RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
Département des Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnelle et Applications »

Présenté Par :
BENCHICOU Nor El Houda
TINE Djihad

Sous l'intitulé :

Sur la méthode de Fourier pour l'étude d'une classe d'équations opérationnelles

Soutenu publiquement le 20 / 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. MAAZOUZ Kadda	M.C.A	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Président
Mme. KHELIFA Hizia	M.C.B	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Encadrante
Mr. OUARDANI Abderrahmane	M.C.B	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Examinateur

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

*Nous tenons tout d'abord à remercier notre Dieu **ALLAH** le tout Puissant, qui nous a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.*

*Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre chère directrice de recherche Mlle **H.Khelifa**, pour avoir accepté de diriger et d'orienter ce travail avec tant d'encouragement.*

*Nos remerciements sincères, aux membres de jury **A.Ouardani** & **K.Maazouz** d'avoir accepté de lire et d'examiner notre travail de recherche.*

Nous ne pouvons oublier de remercier les parents pour leur soutien, leur aide et leur patience tout au long de nos études.

Enfin, nous tenons à remercier tous nos enseignants, collègues et tous ceux qui nous ont encouragés à faire ce travail.

Dédicaces

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tous simplement que

je dédie ce travail :

À Mon Ange Mère Fadhila : Tu me représentes la source de tendresse
et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager.
Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants
suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études
Tu es la meilleure mère du monde.
À Mon très cher Père Ali : Aucune dédicace ne peut exprimer l'amour,
l'appréciation, le dévouement et le respect que j'ai toujours eus Il n'y a rien au monde
de plus précieux que vos efforts, que vous dépensez jour et nuit
pour mon éducation et mon bien-être.
Ce travail est le fruit de vos sacrifices pour mon éducation
et ma formation le long de ces années
Je t'aime mon père le roi.
À mon très cher frère : Mohamed El Amine.
À mes très chères sœurs : Amina & Soumia.
À mes merveilleux neveux et ma jolie princesse nièce : Haroun Al-Rachid,
Aaya, Eyad & Moussa.
À Tous ma famille : ***BENCHICOU.***
À Tous mes chers enseignants depuis mes premières années d'études.
À Tous les membres de ma promotion.
À Tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

Nor El Houda

Dédicaces

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tous simplement que

je dédie ce travail :

À Mon Ange Mère Mouhani : Tu me représentes la source de tendresse
et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager.
Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants
suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.
À Mon très cher Père Aissa : Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour,
l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous.
Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit
pour mon éducation et mon bien être.
Ce travail est le fruit de tes sacrifices
que tu as consentis pour mon éducation
et ma formation
le long de ces années.
À mon cher frère : Sassi.
À mes chères sœurs : Zoubida, Mon soutien et ma moitié Sabrina, Maria,
Khouloud, Soulef & Dalal.
À mes adorables nièces et mon cher neveu : Tasnime, Fatima, Djouzel & Khalil.
À Tous mes chers enseignants depuis mes premières années d'études.
À Tous les membres de ma promotion.
À Tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

Tine Djihad

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est d'appliquer la méthode de Fourier pour l'étude d'une classe d'équations opérationnelles. Donc nous faisons une étude détaillée, en commençant par les espaces fonctionnels, tels que les espaces normés, les espaces de Banach et en particulier les espaces de Hilbert, qui sont considérés comme les plus pratiques dans les opérateurs et la théorie spectrale d'opérateurs, tels que les opérateurs linéaires, auto-adjoints et symétriques.

Puis, nous mettons la méthode de Fourier de séparation des variables pour résoudre cette classe d'équations opérationnelles homogènes.

Mots clés : *Espace de Hilbert, opérateurs linéaires, spectre, Méthode de Fourier, équations opérationnelles.*

ABSTRACT

The objective of this work is to apply the Fourier's method for studying a class of operational equations. So we make a detailed study, starting with functional spaces, such as normed spaces, Banach spaces and in particular Hilbert spaces, which are considered the most practical in operators and spectral theory of operators, such as linear, self-adjoint, and symmetric operators. Then, we put Fourier's method of separation of variables to solve this class of homogeneous operational equations.

Keys words : *Hilbert space, linear operators, spectrum, Fourier method, operational equations.*

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تطبيق طريقة فوربيه لدراسة صنف من المعادلات ذات معاملات مؤثرات خطية. لذلك نقوم بدراسة مفصلة، بدءاً بالفضاءات الدالية، مثل فضاءات بناخ، الفضاءات المعيارية وعلى وجه الخصوص فضاءات هلبرت والتي تعتبر الأكثر عملية في المؤثرات والنظرية الطيفية للمؤثرات، مثل المؤثرات الخطية، القرينة لذاتها و المتناظرة.

ثم نضع طريقة فوربيه لفصل المتغيرات لحل هذه الفئة من المعادلات المتجانسة ذات معاملات مؤثرات خطية.

الكلمات المفتاحية : فضاء هلبرت، مؤثرات خطية، طيف، طريقة فوربيه، المعادلات ذات معاملات مؤثرات خطية.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

$\mathbb{R}$	:	Ensembles des nombres réels
$\mathbb{C}$	:	Ensembles des nombres complexes
$\mathbb{N}$	:	Ensembles des nombres naturels
$\mathbb{k}$	:	Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$(X, \mathcal{T})$	:	Espace topologique de support X
(X, d)	:	Espace métrique
$\mathcal{P}(X)$	:	Ensemble des parties de X
$\emptyset$	:	Ensemble vide
$\lvert\cdot\rvert$	:	La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$
E	:	$\mathbb{k}$-espace vectoriel ou $\mathbb{k}$-espace pré-hilbertien
$(E, \lVert\cdot\rVert)$	:	Espace vectoriel normé
$\mathcal{C}([a,b], \mathbb{k})$	:	L'ensemble des fonctions continue de $[a,b] \longrightarrow \mathbb{k}$
$\mathcal{L}(E,F)$	:	Espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F
$\lVert\cdot\rVert_E$	:	La norme sur E
E^*	:	Le dual topologique de E
Ω	:	Un ouvert de $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{H}$	:	Espace de Hilbert
$\langle \cdot\,, \cdot \rangle$	:	Le produit scalaire
$\perp$	:	Orthogonalité
$A^{\perp}$	:	L'ensemble des vecteurs orthogonaux
ℓ^{α}	:	Espace des suites $x = (x_i)_{i \in I \subset \mathbb{N}} \in \mathbb{k}^n$ telles que $\sum_{i=0}^{\infty} \lvert x_i\rvert^{\alpha} < \infty$
$\Re$	:	La partie réelle d'un nombre complexe
$\sigma(E, E^*)$	:	Topologie faible définie sur E
J	:	L'injection canonique de E dans E^{**}
$\rightharpoonup$	:	Convergence faible
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	:	Espace des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$
$D(A)$	:	Sous-espace vectoriel de E
$\overline{D}(A)$	:	L'adhérence de $D(A)$
I	:	Opérateur identité
$\overline{B}(0,1)$	:	$\{x \in E; \lVert x\rVert \leqslant 1\}$ La boule unité
$\Gamma(A)$	:	Le graphe de A
A^{-1}	:	Opérateur inverse de A
T^*	:	L'adjoint de l'opérateur T

$\ker(T)$	:	$\{x \in D(T), Tx = 0\}$ Le noyau de T
$Im(T)$	:	$\{Tx, x \in D(T)\}$ L'image de T
$\sigma(A)$	:	Le spectre de A
$\rho(A)$	:	L'ensemble résolvant de A
$R_\lambda(A)$	:	La résolvante de A au point λ
$\sigma_p(A)$	:	Spectre ponctuel de A
$\sigma_c(A)$	:	Spectre continu de A
$\sigma_r(A)$	:	Spectre résiduel de A
$r(A)$	:	Le rayon spectrale de A
$\sigma\left(A^{-1}\right)$	:	Spectre d'un opérateur inverse
U	:	Une algèbre
C^*-algèbre	:	Algèbre involutive
$\sigma_{ess}(T)$	:	Le spectre essentiel d'opérateur T auto-adjoint
$\sigma_{disc}(T)$	:	Le spectre discret d'opérateur T auto-adjoint
$\mathcal{R}_\lambda$	:	Sous-espace de $\mathcal{H}$
$\aleph_{(\lambda \text{ ou } \bar{\lambda})}$	:	Espace de défaut de l'opérateur T
$\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$	:	Famille spectrale
L	:	Opérateur différentiel
$\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$	:	La dérivée partielle par rapport à la coordonnée x_k
A_x	:	Opérateur symétrique régulier
A_x^0	:	L'extension auto-adjointe de A_x
$S_p\left(A_x^0\right)$	:	Le spectre discret de A_x^0

INTRODUCTION

Lorsqu'il s'agit d'analyser et de résoudre des équations opérationnelles, la méthode de Fourier est un outil incroyablement puissant, sa méthode a fait des preuves dans divers domaines scientifiques et techniques. Cette méthode a été développée par Joseph Fourier au début du XIXe siècle pour résoudre l'équation de la chaleur. Depuis ce temps elle a été appliquée à de nombreux autres types d'équations différentielles, elle a permet également de résoudre des problèmes mathématiques complexes tels que les équations différentielles et les opérateurs elliptiques.

D'autre part, la méthode de Fourier est un type spécifique de séparation des variables qui utilise des fonctions trigonométriques pour représenter la solution. De plus, cette méthode peut être utilisée pour l'analyse spectrale.

Le présent mémoire traite les espaces fonctionnels, la théorie spectrale d'opérateurs et la méthode de Fourier pour une classe d'équations opérationnelles. Il se compose de trois chapitres.

On commence tout d'abord par le premier chapitre sur un rappel de certains notions mathématiques dont on a besoin, en particulier les espaces fonctionnels tels que les espaces normés([1], [2], [3], [9], [13], [16], [17]), les espaces des opérateurs linéaires bornés ([21], [23], [24]) et les espaces de Hilbert y compris des notions essentielles telles que le produit scalaire, orthogonalité, base Hilbertienne et sans oublier les propositions et théorèmes de cet espace, notamment le théorème d'inégalité de Cauchy Schwartz, qui est le plus largement utilisé ([1], [5], [7], [9], [16], [17], [20]). Que nous utilisons souvent ci-dessous.

Le deuxième chapitre est devisé en deux parties. La première partie est consacrée aux opérateurs dans l'espace de Hilbert tels que les opérateurs linéaires bornés, adjoints, auto-adjoints et symétriques, . . . etc([3], [6], [12], [16], [19], [24], [25]). La deuxième partie représente la théorie spectrale, qui comprend les spectres des opérateurs et leurs propriétés que nous avons bien détaillés.([4], [6], [8], [10], [11], [12], [14], [15], [16], [18], [19], [20], [21], [22], [24]) Le dernier chapitre concerne la série de Fourier, plus précisément l'application de la méthode de Fourier pour une classe d'équations opérationnelles. On termine le chapitre par une illustration des résultats obtenus sur un exemple concret.

CHAPITRE 1

RAPPELS ET GÉNÉRALITÉS

Ce chapitre comporte un rappel de quelques notions mathématiques et des compléments pertinents à ce travail. On citera en particulier : les concepts des espaces fonctionnels et leurs caractéristiques fondamentaux.

1.1 Espace topologique

Soit X un ensemble quelconque et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1.1.1. *[1] On appelle topologie sur X toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

(T_1) *La réunion de toute famille d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.*

(T_2) *L'intersection de toute famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.*

(T_3) *L'ensemble vide $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathcal{T}$.*

$(X, \mathcal{T})$ s'appelle espace topologique de support X. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés ouverts de $(X, \mathcal{T})$ ou de $\mathcal{T}$, souvent notés $\mathcal{O}$.

