RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle et application »

Présenté Par :
Abdelaziz Boussaid et Abdelnour Djemli

Sous L'intitulé :

Sur la stabilité et contrôle de certains systèmes non linéaire

Soutenu publiquement le 21/ 06/ 2023

à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. Kheireddine Benia	M.C.B	Université Tiaret	Président
Mme. Hizia Khelifa	M.C.B	Université Tiaret	Encadreur
Mr. Abderrahman Ouardani	M.C.B	Université Tiaret	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciements

Tout d'abord, nous souhaitons exprimer notre gratitude envers **ALLAH**, qui nous a accordé la force, la sagesse et la détermination pour mener à bien ce mémoire. Sa guidance et sa bienveillance ont été des éléments essentiels tout au long de notre parcours académique.

Notre **famille** occupe une place primordiale dans nos vie, et nous tenons à leur exprimer notre reconnaissance profonde. Leur amour inconditionnel, leur soutien indéfectible et leurs encouragements constants ont été nos sources d'inspiration. Leurs sacrifices et leur présence ont joué un rôle clé dans la réalisation de ce mémoire. Nos **amis fidèles** ont été une sources de soutien et de motivation tout au long de cette aventure académique.

Notre enseignante **Hizia Khelifa** qui a encadré notre mémoire, elle mérite une reconnaissance particulière pour son rôle essentiel dans la réalisation de ce travail de recherche. Sa confiance en nos capacité, ses conseils précieux, son expertise et sa disponibilité ont été d'une valeur inestimable.

Nous adressons également nos remerciements à tout messieurs les membres de jury Mr **Kheireddine Benia** et Mr **Abderrahman Ouardani** pour le temps qu'il ont consacré pour apprécier ce travail. Tous nos enseignant du département de mathématique, ont aussi le métrite d'être remerciés pour leurs précieux aides et engagements pour nous donner les bases des sciences mathématique.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude envers nos **enseignants**, dont la passion pour l'enseignement, l'expertise dans leur domaine. Leurs remarques, leurs orientations et leur soutien pédagogique. Nous souhaitons remercier nos **collègues**, avec qui nous avons partagé des moments de travail collaboratif, d'échanges fructueux et de soutien mutuel.

Table des matières

Table des figures

Résumé :

Ce mémoire est dédié à l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires non autonomes qui peut être évaluée à l'aide de la stabilité au sens de Lyapunov, qui se concentre sur la convergence vers un point d'équilibre stable, basée sur l'analyse des fonctions de Lyapunov, et de la stabilité pratique, qui se penche sur la capacité du système à revenir à son état d'équilibre après avoir des perturbations. L'analyse de la stabilité de ces systèmes fait appel à des méthodes mathématiques avancées et permet de concevoir des stratégies de contrôle adaptées pour maintenir la stabilité dans des conditions réelles.

Notations

$\mathbb{R}$	:	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	l'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^n$	:	$\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
$\overline{\mathbb{R}}$	:	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
$\|.\|$	:	Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
D	:	Un domaine de $\mathbb{R}^n$ contenant 0.
α	:	Une fonction de classe $\mathcal{K}$.
β	:	Une fonction de classe $\mathcal{KL}$.
ϑ	:	Un voisinage non vide de 0.
$\dot{V}$	:	$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x)f(t,x)$ la dérivée de $V(t,x)$.
$\mathbb{PC}$	:	L'ensemble des fonctions continues par morceaux.
J	:	$= [0,\infty)$.
R	:	La région d'attraction de $\mathcal{B}_r$.
$\Omega_{t,c}$	:	L'ensemble qui dépend du temps.
$\mathcal{B}_r$	:	$= \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\}$ boule bornée.
$\pi(t)$	:	Une fonction scalaire.

Abréviation

(UAS)	:	Uniformément asymptotiquement stable.
(UES)	:	Uniformément exponentiellement stable.
(GES)	:	Globalement exponentiellement stable.
$(GPUS)$	:	Globalement pratiquement uniformément stable.
$(GUES)$	:	Globalement uniformément exponentiellement stable.
$(GUES)$	:	Globalement uniformément exponentiellement stable.
$(GPUAS)$	:	Globalement pratiquement uniformément asymptotiquement stable.
$(GUPES)$	:	Globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable.
(LTV)	:	Système linéaire variant dans le temps.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un système dynamique est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. Sa modélisation vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter rigoureusement son comportement dans un domaine de fonctionnement donné. Elle nécessite dans cet objectif, un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudié. Dans le même sens, on peut dire que la modélisation théorique exige une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Et par conséquent, elle conditionne les méthodes qui seront utilisées par la suite, pour analyser ses propriétés.

La majorité des systèmes physiques non-linéaires peuvent être représentés comme une interconnexion d'un système dynamique linéaire et d'un autre non-linéaire. Le problème de la stabilité absolue consiste à trouver des conditions suffisantes qui portent sur le système linéaire pour que l'origine soit globalement uniformément asymptotiquement stable (ou GUAS) pour une classe de non-linéarités bien déterminée. Ce problème a été posé pour la première fois par Lur'e [20] en 1944. Actuellement, les systèmes dynamiques non linéaires décrivent un grand nombre de phénomènes scientifiques : physique, chimie, biologie, médecine, économie et autres. Au-delà du problème de représentation il n'existe pas d'outils pour étudier les systèmes dynamiques non linéaires. Il est établi aujourd'hui que beaucoup de systèmes non linéaires peuvent être décrits dans l'espace d'état par des équations différentielles non linéaires. C'est ce type d'outil mathématique qui est utilisé par les automaticiens pour traiter les problèmes liés à ces systèmes[27].

