RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques»

Option :
«Analyse fonctionnelle et équation différentielle \ applications »

Présenté Par :
BENKELLACHA Hadjer et ZOUKH Maghnia

Sous l'intitulé :

Semi-groupes et applications aux équations d'évolution

Soutenu publiquement le 20/ 06 /2023
à Tiaret devant le jury composé de :

M HALIM Benali	MCA	Université Ibn Khaldoun-Tiaret	Président
M MAAZOUZ Kadda	MCA	Université Ibn Khaldoun-Tiaret	Examinateur
M HEDIA Benaouda	Professeur	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Encadrant

Année universitaire :2022/2023

REMERCIEMENTS

Tout d'abord nous remercions ALLAH Le tout Miséricordieux qui nous a donné la force et le courage pour réaliser ce travail.

Merci à notre promoteur Pr : **Hedia Benaouda** pour ses conseils et son aide qui a mis à notre disposition tous ce qui nécessaire pour réaliser ce mémoire.

Nous remercions en deuxième lieu les membres de jury Dr : **Halim Benali** pour le grand honneur qu'il nous fait en présidant le jury de notre soutenance, Dr : **Maazouz Kadda** pour l'honneur qu'il nous fait d'avoir accepter l'examination de notre travail.

Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'Université Ibn Khaldoun -Tiaret-spécialement département de mathématiques pour leur encadrement durant notre cursus universitaires.

Enfin Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont conseillé lors de la rédaction de ce mémoire : Nos familles, nos amis, nos professeurs, et nos camarades de promotion.

DÉDICACES

Je dédie ce travaille
A ma mère, pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices.
A mon père, l'école de mon enfance ,qui a été mon ombre durant toutes les années d'étude, que dieu le garde.
A mes frères et sœurs Abdelhafidh Mohamed Imane et Meriem et a tous mes amis Chaima Samia et Madiha, Pour leur encouragement.
A toute ma famille pour leur soutiens tout au long de parcours universitaire.

BENKELLACHA Hadjer

Je dédie ce travaille
A mon père pour leur patience, leur amour, leur soutient et leurs encouragements.
A mes frères et sœurs pour leur encouragements.
A toute ma famille et mes amis Rachida Ahlem Chahra et Karima et ma promotion de mathématiques, pour leurs soutiens.

ZOUKH Maghnia

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUME

Le mémoire traite l'utilisation des semi-groupes en relation avec les équations d'évolution. Un semi groupe est une structure mathématique qui représente une famille d'opérateurs linéaires ou non linéaires, définis sur un espace fonctionnel, et qui satisfait certaine propriétés importantes.

ABSTRACT

The thesis deals with the use of semigroups in relation to evolution equations. A semigroup is a mathematical structure that represents a family of linear or nonlinear operators, defined on a functional space, and satisfies certain important properties.

INTRODUCTION

Les mathématiques sont une discipline fascinante qui explore les structures, les modèles et les relations qui sous-tendant notre univers.
Nous plongerons dans les profondeurs des mathématiques, en nous concentrant sur l'un des outils mathématiques les plus importants dans les relations de problème "bien posés" dans la théorie des équation d'évolution et le théorie des processus stochastique a savoir les semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés et ses applications a la théorie des équations aux dérivées partielles.

La théorie des semi-groupes trouve sa source dans une question posée par "AUGUSTION LOUIS CAUCHY " en 1821 dans son cours d'analyse, la question était la suivant
" Déterminer toutes les fonctions complexes continues et non nulles vérifiant

$$f(t+s) = f(t)f(s), \quad \forall t, s \geqslant 0".$$

Ce mémoire contient 4 chapitres, le premier chapitre est semi-groupe d'opérateur linéaire borné, se ramifier a semi-groupe d'opérateur linéaire borné uniformément continue et semi-groupe d'opérateur linéaire borné fortement continue et aussi parle sur C_0 semi-groupe de contraction .

Deuxième chapitre contient deux théorème principale qui donnée les propriétés caractéristique de C_0 semi groupe de contraction théorème de Hille-Yosida et le deuxième est théorème de Lummer Phillips .

Troisième chapitre sur application aux équation d'évolution et finalement quatrième chapitre l'étude d'équation d'évolution semi-linéaire .

CHAPITRE 1

SEMI-GROUPES À UN PARAMÈTRE D'OPÉRATEURS LINÉAIRES BORNÉS

1.1 Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus

Soit X un espace de Banach de norme $\| \,.\, \|$ et notons par $L_B(X)$ L'algèbre de tous les opérateurs linéaires de X dans X norme d'opérateurs qu'on notera aussi par : $\| \,.\, \|$

Définition 1.1.1. *[1] une famille à un paramétré $(T(t))_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires bornes de X dans X, est dit un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornes sur X si :*

1. *$T(0) = I$, (ou I et l'opérateur identité de X).*
2. *T(t+s)=T(t)T(s), $\forall t, s \geqslant 0$.*

un semi groupe d'opérateurs linéaires bornes $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur X est dit uniformément continue sur$X$, si :

$$\lim_{t\to 0^+} \| (T(t) - I) \| = 0 : \tag{1.1}$$

L'opérateur linéaires A définie par :

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} existe \right\} \qquad et : \tag{1.2}$$

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt}\Big|_{t=0}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

et appelle le générateur infinitésimal du semi-groupe $((T(t))_{t \geqslant 0}$ *et* $\mathcal{D}(A)$ *est appelé le domaine de A.*
Dans ce paragraphe, nous allons étudier quelques propriétés des semi-groupe d'opérateurs linéaires bornes, uniformément continue .

Remarque. *[1] Il est facile de voir que si* $(T(t))_{t \geqslant 0}$ *est un semi-groupe uniformément continu sur X, alors :*

$$\lim_{s \to t} \| (T(s) - T(t) \| = 0.$$

Tout d'abord, commençons par démontrer le lemme suivante :

Lemme 1. *[1] soit* $F : [a, b] \to X$ *est une fonction continue, alors :*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} F(s)ds = F(a), \tag{1.3}$$

Preuve. *pour tout* $t \neq 0$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+1} F(s)ds - F(a) \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+1} F(s) - F(a)ds \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{t} \sup_{s \in [a,a+t]} \| F(s) - F(a) \| \, t \\
&= \sup_{s \in [a,a+t]} \| F(s) - F(a) \|
\end{aligned}$$

la continuité de F nous permet de conclure.

Théorème 1.1.1. *[1] un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continue sur X si A est un opérateurs linéaire borne sur X.*

Preuve. *soit A opérateur linéaire borné sur X posons :*

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \tag{1.4}$$

la série ainsi définie dans la formule1.4 converge en norme pour tout $t \geqslant 0$ et définit, pour tout $t \geqslant 0$, un opérateur linéaire borné $(T(t))_{t\geqslant 0}$
Il est clair que $\quad T(0) = I$

par un simple calcul, on a pour tout $t, s \geqslant 0 \quad T(t+s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} A^n$

$$\begin{aligned} T(t+s) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} C_n^k T^{n-k} S^k A^n \\ &= T(t)T(s) \end{aligned}$$

par ailleurs, pour tout $T \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^t A^n}{n!} - I \right\| \\ &= \|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}\| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} - 1 \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{t \to +0} \| T(t) - I \| = 0.$
d'autre part, pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{e^{tA} - I}{t} - A \right\| \\ &= \frac{1}{t}(e^{t\|A\|} - 1 - t \parallel A \parallel) \end{aligned}$$

comme $\quad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}(e^{t\|A\|} - 1 - t \parallel A \parallel) = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t \parallel A \parallel} \parallel A \parallel - \parallel A \parallel = 0$

alors : $\quad \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{T(t) - I}{t} = A.$

Ainsi $(T(t))_{t \geqslant 0}$ *et un semi-groupe opérateur linéaire borné uniformément continue sur X, de générateur infinitésimal A .*

réciproquement, soit $(T(t))_{t \geqslant 0}$ *un semi-groupe d'opérateurs linéaire bornés uniformément continue sur X et soit A son générateur infinitésimal.*

L'application $\mathbb{R}^+ \to L_B(X)$ *est continue, donc :*

$$\int_0^t T(t)ds \in L_B X, \quad \forall t \geqslant 0$$

D'après lemme 1, On a : $\quad \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_0^t T(t)ds = T(0) = I$

Il existe alors $\quad \rho > 0$ *telle que* $\quad \left\| \dfrac{1}{\rho} \displaystyle\int_0^\rho T(s)ds - I \right\| < 1$

qui implique que $\quad \dfrac{1}{\rho} \displaystyle\int_0^\rho T(s)$

inversible, et donc $\displaystyle\int_0^\rho T(s)ds$ *est aussi inversible pour tout* $h > 0$*,*

On a :

$$\left(\frac{Th - I}{h} \right) \left(\int_0^\rho T(s)ds \right) = \frac{1}{h} \int_0^\rho (T(h+s) - T(s))ds$$

$$= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^\rho T(s)ds \right)$$

Donc :

$$\left(\frac{T(h) - I}{h} \right) = \left(\frac{1}{h} \int_0^{\rho+h} T(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)ds \right) \left(\int_0^\rho T(s)ds \right)^{-1}$$

compte tenu du lemme 1, on a obtient

$$\lim_{h \to 0+} \frac{T(h) - I}{h} = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s)ds \right)^{-1}$$

Ainsi, le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ (uniformément continue) est l'opérateur linéaire borne :

$$A = (A(\rho) - I)\left(\int_0^{\rho} T(t)ds\right)^{-1}.$$

Remarque. *[1] D'après définition (1), on voit bien qu'un semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ admet une unique générateur. si $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et uniformément continue, alors son générateur infinitésimal et un opérateur linéaire borné. D'autre part, tout opérateur linéaire est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continue. Ce semi-groupe est t-il unique ? La réponse affirmative à cette question est donnée par le théorème suivant :*

Théorème 1.1.2. *[1] Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $(S(t))_{t\geqslant 0}$ de semi-groupe de continue si*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)-I}{t} \tag{1.5}$$

Alors : $T(t) = S(t) \quad \forall t \geqslant 0$.

Preuve. *Montrons que pour tous $a > 0$*
$T(t) = S(t), \quad \forall t \in [0, a]$.
Soit $a > 0$ fixé comme $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $(S(t))_{t\geqslant 0}$ soit de semi-groupe uniformément continues, alors les application $t \longmapsto \| T(t) \|$ et $t \longmapsto \| S(t) \|$ sont continues. Il existe alors une constante C_a telle que :
$\| T(t) \| \| S(t) \| \leqslant C_a \quad \forall t, s \in [0, a]$ *pour tout $h > 0$, on a :*

$$\left\|\frac{T(h)-S(h)}{h}\right\| = \left\|\frac{T(h)-I}{h} - A - \left(\frac{S(h)-I}{h} - A\right)\right\|$$

soit $\varepsilon > 0$.L'égalité 1.5 implique qu'il existe un $\delta > 0$ telle que pour $0 < h \leqslant \delta$ on sait :

$$\left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2aC_a}$$

et

$$\left\| \frac{S(h)-I}{h} - A \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2aC_a}$$

ce qui entraine alors que pour $0 < h \leqslant \delta$,

$$\left\| \frac{T(h)-S(h)}{h} \right\| \leqslant \left\| \frac{T(h)-S(h)}{h} - A \right\| + \left\| \frac{S(h)-I}{h} - A \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{aC_a} \tag{1.6}$$

Soit $t \in [0,a]$ *et soit* $n \geqslant 0$ *telle que* $\frac{t}{n} < \delta$. *De la définition 1 d'un semi-groupe et de 1.6 il vient que :* $\| T(t) - S(t) \|$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leqslant C_a \frac{t}{n} \frac{\varepsilon}{aC_a} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= \varepsilon \frac{t}{a} \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

comme $\varepsilon > 0$ *est arbitraire, alors* $T(t) = S(t), \quad \forall t \in [0,a]$. *Mais puisque* $a > 0$ *est aussi arbitraire, il s'ensuit que* $T(t) = S(t)$,
$\forall t \geqslant 0$.