Exemple 1.1.1. *L'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in A$, il existe un intervalle ouvert $]a, b[\subset A$ tels que $x \in]a, b[\subset A$ est une topologie sur $\mathbb{R}$ appelée topologie euclidienne.*

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in A, \exists]a, b[\text{ avec } x \in]a, b[\subset \mathbb{R}\}.$$

Exemple 1.1.2. *Si $X = \emptyset$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ est la seule topologie sur X.*

Exemple 1.1.3. *Si X possède au moins deux éléments $X = \{a, b\}$, alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ est une topologie sur X dite topologie de Sierpinski*[1].

1.2 Espace métrique

Définition 1.2.1. *[1] Soit X un ensemble. On appelle métrique ou distance toute application :*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Telle que, pour tout x, y et $z \in X$, on ait :

(D_1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(D_2) $d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie)*,

(D_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire)*.

(X, d) s'appelle espace métrique.

Exemple 1.2.1. *Métrique discrète. Elle est définie par :*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y, \\ 0 & si\ x = y. \end{cases}$$

Exemple 1.2.2. *Dans $X = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, on a une métrique définie pour tous x et $y \in X$ par :*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Où $|\cdot|$ représente la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

Exemple 1.2.3. *Soit $X = \mathbb{k}^n (\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Pour tous $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{k}^n$, l'application définie par :*

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

est une métrique.

Si $\alpha \geq 1$, on a une métrique définie par :

$$d_\alpha(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

1. Wachaw Seirpinski, Mathématicien polonais, 1892-1969.

1.3 Espace complet

Définition 1.3.1. *[13] Soit (X, d) un espace métrique, on appelle suite de Cauchy*[2] *de X toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que :*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \quad \forall m \geq n_0, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Remarque 1.3.1. *[13] Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d) qui converge vers un élément ℓ de X, alors comme*

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \ell) + d(\ell, x_m)$$

c'est une suite de Cauchy. Les espaces complets sont précisément les espaces où la réciproque est vrai. Plus précisément on a la définition suivante.

Définition 1.3.2. *[13] Soit (X, d) un espace métrique, on dit que cet espace est complet si et seulement si toute suite de Cauchy est convergente.*

Exemple 1.3.1. $\mathbb{R}$ *est complet. En effet, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc ses éléments sont dans un intervalle compact $[a, b]$.*

Exemple 1.3.2. $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$, sont complets.*

Exemple 1.3.3. *L'intervalle $]0, 1[$, sous-espace de $\mathbb{R}$, n'est pas complet. Il suffit de considérer $x_n = \dfrac{1}{n}$.*

1.4 Espace normé

Définition 1.4.1. *[17] Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}^+$ généralement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \Bbbk$.*

(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(condition de séparation),*

(N_2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *(condition d'homogénéité),*

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité du triangle).*

Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|\cdot\|)$, où E est un $\Bbbk$-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

2. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Mathématicien français.

Proposition 1.4.1. *[17] Si* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace vectoriel normé alors* $d(x,y) = \|y-x\|$ *définit une distance sur* E*. De plus la topologie ainsi définie est compatible avec la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire, les applications :*

$$\begin{array}{rcl} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rcl} \Bbbk\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$

sont continues.

Démonstration. La continuité des deux applications ci-dessus vient des inégalités :

$$\begin{array}{rcl} \|(x'+y')-(x+y)\| & \leq & \|x'-x\|+\|y'-y\| \\ \textit{et} \quad \|\lambda' x'-\lambda x\| & \leq & |\lambda'-\lambda|\|x'\|+|\lambda|\|x'-x\|. \end{array}$$

□

Exemple 1.4.1. *La valeur absolue est une norme sur* $\mathbb{R}$*. Le module est une norme sur* $\mathbb{C}$*.*

Exemple 1.4.2. *Sur* $\Bbbk^n$ *les normes :*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \quad \textit{et} \ \|x\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i|.$$

Sont toutes équivalentes.

Exemple 1.4.3. *Soit* $E = \mathcal{C}([a,b], \Bbbk)$*, l'ensemble des fonctions continues de* $[a,b] \longrightarrow \Bbbk$ *et*

$$\|f\|_E = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

est une norme.

Il en est de même pour $\alpha \geq 1$*, avec,*

$$\|f\|_\alpha = \left\{\int_a^b |f(x)|^\alpha \, dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}},$$

qui est une norme.

1.5 Espace de Banach

Définition 1.5.1. *[16] Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. On dit que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy si :*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : n,m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Un espace de Banach[3] *est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire, si toute suite de Cauchy dans* $(E, \|\cdot\|)$ *est convergente.*

3. Stefan Banach, Mathématicien polonais. 1892-1945.

Exemple 1.5.1. $(\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{C}, |\cdot|)$ *et* $(\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *sont des espaces de Banach.*

Exemple 1.5.2. $(\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ *n'est pas un espace de Banach.*

1.6 Espace des opérateurs linéaires bornés

Soient E et F deux espaces de Banach sur le corps $\mathbb{k} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Définition 1.6.1. *[23] Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire borné on définit :*

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \inf\{C : \|Ax\| \leq C|x|\}, \\ &= \sup_{x \in B_E} \|Ax\|, \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|, \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

On note par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de E dans F qu'est un espace de Banach sur $\mathbb{k} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ muni de la norme définie par (1.6.1).

On considère la fonction suivante[24] :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{L}(E,F) &\to \mathbb{R}^+ \\ A &\mapsto \|A\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \end{aligned}$$

on montre que $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$ est un espace normé. C'est-à-dire, on montre que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Proposition 1.6.1. *[21] Soient E, F et $A \in \mathcal{L}(E,F)$. L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel normé.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathcal{L}} = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \\ &\Leftrightarrow A = 0, \\ \|\alpha A\|_{\mathcal{L}} &= |\alpha| \sup_{x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \, \|A\|_{\mathcal{L}}, \\ \|S + A\|_{\mathcal{L}} &= \sup_{x \in E} \frac{\|(S+A)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in E} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} + \sup_{x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Donc $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$. $\square$

1.7 Dual topologique

Définition 1.7.1. *[16] Le dual topologique d'un espace vectoriel normé E sur le corps $\Bbbk$ est par définition, l'ensemble des formes linéaires continues dans E, c'est-à-dire des applications linéaires continues de E dans $\Bbbk$. On note cet ensemble E^*. Ainsi, $E^* = \mathcal{L}(E, \Bbbk)$ et par ce qui précède, E^* muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

est un espace de Banach puisque $\Bbbk$ est complet.

1.8 Espace séparable

Définition 1.8.1. *[7] On dit qu'un espace métrique $\mathbb{X}$ est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset \mathbb{X}$ dénombrable et dense.*

Proposition 1.8.1. *[7] Soit $\mathbb{X}$ un espace métrique séparable et soit A un sous-ensemble de $\mathbb{X}$. Alors A est séparable.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dénombrable dense dans $\mathbb{X}$. Soit $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs avec $r_m \to 0$. On choisit (arbitrairement) $a_{m,n} \in B(u_n, r_m) \cap A$ lorsque cet ensemble est non vide. Il est clair que la suite $(a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ constitue un ensemble dénombrable dense dans A. $\square$

Théorème 1.8.1. *[7] Soit E un espace de Banach tel que E^* soit séparable. Alors E est séparable.*

Remarque 1.8.1. *[7] La réciproque n'est pas vraie. Il existe des espaces de Banach E séparables tels que E^* ne soit pas séparable ; Par exemple : $E = L^1(\Omega)$ et $E^* = L^\infty(\Omega)$.*

1.9 Espace de Hilbert

1.9.1 Notion de produit scalaire

Soit E un espace vectoriel sur $\Bbbk = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Définition 1.9.1. *[1] On appelle produit scalaire sur E, toute application $f : E \times E \longrightarrow \Bbbk$ telle que, pour tout $x,y \in E$, on ait :*

1. *L'application* $x \longmapsto f(x,y)$ *est linéaire,*

2. *f(y,x)* $= \overline{f(x,y)}$,

3. *f(x,x)* $\geq$ *0* *(positivité),*

4. *f(x,x)* $=$ *0* $\Longrightarrow$ *x* $=$ *0.*

Notation. $f(x,y)$ *se note* $\langle x,y\rangle$ *ou encore* xy *et s'appelle produit scalaire de* x *et de* y.

Exemple 1.9.1. *Dans* $E = \mathbb{k}^n$,

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i},$$

définit un produit scalaire.

Exemple 1.9.2. *Dans* $E = \mathcal{C}(]a,b[;\mathbb{k})$,

$$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt,$$

définit un produit scalaire.

1.9.2 Espace pré-Hilbertien

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Proposition 1.9.1. *[1] L'application* $x \longmapsto \|x\|_E = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ *est une norme sur E, dite norme associée au produit scalaire.*

Définition 1.9.2 (Espace pré-Hilbertien). *[9] Un espace pré-hilbertien est un couple* $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$, *où* E *est un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel et* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ *est un produit scalaire sur* E.

Définition 1.9.3 (Espace Hilbertien). *[9] Un espace hilbertien ou (espace de Hilbert[4]) est un espace pré-hilbertien complet qui est aussi de Banach pour la norme associe au produit scalaire.*

Exemple 1.9.3. *Tout pré-hilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert (c'est le cas de* $\mathbb{k}^n$ *avec le produit scalaire usuel).*

Théorème 1.9.1 (Inégalité de Cauchy-Schwartz). *[5] Quels que soient les vecteurs* x *et* y *appartenant à un espace pré-hilbertien* E, *on a :*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{1.9.1}$$

4. David Hilbert, Mathématicien allemand, 1862-1943

1.9.3 Orthogonalité

Soit E un espace pré-hilbertien sur $\Bbbk = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Définition 1.9.4 (Vecteurs orthogonaux). *[2][9] On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si l'on a :*

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

On note alors $x \perp y$.

Définition 1.9.5 (Orthogonal d'une partie). *[2][9]*

1. *On dit que deux parties non vides A et B de E sont orthogonales si pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$, on a :*

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

   Donc on note $A \perp B$.

