^{\infty}, \quad t \in (0,+\infty), \tag{4.1} $$

$$ {}^{RL}\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{2},\psi} y(0) = (1,0,\ldots,0,\ldots), \tag{4.2} $$

$$ {}^{RL}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{1}{2},\psi} y(\infty) = (1,0,\ldots,0,\ldots). \tag{4.3} $$

où $\psi(t) = -\arctan(\frac{1}{1+t})$, ce qui implique que $\psi'(t) = \frac{1}{1+(1+t)^2}$ et $\psi_\eta(t,0) = [\psi(t)+\frac{\pi}{4}]^\eta$. Soit

$$ E = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) : \sup_n |y_n| < \infty\}, $$

où la norme $\|y\| = \sup_n |y_n|$, alors $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach en comparant avec l'espace (3.5) − (3.3), on remarque que

$$\alpha = 1.5 \text{ et } f(t, y(t)) = (f(t, y_1(t)), \ldots, f(t, y_n(t)), \ldots),$$

où

$$f(t, y_n(t)) = \frac{\sqrt{\psi_{0.5}(t,0)}\, y_n(t)}{1 + \psi_{1.5}(t,0)} + \frac{\sin(t)}{1 + e^{2t}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On vérifiera les conditions $(\mathbf{H_1})$ et $(\mathbf{H_2})$. De toute évidence, f est une fonction continue dans $(0, \infty) \times E$ et

$$\|f(t, y(t))\| \leq \frac{\sqrt{\psi_{0.5}(t,0)}}{1 + \psi_{1.5}(t,0)} \|y(t)\| + \frac{1}{1 + e^{2t}}.$$

A l'aide d'un simple calcul, nous trouvons que

$$\int_0^\infty \psi'(t) b(t)[1 + \psi_{1.5}(t,0)] dt = \int_0^\infty \frac{dt}{1 + (1+t)^2} = \frac{\pi}{4} < \Gamma(1.5) \text{ et}$$

$$\int_0^\infty \psi'(t) a(t) dt = \int_0^\infty \frac{dt}{(1 + e^{2t})(1 + (1+t)^2)} \leq \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Enfin, nous vérifions la condition (H_3). Pour tout ensemble borné $\Omega \subset \mathcal{C}_{\alpha,\psi}((0,\infty), E)$, Nous avons

$$f(t, \Omega(t)) = \frac{\sqrt{\psi_{0.5}(t,0)}}{1 + \psi_{1.5}(t,0)} \Omega(t) + \left\{ \frac{\sin(t)}{1 + e^{2t}} \right\}.$$

Puis

$$\vartheta(f(t, \Omega(t)) \leq \frac{\sqrt{\psi_{0.5}(t,0)}}{1 + \psi_{1.5}(t,0)} \vartheta(\Omega(t)).$$

Puis $\int_0^{\infty} \psi'(t)\ell(t)[1+\psi_{1.5}(t,0)]dt \leq \frac{\Gamma(1.5)}{2}$, on conclut que la condition ($\mathbf{H_3}$) Il est satisfait. Par conséquent, Le théorème 3.1 assure que la solution niveaux de problème (4.1)-(4.3) est non vide et compact.

Bibliographie

[1] J. Banaś, *On measures of noncompactness in banach spaces*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 21 (1980), pp. 131–143.

[2] J. Banaś and B. Rzepka, *An application of a measure of noncompactness in the study of asymptotic stability*, Applied Mathematics Letters, 16 (2003), pp. 1–6.

[3] C. BELABBACI, *Mesure de non-compacité et spectre essentiel*, PhD thesis, Université de Laghouat-Amar Telidji.

[4] J. V. da C. Sousa and E. C. de Oliveira, *On the ψ -hilfer fractional derivative*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, (2018).

[5] C. Derbazi, Z. Baitiche, M. Benchohra, and A. Cabada, *Initial value problem for nonlinear fractional differential equations with ψ-caputo derivative via monotone iterative technique*, Axioms, 9 (2020), p. 57.

[6] J. GRAEF AND A. OUAHAB, *Structure of solutions sets and a continuous version of filippov's theorem for first order impulsive differential inclusions with periodic conditions*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2009 (2009), pp. 1–23.

[7] D. GUO, V. LAKSHMIKANTHAM, AND X. LIU, *Nonlinear integral equations in abstract spaces kluwer academic publishers*, Dordrecht, (1996).

[8] A. A. KILBAS, H. M. SRIVASTAVA, AND J. J. TRUJILLO, *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204, elsevier, 2006.

[9] K. KURATOWSKI, *Sur les espaces complets*, Fundamenta mathematicae, 1 (1930), pp. 301–309.

[10] O. NAWFAL, H. TOUFAILI, G. DIB, M. DIRANI, AND A. BEYDOUN, *New-onset refractory status epilepticus as an early manifestation of multisystem inflammatory syndrome in adults after covid-19*, Epilepsia, 63 (2022), pp. e51–e56.