Corollaire 1.1.1. *[1] Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés, uniformément continue. Alors :*

1. *Il existe deux constantes* $\omega \geqslant 0$ *telle que :* $\| T(t) \| \leqslant e^{wt}, \quad \forall t \geqslant 0$
2. *Il existe un unique opérateur linéaire borné* A *telle que :*

$$T(t) = e^{tA}, \quad \forall t \geqslant 0$$

3. *l'opérateur* A *de l'assertion (2)est générateur infinitésimal du semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$

4. *l'application : $t \mapsto T(t)$ est différemment en norme et on a :*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A \tag{1.7}$$

Preuve. *H es les assertions du corollaire 1 découlent de l'assertion (2).Pour montre (2) notons que puisque $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe uniformément continue son générateur infinitésimale A est un opérateur linéaire borné est aussi le générateur infinitésimal du semi-groupe $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ défini par la formule 1.4, et par le théorème 2 (d'unicité), on obtient :*

$$T(t) = e^{tA}, \quad \forall t \geqslant 0$$

1.2 Semi-groupe d'opérateur linéaire borné fortement continus

Dans tout ce section, X dénote un espace de Banach de norme $\parallel . \parallel$ et $L_B(X)$ dénote l'algèbre d'opérateur linéaire borné sur X, de la norme d'opérateur qu'un notera aussi par $\parallel . \parallel$

Définition 1.2.1. *[4] Un semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ linéaire borne sur X et un semi-groupe opérateur linéaire bornés, fortement continue sur X, si :*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X \tag{1.8}$$

Un semi-groupe fortement continue sur X est appelé aussi semi-groupe de classe C_0 sur X, ou tout simplement : un C_0 semi- groupe sur X.
On établit le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. *[1] Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un c_0-semi-groupe sur X .Alors : il existe deux constante $\omega \geqslant 0$ et $M \geqslant 0$ telle que :*

$$\parallel T(t) \parallel \leqslant Me^{\omega t}, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.9}$$

Preuve. *Montrons d'abord qu'il existe $a > 0$ et $M \geqslant 1$ tells que :*

$$\| T(t) \| \leqslant M, \quad \forall t \in [0, a]$$

Supposons le contraire, c'est á dire, suppose que
$\forall a > 0, \quad \forall M \geqslant 1, \quad \exists t \in [0, a]$ *telle que :* $\quad \| T(t) \| > M$
En particulier pour $a = \frac{1}{n}$ *et* $M = n \geqslant 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, *il existe* $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ *telle que :* $\| T(t_n) \| > n$. *Donc la suite* $(\| T(t_n) \|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est non bornée. Il vient alors du théorème de Banach-Steinhaus, qu'il existe* $x_0 \in X$ *telle que :*

$$(\| T(t_n) x_0 \|)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Soit non bornée, ce qui contre dit le fait que :

$$\lim_{t \to 0+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X$$

.Ainsi : $\quad \| T(t) \| \leqslant M \quad \forall t \geqslant 0, t \in [0, a]$
comme $\| T(0) \| = 1$, *alors* $M \geqslant 1$
Posons :

$$\omega = \frac{\log(M)}{a} \geqslant 0$$

Soit $t \geqslant 0$ *et soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* Ω *telles que :* $t = na + \Omega$, *avec* $0 \leqslant \Omega < a$. *Par la propriété des semi-groupes, on a :*

$$\begin{aligned} \| T(t) \| &= \| T(na + \Omega) \| = \| T(\Omega) T(na) \| \\ &= M e^{\omega t} \end{aligned}$$

ce qui achevé la démonstration du théorème .

Corollaire 1.2.1. *[1] Soit* $(T(t))_{t \geqslant 0}$ *un* c_0 *semi-groupe sur X.Alors : pour tout* $x \in X$, *la fonction,* $t \longmapsto T(t)x$ *est continue de* $\mathbb{R}_+$ *sur X.*

Preuve. *[1] Soit* $x \in X$ *et soient* $t, h \geqslant 0$. *La continuité de* $t \longmapsto T(t)x$ *découle des inégalités :*

$$\begin{aligned} \| T(t+h)x - T(t)x \| &= \| T(t)(T(h)x - x) \| \\ &\leqslant M e^{\omega t} \| T(h)x - x \| \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \qquad h \to 0^+ \end{aligned}$$

et pour $t \geqslant h \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \| T(t-h)x - T(t)x \| &= \| T(t-h)(x - T(h)x) \| \\ &\leqslant Me^{wt} \| x - T(h)x \| . \end{aligned}$$

Théorème 1.2.2. *[1] Soit* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur* X *de générateur infinitésimal* A*. Alors :*

$$1) \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in X, \tag{1.10}$$

2) Pour tout $x \in X$ *et tout* $t \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$ *et on a :*

$$A\left(\int_0^t T(s)ds\right) = T(t)x - x, \tag{1.11}$$

3) pour tout $t \geqslant 0$ *et tout* $x \in \mathcal{D}(A), T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et on a :*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \tag{1.12}$$

4) Pour tout $t \geqslant s \geqslant 0$ *et tout* $x \in \mathcal{D}(A)$*, on a :*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(u)xdu = \int_s^t T(u)Axdu, \tag{1.13}$$

Preuve. *1. L'égalité énoncée découle de l'inégalité :*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x)ds \right\| \\ &\leqslant \sup_{s\in[t,t+h]} \| T(s)x - T(t)x \| \end{aligned}$$

et de la continuité de la fonction $t \longmapsto T(t)x$ *de* $\mathbb{R}^+$ *dans* X*, pour tout* $x \in X$

2. *Pour* $x \in X$ *et tout* $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t (T(s+h)x - T(s)xds\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds\end{aligned}$$

en utilisant le résultat 1) $\longrightarrow T(t)x - x$ *en tant que* $h \to 0^+$, *d'où le 2).*

3. *pour tout* $x \in \mathcal{D}(a)$, *on a :*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h-I)}{h}T(t)x &= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} T(t)\frac{(T(h)-I)}{h}x\\ &= T(t)Ax, \quad \circledast\end{aligned}$$

ce qui montre alors que $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et que* $AT(t)x = T(t)Ax$. *L'égalitéé* $\circledast$ *implique aussi que :*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

c'est à dire que la dérivée à droite de T(t)x. existe et vaut $T(t)Ax$ *pour preuves 1.12, il reste à montre que pour tout* $t \geqslant 0$, *la dérivée à gauche de* $T(t)x$ *existe et vaut aussi* $T(t)Ax$.
Pour tout $h > 0$ *et tout* $t \geqslant h$, *: et tout* $x \in \mathcal{D}(A)$, *on a :*

$$\begin{aligned}\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax &= \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h}\\ &+ T(t-h)Ax - T(t-h)Ax - T(t)Ax\\ &= T(t-h)\left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right]\\ &+ T(t-h)[Ax - T(h)Ax].\end{aligned}$$

Comme $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\| T(t-h) \|$ est bornée pour $h \in [0,t]$ et que $(T(t))_{t \geqslant 0}$ est fortement continue, on obtient que :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax$$

$$= \lim_{h \to 0^+} T(t-h) \left[\frac{T(h)x}{h} - Ax \right] + \lim_{h \to 0^+} T(t-h)[Ax - T(h)Ax]$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

D'où l'assertion (3)

4. *S'obtient par intégration entre s et t.*

Remarque. *[1] La formule 1.13 du théorème 4 s'écrit en particulier pour $t \geqslant 0$ et $s = 0$ et pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ sous-la forme simple :*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(u)Axdu = \int_0^t AT(u)xdu, \quad \forall x \in D(A).$$

Corollaire 1.2.2. *[1] Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $T(t)_{t \geqslant 0}$, Alors :*

1. *Le domaine $\mathcal{D}(A)$ de A est **dense** dans X, (i.e : $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$).*
2. *A est un opérateur linéaire **fermé**. Autrement dit A est un opérateur linéaire dont le graphe $G(A)$ est un fermé de $X \times X$.*
   (a) *Soit $x \in X$ et soit (t_n) une suite réelle telle que $t_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$*
   (par exemple $t_n = \frac{1}{n+1}$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$).
   Posons $x_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)xds, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   D'après l'assertion 2) de théorème 4 on voit que $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et par l'assertion (1) du théorème (4), on a :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)xds = x.$$

   Ainsi $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, c'est a dire $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X.

(b) *La linéarité de A est évident. Montrons que A est un opérateur fermé, i-e, à montrer que le graphe :*

$G(A) = \{(x, Ax)/x \in \mathcal{D}(A)\}$ *de A est fermé de* $X \times X$

Pour cela, Soit $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$ *et* $Ax_n \longrightarrow y$. *Montrons alors que* $x \in \mathcal{D}(A)$ *et que* $Ax = y$.

Puisque $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, *alors d'après la formule 1.13, on a :*

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geqslant 0 \tag{1.14}$$

Soit $t > 0$. *Alors pour tout* $s \in [0, t]$, *on a :* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \| T(s)Ax_n - T(s)y \| &= \| T(s)(Ax_n - y) \| \\ &\leqslant Me^{\omega t} \| Ax_n - y \| \end{aligned}$$

Donc $(T(s)Ax_n)_n$ *converge uniformément vers* $T(s)y$, *quand* $n \longrightarrow +\infty$ *sur* $[0, t]$. *il vient alors de l'égalité 1.14 et du théorème d'inversion limite et intégrale que :*

$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds.$

Donc : $\quad \dfrac{T(t)x - x}{t} = \dfrac{1}{t}\int_0^t T(s)yds, \quad \forall t > 0.$

comme $\quad \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t}\int_0^t T(s)yds = y$

alors $\quad \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t}$ *existe D'où* $x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Ax = y$.

Théorème 1.2.3. *[1] Soit* $(T(t))_{t \geqslant 0}$ *et* $(S(t))_{t \geqslant 0}$ *deux* C_0 *semi-groupes sur X,de générateur infinitésimaux respectivement A et B si A=B, alors* $T(t) = S(t)$, $\quad \forall t \geqslant 0$.

Preuve. *Soit* $t > 0$ *et soit* $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.
Il vient facilement du théorème $4) - 3)$ *que la fonction :*

$S[0,t] \mapsto u(s)x = T(t-s)S(s), \quad x \in \mathcal{D}(A)$ *est dérivable et que :*

$$\begin{aligned}\frac{dU(s)}{ds}x &= \frac{d}{ds}(T(t-s))S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x \quad (A=B) \\ &= 0\end{aligned}$$

ce qui entraine alors que , pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, *la fonction* $S \longmapsto u(s)x = T(t-s)S(s)x$ *est constante et en particulier ses valeurs aux points* $S=0$ *et* $S=t$ *coïnsident, c'est à dire :*
$u(0)x = u(t)x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$.
D'où

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et* $T(t)$ *et* $S(t)$ *sont des opérateurs bornes sur* X, *pour tout* $t \geqslant 0$. *Il en résulte que* $T(t)x = S(t)x, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in X.$
D'où $\quad T(t) = S(t), \quad \forall t \geqslant 0.$

Théorème 1.2.4. *[1] Soient* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *un* c_0 *semi-groupe sur* X, *de générateur infinitésimal* A *et soit* V *un opérateur linéaire borné sur* $X(i,e)$ $V \in L_B(X)$.
Alors les propriétaires suivants sont équivalents :

1. $T(t)V = VT(t), \quad \forall t \geqslant 0$
2. $V\mathcal{D}(A) \subseteq (\mathcal{D})$ *et* $AVx = VAx, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2) *soit* $v \in L_B(X)$ *telle que :*
$T(t)V = VT(t), \quad \forall t \geqslant 0.$
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, *alors on a :*

$$\begin{aligned}A(Vx) &= \lim_{t\to+\infty} = \frac{T(t)Vx - V(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} V\left(\frac{T(t)x - x}{t}\right)\end{aligned}$$

qui existe et vaut VAx, donc $Vx \in \mathcal{D}(A)$. *et on a :* $AVx = V(Ax)$.
$2) \Rightarrow 1)$ *soit* $V \in L_B(X)$ *telle que* $VD(A) \subseteq (\mathcal{D})$ *et*
$AVx = VAx, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$.
pour tout $t \geqslant 0$ *et tout* $x \in \mathcal{D}(A)$ *définissons la fonction :*
$s \in [0,t] \longmapsto W(s)x = T(t-s)VT(s)x \ \in \mathcal{D}(A)$
Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}W(s)x &= \left(\frac{d}{ds}T(t-s)\right)VT(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}VT(s)x.\\ &= 0\end{aligned}$$

$(T(s)x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $AVT(s)x = VAT(s)x$
par conséquent $\quad w(0)x = w(t) \ \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$.
D'où $\quad T(t)Vx = VT(t)x, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$
comme $\quad \overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et* $T(t)V$ *et* $VT(t)$ *sont continues alors*
$T(t)V = VT(t), \quad \forall t \geqslant 0$
Nous avons vu dans le corollaire 3 que si A est le générateur infinitésimal d'un C_0*-semi-groupe sur X, alors* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et A est un opérateur fermé. Maintenant, nous allons démontrer un résultat plus général, pour cela nous commençons tout d'abord par énoncer le lemme suivant :*

Lemme 2. *[3] Soit E un espace vectoriel norme et soit F un sous espace vectoriel de E telle que :*$\bar{F} \neq E$. *Alors il existe* $f \in E', f \neq 0$ *telle que :* $< x, f >= 0, \quad \forall x \in F$.