2. *Si A est une partie non vide de E, on appelle orthogonale de A et l'on note $A^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A, c'est-à-dire :*

$$A^{\perp} = \{x \in E; \langle x, a\rangle = 0, \quad \forall a \in A\}.$$

Définition 1.9.6 (Systèmes orthogonaux et systèmes orthonormés). *[2][9] Soient E un espace pré-hilbertien et $\{x_i; i \in I \subset \mathbb{N}\}$ une famille des vecteurs de E.*

1. *On dit que $\{x_i; i \in I \subset \mathbb{N}\}$ est une famille orthogonale ou système orthogonal si les x_i sont deux à deux orthogonaux. Autrement dit, $\forall i, j \in I \subset \mathbb{N}$, on ait :*

$$\langle x_i, x_j\rangle = 0, \quad i \neq j.$$

2. *On dit que $\{x_i; i \in I \subset \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormale ou système orthonormé si $\{x_i; i \in I \subset \mathbb{N}\}$ est une famille orthogonale et si de plus, $\forall i \in I \subset \mathbb{N}$, on a :*

$$\langle x_i, x_i\rangle = 1.$$

   Autrement dit, $\forall i, j \in I \subset \mathbb{N}$ on a :

$$\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Remarque 1.9.1. *Il est immédiat que si* $\{x_i; i \in I \subset \mathbb{N}\}$ *est une famille orthogonale, alors la famille* $\left\{\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\}_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ *est orthonormale.*

Exemple 1.9.4. *Dans l'espace* ℓ^2 *la suite* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, telle que* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit la suite* $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ *constituée uniquement de* 0 *sauf le n-ème terme qui est égale à* 1*, est un système orthonormé.*

Théorème 1.9.2 (Représentation de Riesz). *[5] Soient* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert et* u *une forme linéaire continue sur* $\mathcal{H}$*. Il existe un vecteur* a *de* $\mathcal{H}$ *et un seul, tel que, quel que soit* x *appartenant à* $\mathcal{H}$*, on ait :*

$$u(x) = \langle a, x \rangle .$$

Ce théorème, qui permet de déterminer l'espace dual $\mathcal{H}^*$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, montre que toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert est un produit scalaire. Avant d'en aborder la démonstration nous allons établir le lemme suivant :

Lemme 1.9.1. *[5] Soient* E *un espace pré-hilbertien et* a *un vecteur appartenant à* E*, l'application* $x \mapsto \langle a, x \rangle$ *est une forme linéaire continue sur* E *de norme* $\|a\|$*.*

Démonstration. Ce lemme est un résultat de l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.9.1). En effet, on a :

$$|\langle a, x \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x\|,$$

ce qui implique que l'application $x \mapsto \langle a, x \rangle$ est continue et que sa norme est inférieur ou égale à $\|a\|$. D'autre part si $a \neq 0$ [5]. On peut considérer le vecteur $x_0 = \dfrac{a}{\|a\|}$, $\langle a, x_0 \rangle = \|a\|$.
On peut maintenant démontrer le théorème de Représentation de Riesz :

1. Si $u = 0$, il existe évidemment $a = 0$.
2. Si $u \neq 0$ le noyau de u est un hyperplan fermé dans $\mathcal{H}$ et son supplémentaire orthogonal est de dimension égale à 1. Soit b un élément de ce dernier espace, alors pour tout $x \in \ker u$ on a $\langle b, x \rangle = 0$. Les formes linéaires continues $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto \langle b, x \rangle$ ont donc même noyau, ce qui implique l'existence d'un scalaire λ tel que :

$$u(x) = \lambda \langle b, x \rangle \text{ [6] et } a = \overline{\lambda} b.$$

5. Si $a = 0$, $\langle a, x \rangle = 0$ et le résultat est dans ce cas évident.
6. $u(x) = 0$ et $\langle b, x \rangle = 0$ sont deux équations du même hyperplan $\ker u$; donc $u(x)$ et $\langle b, x \rangle$ doit être proportionnels.

L'unicité de a découle du fait que si $\langle a, x\rangle = \langle a', x\rangle$, pour tout $x \in \mathcal{H}$, alors $\langle a - a', x\rangle = 0$, c'est-à-dire, $a = a'$.

□

Théorème 1.9.3. *[5] Soient x et y deux éléments quelconques d'un espace pré-hilbertien E ; on a les relations suivantes :*

(1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle$.

(2) $\|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

(3) $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y\|^2$.

Démonstration. Pour établir la première relation il suffit de développer $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$. Les deux autres relations sont des conséquences immédiates de la première.
Ces relations sont les analogues des relations bien connues en géométrie euclidienne élémentaire. Si x et y sont orthogonaux, $\langle x, y\rangle = 0$, (1) est le théorème de Pythagore, (2) et (3) sont respectivement l'identité parallélogramme et le théorème de la médiane. □

Remarque 1.9.2. *[5] Si deux vecteurs x et y dans l'espace de pré-hilbertien satisfont la relation $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, ils ne sont pas nécessairement orthogonaux. La relation de Pythagore n'est caractéristique de l'orthogonalité que dans le cas des espaces pré-hilbertiens réels.*

Remarque 1.9.3. *[5] L'inégalité $\Re\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle|$ entraine, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwartz*(1.9.1)*,*

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|,$$

c'est-à-dire :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

C'est l'inégalité de Minkowski.

1.9.4 Base Hilbertienne

Définition 1.9.7. *[7] On appelle base Hilbertienne* (*ou simplement base s'il n'y a pas de confusion possible*[7]) *une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ tels que :*

7. Surtout ne pas confondre avec une base algébrique i.e. Une famille $\{e_i; i \in I \subset \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{H}$ telle que tout élément de $\mathcal{H}$ s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire finie des $\{e_i; i \in I \subset \mathbb{N}\}$.

1.

$$\begin{cases} |e_n| = 1 & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \langle e_m, e_n \rangle = 0 & \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n. \end{cases}$$

2. L'espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Corollaire 1.9.1. *[7] Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne alors pour tout $u \in \mathcal{H}$ s'écrit*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n \quad \textit{avec} \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 .$$

Inversement étant donnée une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge vers un élément noté u, on a :

$$\langle u, e_n \rangle = \alpha_n \quad \textit{et} \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2.$$

Théorème 1.9.4. *[7] Tout espace de Hilbert séparable[8] admet une base Hilbertienne.*

Démonstration. Soit $\{(v_n), n \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{H}$. Soit F_k l'espace vectoriel engendré par $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$. Les (F_k) forment une suite croissante de sous-espaces de dimension finie telle que $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ est dense dans $\mathcal{H}$. On choisit une base orthonormale de F_1, que l'on complète orthonormale de F_2, ... etc. On obtient alors une base Hilbertienne de $\mathcal{H}$. □

1.10 Espace dual d'un e.v.n

Définition 1.10.1. *[24] L'espace $\mathcal{L}(E, \Bbbk)$ est appelé le dual de E. On le note par E^*. Ainsi, $f \in E^*$ veut dire que $f : E \to \Bbbk$ linéaire bornée.*

Définition 1.10.2. *[24] Si $f \in E^*$ alors f est appelée une fonctionnelle linéaire bornée.*

Notation. *Si $f \in E^*$ alors l'image de $x \in E$ par la fonctionnelle f est notée par $\langle f, x \rangle$.*

Exemple 1.10.1. *Soient E et F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels normés. Soient $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in F^*$ donc ($f : F \to \Bbbk$, linéaire et bornée). Considérons l'opérateur $B : E \to \Bbbk$ défini par :*

$$\langle B, x \rangle = \langle f, Ax \rangle \quad \textit{pour tout} \quad x \in E.$$

8. Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dit séparable s'il existe une suite dense dans $\mathcal{H}$.

1.11 Topologie faible $\sigma(E, E^*)$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E^*$. On désigne par :

$$\begin{aligned} \varphi_f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle f, x \rangle . \end{aligned}$$

Lorsque f décrit E^* on obtient une famille $\{\varphi_f; f \in E^*\}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.11.1. *[7] La topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $\{\varphi_f; f \in E^*\}$.*

1.12 Espace réflexif

Soit E un espace de Banach, soit E^* son dual (muni de la norme duale $\|f\| = \sup\limits_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$) et soit E^{**} son bidual, c'est-à-dire, le dual de E^*, muni de la norme [7] :

$$\|\psi\| = \sup_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |\langle \psi, f \rangle|.$$

On a une injection canonique J définie par :

$$\begin{aligned} J : \quad E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto J_x : \quad E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad\quad f \longmapsto \langle f, x \rangle , \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue. On a donc,

$$\langle J_x, f \rangle_{E^{**}, E^*} = \langle f, x \rangle_{E^*, E} \quad \forall x \in E, \forall f \in E^*.$$

Il est clair que J est linéaire et que J est une isométrie, c'est-à-dire, $\|J_x\|_{E^{**}} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, en effet :

$$\|J_x\| = \sup_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |\langle J_x, f \rangle| = \sup_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|.$$

Définition 1.12.1. *[7] Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E^*. On dit que E est réflexif si $J(E) = E^*$. Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E^*.*

1.13 Différents types de convergences

Soient E et F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels normés. Soit la suite d'opérateurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E,F)$ et $A \in \mathcal{L}(E,F)$ [3][21] :

La convergence uniforme :

On dit que la suite d'opérateurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers A, si on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|A_n - A\| \longrightarrow 0.$$

Dans ce cas, on écrit :

$$A_n \xrightarrow{u} A \quad \text{ou} \quad A_n \rightrightarrows A.$$

La convergence forte :

On dit que la suite d'opérateurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers A, si on a :

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|A_n(x) - A(x)\|_F \longrightarrow 0.$$

Dans ce cas, on écrit :

$$A_n \xrightarrow{s} A.$$

Le symbole s vient du mot anglais "strongly"qui signifie fortement.

La convergence faible :

On dit que la suite d'opérateurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers A, si on a :

$$\forall f \in F^*, \quad f(A_n x) \longrightarrow f(Ax), \qquad\qquad \forall x \in E.$$

$$\Longleftrightarrow |f(A_n x) - f(Ax)|_{n\to+\infty} \longrightarrow 0, \qquad \forall f \in F^*, \forall x \in E.$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mentionné les notions de certains espaces fonctionnels, leurs structures et les relations entre eux.

L'espace de Hilbert est parmi les espaces qu'on a traité dans cette partie. Il ya des raisons profondes qui expliquent l'importance du choix des espaces de Hilbert dans les mathématiques, ils apparaissent comme généralisation naturelle des espaces euclidiens de dimension finie $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n)$.

CHAPITRE 2

OPÉRATEURS ET SPECTRE

Ce chapitre est composé de deux parties. La première partie est consacrée aux opérateurs dans l'espace de Hilbert, la deuxième partie introduit la théorie spectrale, y compris les spectres et leurs différentes propriétés.

2.1 Opérateur linéaire continu

Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces normés.

Définition 2.1.1. *[12] L'opérateur linéaire A est continu en $x_0 \in E$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_E < \sigma \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_F < \varepsilon.$$

Puis que la continuité de A peut être caractérisée par les suites, A est continu en x_0 si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_E = 0.$$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax_0\|_F = 0,$$

en effet,

$$\|Ax_n - Ax_0\|_F \leq \|x_n - x_0\|_E\,,$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax_0\|_F = 0.$$

2.2 Opérateur linéaire borné

Définition 2.2.1. *[6] On considère deux espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ dont les normes et produits scalaires sont notés :* $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_2}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_2}$.
Soit $D(A)$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_1$ et A une application (un opérateur) linéaire de $D(A)$ dans $\mathcal{H}_2$. On dit que A est un opérateur borné de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ si $D(A) = \mathcal{H}_1$ et s'il existe C tel que :

$$\|Au\|_{\mathcal{H}_2} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall u \in \mathcal{H}_1. \tag{2.2.1}$$

On pose alors :

$$\|A\| = \sup_{u\in\mathcal{H}_1, u\neq 0} \frac{\|Au\|_{\mathcal{H}_2}}{\|u\|_{\mathcal{H}_1}}.$$

Si $D(A) \neq \mathcal{H}_1$ et s'il existe une constante C telle que :

$$\|Au\|_{\mathcal{H}_2} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall u \in D(A). \tag{2.2.2}$$

Alors l'opérateur A se prolonge en un opérateur borné de $\overline{D(A)}$ dans $\mathcal{H}_2$, où $\overline{D(A)}$ désigne l'adhérence de $D(A)$ dans $\mathcal{H}_1$.

Remarque 2.2.1. *[6] Tout opérateur borné est fermé.*

Définition 2.2.2. *[12] L'opérateur linéaire $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est borné s'il existe un nombre $M > 0$, tel que :*

$$\|Ax\|_F \leq M \|x\|_E, \text{ pour tout } x \in E. \tag{2.2.3}$$

Remarque 2.2.2. *[12]*

1. ***L'opérateur identité*** *I est défini par $Ix = x$ pour tout $x \in E$.*
2. ***L'opérateur zéro*** *0 est défini par $0x = 0$ pour tout $x \in E$.*

Exemple 2.2.1.

1. *une application linéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie est toujours un opérateur borné.*
2. *L'opérateur de multiplication A défini sur l'espace $\mathcal{C}([1, 2])$, alors :*

$$\begin{aligned}\|Af\| &= \sup_{x\in[1,2]} |Af(x)|,\\ &= \sup_{x\in[1,2]} |x \cdot f(x)|,\\ &\leq 2\|f\|, \quad (M = 2)\ \forall f \in \mathcal{C}([1, 2]).\end{aligned}$$

Théorème 2.2.1. *[12][16] Soient E, F deux espaces linéaires normés, A un opérateur linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) L'opérateur A est continu sur E.