Preuve. *C'est un corollaire du théorème de Hahn- Banach*
Soit E un espace vectoriel réel. Soit P une sous-norme sur E. Et soit M un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur M telle que pour tout $x \in M$ *, on a* $f(x) \leqslant P(x)$.
Alors , il existe une forme linéaire F sur E qui prolonge f, c'est a dire :

$$F(x) = f(x), \qquad \forall x \in M$$

et telle que $F(x) \leqslant P(x), \qquad \forall x \in E$

Théorème 1.2.5. *[1] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur infinitésimal (sur X)A. Alors :*

1. $\overline{\mathcal{D}(A^n)} = \mathbf{X}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\overline{\bigcap_{n\geqslant 0}^{+\infty} \mathcal{D}(A^n)} = \mathbf{X}$.

Preuve. *si* $n = 1$, *compte tenue du corollaire 3, il résultat que* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
posons $\mathcal{D} = \{\varphi \in \varphi^{\infty}(\mathbb{R}) : \varphi$ *est á support compact dans* $[0, +\infty[\}$
Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ *et tout* $x \in X$, *on pose :* $x_\varphi = \displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(s)t(s)xds$.
et on considéré l'ensemble :

$$Y = \{x_\varphi : \varphi \in \mathcal{D}, \quad x \in X\}$$

pour tout $x \in X$, $\varphi \in \mathcal{D}$ *et* $h > 0$, *on a :*

$$\frac{T(h) - I}{h} x_\varphi = \frac{1}{h}\int_0^{\infty} \varphi(s)T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^{\infty} \varphi(s)T(s)xds$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{\infty} (\varphi(s-h) - \varphi(s))T(s)xds \tag{1.15}$$

comme $\frac{1}{h}(\varphi(s-h) - \varphi(s))T(s)x$ *converge uniformément sur* $[0, +\infty[$ *vers* $-\varphi'(s)T(s)x$ *sur* $[0 + \infty[$.
quand $h \longrightarrow 0^+$, *alors en faisant tendre* h *vers* 0^+ *dans la formule 1.15,*
Il vient que $x_\varphi \in \mathcal{D}(A)$ *et que :* $Ax_\varphi = -\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi'(s)T(s)xds$.
Il en résulte alors que : $Y \subset \mathcal{D}(A)$. *et par récurrence on monter que :* $Y \subset \mathcal{D}(A^n)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et que :*

$$A^n x = (-1)^n \int_0^{\infty} \varphi^{(n)}(s)T(s)xds. \text{ et pour tout } \quad x_\varphi \in Y$$

Maintenant, montrons que Y *est danse dans* X.
Supposons, que le contraire c'est á dire : que $\overline{Y} \neq X$ *, alors d'après le lemme 2, corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe* $f \in X'$ *,* $f \neq 0$ *et telle que :*

$$< x_\varphi, f >= 0 \quad \forall x_\varphi \in Y$$

Donc :

$$\int_0^\infty \varphi(s) < T(s)x, f > ds =< \int_0^\infty \varphi(s)T(s)xds, f > = 0$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \forall x \in X$$

par conséquent : pour tout $x \in X$*, on a :* $< T(s)x, f >= 0$,
$\forall s \in [0, +\infty[$,
car sinon, il existe $\varphi \in \mathcal{D}$ *telle que :* $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(s) < T(s)x, f > ds \neq 0$ *ce qui est contradictoire .*
Il s'ensuit alors que pour tout $x \in X$ *:*

$$< T(s)x, f >= 0, \quad \forall s \in [0, +\infty[$$

En particulier pour $s = 0$ *on obtient :*
$< T(0)x, f >=< x, f > = 0, \quad \forall x \in X.$
ce qui est absurde ! car $f \neq 0$ *sur* X *.*
comme $Y \subset \mathcal{D}(A^n)$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on obtient ,* $D(A^n)$ *est dense dans* X*, i.e ,* $\overline{\mathcal{D}(A^n)} = X$.
D'où le 1)
on a vu dans (1) que $Y \subset \mathcal{D}(A^n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ *donc* $Y \subset \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}(A^n)$*, comme* $\overline{Y} = X$*, il vient alors que :*
$\overline{\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}(A^n)} = X.$

CHAPITRE 2

THÉORÈME FONDAMENTAUX

2.1 Théorème de Hille-Yosida

Dans ce chapitre, nous présentons l'un des résultats le plus important concernant les C_0-semi-groupes. Il s'agit du théorème de **Hille-Yosida**, qui permet de caractériser les opérateurs qui sont générateurs de C_0-semi-groupes. Nous allons commencer tout d'abord par introduire quelques notions et résultats intermédiaires .

Définition 2.1.1. *[1] Soit X un espace se Banach et soit $A : (\mathcal{D}) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire quelconque .*

1. *On appelle ensemble résolvant de A, qu'on note : $\rho(A)$ l'ensemble :*
$$\rho(A)=\{\lambda \in \mathbb{C} :\lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X \text{ est bijectif}\}$$
2. *on appelle spectre de A, l'ensemble noté $\sigma(A)$, défini par : $\sigma(A) = C/\rho(A)$.*
3. *Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur linéaire, $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A au point λ .*

Théorème 2.1.1. *[1] Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe sur X , le générateur infinitésimal A.*

et soient $w \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ telles que : $\| T(t) \| \leqslant Me^{wt}, \quad \forall t \geqslant 0.$
Si $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re\lambda > w$, alors :

1. *L'application $R_\lambda : X \longrightarrow X$ définie par :*
$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds,$$
définie un opérateur linéaire borné sur X .
2. $\lambda \in \rho(A)$ *et* $R(\lambda, A)x = R_\lambda x, \quad \forall x \in X$ *.*

Preuve. 1. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re\lambda > w$. il est facile de voir que R_λ est un opérateur linéaire .*
De plus , pour tout $s \geqslant 0$ et $x \in X$,on a :
$$\begin{aligned} \| e^{-\lambda s} T(s) x \| &\leqslant e^{-Re\lambda s} \| T(s) \| \| x \| \\ &= Me^{-(Re\lambda - w)s} \| x \| . \end{aligned}$$
ce qui entraîne alors que : $\| R_\lambda x \| \leqslant \int_0^\infty \| e^{-\lambda s} T(s) x \| ds$
$$\leqslant M \| x \| \int_0^\infty e^{-(Re\lambda - w)s} ds = \frac{M}{Re\lambda - w} . \| x \| \quad \forall x \in X$$
Il s'ensuit alors que R_λ est un opérateur linéaire borné sur X et que :
$$\| R_\lambda \| \leq \frac{M}{Re\lambda - w}$$

2. *Pour tout $x \in X$ et $h > 0$, on a :*
$$\begin{aligned} \frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s+h) x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds. \\ &= \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} T(s) x ds \end{aligned}$$
par passage á la limite quand $h \to 0^+$, on obtient que :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} = \lambda R_\lambda x - x.$$

Donc, $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ *et que :* $AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x, \qquad \forall x \in X$
c'est à dire : $(\lambda I - A)R_\lambda x = x, \quad \forall x \in X$ *.*
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, *alors d'après le théorème 4-assertion 3), on a :*
(Ici on peut utiliser théorème 6)

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(e^{-\lambda s}T(s)x) &= -\lambda e^{-\lambda s}T(s)x + e^{-\lambda s}\frac{d}{ds}T(s)x.\\ &= -\lambda e^{-\lambda s}T(s)x + e^{-\lambda s}T(t)Ax.\end{aligned}$$

Il vient alors que : $R_\lambda Ax = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)Axds$

$$\begin{aligned}&= \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-\lambda s}T(s)x)ds + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds\\ &= -x + \lambda R_\lambda x\end{aligned}$$

ce qui entrâine alors que : $\lambda R_\lambda x - R_\lambda Ax = x, \quad$ *c'est à dire :*

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Donc $\quad (\lambda I - A)R_\lambda = I_X \qquad$ *et* $\quad R_\lambda(\lambda I - A) = I_{D(A)}.$

Proposition 2.1.1. *[1] Soit* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur* X *de générateur infinitésimal* A *et Soient* $w \geqslant 0$ *et* $M \geqslant 1$ *telles que :*
$\parallel T(t) \parallel \leq Me^{wt}, \qquad \forall t \geqslant 0$
Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *telle que* $Re(\lambda) > w$ *et pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$ *on a :*

$$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax.$$

Preuve. *Pour tout* $t > 0$ *et tout* $x \in \mathcal{D}(A)$ *, on a : (Ici on peut utiliser théorème 6 et* $R_\lambda = R(\lambda, A)$*)*

$$\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds \longrightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds \qquad \text{en tant que } t \to +\infty$$

et

$$A\left(\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds\right) = \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)Axds \longrightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)Axds$$

en tant que $t \to +\infty$.
comme A *est un opérateur fermé, alors :*

$$\begin{aligned} AR(\lambda, A)x &= A(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds) \\ &= R(\lambda, A)x. \end{aligned}$$

2) Théorème de Hille-Yosida pour les C_0-semi-groupes de contraction :

Définition 2.1.2. *[1] Soit* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur* X

1. $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est dite uniformément borné s'il existe* $M \geqslant 1$ *telle que :*

$$\| T(t) \| \leqslant M, \quad \forall t \geqslant 0$$

2. $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est dit un* C_0*-semi-groupe de contractions si :*
   $\| T(t) \| \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0$.

Théorème 2.1.2. ***(Hille-Yosida)***
[1] Un opérateur linéaire A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contractions* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *sur* X *si et seulement si :*

1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et* A *est le opérateur* ***fermé*** .
2. $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda > 0$ *on a :* $\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{1}{\lambda}$

Preuve. *(condition nécessaire)*
[1] Soit A *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe "de contractions" alors d'après le corollaire 3, on a* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et un opérateur*

fermé.
D'autre part, il vient du théorème 8 que pour $\lambda > w = 0$, *on a :* $\lambda \in \rho(A)$ *et pour tout* $x \in X$: $R(\lambda, A)x = R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)xds$.
ce qui entraîne alors que :

$$\begin{aligned} \| R(\lambda, A)x \| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)xds \right\| \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda} \| x \|, \forall x \in X \end{aligned}$$

Donc $\| R(\lambda, A) \| \leqslant \frac{1}{\lambda}$ *d'où le résultat .*
Pour montrer que les conditions (1) et (2)du théorème précédent Hille-Yosida sont suffisants pour que A soit le générateur infinitésimal d'un C_0*-semi-groupes de contractions* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *on aura besoin de démontrer les lemmes suivants :*

Lemme 3. *[1] Soit A un opérateur linéaire sur X vérifiant les conditions du théorème précédent . Alors :* $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X$
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. *Alors*

$$\begin{aligned} \| \lambda R(\lambda, A)x - x \| &= \| AR(\lambda, A)x \| \\ &= \| R(\lambda, A) \| \| Ax \| \end{aligned}$$

d'après la proposition 1 $\quad \leqslant \dfrac{\| Ax \|}{\lambda} \longrightarrow 0 \quad$ *quand* $\quad \lambda \to +\infty$
Il s'ensuit alors que $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)$
comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et* $\| \lambda R(\lambda, A) \| \leqslant 1$, ($\lambda R(\lambda, A)$ *est un opérateur uniformément borné) alors :*
il en résulte que $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X$.

Définition 2.1.3. *[4] Pour* $\lambda > 0$ *, on appelle approximation de Yosida de l'opérateur linéaire A, l'opérateur :*

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I, \tag{2.1}$$

Remarque. *[4] on a :* $(\lambda I - A)R(\lambda, A) = I$
donc $AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I$
D'où $\lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$

Lemme 4. *[1] Soit A un opérateur linéaire satisfaisant les conditions 1 et 2 du théorème 9 :*
*Si A_λ est **l'approximation de Yosida** de A alors :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Preuve. *soit $x \in \mathcal{D}(A)$ d'après le lemme 3 , on a :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$$

Il s'ensuit alors que : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax$ *(d'après la proposition 2.2.1)*

$$= Ax$$

Lemme 5. *[1] Soit A un opérateur linéaire sur X satisfaisant les conditions 1) et 2) du théorème précédent et soit A_λ l'approximation de Yosida de A. Alors A_λ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continue de contractions $(e^{tA_\lambda})_{t \geqslant 0}$*
De plus, pour tous $x \in X$ et $\lambda, \mu > 0$, on a :

$$\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \|$$

Preuve. *De la formule 2.19 de la définition de A_λ , il est clair que A_λ est un opérateur linéaire borné sur X, donc d'après le théorème 1, A_λ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continue. $(e^{tA_\lambda})_{t \geqslant 0}$.*
De plus pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\| &= \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)} \times e^{-t\lambda I}\| \\ &\leqslant e^{-t\lambda} e^{t\lambda} = 1, \quad \textit{car} \quad \|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Il en résulte alors que $(e^{tA_\lambda})_{t\geqslant 0}$ *est un semi-groupe uniformément continue de contractions sur* X.
Il est facile de voir à partir de la définition que pour tout $\lambda, \mu > 0$, A_λ *et* A_μ *et* e^{tA_λ} *et* e^{tA_μ} *commutent entre en* X. *Il en résulte alors que pour tout* $x \in X$:

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu})xds \right\| \\ &\leqslant t \| A_\lambda x - A_\mu x \| \\ car \quad \| e^{tsA_\lambda} \| \leqslant 1 &\quad et \quad \| e^{t(1-s)A_\mu} \| \leqslant 1 \end{aligned}$$

Preuve. *(conditions suffisantes)*
Soit $x \in D(A)$. *Alors pour tous* $\lambda, \mu > 0$ *on a :*

$$\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x \| \leqslant t \| A_\lambda x - Ax \| + t \| A_\mu x - Ax \| \tag{2.2}$$

Il vient de l'inégalité 3.1 et du lemme 4 que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, $e^{tA_\lambda x}$ *converge quand* λ *tend vers* $+\infty$ *et la convergence est uniforme sur les intervalles bornés.*
posons : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \quad \forall x, t \in \mathcal{D}(A)$
comme : $D(A)$ *est dense des* X *et* $\| e^{tA_\lambda} \| \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0($ e^{tA_λ} *est uniforme borné) alors :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \quad \forall x \in X \tag{2.3}$$

la limite dans la formule 3.1 est uniforme sur les intervalles bornées .
De la formule 3.1,on voit que :

$$\begin{gathered} T(0) = I, T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geqslant 0 \\ et \; \| T(t) \| \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0. \quad De \;\; plus \quad t \mapsto T(t)x \end{gathered}$$

est continue pour $t \geqslant 0$ *car :*
limite uniforme de fonction continue $t \mapsto e^{tA_\lambda}x$. *Ainsi* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est*

un C_0-semi-groupe de contractions sur X. Pour conclus, il nous reste à montre que A est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Pour cela, soit $x \in \mathcal{D}(A)$, en utilisant la formule 3.1 et le 4 et compte tenu de la convergence uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ vers $T(t)Ax$ sur les intervalles borné, on obtient :

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \to +\infty} (e^{tA_\lambda}x - x) \\ &= \int_0^t T(s)Axds. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Soit B le générateur infinitésimal de $(T(t))_t \geqslant 0$ et soit $x \in \mathcal{D}(A)$.
En divisant la formule 3.4 par $t > 0$ et en faisant t vers $t \to 0^+$, on voit que $x \in \mathcal{D}(B)$ et on a :

$$Bx = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Axds = Ax$$

ce qui entraîne alors que $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ et $Ax = Bx, \quad \forall x \in A$ comme B est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{\geqslant 0}$ qui est de contraction, alors d'après la conditions nécessaires (2), on a $1 \in \rho(B)$. D'autre part, puis que A vérifie (2) du théorème (9) alors $1 \in \rho(A)$. Mais puis que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $Ax = Bx, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)$
on a : $(I - B)\mathcal{D}(A) = (I - A)\mathcal{D}(A) = x$ (car $I - A$ est surjectif)
ce qui entraine alors que $\mathcal{D}(B) = (I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(A)$. D'où $A = B$
comme conséquence du théorème 9 de Hille Yosida, on obtient :

Corollaire 2.1.1. *[1] soit A le génération infinitésimale d'un C_0-semi-groupe de contractions $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et soit A_λ l'approximation de Yosida A. Alors :*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA\lambda}x \qquad \forall x \in X.$$

Preuve. *Il vient de la demonstration du théorème 9, que $(\lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda})_{t\geqslant 0}$. Définie un C_0-semi-groupe de contractions $(S(t))_{t\geqslant 0}$ dont le générateur* *infinitésimal est A, le théorème 5 " d'unicité de l'engendrement" nous permet donc de conclure que :*

$$T(t) = S(t), \quad \forall t \geqslant 0.$$

Corollaire 2.1.2. *[1] Soit $w \geqslant 0$ un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimale d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ vérifiant*
$\| T(t) \| \leqslant e^{wt}, \quad \forall At \geqslant 0$
si seulement si :

1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et A est fermé*
2. $]w, +\infty[\subset \rho(A)$ *et pour tout $\lambda > w$ on a :* $\quad \| R(\lambda, A) \| \leqslant \frac{1}{\lambda - w}$

Preuve. *Découle du théorème 9 de Hille-Yosida appliquée au semi-groupe de contractions :*

$$S(t) = e^{-wt}T(t), \quad \forall t \geqslant 0$$

et de générateur infinitésimale : $B = A - wI$ et pour $\lambda - w > 0$.

Lemme 6. *[1] Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé. Alors :*

1. *l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, de plus pour tout $\mu \in \rho(A)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{\| R(\mu, A) \|}$, On sait :* $\quad \lambda \in \rho(A)$

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1} \tag{2.5}$$

2. *l'application $\lambda \mapsto R(\mu, A)$ est localement analytique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} (21) \tag{2.6}$$

Preuve. *Soit* $\mu \in \rho(A)$ *et soit* $\lambda \in$ *telle que :*
$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}$. *Alors :*

1.
$$\begin{aligned}\lambda I - A &= \mu I - A + \lambda I - \mu I \\ &= [I - (\mu-\lambda)R(\mu, A)](\mu I - A)\end{aligned}$$
comme $| \mu - \lambda |< \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}$, *alors l'opérateur* $[I - [(\mu-\lambda)R(\mu, A)]]$ *est inversible d'inverse :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\mu-\lambda)^n R(\mu, A)^n = [I - (\mu-\lambda)R(\mu, A)]^{-1}$$
Il en résulte alors que $\lambda I - A$ *est bijectif.*
Donc $B(\mu, \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}) \subseteq \rho(A)$, *d'ou* $\rho(A)$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$ *De plus, pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $| \mu - \lambda |< \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}$ *on a :*
$$\begin{aligned}R(\lambda, A) &= (\lambda I - A)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(\mu-\lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}.\end{aligned}$$

2. *Découle immédiatement de la représentation de la résolvante dans la série de la formule 3.5*
$$F(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z_0 - z)^n \qquad \text{alors} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}F^n(z)$$

Théorème 2.1.3. *[1] Si* A *est le générateur infinitésimale d'un* C_0 *semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *vérifiant :* $\| T(t) \|\leqslant Me^{wt}$, $\forall t \geqslant 0$ *avec* $W \geqslant 0$ $M \geqslant 1$. *Alors :*

1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et* A *est* ***férme***
2. *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *telle que* $Re\lambda > w$ *on a* $\lambda \in \rho(A)$ *et :*
$$\| R(\lambda, A)^n \|\leqslant \frac{M}{(Re\lambda - w)^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Preuve. *D'après le théorème 8, comme Re > w, alors* $\lambda \in \rho(A)$ *et pour tout* $x \in X$*, On a :*

$$R(\lambda, A)x = R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds$$

et $\quad \| R(\lambda, A) \| \leqslant \dfrac{M}{Re\lambda - w}$

Il est facile de voir que $\quad \dfrac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x = -\int_0^\infty s e^{-\lambda s} T(s) x ds, \;\; \forall x \in X$
et par récurrence on obtient pour tout $x \in X$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*, que :*

$$\frac{d}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^\infty S^n e^{-\lambda s} T(s) x ds$$

par ailleurs, par le lemme 6, on a :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}$$

Il en résulte alors que :

$$R(\lambda, A)^{n+1} x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty S^n e^{-\lambda s} T(s) x ds \quad \forall x \in X$$

D'où $\quad R(\lambda, A)^n x = \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^\infty S^{n-1} e^{-\lambda s} T(s) x ds \; \forall x \in X, \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$
Il vient alors pour tout $x \in X$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a :*

$$\begin{aligned} \| R(\lambda, A)^n x \| &= \frac{1}{(n-1)!} \left\| \int_0^\infty S^{n-1} e^{-\lambda s} T(s) x ds \right\| \\ &\leqslant \frac{M}{(Re\lambda - w)^n} \| x \| . \end{aligned}$$

$$\| R(\lambda, A)^n \| \leqslant \frac{M}{(Re\lambda - w)^n}, ` \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

telle que : $Re\lambda > w \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Proposition 2.1.2. *[1]*

Équation de la résolvante

Si $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire, alors pour tous $\lambda, \mu \in \rho(A)$,
on a :

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

Preuve. *De la définition de la résolvante, on a*

$$\begin{aligned} &[\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A)]R(\mu, A) = R(\mu, A) \\ \textit{et} \quad &[\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)]R(\lambda, A) = R(\lambda, A) \end{aligned}$$

en faisant la différence des deux égalités et compte tenu que $R(\lambda, A)$ et $R(\mu, A)$ commutent, on obtient :

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

Théorème 2.1.4. ***Théorème de Hille-Yosida dans le cas général :*** *[1] Dans ce section, on va démontrer le théorème de Hille-Yosida dans le cas général d'un C_0- semi-groupe sur X. Tout d'abord on va commencer par démontrer le lemme suivante*

Lemme 7. *[1] Soit A un opérateur linéaire sur X telle que :*
$]0, +\infty[\subset \rho(A)$ *si de plus :*

$$\| \lambda^n R(\lambda, A)^n \| \leqslant M \quad \forall x \in \mathbb{N}, \forall \lambda > 0$$

Alors il existe un norme $\| \, . \, \|_1$ sur X équivalente à la norme d'origine $\| \, . \, \|$ vérifiant :

1. $\| x \| \leqslant \| x \|_1 \leqslant M \| x \|, \qquad \forall x \in X.$
2. $\| \lambda R(\lambda, A)x \|_1 \leqslant \| x \|_1, \qquad \forall x \in X$.

Preuve. *Soit $\mu > 0$. Posons*

$$\| x \|_\mu = \sup_{n \geqslant 0} \| \mu^n R(\mu, A)^n \|, \quad \forall x \in X \tag{2.7}$$

Il facile de voir que $\| \,.\, \|_\mu$ *définit une norme sur* X *vérifiant :*

$$\| x \| \leqslant \| x \|_\mu \leqslant M \| x \|, \quad \forall x \in X \tag{2.8}$$

et

$$\| \mu R(\mu, A) \|_\mu \leqslant 1, \tag{2.9}$$

montrons alors que :

$$\| \lambda R(\lambda, A) \|_\mu \leqslant 1, \quad pour \quad 0 < \lambda \leqslant \mu, \tag{2.10}$$

Soit $x \in X$*. Posons* $y := R(\lambda, A)x$
Il vient alors de l'équation de la résolvante que

$$y = R(\lambda, A)x = R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)y)$$

et par l'inégalité triangulaire et l'inégalité 2.9 on obtient :

$$\begin{aligned}
&\| y \|_\mu = \| R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)y \|_\mu \\
&\qquad \| y \|_\mu \, (1 - \frac{\mu - \lambda}{\mu}) \leqslant \frac{\| x \|_\mu}{\mu} \\
donc: &\quad \lambda \| y \|_\mu \leqslant \| x \|_\mu \\
donc: &\quad \| \lambda R(\lambda, A)x \|_\mu \leqslant \| x \|_\mu, \quad \forall x \in X \\
D'ou: &\quad \| \lambda R(\lambda, A)x \|_\mu \leqslant 1 \qquad pour \qquad 0 < \lambda \leqslant \mu.
\end{aligned}$$

Des inégalité 2.8 et 2.10, on soit facilement que :

$$\| \lambda^n R(\lambda, A)^n x \| \leqslant \| \lambda^n R(\lambda, A)^n x \|_\mu \leqslant \| x \|_\mu \tag{2.11}$$

pour $0 < \lambda \leqslant \mu$ *D'où :* $\| x \|_\lambda = \sup_{n \geqslant 0} \| \lambda^n R(\lambda, A)^n x \| \leqslant \|x\|_\mu$ *pour* $0 < \lambda \leqslant n$
D'où $\| x \|_\lambda \leqslant \| x \|_\mu$,
pour $0 < \lambda \leqslant n$
posons

$$\| x \|_1 = \lim_{\mu \to +\infty} \|x\|_\mu, \qquad \forall x \in X$$

en faisant tendre $\mu \to +\infty$ dans la formule 2.8, on obtient :

$$\| x \| \leqslant \| x \|_1 \leqslant M \| x \| \qquad \forall x \in X,$$

en prenant $n = 1$ dans le formule 2.11, il vient que :

$$\| \lambda R(\lambda, A)x \|_\mu \leqslant \| x \|_\mu \qquad \forall x \in X$$