(2) L'opérateur A est continu en x_0.

(3) Il existe une constante $C > 0$ telle que $\|Ax\|_F \leq C \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

(4) A est Lipschitzienne.

(5) A est borné sur la boule unité $\overline{B}(0,1)$ de E.

Démonstration. (2) $\Leftrightarrow$ (1) :

$$A \text{ est continu en } x_0 \Leftrightarrow A \text{ est continu sur } E.$$

A est continu en $x_0 \Leftrightarrow \left\{\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_E = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax_0\|_F = 0\right\}$. Soit $x \in E$ quelconque, il suffit de montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \|x'_n - x\|_E = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|Ax'_n - Ax\|_F = 0.$$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} \|x'_n - x\|_E = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|(x'_n - x + x_0) - x_0\|_E = 0.$$

On pose : $y_n = (x'_n - x + x_0)$ on a A est continu en $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|Ay_n - Ax_0\|_F = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|A\left(x'_n - x + x_0\right) - Ax_0\|_F = 0, \\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \|Ax'_n - Ax + Ax_0 - Ax_0\|_F = 0, \\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \|Ax'_n - Ax\|_F = 0.
\end{aligned}$$

Donc A est continu sur E.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) :

$$A \text{ est continu sur } E \Leftrightarrow A \text{ est borné}.$$

a) Soit A un opérateur linéaire borné et soit $x_0 \in E$ quelconque. La relation (2.2.3) appliquée à $(x - x_0)$. On a :

$$\|A(x) - A(x_0)\|_F = \|A(x - x_0)\|_F \leq C \|x - x_0\|_E.$$

Montre que A est continu en x_0 et donc sur E.

b) Montrons que (1) entraine (3) en vérifiant que non (3) entraine non (1). Supposons donc qu'il existe des vecteurs $x_n \in E, \|x_n\|_E = 1$ tels que :

$$\|Ax_n\|_F > n \|x_n\|_E = n.$$

La suite $\left\{ y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ converge vers 0.

$$\|Ay_n\| = \left\| A\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \|Ax_n\| \geq_{n\to\infty} \nrightarrow 0 = A(0).$$

$\Longrightarrow A$ n'est pas continu

$$A(0) = 0, \quad y_n \to 0, \quad Ay_n \nrightarrow A(0) = 0.$$

(5) $\Leftrightarrow$ (3) :

Si $x = 0$: (3) est vérifié.

Si $x \neq 0$: $\dfrac{x}{\|x\|_E} \in \overline{B}(0,1)$ donc :

$$\begin{aligned}
\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F &\leq C, \\
\Rightarrow \frac{1}{\|x\|_E} \|Ax\|_F &\leq C, \\
\Rightarrow \|Ax\|_F &\leq C \|x\|_E, \quad \forall x \in E - \{0_E\}.
\end{aligned}$$

(2) $\Leftrightarrow$ (5) :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \lambda > 0$ tel que :

$$\|x\|_E < \lambda \Rightarrow \|Ax\|_F < \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = 1$, on a :

$$\exists \lambda_1 > 0, \quad \|x\|_E < \lambda_1 \Rightarrow \|Ax\|_F < 1.$$

Soit $x \in \overline{B}(0,1) \Rightarrow \|x\|_E \leq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\lambda_1}{2} x \right\|_E = \frac{\lambda_1}{2} \|x\|_E &\leq \frac{\lambda_1}{2} < \lambda_1, \\
\Rightarrow \left\| A\left(\frac{\lambda_1}{2} x\right) \right\|_F &\leq 1, \\
\Rightarrow \frac{\lambda_1}{2} \|Ax\|_F &\leq 1, \\
\Rightarrow \|Ax\|_F &\leq \frac{2}{\lambda_1} = C, \quad \forall x \in \overline{B}(0,1).
\end{aligned}$$

(5) $\Leftrightarrow$ (4) :

Si A est borné sur la boule unité par le réel $C > 0$. Alors, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

$$A(x) = \|x\| \, A\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Et donc, puisque le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ appartient à la boule unité, $\|A(x)\| \leq C\|x\|$. Si $x = 0$, cette inégalité est bien sur toujours vraie. Si y,$z \in E$, on a :

$$\|A(y) - A(z)\| = \|A(y - z)\| \leq C\|z - y\|,$$

et A est Lipschitzienne [1]. Réciproquement, si A est Lipschitzienne de rapport C, alors, pour tout $x \in \overline{B}(0, 1)$,

$$\begin{aligned}\|A(x)\| = \|A(x) - A(0)\| &\leq C\|x - 0\| \\ &\leq C,\end{aligned}$$

donc A est borné sur la boule unité.

Puisque toute application Lipschitzienne est continue. La seule chose restant à démontrer est que si A est continu en 0, alors il est borné sur la boule unité de E. Or, si A est continu en 0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \overline{B}(0, \delta)$,

$$\|A(x) - A(0)\| = \|A(x)\| \leq 1.$$

Par conséquent, si $x \in \overline{B}(0, 1)$, alors,

$$\|A(x)\| = \frac{1}{\delta} \, \|A(\delta x)\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Donc A est borné par $\dfrac{1}{\delta}$ sur la boule unité. □

2.3 Opérateur linéaire non borné

Définition 2.3.1. *[6] On dit que A est un opérateur non borné s'il n'existe pas de constante C telle que* (2.2.2) *soit satisfait. En d'autres termes, A est non borné si et seulement s'il existe une suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ *telle que :*

$$\|u_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \|Au_n\|_{\mathcal{H}_2} = +\infty.$$

1. Soit k un réel positif, on appelle application Lipschitzienne de rapport k, tous opérateurs $A : E \longrightarrow F$ vérifiant :

$$\|Ax - Ay\|_F \leq k \, \|x - y\|_E \, .$$

Et on note : k-Lipschitzienne.

Exemple 2.3.1. *Soit $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Alors, l'opérateur A défini par :*

$$Au(x) = xu(x),$$

de domaine

$$D(A) = \{u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad tel\ que \quad xu \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\},$$

est non borné. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(A)$ donnée par :

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < n\ ou\ x > n+1, \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

En effet : $\|u_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = 1$ et $\|Au_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\dfrac{3n^2+3n+1}{3}}$.

Définition 2.3.2. *[25] Le graphe d'un opérateur $A : D(A) \to \mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ défini par :*

$$\Gamma(A) = \{(u, f) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : u \in D(A), f = Au\}.$$

L'opérateur A est dit fermé si $\Gamma(A)$ est fermé dans l'espace $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ muni du produit scalaire :

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = \langle u_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle,$$

et de la norme correspondante. Si A_1 est un autre opérateur dans $\mathcal{H}$ tel que $\Gamma(A) \subset \Gamma(A_1)$, alors A_1 est appelé extension de A. Dans ce cas, on écrit $A \subset A_1$. Il est claire que A_1 est une extension de A si et seulement si $D(A) \subset D(A_1)$ et $Au = A_1 u$, pour $u \in D(A)$. L'opérateur A est dit fermable[2] s'il existe une extension fermée de A.

2.4 Opérateur inverse

Définition 2.4.1. *[24] On dit que $A : E \longrightarrow F$ est inversible s'il existe $B : F \longrightarrow E$ tel que $AB = I_F$ et $BA = I_E$.*

- *L'opérateur B s'appelle opérateur inverse de A et on le note par A^{-1}.*
- *Rappelons que AB veut dire $A \circ B$ et BA veut dire $B \circ A$.*

2. Un opérateur $(A, D(A))$ est fermable si la fermeture de $\Gamma(A)$ est un graphe.

2.5 Opérateur adjoint

Définition 2.5.1. *[12][18] Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$. Alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^*, \mathcal{H})$ tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \forall y \in \mathcal{H}^*, \quad \langle Tx, y \rangle_{\mathcal{H}^*} = \langle x, T^* y \rangle_{\mathcal{H}}.$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T.

Exemple 2.5.1. *L'opérateur de l'identité I, soient $x, y \in \mathcal{H}$, c'est clair que :*

$$\langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, I^* y \rangle,$$

d'où $I^* = I$.

Proposition 2.5.1. *[16] L'application de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dans lui-même définie par $T \to T^*$ est une application linéaire si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, antilinéaire si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Cette application est une isométrie involutive (c'est-à-dire, pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $T^{**} = T$). De plus,*

$$I^* = I, \ \forall T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \ (TS)^* = S^* T^*.$$

Proposition 2.5.2. *[16] Pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on a :*

$$\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Démonstration. Bien sûr, $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$. Par ailleurs ;

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \leq \|x\|^2 \|T^*T\|,$$

ce qui montre que $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. On a donc $\|T^*T\| = \|T\|^2$ et, en appliquant ce résultat à T^*, on obtient $\|T^*T\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$. □

2.6 Opérateur auto-adjoint

Définition 2.6.1. *[21] Un opérateur T d'un espace de Hilbert dans lui même est dit auto-adjoint si et seulement s'il coïncide avec son adjoint. C'est-à-dire, $T^* = T$.*

Exemple 2.6.1. *Soient $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et α une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Soit T l'opérateur de multiplication par α, définie par :*

$$Tf = \alpha f, \quad f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

On vérifie immédiatement que T^* est l'opérateur de multiplication par $\bar{\alpha}$. L'opérateur T est auto-adjoint si et seulement si α est presque partout à valeurs réelles.

Théorème 2.6.1. *[16] Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *Soient T, S deux opérateurs continus sur $\mathcal{H}$. Alors,*

$$(T+S)^* = T^* + S^*, \quad (T \circ S)^* = S^* \circ T^*;$$

2. *Si T est inversible, T^* l'est aussi et on a $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$;*
3. *Si T est auto-adjoint, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathcal{H}$;*
4. *Si T est auto-adjoint, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$,*

$$4\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle - i\langle T(x+iy), x+iy\rangle + i\langle T(x-iy), x-iy\rangle.$$

Proposition 2.6.1. *[16] On suppose que $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert tel que $\mathcal{H} \neq 0$. Pour tout opérateur auto-adjoint $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathcal{H} \quad et \quad \|x\| = 1\}.$$

Théorème 2.6.2. *[21] Si T est auto-adjoint, alors $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$.*

Démonstration. Posons $\alpha_T = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.9.1), on a :

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x\rangle| &\leq \|T\|\|x\| \leq \|T\| \\ &\Longrightarrow \alpha_T \leq \|T\|. \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Pour tout x tel que $\|x\| \leq 1$ on a :

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle| = \alpha_T.$$

Si $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left|\left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| &\leq \alpha_T \\ \Longrightarrow |\langle Tx, x\rangle| &\leq \alpha_T \|x\|^2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, on a :

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, x\rangle + 2\Re\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle$$

$$\langle T(x-y), x-y\rangle = \langle Tx, x\rangle - 2\Re\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle.$$

Alors

$$4\Re\langle Tx,y\rangle \leq \alpha_T\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)$$
$$\Longrightarrow 4\Re\langle Tx,y\rangle \leq \frac{\alpha_T}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

On prend x d'une façon que $Tx \neq 0$ et posons $y = \dfrac{\|x\|}{\|Tx\|}Tx$, alors $\|x\| = \|y\|$.

De plus on obtient :

$$\begin{aligned} |\Re\langle Tx,y\rangle| &\leq \alpha_T\left(\|x\|^2\right)\\ \Longrightarrow \left|\Re\left\langle Tx,\frac{\|x\|}{\|Tx\|}Tx\right\rangle\right| &= \frac{\|x\|}{\|Tx\|}|\Re\langle Tx,Tx\rangle| \leq \alpha_T\left(\|x\|^2\right)\\ \Longrightarrow \|Tx\| &\leq \alpha_T\|x\| \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

$$\Longrightarrow \|T\| \leq \alpha_T.$$

De (2.6.1) et (2.6.2), on arrive à $\|T\| = \alpha_T$. □

2.7 Opérateur symétrique

Les opérateurs symétriques sont des opérateurs bornés qui ont un comportement particulier par rapport au produit scalaire.

Définition 2.7.1. *[19] Soit T un opérateur borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. D'après la définition de l'opérateur auto-adjoint, nous disons que T est symétrique.*

Un opérateur symétrique signifie un opérateur borné et symétrique sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Observons que, si T est un opérateur symétrique, alors $\langle Tx,x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. En effet :

$$\langle Tx,x\rangle = \overline{\langle x,Tx\rangle} = \overline{\langle T^*x,x\rangle} = \overline{\langle Tx,x\rangle}.$$

Définition 2.7.2. *[25] Un opérateur T dans un espace de Hilbert est dit symétrique si $T \subset T^*$, c'est-à-dire :*

$$D(T) \subset D(T^*), \quad Tu = T^*u \quad pour \quad u \in D(T).$$

Il est clair que T est symétrique si et seulement si :

$$\langle Tu,v\rangle = \langle u,Tv\rangle \quad pour \quad u \in D(T).$$

Remarque 2.7.1. *[19] Soient S un opérateur symétrique et B un opérateur borné, si $SB = BS$, alors $SB^* = B^*S$. En effet pour tout $x \in \mathcal{H}$,*

$$\begin{aligned} \|B^*Sx - SB^*x\|^2 &= \langle B^*Sx, B^*Sx\rangle + \langle SB^*, SB^*x\rangle - \langle B^*Sx, SB^*x\rangle - \langle SB^*x, B^*Sx\rangle\\ &= \langle SBB^*Sx,x\rangle + \langle S^2BB^*x,x\rangle - \langle SBB^*Sx,x\rangle - \langle S^2BB^*x,x\rangle\\ &= 0. \end{aligned}$$

Propriété 2.7.1. *[25]*

1. *Si T est symétrique, alors T fermable et $T \subset T^{**} \subset T^*$.*

2. *Si T est fermé et symétrique, alors $T = T^{**} \subset T^*$.*

3. *Si T est auto-adjoint, alors $T = T^{**} = T^*$.*

Théorème 2.7.1. *[25] Soit T un opérateur symétrique dans $\mathcal{H}$. Alors les propriétés sont équivalentes :*

1. *T est auto-adjoint.*

2. *T est fermé et $\ker(T^* \pm iI) = \{0\}$.*

3. *$Im\,(T \pm iI) = \mathcal{H}$.*

Définition 2.7.3. *[25] Soit T un opérateur symétrique. On dit que T est essentiellement auto-adjoint si sa fermeture est auto-adjoint.*

Corollaire 2.7.1. *Soit T un opérateur symétrique dans $\mathcal{H}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *T est essentiellement auto-adjoint.*

2. *$\ker(T^* \pm iI) = \{0\}$.*

3. *$Im\,(T \pm iI)$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

2.8 Opérateur régulier

Définition 2.8.1 (Domaine de régularité). *[8] Un nombre λ est appelé point de type régulier de l'opérateur T s'il existe $k = k(\lambda) > 0$ tel que :*

$$\forall x \in D(T): \quad \|(T - \lambda I)\,x\| \geq k\,\|x\|\,,$$

autrement dit $(T - \lambda I)^{-1}$ existe et borné mais pas nécessairement défini sur tout $\mathcal{H}$.
L'ensemble des points de type régulier de l'opérateur T est appelé "domaine de régularité".
Il s'en suit que,

1. *λ est un point régulier de $T \Rightarrow \lambda$ est un point de type régulier de T. En effet, si λ est un point régulier, alors $(T - \lambda I)^{-1}$ existe et borné dans tout $\mathcal{H}$.*

2. *Les valeurs propres de T ne peuvent pas être des points de type régulier (car $(T-\lambda I)$ n'est pas injectif et donc $(T-\lambda I)^{-1}$ ne peut pas être défini).*

Définition 2.8.2. *[8] Un opérateur symétrique T est dit "régulier", si chaque point réel est un point de type régulier.*

2.9 Opérateurs particuliers

Définition 2.9.1. *[12] Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Lorsque $\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_2$ alors, $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)=\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$.*

a) Un élément $I\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ est appelé isométrique si $\|I(x)\|_{\mathcal{H}_2}=\|x\|_{\mathcal{H}_1}$, pour tout $x\in\mathcal{H}_1$.

b) Un élément $U\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ est appelé unitaire si $U^*U=Id_{\mathcal{H}_1}$ et $UU^*=Id_{\mathcal{H}_2}$.

c) Un élément $N\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ est appelé normal si $NN^*=N^*N$.

d) Un élément $S\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si $S=S^*$.

e) Un élément $P\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ est appelé positif (notation : $P\geq 0$) si P est auto-adjoint et si pour tout $x\in\mathcal{H}_1$, $\langle P(x),x\rangle\geq 0$.

2.10 Théorie spectrale

2.10.1 Spectre d'un opérateur

Soit E un espace vectoriel normé sur le corps $\Bbbk=(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Définition 2.10.1. *[24] Le spectre d'un opérateur A défini sur E est :*

$$\sigma(A)=\{\lambda\in\Bbbk,\ \text{L'opérateur } A-\lambda I \text{ n'est pas inversible }\}.$$

Définition 2.10.2. *[24] Soient $A:E\longrightarrow E$ et $\lambda\in\Bbbk$. Si $A-\lambda I$ n'est pas injectif alors on dit que λ est une valeur propre de A.*

2.10.2 Spectre des opérateurs linéaires bornés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Définition 2.10.3 (Ensemble résolvant). *[10][12]*
Soit $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, on dit que $\lambda\in\mathbb{C}$ appartient à l'ensemble résolvant de A si $A-\lambda I$ est une

bijection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, et que $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'ensemble résolvant de A est noté $\rho(A)$, c'est-à-dire :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \textit{ inversible } \}.$$

Définition 2.10.4 (Spectre d'un opérateur). *[12] Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on appelle spectre de l'opérateur A le sous ensemble défini par :*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \textit{ n'est pas inversible } \}.$$

Un élément $\sigma(A)$ est une valeur spectrale de A.

Définition 2.10.5 (Valeurs propres et vecteurs propres d'un opérateur). *[12][18] Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, le nombre complexe λ est dit valeur propre de A s'il existe un vecteur x dans $\mathcal{H} - \{0_{\mathcal{H}}\}$ (s'appelle vecteur propre associé à λ), tel que :*

$$(A - \lambda I)\, x = 0, \quad Ax = \lambda x.$$

Définition 2.10.6 (La résolvante). *[15] Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, pour tout $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante de A au point λ par :*

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

La résolvante $R_\lambda(A)$ est simplement notée R_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A.

Remarque 2.10.1. *[12]*

1. $\sigma(A) \cup \rho(A) = \mathbb{C}$.
2. $\sigma(A) \cap \rho(A) = \emptyset$.

Définition 2.10.7 (Spectre ponctuel). *[12] On appelle spectre ponctuel de A l'ensemble des valeurs propres de A, noté $\sigma_p(A)$ tel que :*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma(A), A - \lambda I \quad \textit{non injectif}\}.$$

Définition 2.10.8 (Spectre continu). *[12] On appelle spectre continu de A et on note par $\sigma_c(A)$, l'ensemble*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A), A - \lambda I \textit{ injectif } \textit{ et } Im\,(A - \lambda I) \neq \overline{Im\,(A - \lambda I)} = \mathcal{H}\}.$$

Définition 2.10.9 (Spectre résiduel). *[12] On appelle spectre résiduel de A et on note par $\sigma_r(A)$, l'ensemble*

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A), A - \lambda I \text{ injectif } \text{ et } \overline{Im\,(A - \lambda I)} \neq \mathcal{H}\}.$$

Définition 2.10.10 (Le spectre). *[12] Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjointe de trois ensembles*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Définition 2.10.11 (Le rayon spectral). *[21] Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on appelle rayon spectral le nombre défini par :*

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Théorème 2.10.1. *[21] Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si $\|A\| \leq |\lambda|$, alors $\lambda \in \rho(A)$.*

Démonstration. On a :

$$A_\lambda = (A - \lambda I) = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right)$$
$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}$$

La série est convergente si et seulement si $\|A\| \leq |\lambda|$. Dans ce cas, A_λ existe et $\lambda \in \rho(A)$. □

2.10.3 Spectre d'un opérateur inverse

Théorème 2.10.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si A est inversible, alors :*

$$\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \sigma(A^{-1})$. Comme A^{-1} est inversible, nécessairement $\lambda \neq 0$.
Comme $(A^{-1} - \lambda I)$ est non inversible et comme $(A^{-1} - \lambda I) = \lambda A^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} I - A \right)$, l'opérateur $\lambda A^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} I - A \right)$ est non inversible, c'est-à-dire, $\left\{ \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A) \right\}$.
On a donc montré que $\sigma(A^{-1}) \subset \sigma(A)^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\}$, en échangeant le rôle de A et A^{-1} on obtient l'inclusion réciproque $\sigma(A^{-1}) \subset (A^{-1})$, ce qui achève la preuve. □

2.10.4 Spectre d'un opérateur adjoint

Définition 2.10.12 (Algèbre). *[22] Soit $\Bbbk$ un corps commutatif.*

1) *Une algèbre sur* $\Bbbk$ *est un* $\Bbbk$*-espace vectoriel,* A *muni d'une application* $\Bbbk$*-bilinéaire*

$$A \times A \to A$$

$$(x, y) \mapsto xy,$$

appelée la multiplication dans A*, qui est associative. La multiplication dans* A *satisfait donc :*

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

$$(x + y)z = xz + yz$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$x(yz) = (xy)z,$$

pour tout $x, y, z \in A$ *et* $\lambda \in \Bbbk$.

2) *Lorsque la multiplication dans* A *admet un élément neutre* u*, c'est-à-dire que :*

$$ux = xu = x,$$

pour tout $x \in A$*, on dit que* u *est l'unité de* A *et que* A *est une algèbre unifère.*

3) *Soit* A *une algèbre munie d'une unité* u*. Un élément* $x \in A$ *est inversible s'il existe* $y \in A$ *tel que :*

$$xy = yx = u.$$

On note alors $y = x^{-1}$*. L'ensemble des éléments inversibles est noté* A^{-1}.

4) *L'orque la multiplication dans* A *est commutative, c'est-à-dire que :*

$$xy = yx,$$

pour tout $x, y \in A$*. On dit que* A *est commutative.*

5) *Étant données deux* $\Bbbk$*-algèbres* A *et* B*. On appelle morphisme d'algèbres de* A *dans* B *une application linéaire* $\varphi : A \to B$ *telle que* φ *soit multiplicative :*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$

pour tout $x, y \in A$*. Si* A *et* B *sont unifères et* φ *transforme l'unité de* A *en l'unité de* B*, on dit que* φ *est un morphisme d'algèbres unifères.*

6) *Un sous-espace vectoriel* B *de l'algèbre* A *est une sous-algèbre si* $xy \in B$ *pour tout* $x, y \in B$.

7) Un sous-espace vectoriel B de l'algèbre A est un idéal si $xy, yx \in B$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$.