D'où $\quad \|\lambda R(\lambda, A)\|_1 \leqslant 1$

Théorème 2.1.5. ***(Hille-Yosida)***
[1] Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$ sur X, vérifiant $\| T(t) \| \leqslant Me^{wt}, \quad \forall t \geqslant 0$ avec $W \geqslant 0, M \geqslant 1$
si et seulement si :

1. *$\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et A est un opérateur **fermé** .*
2. *$\{\lambda \in \mathbb{C}, Re\lambda > W\} \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re\lambda > w > 0$ on dit :*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(Re\lambda - w)^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Preuve. *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$ telle que $\| T(t) \| \leqslant Me^{wt}$ alors les assertion (1) et (2) découlent du théorème 10 Réciproquement, supposons que A vérifie les assertions (1)et (2) du th 11 Alors sans perte de généralité et quitte à considérer le semi-groupe $S(t) = e^{-wt}T(t), \forall t \geqslant 0$, On peut supposer que $w = 0$ L'assertion (2) implique dans ce cas que :*

$$\| \lambda^n R(\lambda, A)^n \| \leqslant M, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

soit $\| \, . \, \|_1$ la norme équivalente à $\| \, . \, \|$, définie de le lemme 7 et vérifiant :

$$\| x \| \leqslant \| x \|_1 \leqslant M \| x \|, \quad \forall x \in X \tag{2.12}$$

et

$$\| \lambda R(\lambda, A)\|_1 \leqslant 1, \quad \forall \lambda > 0 \tag{2.13}$$

A étant un opérateur fermé à domaine dense, de plus $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ *et* $\quad \| \lambda R(\lambda, A) \|_1 \leqslant 1, \quad \forall \lambda > 0$
Il vient alors du théorème 9 de Hille-Yosida concernant les C_0*-semi-groupe de A est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(T(t))_{t \geqslant 0}$ *de* $\| \, . \, \|_1$ *-contractions sur X, et en utilisant l'inégalité 2.12 , on obtient pour tout* $t \geqslant 0$ *et tout* $x \in X$*,*

$$\| T(t)x \| \leqslant \| T(t)x \|_1$$
$$\| T(t) \| \leqslant M, \quad \forall t \geqslant 0 \quad \boxtimes$$

Maintenant, nous donnons une extension de la formule de représentation du corollaire 4 au cas général des C_0 *semi-groupe sur* X *.*

Théorème 2.1.6. *[1] Soit A le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(T(t))_{t \geqslant 0}$ *sur X vérifiant :* $\quad \| T(t) \| \leqslant Me^{wt}, \quad \forall t \geqslant 0$ *avec* $w \geqslant 0$ *et* $M \geqslant 1$*.*
Si A_λ *est l'approximation de Yosida de A* $(i, eA = \lambda AR(\lambda, A))$ *alors :*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda} x, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \geqslant 0$$

Preuve. *Commençons tout d'abord par le cas où*
$\| T(t) \| \leqslant M,$
$\forall t \geqslant 0, (i, ew = 0)$*. D'après le lemme 7, il existe une norme* $\|.\|_1$ *sur X, équivalente à* $\| \, . \, \|$ *telle que* $(T(t))_{t \geqslant 0}$ *soit un* C_0*-semi-groupe de* $\| \, . \, \|_1$ *-contractions sur X.*
Il vient alors du corollaire 4 que : $\quad \| e^{tA_\lambda} x - T(t)x \|_1 \to 0 \quad \lambda \to +\infty$*.*
comme $\| \, . \, \|_1$ *et* $\| \, . \, \|$ *sont équivalentes, on déduit alors que :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda} x = T(t)x, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \geqslant 0$$

supposons maintenant que : $\quad \| T(t) \| \leqslant Me^{wt}, \quad \forall t \geqslant 0$ *avec* $w > 0$
Alors pour $\lambda > 2w$*, la fonction* $\quad \lambda \mapsto \| e^{tA_\lambda} \|$ *est bornée. En effet :*

pour $\lambda > 2w$, *on a :*

$$\begin{aligned} \| R(\lambda, A)^k \| &\leqslant \frac{M}{(\lambda - w)^k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &\leqslant Me^{2wt} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Maintenant considérons le semi-groupe uniformément borné :
$S(t) = e^{-wt}T(t), \quad \forall t \geqslant 0$ *dont le générateur infinitésimal est* $A - wI$
De la première partie de la démonstration, il vient que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{t(A-wI)_\lambda} x = S(t)x, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \geqslant 0$$

ce qui entraine, alors que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{t(A-wI)_\lambda + wtI} x = T(t)x, \forall x \in X, \forall t \geqslant 0 \tag{2.15}$$

par un simple calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} (A-wI)_\lambda - A_{\lambda+w} &= \lambda^2 R(\lambda, A-wI) - \lambda I - (\lambda+w)^2 R(\lambda+w, A) + (\lambda+w)I \\ &= w[wR(\lambda + w, A) - 2AR(\lambda + w, A)][(\lambda I - A)R(\lambda, A) = I] \end{aligned}$$

comme $\quad \lambda + w > w \quad$ *alors* $\quad \|R(\lambda + w, A)\| \leqslant \frac{M}{\lambda}$
Il s'ensuit alors que :

$$\begin{aligned} \| H(\lambda) \| &= \| 2wI - w(w + 2\lambda)R(\lambda + w, A) \| \\ &\leqslant 2w + M(2w + \frac{w}{2}) \;\; car \;\; \lambda > 2w \end{aligned} \tag{2.16}$$

Il vient aussi que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, *on a :*

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)x\| &= \|w^2 R(\lambda + w, A)x - 2wAR(\lambda + w, A)x\| \\ &\leqslant \frac{M}{\lambda}(w^2\|x\| + 2w\|Ax\|) \to 0 \\ &\quad quand \;\; \lambda \to +\infty \end{aligned} \tag{2.17}$$

Donc $R(\lambda)x \to 0$ *quand* $\lambda \to +\infty, \forall x \in \mathcal{D}(A)$ *et puis que* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *et* $R(\lambda)$ *est uniformément bornée (d'après 2.16) on déduit que :*

$$R(\lambda)x \to 0 \ \ quand \ \ \lambda \to +\infty, \quad \forall x \in X$$

$$\begin{aligned} \| \ e^{tH(\lambda)}x - x \ \| &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n H^n(\lambda)}{n!} x \right\| \\ &\leqslant t\|H(\lambda)x\| e^{t\|H(\lambda)\|} \end{aligned}$$

Il vient alors de l'inégalité 2.16 et de la formule 2.17 que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{tH(\lambda)}x = x, \quad \forall x \in X \tag{2.18}$$

finalement, comme $H(\lambda)$ *et* $A_{\lambda+w}$ *commutent, on obtient :*

$$\begin{aligned} \| \ e^{tA_\lambda}x - T(t)x \ \| &\leqslant \| \ e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda + tH(\lambda-w)}x \ \| + \| \ e^{tA_\lambda + tH(\lambda-w)}x - T(t)x \ \| \\ &\leqslant \| \ e^{tA_\lambda} \ \| \| \ e^{tH(\lambda-w)}x - x \ \| + \| \ e^{tA_\lambda + tH(\lambda-w)}x - T(t)x \ \| \ . \end{aligned}$$

$$\forall x \in X, \quad \forall t \geqslant 0$$

Ainsi : $\displaystyle \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \geqslant 0$

2.2 Théorème de Lummer-Phillips

[1] Notons par X' le dual de l'espace de Banach X et pour $f \in X'$ et $x \in X$ on note f(x) par $< f, x >$ pour tout $x \in X$ on pose

$$F(x) = \{f \in X, < f, x > \|x\|^2 = \|f\|^2\}$$

par le théorème de Hahn Banach $F(X) \neq 0$ pout tout $x \in X$

Définition 2.2.1. *Un opérateur linéaire* A *est dissipatif si pour tout* $x \in D(A)$ *il existe* $f \in F(X)$ *tel que* $Re < f, Ax > \leq 0$.

Théorème 2.2.1. ***Lummer-Phillips***
Soit A un opérateur linéaire a domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X

1. *Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, Alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions sur X*
2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur X, alors $Im(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$ et A est un opérateur dissipatif. De plus, pour tout $x \in D(A)$ et tout $f \in F$ on a : $Re < f, Ax > \leqslant 0$.*

Preuve. *Soit A un opérateur linéaire a domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X*

1. *Supposons que A est dissipatif et qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = X$.*
   Alors d'après l'assertion (2) de la proposition 2,
   $Im(\lambda I - A) = X$, pour tout $\lambda > 0$, $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et
   $\| R(\lambda, A) \| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$, d'autre part $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est borné donc fermé ce qui entraine alors que $\lambda_0 I - A$ est aussi fermé et donc A est fermé, Il vient alors du théorème 9-chapitre 1 de Hille-Yosida que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction sur X .
2. *Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur X, alors, d'après le théorème de Hille-Yosida, on a*
   $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et donc $Im(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$, De plus , pour $x \in D(A)$ et $f \in F(x)$ on a :

$$\begin{aligned} | < f, T(t)x > | &\leqslant \| f \| \| T(t)x \| \\ &\leqslant \| f \| \| x \| = \| x \|^2 \end{aligned}$$

   ce qui entraine alors que :

$$Re| < f, T(t)x - x > = Re| < f, T(t)x > | - \| x \|^2 \leqslant 0$$

Il s'ensuit alors que :

$$Re < f, Ax >= Re\left(\left\langle f, \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}\right\rangle\right) \leqslant 0$$

ceci étant pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et pour tout $f \in F(x)$
On déduit alors du lemme 2 que A est un opérateur dissipatif ce que achève la démonstration du théorème

Définition 2.2.2. *[1] On appelle :*
opérateur m-dissipatif tout opérateur dissipatif A telle que
$Im(I - A) = X$ *.*

Remarque. *:[1] Il est facile de voir que :*

1. *Si λ est dissipatif, alors. μ A. dissipatif, pour tout $\mu > 0$*
2. *Si A est m-dissipatif, alors $Im(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$*
   Enfin, on établit le théorème de perturbation du générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions par un opérateur dissipatif .

Théorème 2.2.2. *[1] Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions sur X et soit B un opérateur dissipatif telles que : $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et vérifiant :*

$$\| Bx \| \leqslant a \| Ax \| + b \| x \|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \tag{2.19}$$

où $0 \leqslant a < 1$ et $b \geqslant 0$. alors A+B est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions sur X.

Preuve. *Comme A est la générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe, alors. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Et par le théorème de Lummer-Phillips, l'opérateur A est*
m-dissipatif, il s'ensuit alors car $Am - dissipatif$:
$Re < Ax, l > \leqslant 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(x)$

$A+tB$ est dissipatif pour tout $t \in [0,1]$. De plus puisque B est dissipatif et $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et en utilisant l'inégalité 2.19 on montre que $A+tB$ est m-dissipatif pour tout $.t \in [0,1]$. En particulier $A+B$ est m-dissipatif, et comme de plus

$$\overline{\mathcal{D}(A+B)} = \overline{\mathcal{D}(A)} = \rho$$

on déduit du théorème de Lummer-Phillips. que $A+B$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions sur X.

Théorème 2.2.3. *[1] si A et B 2 opérateur telles que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $A+tB$ dissipatif pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ si $\| Bx \| \leqslant \alpha \| Ax \| + B \| x \|$ où $0 \leqslant \alpha < 1, B \geqslant 0$ et $\exists t_0 \in [0,1]/A+t_0B$ est m-dissipatif alors $A+tB$ est m-dissipatif pour tout $t \in [0,1]$ suite : $\forall x \in \mathcal{D}(A), \exists f \in F(x)$ telles que $Re < Bx, x > \leqslant 0$ et donc pour ce f $Re < Ax + tBx, f > \leqslant c$ par théorème 3,2 $A+tB$ est m-dissipatif pour tout $t \in [0,1]$ $(t_0 = 0)$ D'où $A+B$ est m-dissipatif et il est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction par Lummer-Phillips.*

CHAPITRE 3

APPLICATION AUX ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

3.1 Applications aux équations d'évolutions

Dans ce chapitre, nous donnons quelques applications de la théorie des semi-groupes à la résolution des équations différentielles plus précisément on étudie :
le problème linéaire abstrait de la forme :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & \forall t \geqslant 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

u(.) est une fonction 3.1 à valeurs dans l'espace de Banach X.
$A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ est un opérateur linéaire et $x \in X$ est la valeur initiale .