Définition 2.10.13 (Algèbre involutive). *[22] Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif muni d'un morphisme de corps involutif $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ qu'on appellera conjugaison :*

$$\overline{\lambda + \mu} = \overline{\lambda} + \overline{\mu}, \quad \overline{\lambda\mu} = \bar{\lambda}\bar{\mu}, \quad \overline{\overline{\lambda}} = \lambda.$$

Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre. Une involution de A est une application semi-linéaire, anti-multiplicative et involutive $x \mapsto x^*$ de A dans A :

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda x^*) = \overline{\lambda} x^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, (x^*)^* = x.$$

L'élément x^* est l'adjoint de x. Une algèbre involutive est une algèbre munie d'une involution.

Exemple 2.10.1. *Si $\mathbb{k}$ est muni d'un morphisme de corps involutif, alors la $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{k}$ peut être munie de l'involution définie par $x^* = \overline{x}$.*

Définition 2.10.14. *[14] Une involution sur une algèbre U est une application $\varphi : U \to U$ telle que :*

a) $\varphi^2 = Id_U$.

b) $\varphi(\lambda T) = \overline{\lambda}\varphi(T)$.

c) $\varphi(TS) = \varphi(S)\varphi(T)$.

Définition 2.10.15. *[14] Une algèbre de Banach U munie d'une involution $T \to T^*$ vérifiant*

$$\forall T \in U \quad \|TT^*\| = \|T\|^2,$$

est appelée une C^*-algèbre.

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ muni de l'opération"adjoint"est une C^*-algèbre.

Proposition 2.10.1. *[15] Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors, on a :*

1. $\ker(T) = (Im\,(T^*))^{\perp}$.

2. $\overline{Im(T)} = \ker(T^*)^{\perp}$.

Démonstration.

1. On a :
$$\begin{aligned}\ker(T) =& \{x \in \mathcal{H} \mid Tx = 0\} = \{x \in \mathcal{H} \mid \forall y \in \mathcal{H},\ \ (Tx, y) = 0\},\\ =& \{x \in \mathcal{H} \mid \forall y \in \mathcal{H},\ \ (x, T^*y) = 0\},\\ =& \left(Im\,(T^*)\right)^{\perp}.\end{aligned}$$

2. D'après 1., on a :
$$(\ker\,(T^*))^{\perp} = \left(Im\,(T)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{Im(T)},$$
d'où le résultat.

□

Proposition 2.10.2. *[15] Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors :*

1. $\rho(T^*) = \left\{\lambda \in \Bbbk \mid \overline{\lambda} \in \rho(T)\right\}$ *et* $\sigma(T^*) = \left\{\lambda \in \Bbbk \mid \overline{\lambda} \in \sigma(T)\right\}$.
2. *Pour tout $\lambda \in \rho(T^*)$, $R_\lambda(T^*) = (R_{\overline{\lambda}}(T))^*$.*

Démonstration.

1. On a l'équivalence $\lambda I - T^*$ est inversible, si et seulement si $(\lambda I - T^*)^*$ est inversible.

   Or $(\lambda I - T^*)^* = \overline{\lambda} I - T$ donc
$$\begin{aligned}\rho(T^*) &= \{\lambda \in \Bbbk \mid \lambda I - T^* \text{ est inversible } \} = \left\{\lambda \in \Bbbk \mid \overline{\lambda} I - T \text{ est inversible } \right\}\\ &= \left\{\lambda \in \Bbbk \mid \overline{\lambda} \in \rho(T)\right\}.\end{aligned}$$
   De plus, $\sigma(T^*) = \Bbbk \setminus \rho(T^*)$, ce qui donne le résultat.

2. Si $\lambda \in \rho(T^*)$ alors :
$$\begin{aligned}R_\lambda(T^*) = (\lambda I - T^*)^{-1} &= \left(\left(\overline{\lambda} I - T\right)^*\right)^{-1}\\ &= \left(\left(\overline{\lambda} I - T\right)^{-1}\right)^* = (R_{\overline{\lambda}}(T))^*,\end{aligned}$$
   qui est l'égalité attendue.

□

2.10.5 Spectre d'un opérateur auto-adjoint

Théorème 2.10.3. *[14][15] Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur auto-adjoint, on suppose que $\mathcal{H} \neq \{0\}$ avec*
$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \quad et \quad M := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$
Alors :

1. $m, M \in [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}$.

2. $m, M \in \sigma(T)$.

3. $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Corollaire 2.10.1. *[14][15]*

1. *Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur auto-adjoint, alors $\|T\| = \max\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$.*
2. *Un opérateur auto-adjoint T sur $\mathcal{H}$ est positif si et seulement si son spectre $\sigma(T)$est contenu dans $\mathbb{R}^+$.*

2.10.6 Spectre essentiel et spectre discret

Nous allons maintenant introduire une notion nouvelle, celle de spectre essentiel. Nous n'en donnons pas la définition la plus générale car nous ne considèrerons dans la suite que le spectre essentiel d'opérateurs autoadjoints.

Définition 2.10.16 (Spectre essentiel). *[6] Soit $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint, on appelle spectre essentiel de T et on note $\sigma_{ess}(T)$. Le sous-ensemble du spectre défini ainsi : $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T)$ telle que :*

$$\|u_n\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad \|Tu_n - \lambda u_n\|_{\mathcal{H}} \to 0, \ \textit{et } u_n \rightharpoonup 0 \textit{ dans } \mathcal{H} \textit{ faiblement.}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée une suite singulière.

Lemme 2.10.1. *Soit $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint. Si $\lambda \in \sigma(T)$ et $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$, alors λ est une valeur propre de T.*

Démonstration. Voir [6]. □

Lemme 2.10.2. *Soit $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint. Si λ est une valeur propre de T de multiplicité infinie, alors $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$.*

Démonstration. Voir [6]. □

Lemme 2.10.3. *Soit $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint. Soit $\lambda_n \in \sigma(T)$ une suite de points du spectre tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ et $\lambda_n \neq \lambda$ pour tout n. Alors $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$.*

Démonstration. Voir [6]. □

On déduit du lemme précédent le corollaire suivant.

Corollaire 2.10.2. *[6] Soit $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint. Alors le spectre essentiel $\sigma_{ess}(T)$ est fermé.*

En résumé :

$\lambda \in \sigma(T)$ *et* $\lambda \notin \sigma_{ess}(T) \Rightarrow \lambda$ *est une valeur propre de multiplicité finie et isolée dans le spectre.*

Définition 2.10.17 (Spectre discret). *[6] On appelle spectre discret de T et on note $\sigma_{disc}(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T de multiplicité finie et isolées dans le spectre. D'après ce qui précède, on a :*

$$\sigma_{ess}(T) \cup \sigma_{disc}(T) = \sigma(T) \quad et \quad \sigma_{ess}(T) \cap \sigma_{disc}(T) = \emptyset.$$

2.10.7 Spectre d'un opérateur symétrique

Définition 2.10.18. *[8] Soit T un opérateur symétrique et $\lambda \in \mathbb{C} : Im\lambda \neq 0$. On note*

$$\mathcal{R}(T - \lambda I) = \mathcal{R}_\lambda$$

et

$$\mathcal{R}\left(T - \overline{\lambda} I\right) = \mathcal{R}_{\overline{\lambda}}$$

$\mathcal{R}_\lambda$ et $\mathcal{R}_{\overline{\lambda}}$ sont deux sous-espaces de $\mathcal{H}$.

On note par $\aleph_\lambda = \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}_\lambda$, $\aleph_{\overline{\lambda}} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}_{\overline{\lambda}}$ les compléments orthogonaux de $\mathcal{R}_\lambda$ et $\mathcal{R}_{\overline{\lambda}}$, ces derniers sont appelés les espaces de défaut de l'opérateur T.

Proposition 2.10.3. *[8] Les espaces de défaut $\aleph_\lambda$ et $\aleph_{\overline{\lambda}}$ sont les espaces de solutions de l'opérateur T^* associés aux valeurs propres $\overline{\lambda}$ et λ respectivement.*

Démonstration. Si $x \in \aleph_\lambda$ alors pour chaque vecteur $y \in D(T)$, on a :

$$\langle Ty - \lambda y, x \rangle = 0,$$

donc :

$$\langle Ty, x \rangle = \langle y, T^* x \rangle,$$

alors,

$$\langle y, T^* x \rangle = \left\langle y, \overline{\lambda} x \right\rangle.$$

Et par la définition de l'opérateur T^*,

$$x \in D(T^*) \quad et \quad T^* x = \overline{\lambda} x.$$

Si, inversement, l'équation $T^* x = \overline{\lambda} x$ est vérifie, alors pour un $y \in D(T)$ arbitraire on a :

$$\langle y, T^* x \rangle = \left\langle y, \overline{\lambda} x \right\rangle,$$

alors,

$$\langle Ty, x \rangle = \left\langle y, \overline{\lambda} x \right\rangle,$$

donc :

$$\langle Ty - \lambda y, x \rangle = 0 \quad \text{i.e. } x \in \aleph_\lambda.$$

□

2.10.8 Propriétés spectrales des opérateurs linéaires bornés

Théorème 2.10.4 (Neumann Series). *[20] Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\|A\| < 1$, alors l'opérateur $(I - A)$ est inversible en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, avec*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

et avec $\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq (I - \|A\|)^{-1}$. La série converge vers la norme uniforme de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Notation. *On a utilisé l'identité $A^0 = I$.*

Proposition 2.10.4. *[11] Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, plus précisément :*

$$\rho(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|\}.$$

Démonstration.

1) Si $\rho(A) = \emptyset$, alors $\rho(A)$ est un ouvert.

2) Si $\rho(A) \neq \emptyset$, $\exists \lambda_0 \in \rho(A)$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$$(\lambda I - A) = (\lambda_0 I - A)\left[I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - A)^{-1}\right].$$

On a :

$$\left\|(\lambda_0 I - \lambda)(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\| = |\lambda_0 - \lambda| \cdot \left\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\|.$$

On doit choisir λ telle que :

$$|\lambda_0 - \lambda| \cdot \left\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\| < 1.$$

Ce qui équivaut à :

$$|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\left\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\|} \Leftrightarrow \lambda \in B\left(\lambda_0, \frac{1}{\left\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\|}\right).$$

Si $\lambda \in B\left(\lambda_0, \frac{1}{\left\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\|}\right)$, alors,

$$|\lambda_0 - \lambda| \cdot \left\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\| < 1,$$

selon le théorème 2.10.4, $(\lambda I - A)$ est inversible par conséquent $\lambda \in \rho(A)$.

On a pu trouvé une boule qui contient λ :

$$\lambda \in B\left(\lambda_0, \frac{1}{\left\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\|}\right) \subset \rho(A).$$

Ainsi $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

3) Montrons maintenant que : $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|\}$. On a :

$$\begin{aligned} \|A\| < |\lambda| \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1, \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.10.4 : $\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)$ est inversible, il en est de même pour $(\lambda I - A)$, ainsi $\lambda \in \rho(A)$, ceci montre que : $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A)$. □

Corollaire 2.10.3. *[11] $\sigma(A)$ est un fermé dans $\mathbb{C}$, plus précisément :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Démonstration. Puisque $\rho(A)$ est un ouvert alors son complémentaire (qui est $\sigma(A)$) est un fermé. □

2.10.9 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

Proposition 2.10.5. *[4]*

1. *Les valeurs propres d'un opérateur linéaire borné auto-adjoint sont réelles.*

2. Les vecteurs propres associés aux différentes valeurs propres sont orthogonaux.

3. Le spectre résiduel d'un opérateur auto-adjoint borné T est vide.

Démonstration.

1. Si $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est auto-adjoint, et $Tx = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors :

$$\lambda \langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda} \langle x, x\rangle$$

D'où :

$$\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Soient λ et μ deux valeurs propres de T, T étant auto-adjoint, λ et μ sont réelles et soient x et y deux vecteurs propres associés respectivement à λ et μ. On a :

$$\lambda \langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu \langle x, y\rangle \quad \forall x, y,$$

et comme $\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$, ainsi : $x \perp y$.

3. Supposons que λ appartient au spectre résiduel de T. On sait déjà que dans ce cas,

$$\lambda \notin \sigma_p(T) \quad \text{et} \quad \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*) = \sigma_p(T).$$

On peut déjà affirmer d'après le point 1 que λ est une valeur réelle, ce qui conduit à la contradiction suivante :

$$\lambda \notin \sigma_p(T) \quad \text{et} \quad \lambda \in \sigma_p(T).$$

□

2.10.10 Propriétés spectrales des opérateurs symétriques

Définition 2.10.19. *[19] Une famille spectrale sur $\mathcal{H}$ est une fonction $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, que nous notons $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. E_λ est une projection pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;

2. Si $\lambda < \mu$, alors $E_\lambda \leq E_\mu$;

3. La famille $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est fortement continue à gauche, c'est-à-dire. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\lim_{\lambda \nearrow \mu} E_\lambda x = E_\mu;$$

4. *Il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $E_\lambda = 0$ pour tout $\lambda < m$ et $E_\lambda = I$ pour tout $\lambda > M$.*

Si pour une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, deux réels m, $M \in \mathbb{R}$ satisfont la propriété 3., *nous disons que m et M sont des bornes pour $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$.*

Théorème 2.10.5. *[19] Soit S un opérateur borné et symétrique. Il existe une unique famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *La borne inférieure m et la borne supérieure M de S sont des bornes pour $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$;*
2. *Tout opérateur borné qui commute avec S commute avec E_λ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;*
3. *Pour tout $x \in \mathcal{H}$ la limite suivante existe :*

$$E_{\mu+0}x = \lim_{\lambda\searrow\mu} E_\lambda x;$$

4. *L'opérateur S est donné par :*

$$S = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda.$$

La famille $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est appelée la famille spectrale de S.

Conclusion

Dans cette section, nous avons introduit les concepts d'opérateurs, énoncé et prouvé les résultats nécessaires pour le spectre d'opérateurs dans l'espace de Hilbert.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE FOURIER DE SÉPARATION DES VARIABLES

Dans ce chapitre, on applique la méthode de Fourier pour résoudre les équations de la forme :

$$B_t^* u = A_x^* u. \tag{3.0.1}$$

Où A_x, B_t sont des opérateurs différentiels linéaires respectivement dans les espaces de Hilbert, $\mathcal{L}^2(G_x)\,(G_x \subset \mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{L}^2(G_t)\,(G_t \subset \mathbb{R}^m)$.

Pour appliquer la méthode de Fourier on suppose que le spectre de A_x est discret $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ et B_t est un opérateur symétrique régulier avec les indices de défaut [1] $(p, p)(p < \infty)$. Dans ce cas l'opérateur B_t^* adjoint de B_t a comme valeur propre $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, la fonction propre Ψ_k associée à λ qui est un élément du sous-espace de défaut $\aleph_{\overline{\lambda}}$ de B_t, $\Psi_\lambda \in \aleph_{\overline{\lambda}}$. On pose $\Psi_k = \psi_{\lambda_k}$, la solution de l'équation homogène (3.0.1) est présentée par une série de termes

$$u_k(t, x) = a_k \psi_k(t) \varphi_k(x).$$

Où φ_k est la fonction propre de A_x associée à λ_k.

3.1 Série de Fourier

Définition 3.1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. Soient $a_n(f)$ et $b_n(f)$ ses coefficients de Fourier.*

1. On pose : $p = \dim \aleph_i$, $q = \dim \aleph_{-i}$, p,q sont appelés les indices de défaut de l'opérateur.

La sérier de Fourier de f est la série de fonctions :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n\geq 1} \left(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\right), \\ &= a_0 + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\right). \end{aligned}$$

Exemple 3.1.1.

$$\begin{aligned} a_0(f) &= 0, \\ a_n(f) &= 0, \quad \forall n \geq 1, \\ b_n(f) &= \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Exemple 3.1.2.

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{\pi}{2}, \\ a_n(f) &= \left((-1)^n - 1\right)\frac{2}{n^2\pi}, \\ b_n(f) &= 0. \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est :

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} \left((-1)^n - 1\right)\frac{2}{n^2\pi}\cos nx, \\ = \;&\frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 0} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)x. \end{aligned}$$

3.1.1 Coefficients de Fourier

Définition 3.1.2. *On a deux types des coefficients :*
Coefficients réels de f : $a_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad n \geq 0, \quad b_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt, \quad n > 0.$
Coefficients complexes de f : $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$

Remarque 3.1.1.

- *Comme les fonctions sont 2π-périodiques, on peut calculer les intégrales sur n'importe quel intervalle de longueur 2π.*
- *On écrit souvent a_n et b_n au lieu de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ s'il n'y a pas de confusion entre plusieurs fonctions.*
- *On utilise plutôt a_n et b_n si f à des valeurs réelles et c_n pour f à des valeurs complexes.*

Définition 3.1.3 (Coefficients de Fourier trigonométriques). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique et continue par morceaux. Les coefficients de Fourier trigonométrique de f sont :*

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx, \\ a_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx, \quad \forall n \geq 1, \\ b_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Remarque 3.1.2.

1) Si f est pair alors, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

2) Si f est impair alors, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux.*

i) Si f est pair alors ses coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls.

ii) Si f est impair alors ses coefficients $a_n(f)$ sont tous nuls.

Exemple 3.1.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique définie par :*
$f(x) = x$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xdx, \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

$\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = 0. \end{aligned}$$

$\forall n \geq 1,$

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx. \end{aligned}$$

Intégration par partie :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-x}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx\right), \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{-\pi}{n}\cos(nx) + \frac{(-\pi)}{n}\cos(-nx)\right) + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}\right), \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}\right)(-1)^n 2, \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Exemple 3.1.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \in [-\pi, 0], \\ x & si \quad x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx\right), \\ a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} xdx + \int_0^{\pi} xdx\right), \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}\right), \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}\right), \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$\forall n \geq 1,$

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx. \end{aligned}$$

Intégration par partie :

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right),\\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{-1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi},\\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(\frac{-1}{n}\cos(n\pi)+\frac{1}{n}\right),\\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{n}\right),\\
&= \left((-1)^{n+1}-1\right)\frac{2}{n^2\pi} = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est pair,}\\ \dfrac{-4}{n^2\pi} & \textit{si } n \textit{ est impair.}\end{cases}
\end{aligned}$$

$\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx,\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\\
&= 0.
\end{aligned}$$

3.2 Opérateur différentiel

Définition 3.2.1. *Une EDP est dite homogène si chaque terme de l'équation contient la fonction inconnue et ses dérivées partielles.*

A toute EDP on peut associée un opérateur différentiel que l'on notera par L, et l'équation $F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots\right) = 0$ sera écrit sous forme équivalente :

1. *$L(u) = 0$, où L est l'opérateur différentiel,*
2. *$L : u \longrightarrow L(u) = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots\right)$ et l'équation sera linéaire si l'opérateur L est linéaire.*

Exemple 3.2.1. *Soit l'équation :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{3.2.1}$$

L'opérateur L défini par :

$$L : u \longrightarrow L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $u, v \in \mathbb{R}^n$*, alors :*

$$\begin{aligned} L(\alpha u+\beta v) &= \frac{\partial^2(\alpha u+\beta v)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2(\alpha u+\beta v)}{\partial y^2}, \\ &= \left(\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\beta v)}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\beta v)}{\partial y^2}\right), \\ &= \left(\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\left(\beta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \\ &= \alpha L(u)+\beta L(v). \end{aligned}$$

Donc l'équation (3.2.1) *est linéaire.*

3.3 Généralités sur la méthode de séparation des variables

On considère un terme source nul et des conditions aux limites (Neumann ou Dirichlet) nulles. On suppose que l'inconnu u dépend de deux variables t et x avec $t \in [0, T]$ et $x \in \Omega$ (Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$).

Les étapes suivantes sont nécessaires :

1. On pose $u(t, x) = T(t)X(x)$ et on porte cela dans l'équation. On doit obtenir deux équations à variables séparées en opérant une division formelle de l'équation par

$$u(t, x) = T(t)X(x).$$

   Il apparait de plus un paramètre réel que l'on note λ.

2. On résout l'équation en $X(x)$ avec les conditions aux limites correspondantes. Il faut alors obtenir une suite infinie de couples de solutions λ_n, $X_n(x)$ dites valeurs et fonctions propres de problème.

3. Il faut trouver un produit scalaire qui orthogonalise la suite des $X_n(x)$.

4. On résout l'équation en $T(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées. Ce qui donne une suite de solution $T_n(t)$, chaque $T_n(t)$ étant défini à un certain nombre de constante prés (qui dépend de l'ordre de l'équation en $T_n(t)$).

5. On écrit la solution générale de l'équation sous la forme

$$u(t, x) = \sum_n T_n(t)X_n(x),$$

   et on applique les conditions initiales pour déterminer les coefficients présents dans $T_n(t)$.

3.4 Méthode de Fourier de séparation des variables

$$B_t^* u = A_x^* u.$$

Soient $G_t \subset \mathbb{R}^m$ et $G_x \subset \mathbb{R}^n$ deux domaines des variables t et x respectivement, $G = G_t \times G_x$. B_t, A_x deux opérateurs linéaires en général non bornés dans les espaces $\mathcal{L}^2(G_t)$ et $\mathcal{L}^2(G_x)$, définis respectivement sur $D(B_t) \subset \mathcal{L}^2(G_t)$ et $D(A_x) \subset \mathcal{L}^2(G_x)$, $u = u(t,x)$ une fonction définie sur G. Si pour tout t fixé $u(t,\cdot) \in D(A_x)$, et pour tout x fixé $u(\cdot,x) \in D(B_t)$ alors $A_x u$ et $B_t u$ désignent les images de u par les opérateurs A_x et B_t respectivement.

Soit g une fonctionnelle linéaire continue dans les espaces $\mathcal{C}\left(\overline{G_t}\right)$ des fonctions continues sur le domaine G_t y compris sa frontière, on désigne par $\langle g, \varphi \rangle_t$ l'image de $\varphi \in \mathcal{C}\left(\overline{G_t}\right)$ par g.
Si g a un sens en $u(t,x)$ pour presque tout $x \in G_x$, alors $\langle g, u \rangle_t$ est l'image de u par g.

Exemple 3.4.1. *Si $u(t,x)$ est continue en $t = (0, \ldots, 0)$ quelque soit $x \in G_x$ et δ est la fonction de Dirac, alors :*

$$\langle \delta, u \rangle_t = u(0,x).$$

3.4.1 Position de problème

Soient $A_x \in M_\rho$, $B_t \in M$. $g_1, g_2, \ldots, g_k$ des fonctionnelles linéaires qui ont un sens sur des fonctions de $D(B_t^*)$, $h_1, h_2, \ldots, h_p$ des fonctionnelles linéaires continues sur $D(A_x^*)$, A_x^0 l'extension auto-adjointe de A_x. On suppose de plus que $S_p(A_x^0) \subset \rho(B_t)$. Posons le problème : trouver une solution $u(t,x)$ de l'équation :

$$B_t^* u = A_x^* u. \tag{3.4.1}$$

Satisfaisant les conditions suivantes :

$$u(\cdot,x) \in D(B_t^*), \quad u(t,\cdot) \in D(A_x^0). \tag{3.4.2}$$

$$\langle g_i, u \rangle_t = \Phi_i(x), \quad i = 1,2,\ldots,k. \quad \langle h_j, u \rangle_x = \alpha_j(t), \quad j = 1,2,\ldots,p. \tag{3.4.3}$$

Les fonctions $\Phi_i(x) \in \mathcal{L}^2(G_x)$ et $\alpha_j(t) \in \mathcal{L}^2(G_t)$ sont données. Les conditions (3.4.2) et (3.4.3) sont données pour chaque problème et assurent dans la plupart des cas, l'unicité de la solution du problème posé.