Définition 3.1.1. *[2]*

1. *Le problème à valeur initiale :*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & \forall t \geqslant 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{3.2}$$

est dit problème abstrait de Cauchy associée à $(A, \mathcal{D}(A))$ *et de valeur initiale*

2. *une fonction* $u : \mathbb{R}^+ \to X$ *est dite solution (classique) du problème (PAC), si* U *est continument dérivable,* $U(t) \in \mathcal{D}(A), \quad \forall t \geqslant 0$ *et* U *vérifié (PAC)*

Théorème 3.1.1. *[1] Soit* $(A, (\mathcal{D}))$ *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *sur* X *Alors pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$*, la fonction :*

$$u : t \longmapsto u(t) := T(t)x$$

est l'unique solution du problème (PAC) de valeur initiale x*.*

Preuve. *soit* $x \in \mathcal{D}(A)$*, il est bien connu que :*
$u(t) = T(t)x$ *est une solution classique du problème (PAC)*
soit V *une autre solution de (3.2) càd :*

$$\begin{cases} V'(t) = AV(t), \quad \forall t \geqslant 0 \\ V(0) = x \end{cases} \tag{3.3}$$

soit $t > 0$ *.Alors pour tout* $s \in [0, t]$ *on a :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(T(t-s)V(s)) &= -T(t-s)AV(s) + T(t-s)AV(s) \\ &= -T(t-s)AV(s) + T(t-s)AV(s) = 0 \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t on obtient :

$$[T(t-s)]V(s)]_0^t = 0$$

ce qui entraine que $T(0)V(t) - T(t)V(0) = 0$ *soit alors*
$V(t) = T(t)V(0) = T(t)x$ *ce qui termine le démonstration du théorème*

Définition 3.1.2. *[1] une fonction continue* $u : \mathbb{R}^+ \to X$
est dite solution (on mild solution) du problème (PAC) à valeur initiale

$u(0) = x$,
si pour tout $t \geqslant 0$:

$$\int_0^t u(s)ds \in \mathcal{D}(A) \qquad et \qquad u(t) = x + A\int_0^t u(s)ds$$

Théorème 3.1.2. *[1] Soit* $(A, (\mathcal{D}(A))$ *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *sur X.Alors pour tout* $x \in X$*, l'application :*
$u : t \mapsto u(t) := T(t)x$
est l'unique solution (mild solution) du problème (PAC) de valeur initiale x.

Preuve. *compte tenu de l'assertion 2 du théorème 4, pour tout* $x \in X$ *ona :*
$T(t)x = x + A\int_0^t T(s)xds$*, ce qui entraine que :* $u(t) = T(t)x$ *est une solution du problème (PAC) de valeur initiale x .*
pour l'unicité, supposons que V est une autre solution du problème (PAC) de valeur initiale x. Alors :

$$u(t) = x + A\int_0^t u(\omega)d\omega \qquad et \quad V(t) = x + A\int_0^t V(\omega)d\omega.$$

soit $t \geqslant 0$*, alors pour tout* $s \in [0, t]$ *on a :*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(T(t+s))\int_0^s (u(r) - V(r)dr) \\ &= \left(\int_0^s (u(\omega) - v(\omega))d\omega = u(s) - V(s)\right) = 0 \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t on obtient :

$$\left[T(t-s)\int_0^s (u(r) - V(r)dr)\right]_0^t = 0$$

ce qui entraine alors que : $\quad T(0)\displaystyle\int_0^t (u(r) - V(r)dr = 0$

ce qui implique : $\quad \displaystyle\int_0^t u(r)dr = \int_0^t V(\omega)d\omega$

D'où $\quad u(t) = x + A\displaystyle\int_0^t u(r)dr = x + A\int_0^t V(\omega)d\omega = V(t), \qquad \forall t \geqslant 0.$

3.2 Application aux équations d'évolution

3.2.1 Quelques Applications de la théorie de semi-groupes aux équations d'évolution

Soit le problème du Cauchy :

$$\textbf{(P1)} \begin{cases} y'(t) - Ay(t) = f(t, y(t)), & t \in [0;1] = J \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Où $f : J \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ une fonction donnée, $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ Un opérateur (non linéaire) de domaine dense dans $\mathbb{E}$ qui le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ d'opérateur linéaire bornés $y_1 \in \mathbb{E}$ et $\mathbb{E}$ un espace du Banach on appliquer sur de théorème de point fixe de Banach sur la contraction qui dit que, si $X; Y$ sont des espaces de Banach et l'opérateur $N : X \to Y$ qui est une contraction (i,e) :
$\forall x, y \in X, \parallel N(x) - N(y) \parallel_X \leq K \parallel x - y \parallel_Y$ avec $0 < K < 1$. Alors N a un point fixe unique dans X.

Définition 3.2.1. *[2] f est dite L^1 carathéodory si :*

1. $\forall y \in E \quad f(.,y)$ *est une application mesurable*
2. *sur presque sont* $t \in J : f(t,.)$ *est continue*
3. $\forall k > 0, \exists \varphi_k \in L^1(J.\mathbb{R}^+)$ *telle que pour tout* $y \in E$ *avec* $\parallel y \parallel \leq k$ *:*

$$\parallel f(t,y) \parallel_E \leq \varphi_k(t) \quad \textit{presque partout dans } J.$$

pour le problème (**P1**), on s'intéresse aux solution suivants :

Lemme 8. *[2] une fonction continue $y \in C(J, E)$ est une (**solution intégral**) si y satisfont l'équation intégral suivante :*

$$y(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds \quad \forall t \in J$$

*On le résultant suivant pour le problème (**P1**).*

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H1) f est L^1 carathéodory

(H2) Il existe une constante $M \geq 1 : \| T(t) \|_{L_B(X)} \leq M, \quad \forall t \geq 0$

(H3) Il exists $p \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\| f(t,y) - f(t,\overline{y}) \| \leq p(t) \| y - \overline{y} \| \quad \forall y, \overline{y} \in \mathbb{E}, \forall t \in J.$$

Théorème 3.2.1. *Supposons que les hypothèses **(H1)** -**(H3)** sont satisfaites. Alors le problème (**P1**) admet une solution intégral unique.*

Preuve. *On transforme le problème d'existence de solution en un problème du point fixe, pour cela, on considère l'opérateur $N : C(J, E) \to C(J, E)$ définie par :*

$$y \mapsto N(y)(t) := T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds.$$

*Il est clair les points fixe de N, sont des solutions de problème **(P1)**. Montrons que N est un contraction .En effet soient $y, \overline{y} \in C(J, E)$,*

$$N(y)(t) - N(\overline{y})(t) = \int_0^t T(t-s)[f(s, y(s)) - f(s, \overline{y}(s))]ds$$

d'où $\forall t \in J$

$$\| N(y)(t) - N\overline{y}(t) \| \leqslant M \int_0^t p(s) \| y(s) - \overline{y}(s) \| ds$$

$$\leq M \sup_{t\in J} \| y(t) - \overline{y}(t) \| \| p \|_{L^1}$$

d'où $\quad \sup_{t\in J} \| N(y)(t) - N(\overline{y})(t) \| \leqslant M \| p \|_{L^1} \sup_{t\in J} \| y(t) - \overline{y}(t) \|$

$$\| N(y) - N(\overline{y}) \|_\infty < M \| p \|_{L^1} \| y - \overline{y} \|_\infty .$$

Considérons maintenant la norme $\|.\|_1$ *définie sur* $C(J, E)$ *par*

$\|y\|_1 = \sup_{t\in J} e^{-\tau P(t)} \|y(t)\| \quad ou \quad P(t) = \int_0^t p(s)ds \; et \; \tau > M.$

Les norme $\|.\|_\infty$ *et* $\|.\|_1$ *sont équivalente :*

$$e^{-P(t)} \| y \|_\infty \leqslant \| y \|_1 \leqslant \| y \|_\infty .$$

$$\begin{aligned} y(t) = e^{\tau P(t)} e^{-\tau P(t)} y(t) &\Rightarrow y(t) \leq e^{\tau P(t)} e^{-\tau P(t)} \|y(t)\| \\ &\Rightarrow \sup_{t\in J} \|y(t)\| \leqslant e^{\tau P(t)} \sup_{t\in J} e^{-\tau P(t)} \|y(t)\| \\ &\Rightarrow \|y\|_\infty \leqslant e^{\tau P(t)} \|y\|_1 \leqslant \|y\|_\infty, \quad \forall t \in J, \end{aligned}$$

Alors pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned} \|N(y)(t) - N(\overline{y})(t)\| &\leqslant M \int_0^t p(s) \|y(s) - \bar{y}(s)\| ds \\ &\leq M \|y - \overline{y}\|_1 \frac{1}{\tau} e^{\tau P(t)} |_0^t \\ &\leq \frac{M}{\tau} \|y - \overline{y}\|_1 (e^{\tau P(t)} - 1) \\ &\leqslant \frac{M}{\tau} \|y - \bar{y}\|_1 e^{\tau P(t)} \end{aligned}$$

d'où

$$\|N(y) - N(\overline{y})\|_1 \leqslant \frac{M}{\tau} \|y - \bar{y}\|_1.$$

Alors N *est un contraction pour tout* $\tau > M$.

Exemple 1. *considérons l'équation aux dérives partielle*

$$\frac{\partial}{\partial t} z(t, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \overline{y}(t, y) = f(t, z(t, y)) \qquad o \leqslant y < \pi, t \in J$$

$z(t,0) = z(t,\pi), t \in J$

on a $\quad f : J \times E \longrightarrow E$ *et soit* $E = L^2([0,\pi],\mathbb{R})$

et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ *définit par* $Aw = w"$ *ou* $w' = \dfrac{\partial w}{\partial y}, w" = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

$\mathcal{D}(A) = \{w \in E, w, w'$ *sont absolument continue,* $w'' \in E \ w(0) = w(\pi) = 0\}$, *alors*

$$Aw = \sum_{n=1} n^2(w,w_n)w_n, w \in \mathcal{D}(A)$$

ou $w_n(s) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ *si* $n = \{n_1, n_2, ...\}$ *est l'ensemble des vecteur propre orthogonalement de* A.

Il est comme (vrai pour que A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique* $T(t) \geqslant 0$ *de* E *et est donné par*

$$T(t) = \sum_{n=1} e^{-n^2 t}(w,w_n)w_n, \quad w \in E$$

ou $(.,.)$ *est le produit scalaire dans* L^2 *puisque le semi-groupe* $T(t)$ *est analytique par suite compact, il existe une constante* $M > 0$ *telle que* $\|T(t)\| < M$

nous supposons qu'il existe $f : J \longrightarrow J \times E \rightarrow E$ *telle que*

$\| f(t,z) - f(t,\bar{z}) \| \leqslant f(t) \| z - \bar{z} \|$

on montre que le problème ***(P1)*** *est la forme abstrait du l'équation aux dérives partielles donne et les hypothèses du théorème* 1 *sont satisfaites, d'où le problème pour l'équation aux dérives partielles admet une solution intégrale unique .*

soit maintenant le problème

$$(\boldsymbol{P}) \begin{cases} y"(t) - Ay(t) = f(t, y(t)), t \in J \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases} \tag{3.4}$$

ou $f : J \times E \longrightarrow E \quad A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ *est le générateur d'une famille cosinus d'opérateur linéaire, bornée fortement continues* $c(t)_{t\leqslant 0}, y_0, y_1 \in E$

Définition 3.2.2. *[2] Une famille d'opérateur linéaire borné fortement continue est dite Cosinus si*

1. $c(0) = I$.
2. $c(t+s) + c(t-s) = 2c(t)c(s), \quad \forall t, s \in J$.
3. $t \longrightarrow c(t)y$ *fortement continue* $\forall y \in E$.

De la famille $c(t)$ *en définit une famille d'opérateur linéaire borné fortement continue appelé Sinus est définit par :* $\forall y \in E$:

$$S(t)(y) = \int_0^t c(s)y ds$$

le générateur infinitésimal $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ *de la famille cosinus est définie par*

$$Ay = \frac{d^2}{dy^2} c(t)y \Big|_{t=0}$$

Définition 3.2.3. *[2] Une fonction continue* y *solution de l'équation intégral suivant :*

$$y(t) = c(t)y_0 + S(t)y_1 + \int_0^t S(t-s)f(s, y(s))ds$$

est dite ***une solution intégral*** *de* ***(P1)*** *ou "Mild solution". On a aussi le théorème suivant*

3.2.2 Théorème de Schaffer

[2] Soit X un espace de Banach et $N : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continue (continue et transforme tout borné B de X en un ensemble relativement compact dans X), et si l'ensemble $E(N) = \{x \in X : x = \lambda N x\}$ pour un $\lambda \in [0, 1]$ est bornée. Donc N admet un point fixe.

Soit le problème

$$(\mathbf{P2}) \qquad \begin{cases} y' - Ay = f(t,y), & t \in [0,T] = J \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Avec$f : J \times E \longrightarrow E$ une fonction donné, $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$ d'opérateur linéaire borné de E.

Supposons les hypothèse suivante :

(H5) f est L^1 carathéodory

(H6) Il existe une constante $\sigma > 0$ telle que $\| T(t) \| < \sigma, \quad \forall t \geq 0.$

(H7) Il exists $p \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ et $\psi : [0, \sigma] \longrightarrow (0, +\infty)$ uniformément continue et croissante telles que

$$\| f(t,y) \| \leqslant p(t)\psi(\| y \|), \quad \forall t \in J \;\; et \qquad \forall y \in E$$

Théorème 3.2.2. *Supposons que les hypothèses **(H5)** -**(H7)** sont satisfaites,si*

$$\int_0^t p(s) \leqslant \int_{M\|y_0\|}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)} du$$

*est vérifiée, alors le problème (**P2**) admet au moins une solution(mild solution).*

Preuve. *on transforme le problème (**P2**) en un problème du point fixe pour cela, on considère l'opérateur $N : C(J,E) \longrightarrow C(J,E)$ définie par :*

$$(Ny)(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t,s) f(s, y(s)) ds \quad t \in J$$

et soit l'ensemble B_δ telle que :

$$B_\delta = \{y \in C(J,E) : \|y\| \leqslant \delta\}$$

• *N est continue :*

En effet soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(J,E)$ telle que :

$$y_n \longrightarrow y \;\; et \;\; on \;\; montre \;\; que \;\; Ny_n \longrightarrow Ny,$$

On a :

$$N(y_n)(t) - N(y)(t) = \int_0^t T(t-s)\left[f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\right] ds$$

$$\|N(y_n)(t) - N(y)(t)\| \leqslant M \int_0^t \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds$$

on utilisant le fait que f et L^1 caratéodory et le théorème de la convergence domine de Lebesgue, Alors :

$$\|N(y_n)(t) - N(y)(t)\| \longrightarrow 0 \text{ quand } y_n \longrightarrow y$$

Donc l'opérateur N est continue.

• *$N(B_\delta)$ est relativement compact :*

On montre que $N(B_\delta)$est relativement compact dans $C(J, E)$ pour tout borne B_δ.

Remarque. *[2] Soit $F \subset C(J, E)$ F est relativement compact :*

1) *F est bornée*

2) *F est equicontinue*

2) *L'ensemble $F(t) = \{f(t), f \in F\}$ est relativement compact dans E.*

1)$N(B_\delta)$ ***est bornée*** *:*

Ee effet, $\forall y \in B_\delta$ alors $\forall t \in J$ on a :

$$N(y)(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s) f(s - y(s)) ds$$

$$\| N(y) \|_\infty \leqslant M\|y_0\| + M\|\varphi_h\|_{L^1} < \infty.$$

Alors $N(B_\delta)$ est bornée.

2)**$N(B_\delta)$* ***est equicontinue *:*

Soit $y \in B_\delta$ et $\tau_1 < \tau_2 < t$

$$N(y)(\tau_2) - N(y)(\tau_1) = (T(\tau_2) - T(\tau_1)y_0 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} T(\tau_2 - s) f(s, y(s)) ds$$

$\|N(y)(\tau_2) - N(y)(\tau_1)\| \leqslant \|T(\tau_2) - T(\tau_1)\|_{L_{B(X)}}\|y\| + M\displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi_h(s)ds$
puisque $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est compact, alors on a la continuité du* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *pour la topologie des opérateurs, c'est on a*
$\|T(\tau_2) - T(\tau_1)\|_{B(t)} \longrightarrow 0$ *quand* $\tau_2 \longrightarrow \tau_1$

$$\|N(y)(\tau_2) - N(y)(\tau_1)\| \longrightarrow 0 \text{ quand } \tau_1 \longrightarrow \tau_2$$

Donc $N(B_\delta)$ *est equicontinue.*
3)$N(B_k)(t)$ *est relativement compact dans* E *:*
Il faut montre que $\forall y \in B_\delta, N(y)(t)$ *est précompact dans* E.
Soit $0 < \varepsilon < t; \quad t \in J$
soit

$$\begin{aligned} N(y)_\varepsilon(t) &= T(t)y_0 + \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)f(s,y(s))ds \\ &= T(t)y_0 + T(\varepsilon)\int_0^t T(t-s-\varepsilon)f(s,y(s))ds \end{aligned}$$

puisque $T(t)$ *est compact ;alors* $N(y)_\varepsilon(t)$ *est précompact de* E.

$$N(y)_\varepsilon(t) - N(y)(t) = \int_{t-\varepsilon}^t T(t-s)f(s,y(s))ds$$

$$\|N(y)_\varepsilon(t) - N(y)(t)\| \leqslant M\int_{t-\varepsilon}^t \varphi_k(s)ds \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow \infty$$

donc $\{N(y)(t), y \in B_k)\}$ *est précompact de* E.
$\bullet$*l'ensemble* $E(N) = \{y \in C(J,E), y = \lambda N(y)$ *est bornée :*
On montrons maintenant que l'ensemble
$E(N)$ *est borné pour un constant* $\lambda \in [0,1]$, *soit* $y \in E(N)$ *alors*

$$\begin{aligned} N(y)(t) &= \lambda T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,y(s))ds \\ &\leqslant M\|y_0\| + M\int_0^t p(s)\psi(\|y(s)\|)ds \end{aligned}$$

Posons $v(t) = M \parallel y_0 \parallel + \int_0^1 p(s)\psi(\parallel y(s) \parallel)ds$
Alors $v(0) = M \parallel y_0 \parallel$ *et*
$v'(t) = p(s)\psi \parallel y(s) \parallel \in J \quad \leqslant P(s)\psi(v(t))$
d'où

$$\frac{v'(t)}{\psi(v(t))} \leqslant P(s)$$

$$\int_0^t \frac{v(s)}{\psi(v(s))}ds \leqslant \int_0^t P(s)ds$$

Posons $v(s) = u(s)$, *on obtient*

$$\int_{u\|y_0\|}^{u(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leqslant \int_0^t P(s)ds \leqslant \int_{M\|y_0\|}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}$$

Donc $\exists b > 0$ *telle que* $u(t) < b \ \ \forall x \in J$ $,\parallel u \parallel_\infty < b$
d'où $\parallel v \parallel_b \leqslant b \Rightarrow \parallel y \parallel_\infty \leqslant b \qquad \forall x \in J.$
Donc $E(n)$ *est borné alors le théorème de Schaffer affirme que* N *admet au moins un point fixe que est solution du* (***P2***) .

CHAPITRE 4

ÉQUATION D'ÉVOLUTION SEMI-LINÉAIRE

4.1 Équations non linéaires

Pour tout $t \geqslant 0$

$$(1) \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = Ax(t) + f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \in X \end{cases} \tag{4.1}$$

A générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)_{t \geqslant 0}$ sur X.
$f : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ une fonction continue.

Solution stricte$\Rightarrow$ solution classique $\Rightarrow$ solution forte $\Rightarrow$ solution faible.

Une solution faible de (1) sur est une fonction continue sur $[0, a]$ vérifiant

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds, \quad t \in [0, a]$$

Théorème 4.1.1. *[5] Supposons que f est lipschitzienne par rapport a la deuxième variable i.e :*$\exists K : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continue telle que :*

$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant K(t) \mid x - y \mid, \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x, y \in X$
Alors (1) admet une solution faible définie sur $\mathbb{R}^+$.

Preuve. *Soit* $a > 0$, $M_a = \sup\limits_{t\in[0,a]} \mid T(t) \mid ; K_a = \sup\limits_{t\in[0,a]} \mid K(t) \mid$
(il suffit que $K \in L^\infty_{loc((\mathbb{R}^+)}$*)* $\varphi_a = \varphi([0,a], X)$
pour $y \in \varphi_a$

$$(Ky)(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,y(s))ds.$$

Soit $y_1, y_2 \in \varphi_a \quad Ky_1(t) - Ky_2(t) = \int_0^t T(t-s)\left(f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s)\right) ds$
$\mid Ky_1(t) - Ky_2(t) \mid \leqslant M_a K_a .t \mid y_1 - y_2 \mid \quad , \forall t \in [0,a]$
deuxième itération :

$$\begin{aligned}
\mid K^2 y_1(t) - K^2 y_2(t) \mid &\leqslant \frac{(M_a K_a .t)^2}{2} \mid y_1 - y_2 \mid \\
&\leqslant \frac{(M_a K_a .a)^2}{2} \mid y_1 - y_2 \mid .
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\mid K^2 y_1 - K^2 y_2 \mid \leqslant \frac{(MaKa.a)^n}{n!} \mid y_1 - y_2 \mid$$

donc il existe n : $\frac{(M_a K_a .a)^n}{n!} < 1.$
D'où K admet un point fixe unique .

Remarque. *[5] f continue* $\nRightarrow$ *existence d'une solution faible* $\widetilde{A} \equiv 0$

$$\begin{cases} x'(t) = Af(t, x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Théorème 4.1.2. *[5] Si $T(t)$ est compact pour $t > 0$ et*
$f : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ continue alors $\exists b > 0$ telle que :
(1) admet au moins une solution faible définie sur $[0, b]$.

Preuve. *[5] f étant continue en $(0, x_0)$*
$\exists M > 0 \mid f(t, y) \mid \leqslant M; \quad \exists r > 0, \exists \alpha > 0$
Soit $C_2 = \{y \in \varphi_\alpha : \mid y(t) - y_0 \mid \leqslant r, \quad \forall t \in [0, \alpha]\}$
C_α est un convexe fermé et borné
Soit $y \in C_\alpha : \mid Ky(t) - X_0 \mid \leqslant \mid T(t)x_0 - x_0 \mid + \int_0^t \mid T(t-s)f(s, y(s) \mid ds$
Pour t assez petit $\mid T(t)x_0 - x_0 \mid \leqslant \frac{r}{2}$

$$\begin{aligned}\int_0^t \mid T(t-s) \mid\mid f \mid s, y(s) \mid\mid ds &\leqslant t.M_\alpha.M \\ &\leqslant \frac{r}{2} \text{ pour } t \text{ assez petit}\end{aligned}$$

$\exists \beta > 0$ tel que si $t \leqslant \beta \mid Ky(t) - X_0 \mid \leqslant r$.
Donc $KC_\beta \subseteq C_\beta$.
Alors $\overline{KC}$ est compact.

Equibornitude *: Soit $t \in [0, \beta] : \overline{\{Ky(t), y \in \varphi_\beta\}}$ compact dans X :si $t = 0$ évidente.*
Soit $0 < t \leqslant \beta$

$$Ky(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds$$

Soit $\varepsilon > 0$ pour $\varepsilon < t$: $\int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds$
$= \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)f(s, y(s))ds + \int_{t-\varepsilon}^t T(t-s)f(s, y(s))ds$
$= T(\varepsilon) \int_0^t T(t-\varepsilon-s)f(s, y(s))ds + \theta(\varepsilon)$
Mesure de non-compacité

1. $\alpha(\beta) = 0 \Leftrightarrow \bar{\beta}$ *compact.*
2. $\alpha(\beta_1 + \beta_2) \leqslant \alpha(\beta_1) + \alpha(\beta_2)$.
3. $\alpha(\beta(0, \varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.
4. $\alpha(\lambda B) \leqslant\mid \lambda \mid \alpha(\beta)$
   $\alpha(\{Ky(t) : y \in \varphi_\beta\}) \leqslant 0 + 0(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon < t \quad \varepsilon \longrightarrow 0$
   Donc $\alpha(\{Ky(t), y \in \widetilde{\varphi}_\beta\}) = 0$ *est compact.*

Théorème 4.1.3. *(Lemme) :*
[5] Soit Y un espace de Banach et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L_B(X)$ telle que
$T_n \longrightarrow T$ quand $n \to +\infty$ tout simplement
Alors :$\forall \beta$ compact de Y : $\sup\limits_{y\in\beta} \mid T_n(y) - T(y) \mid\to 0$ quand $n \to \infty$

Corollaire 4.1.1. *[1] Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C_0 semi-groupe sur X,*
$\forall K$ compact de X :

$$\sup_{x\in K} \mid T(h)x - x \mid\to 0 \quad \textit{quand} \quad h \to 0.$$

<u>Retour à la démonstration :</u>

Equi-continuité :[1] $\forall t_0 \in [0, p] \quad t > t_0$

$$\sup_{y\in\widetilde{\varphi}_\beta} \mid Ky(t) - ky(t_0) \mid\longrightarrow 0 \qquad \text{quand } t \to t_0$$

$\mid Ky(t) - Ky(t_0) \mid\leqslant\mid T(t)x_0 - T(t_0)x_0 \mid \quad (1) +$

$\left\| \int_0^{t_0} (T(t-s) - T(t_0 - s))f(s, y(s)) \right\| ds \quad (2)$

$+ \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s, y(s))ds \quad (3)$

$(1) \longrightarrow 0 \;\; , t \to t_0$

et $(3) \leqslant K \mid t - t_0 \mid \quad \forall y \in \widetilde{\varphi}_\beta$.