3.4.2 Schéma de solution

On cherche la solution du problème (3.4.1) sous la forme $u(t,x) = T(t)X(x)$. On a :

$$\frac{B_t^* T_t}{T_t} = \frac{A_x^* X_x}{X_x} = \lambda.$$

Comme A_x est symétrique et régulier, son extension auto-adjointe A_x^0 possédé un spectre discret. On désigne par : $X_k(x) = \varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Les fonctions propres de A_x^0 et λ_k ses valeurs propres :

$$A_x^0 \varphi_x = \lambda_k \varphi_x, \quad \varphi_x \in D\left(A_x^0\right).$$

En tenant compte que $S_p\left(A_x^0\right) \subset \rho\left(B_t\right)$ et (3.4.1), on a quelque soit $\lambda \in \rho\left(B_t\right)$,

$$B_t^* \Psi_\lambda(t) = \lambda \Psi_\lambda(t), \quad \text{où } \Psi_\lambda(t) \in \chi_\lambda B(t).$$

En particulier,

$$B_t^* \Psi_k(t) = \lambda_k \Psi_k(t), \quad \text{où } \Psi_k(t) = \psi_{\lambda_k}(t), k = 1, 2, \ldots,$$

les fonctions $u_k(t,x) = \Psi_k(t)\varphi_k(x)$ satisfont (3.4.2) et (3.4.3). Posons :

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(t) \varphi_k(x). \tag{3.4.4}$$

La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est telle que les conditions (3.4.2) et (3.4.3) soient satisfaites. Pour que $u(t,\cdot) \in D\left(A_x^0\right)$ pour presque tout $t \in G_t$, il faut et il suffit que la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k \psi_k(t)\right|^2,$$

soit convergente pour presque tout $t \in G_t$.

Pour que $u(\cdot,x) \in D\left(B_t^*\right)$ pour presque tout $x \in G_x$, la condition analogue n'a pas lieu car la suite $\left(\Psi_k\left(t\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas en général orthonormée. La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ peut-être définie par la condition (3.4.3). Par exemple on donne :

$$\langle g, u\rangle_t = \Phi(x), \quad g \in \mathcal{L}^2\left(G_x\right).$$

Alors,

$$\langle g, u\rangle_t = (g, u) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (g, \psi_k) \varphi_k(x) = \Phi(x).$$

D'où :

$$(\Phi, \varphi) = a_k (g, \psi_k).$$

Exemple 3.4.2. *Dans l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(]0,1[)$ on considère l'opérateur A_x défini pour tout $f \in \mathcal{L}^2(]0,1[)$ par :*

$$A_x f(x) = -\pi i \int_0^1 \|x-y\| \, f(y)dy.$$

L'opérateur A_x est de Hilbert-Schmidt[2]*, il a un système complet $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ des fonctions propres correspondantes aux valeurs propres $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$:*

$$A_x\varphi_k = \lambda_k\varphi_k.$$

Dans l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on considère l'opérateur différentiel B_t, tel que $B_t f = \dfrac{1}{2\pi i} f'$ défini sur l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{L}^2(]0,1[)$ absolument continues sur $\mathbb{R}$ telle que $f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $f(a) = 0$, où $a < 0$ est un point quelconque fixé. L'opérateur B_t est symétrique avec les indices de défaut $(1,1)$, un élément ψ_λ appartenant a son sous-espace de défaut $\aleph_{\overline{\lambda}}$ est

$$\psi_\lambda(t) = \mathbb{1}_{\varepsilon(\lambda)}(t-a)e^{2\pi i(t-a)}, \quad Im\lambda \neq 0.$$

Où

$$\mathbb{1}_{\varepsilon(\lambda)}(t) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t) = \mathbb{1}_+(t),$$

est la fonction indicatrice de l'ensemble $(0,\infty)$ si $Im\lambda > 0$, et $\mathbb{1}_{\varepsilon(\lambda)}(t) = \mathbb{1}_-(t)$ si $Im\lambda < 0$. L'opérateur B_t^* conjugué de B_t est défini sur l'ensemble $D(B_t^*)$ des fonctions f absolument continues sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et telle que $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
On pose le problème : Trouver une solution u de l'équation :

$$B_t^* u = A_x u. \tag{3.4.5}$$

Satisfaisant les conditions :

$$u(\cdot,x) \in D(B_t^*), \quad u(t,\cdot) \in \mathcal{L}^2(0,1). \tag{3.4.6}$$

Et encore :

$$\langle g,u\rangle_t = \varphi(t), \quad \varphi \in \mathcal{L}^2(0,1), \quad g(t) = t, \tag{3.4.7}$$

$$\langle \delta,u\rangle_t = u(0,x) = \varphi(x). \tag{3.4.8}$$

2. En mathématiques, un opérateur de Hilbert–Schmidt, nommé d'après David Hilbert et Erhard Schmidt, est un opérateur borné $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ qui agit sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et a une norme de Hilbert–Schmidt finie.

$$\|A\|^2_{\mathcal{HS}} := \sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Où $\{e_i; i \in I\}$ est une base orthonormée.

Le problème précédent a une solution unique $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, [0,1])$ définie par la série :

$$u(t,x) = \mathbb{1}_+(t-a)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_k)}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(k-\frac{1}{2}\right)^2 a} \exp\left(-\frac{4(t-a)}{(2k-1)^2}\right)\cos((2k-1)\pi x). \quad (3.4.9)$$

Si la série de termes (φ, φ_k) converge absolument, alors le problème (3.4.5), (3.4.6) et (3.4.8) possède une solution unique $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ donnée par :

$$u(t,x) = \mathbb{1}_+(t-a)\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k) \exp\left(-\frac{4t}{(2k-1)^2}\right)\cos((2k-1)\pi x). \quad (3.4.10)$$

Les séries (3.4.9), (3.4.10) convergent uniformément sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Remarque 3.4.1. *1. Si l'opérateur $B_t = B_t^*$ le problème* (3.4.5),(3.4.6) *n'a pas de solution car les valeurs de A_x sont non réelles.*

2. On considère le (3.4.5), (3.4.6) *et* (3.4.7) *dans lequel l'opérateur B_t est défini sur l'ensemble $D(B_t)$ des fonctions $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ telles que f' est absolument continue et $f(0) = 0$, $f'' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ par l'égalité :*

$$B_t f = -(2\pi i)^{-2} f''.$$

L'opérateur B_t est symétrique avec les indices de défaut $(1,1)$, son sous-espace de défaut $\aleph_{\overline{\lambda}}$ est engendré par la fonction :

$$\psi_\lambda(t) = \exp\left(2\pi i\sqrt{\lambda}\,|t|\right), \quad Im\lambda > 0, Im\sqrt{\lambda} > 0.$$

On pose :

$$\psi_k(t) = \exp\left(-\frac{2}{2k-1}\,|t|\right)\left(\cos\frac{2}{2k-1}t + \sin\frac{2}{2k-1}\,|t|\right).$$

La solution de (3.4.5) *est :*

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left(-\frac{2}{2k-1}\,|t|\right)\left(\cos\frac{2}{2k-1}t + i\sin\frac{2}{2k-1}\,|t|\right)\sin\pi(2k-1)x.$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité la série de Fourier, ses coefficients et sa méthode de séparation des variables en utilisons les opérateurs différentiels, pour la résolution des équations de la forme :

$$B_t^* u = A_x^* u.$$

CONCLUSION

Au terme de ce mémoire, nous avons abordé l'importance de la méthode de Fourier de séparation des variables pour l'étude et la résolution des équations de la forme :

$$B_t^* u = A_x^* u.$$

Nous avons présenté certains espaces fonctionnels, avec leurs différentes structures et propriétés, dont la plus importante l'espace de Banach, l'espace des opérateurs linéaires bornés et l'espace de Hilbert.

On a traité les caractérisations fondamentales des opérateurs sur l'espace de Hilbert et nous avons soumis les propriétés spectrales des opérateurs linéaires bornés, auto-adjoints et symétriques.

Nous concluons en rappelant notre application de la méthode de Fourier aux équations opérationnelles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abdelhaq El JAI. Eléments de topologie et espaces métriques. Presses Universitaires de Perpignan, 2007. https://hal.science/hal-01267268

[2] BASTI. B, Cours d'espaces véctoriels normés, Faculté des sciences exactes et informatique, Université Ziane Achour de Djelfa, (2021/2022).

[3] BASTI. B, Cours Introduction à la Théorie des Opérateurs Linéaires, Faculté des sciences exactes et informatique, Université Ziane Achour de Djelfa, (2019/2020).

[4] BENDOUKHA. B, (THEORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS DANS LES ESPACES DE HILBERT).

[5] BOCCARA, NINO. Functional Analysis : An Introduction for Physicists. Elsevier, 1990.

[6] BONNET-BENDHIA, Anne-Sophie et JOLY, Patrick. Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints et application à l'étude des ondes guidées. Université Pierre et Marie Curie, Centre national de la recherche scientifique, 1995.

[7] BREZIS, H. (1987). Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, 1992.

[8] DOUBABA FOUZIA & TAHRI HOURIA. Spectre des extensions autoadjointes d'un opérateur symétrique. Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, 2016.

[9] Hassan, Nawfal El Hage. Topologie générale et espaces normés-2e éd. : Cours et exercices corrigés. Dunod, 2021.

[10] Hengartner. W, M. Lambert, C. Reischer. Introduction à L'analyse Fonctionnelle, 1981.

[11] HUNTER, John K. et NACHTERGAELE, Bruno. Analyse appliquée . Société d'édition scientifique mondiale, 2001.

[12] Imane, LAMRI, and SALHI Amira. "Opérateurs linéaires continus sur les espaces de Hilbert, Théorie et applications."(2022).

[13] Jean-Yves CHEMIN. BASES D'ANALYSE FONCTIONNELLE, 17 décembre 2017.

[14] MAIFI, Khedidja et SELLAT, Ouafa. Spectre d'un opérateur. 2016. Thèse de doctorat. Universite laarbi tebessi tebessa.

[15] MAINGOT, S., & MANCEAU, D. Théorie spectrale. Université de Harve, (2011).

[16] MATOS, J. (2014). Analyse Fonctionnelle.

[17] NIER Francis et IFTIMIE Dragos. Introduction à la topologie. Licence de Mathématiques, Université de Rennes, 2000, vol. 1.

[18] P AUBIN. J, Analyse Fonctionnelle appliquée, Tome 2, presses universitaire de France, 1987.

[19] PEQUIGNOT, Yann. Théorie spectrale. Boris Buffoni François Genoud. Section de Mathématiques, Projet de semestre, Automne 2008.

[20] Richard, S. Operator theory on Hilbert spaces, (2019).

[21] Said BELOUL. Introduction à la théorie des opérateurs Cours et Exercices. Université Hamma Lakhdar El-Oued Faculté des Sciences Exactes Département de Mathématiques, 2019-2020.

[22] Stefan NEUWIRTH, Théories spectral, 2013.

[23] TOUALA, Salah Eddine. sur le dual d'un idéal d'opérateurs linéaires. Thèse de doctorat. Faculté des Mathématiques et de l'Informatique-UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA. 2017. http://dspace.univ-msila.dz:8080//xmlui/handle/123456789/1869

[24] http://staff.univ-batna2.dz/sites/default/files/hamchi-ilham/files/introduction_theorie_operateurs_cours_exercices_et_examens_resolus.pdf

[25] https://shirikyan.u-cergy.fr/m2cours2.pdf