$\int_0^{t_0} (T(t-s) - T(t_0 - s))f(s, y(s))ds = (T(t-t_0) - I) \int_0^{t_0} T(t-s)f(s)ds$

$\sup\limits_{z\in K_0} \mid T(t - t_0)z - z \mid\longrightarrow 0 \quad \textit{quand} \quad t \to t_0$

Donc $\circledast$ est vérifiée $\widetilde{\varphi}_\beta$ est compact.

d'après théorème de Schauder K admet au moins un point fixe.

Théorème 4.1.4. ***(de Schauder) :***
[5] Soit Y un espace de Banach et soit φ_0 un convexe fermé borné de Y, et $\theta : \varphi_0 \longrightarrow \varphi_0$ une application continue telle que $\theta(\varphi_0)$ est compact, alors θ admet au moins un point fixe dans φ_0.

Théorème 4.1.5. ***(Sadovskii) :***
[5] Soit Y un espace de Banach, $\varphi_0$un convexe fermé borné et supposons que $\theta : \varphi_0 \longrightarrow \varphi_0$ continue , si $\alpha(\theta\beta) < \alpha(\beta)$,
pour tout β borné .
Avec $\alpha(.)$ mesure de non compacité. Alors. θ admet au moins un point fixe dans φ_0.

Théorème 4.1.6. *[5] Si f est borné*
Alors (1) admet une solution maximale définie sur $[0, t_{max}[$
avec $0 < t_{max} \leqslant +\infty$ si $t_{max} < \infty \Rightarrow \lim\limits_{t \to t_{max}} \mid x(t) \mid = +\infty$.

Théorème 4.1.7. *[5] Soit $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow Y$ complet, uniformément continue. Alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x), \lim\limits_{x\to\beta} f(x)$ existe dans Y.*

Théorème 4.1.8. *[5] $(T(t))_{t\geqslant 0}$ C_0 semi-groupe d'opérateurs compacts*
$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ continue borné.
Alors (1)admet une solution maximal définie sur $[0, t_{max}[$ avec
$0 < t_{max} < +\infty$.
Si $t_{max} < +\infty$, alors $\lim\limits_{t\to t_{max}} \mid x(t) \mid = +\infty$

Preuve. *on suppose que $t_{max} < +\infty$*
et que $\lim\limits_{t\to t_{max}} \mid x(t) \mid < +\infty$
c'est-à-dire $\exists M > 0 : \forall t < t_{max} \quad \mid x(t) \mid \leqslant M$.
Soit $t < t_{max}$ et $h > 0$

$$x(t+h)-x(t) = T(t)(T(h)x_0 - x_0) + \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s,x(s))ds$$

$- \int_0^t T(t-s)f(s,x(s))ds. \quad (2)$

$= T(t)(T(h)x_0 - x_0) \quad (1)$

$+ \int_0^t (T(t+h-s) - T(t-s)f(s,x(s))ds + \int_t^{t+h} (T(t+h-s))f(s,x(s))ds. \quad (3)$

$(1) \longrightarrow 0 \quad quand \quad h \longrightarrow 0 \ et \ (3) = 0(h)$

$(2) = (T(h) - I) \int_0^t T(t-s)f(s,x(s))ds.$

$D = \left\{ \int_0^t T(t-s)f(s,x(s))ds : \quad t \in [0, t_{max}[\quad \right\}$

est compact ?

Soit $(t_n)_n \subseteq [0, t_{max}[$:

$\exists (t_{nk})_k \longrightarrow \bar{t} \quad si \quad \bar{t} < t_{max} : \quad \int_0^{t_n} T(t_n - s)f(s,x(s))ds$

converge vers $\int_0^{\bar{t}} T(t_n - s)f(s,x(s))ds.$

Si $\bar{t} = t_{max}. \int_0^{t_{nk}} T(t_{nk} - s)f(s,x(s))ds =$

$\int_0^{t_{nk}} 1[0, t_{nk}]T(t_{nk} - s)f(s,x(s))ds + \int_{t_{nk}}^{t_{max}} 1[0, t_{nk}]T(t_{nk} - s)f(s,x(s))ds$

$\longrightarrow \int_0^{t_{max}} T(t_{max} - s)f(s,x(s))ds$

quand $k \longrightarrow +\infty, \quad \forall s \in [0, tmax[$

par la convergence dominée de Lebesgue .

$$\int_0^{t_n} T(t_n - s)f(s,x(s))ds \longrightarrow \int_0^{t_{max}} T(t_{max} - s)f(s,x(s))ds$$

$\overline{D} \quad compact \quad \Rightarrow \sup_{z \in D} \mid T(h)z - z \mid \longrightarrow 0 \quad quand \quad h \longrightarrow 0$

D'où

$$x(t+h) - x(t) \longrightarrow 0 \quad quand \quad h \longrightarrow 0$$

Régularité :

$$(1) \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)) & t \geqslant 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

A générateur infinitésimal d'un φ_0-semi groupe $\quad (T(t)_{t \geqslant 0})$
$\mid f(t,x) - f(t,y) \mid \leqslant K \mid x - y \mid$,
(1) admet une solution faible. $t \geqslant 0 \quad x, y \in X$

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds, \quad t \geqslant 0.$$

Proposition 4.1.1. *[1] Si $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ et si de plus "$t \longrightarrow f(t, x(t))$" est de classe φ^1, alors x est une solution stricte de (1).*

Preuve. *Soit $u(t) = f(t, x(t))$*

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + u(t) & t \geqslant 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

$u \in \varphi^1(\mathbb{R}^+, X), \quad x_0 \in \mathcal{D}(A)$
$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)\varphi(s)ds.$
D'après le régularité pour φ problème non homogènes

$$\begin{aligned} x \in \varphi^1(\mathbb{R}^+, x) \;\; et \;\; x'(t) &= Ax(t) + \varphi(t) \\ &= Ax(t) + f(t, x(t)). \end{aligned}$$

Remarque. *[1] Sous quelles condition*

$$t \longmapsto f(t, x(t)) \quad est\ de\ classe \;\; \varphi^1?$$

Théorème 4.1.9. *[1] Si f est $\varphi^1(\mathbb{R}^+ \times X, X)$ et $D_t f, D_x f$ sont localement lipschitzienne par rapport a la deuxième variable.*
Si $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, alors la solution faible devient stricte.

Preuve. *Il suffit de montre que : $t \longrightarrow f(t, x(t)) \quad est\ \varphi^1$.*
ça revirent à montrer que $x \in \varphi^1(\mathbb{R}^+, x)$
$\forall x_0 \in X, \exists V$ *ouvert* $\exists x_0$ *telle que :*

$$| D_t f(t,x) - D_t f(t,y) \leqslant K \mid x - y \mid \quad \forall x, y \in V$$

$$| D_x f(t,x) - D_x f(t,y) \leqslant K \mid x - y \mid .$$

$\forall K$ *compact de* X $\exists K > 0$ *telle que :*

$$| D_t f(t,x) - D_t f(t,y) \leqslant K \mid x - y \mid \quad \forall x, y \in K$$

et

$$| D_x f(t,x) - D_x f(t,y) \leqslant K \mid x - y \mid$$

$x(t) = T(t)x_0 + \displaystyle\int_0^t T(t-s) f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, a].$
Soit le problème suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + D_t f(A, x(t)) + D_x f(t, x(t))(y(t)), \\ y(0) = Ax_0 = Ax_0 + f(0, x_0). \end{cases} \tag{4.4}$$

$y'(t) = Ay(t) + g(t, y(t))$
$| g(t, y_1) - g(t, y_2) | \leqslant | D_x f(t, x(t)) | \mid y_1 - y_2 \mid$
Donc (2) admet une solution faible sur $[0, a]$.
$y(t) = T(t)(Ax_0 + f(0, x_0)) + \displaystyle\int_0^t T(t-s)[D_s f(s, x(s)) + D_x f(s, x(s) y(s) ds].$
Soit $\quad Z(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t y(s) ds.$
Alors $\quad z \in \varphi^1([0, a], X)$ *telle que* $x \equiv Z$
Donc $\quad Z(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t T(s) A x_0 + \int_0^t T(s) f(0, x_0) ds.$

$+\int_0^t \int_0^s T(s-\tau)[D_Z f(\tau, x(\tau)) + D_x f(\tau, x(\tau)) y(\tau)] dx ds$

$\int_0^t T(s) A x_0 = A \int_0^t T(s) x_0 ds = T(t) x_0 - x_0.$

$t \longmapsto Z(t)$ *est de classe* $\varphi^1 \Rightarrow (t \mapsto f(t, z(t))$ *est* $\varphi^1) \Rightarrow t \rightarrow$
$\int_0^t T(t-s) f(s, x(s)) ds$ *est* φ^1.

On a $\frac{d}{dt} \int_0^t T(s) f(t-s, z(t-s)) ds = T(t) f(0, x_0)$

$+\int_0^t T(s)[D_t f(t-s, Z(t-s) + D_x f(t-s, z(t-s)) f(t-s)] ds$

$= T(t) f(0, x_0) + \int_0^t T(t-s)[D_x f((t-s, z(t-s)) f(t-s)] ds.$

Par suite $\int_0^t T(s) f(0, x_0) ds - \int_0^t T(t-s) f(s, z(s)) ds$

$-\int_0^t \int_0^s T(s-z)[D_z f(z, z(\tau) + D_z f(z, z(\tau) y(\tau) d\tau ds].$

Donc $Z(t) = T(t) x_0 + \int_0^t T(t-s) f(s, z(s)) ds +$
$\int_0^t \int_0^\tau T(s-z)[(D_\tau f(z, x(z)) - D_\tau f(z, \tau(z)) + D_\tau f(z, x(s))$
$- D_z f(z, Z(z)) y(Z) dz ds].$

$x(t) = T(t) x_0 + \int_0^t T(t-s) f(s, x(s)) ds.$

Donc $\mid x(t) - Z(t) \mid \leqslant K \int_0^t \mid x(s) - y(s) \mid ds.$

$K = \{x(s), \tau(s), s \in [0, a]\}$ *compact* .

Lemme de Gronwall , $x \equiv Z$ *sur* $[0, a], \forall a > 0$ *i-e* $x \in \varphi^1(\mathbb{R}^+, X)$.

$\Longrightarrow t \mapsto f(t, x(t))$ *est* φ^1.

CONCLUSION

En conclusion, ce mémoire met en exergue l'importance de semi-groupe dans l'étude des équations d'évolution, ils fournissant des outils combinés avec d'autres concepts tel que théorie du point fixe pour prouver l'existence et l'unicité des solutions des éqution semi linéaire en général.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **A.Pazy** , Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equatuions

[2] **M.Benchohra**, Cours d'analyse, Université de Sidi Bel Abbes, Magister 2002.

[3] **H.Brezis**, Analyse fonctionnelle, Masson, 1987.

[4] **Jean-Pierre-RAYMOND** ,Équations d'évolutions

[5] **Cazenave T,Haraux A** ,An Introduction to Semilinear Evolution Equations .

[6] **J. Andres, L. Górniewicz**, *Topological Principles for Boundary Value Problems.* Kluwer, Dordrecht, 2003.

[7] **F.E. Browder and G.P. Gupta** , Topological degree and nonlinear mappings of type in Banach spaces, ***J. Math. Anal. Appl*** **26** (1969), 390-402.

[8] **Mi Mikhailov, V.** : 'Equations aux dérivées partielles. Éditions Mir,Moscou 1980.

[9] **Reinhard, R.** : Équations aux dérivés partielles : introduction. Dunod, Paris, 1991.