Le thème général de ce mémoire s'inscrit dans le cadre des systèmes non linéaires non autonomes. L'objectif consiste à résoudre certains problèmes qui sont d'importance majeure dans la théorie du contrôle. Ces problèmes sont liés à la stabilité de certains systèmes non linéaires. Ce sujet a attiré l'attention de nombreux chercheurs [2, 6, 7, 8, 23, 24].

Ce mémoire divisé en deux parties, dans le premier chapitre, nous commençons par donner des définitions, ainsi que quelques résultats sur le problème d'analyse de la stabilité pour le système

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

où $t \geq t_0 \geq 0$, $x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue en t et localement Lipschitzienne en x.

Pour ce type du système, on donne des conditions suffisantes pour garantir la stabilité on se référera souvent à la théorie de Lyapunov [19, 22, 32], cette théorie étudie comment les systèmes dynamiques évoluent au fil du temps. Elle utilise des fonctions de Lyapunov pour évaluer la stabilité des systèmes en fonction de leurs conditions initiales. Cette théorie trouve des applications dans de nombreux domaines et est utilisée pour analyser la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires. Elle est développée par le mathématicien russe Alexandre Lyapunov au 19ème siècle [1], et après on étudie le cas inverse.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les systèmes non linéaires non autonomes perturbés de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)), \tag{2}$$

dont l'origine peut ne pas être un point d'équilibre et que les fonctions f et g sont en général continues et localement Lipschitziennes en x. Le terme de perturbation représente les erreurs de modélisation. L'objectif de cette partie est d'assurer la stabilité pratique uniforme globale de cette classe des systèmes. Plus précisément, si on suppose que le système nominal est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable (ou encore GUPES), alors on se demandera si le système perturbé gardera le même comportement.

1. Aleksandr Mikhaïlovich Lyapunov, mathématicien et physicien russe. Après des études à l'université de Saint-Pétersbourg (où il est élève de P.L. Chebyshev), il est assistant puis professeur à l'université de Kharkov. En 1902, il est nommé professeur à l'université de Saint-Pétersbourg.

Le problème de la stabilité pratique des systèmes non linéaires est étudié par plusieurs auteurs notamment dans [10, 15, 28]. Reposant sur les techniques de Lyapunov, la stabilité pratique des systèmes perturbés est basée sur la stabilité du système nominal au quel on impose quelques hypothèses sur le terme de perturbation [1, 17, 30]. Et aussi, les systèmes perturbés avec paramètre ε de la forme

$$\dot{x}(t) = f^{\varepsilon}(t, x(t)) + g(t, x(t)). \tag{3}$$

L'objectif de cette partie est d'assurer la stabilité de cette classe de systèmes, qui se trouve dans [3].

Chapitre 1

Rappels et Généralités

Le concept de stabilité est une question centrale dans la théorie du contrôle. Souvent associée à la façon dont un système est compris, la stabilité a de larges définition [16]. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur quelques concepts spécifiques. La stabilité, en particulier, nous citons la stabilité au sens de Lyapunov.

1.1 Notations fondamentales de la stabilité

On considère un système non linéaire non autonome de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où $t \geq t_0 \geq 0$, $x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue en t et localement Lipschitzienne en x. On donne des conditions pour l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1.1.1).

Théorème 1.1.1 (***Existence et unicité***) [14].
On suppose que $f(t, x(t))$ est une fonction continue en t, et localement Lipschitzienne autour de x, il existe $L > 0$, tel que :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

$\forall\, x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n / \parallel x - x_0 \parallel \leq r\}, \forall\, t \in [t_0, t_1]$. *Alors, il existe* $\delta > 0$, *tel que le système* (1.1.1) *avec* $x(t_0) = x_0$ *admet une unique solution sur* $[t_0, t_0 + \delta]$.

Définition 1.1.1 (***Point d'équilibre***) [27].

On dit que $x^* \in \mathbb{R}^n$ *est un point d'équilibre du système* (1.1.1) *si :*

$$f(t, x^*) = 0, \quad t \geq 0.$$

Remarque 1.1.1 *Sans perte de généralité. On peut supposer dans tout le reste que l'origine est un point d'équilibre du système* (1.1.1).

En effet, si x^* *est un point d'équilibre, on pose* $y = x - x^*$ *alors,* $y^* = x^* \Longrightarrow f(t, x) = f(t, y + x^*) = g(y)$.

$g(0) = f(t, x^*) = 0$ *alors,* 0 *est un point d'équilibre.*

Pour simplifier, on peut supposer dans tout le reste que l'origine est le point d'équilibre de (1.1.1). *La solution passant par l'emplacement* x_0 *au temps* $t = t_0$ *est également notée* $x(t, t_0, x_0)$ *tel que* $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Définition 1.1.2 (***Stabilité***) [12, 16].

On dit que $x = 0$ *est un point d'équilibre stable, si :* $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t_0 \geq 0$, $\exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$,*tel que*

$$\|x_0\| < \delta \Longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Remarque 1.1.2 *La stabilité du système ne donne pas la convergence des solutions vers l'origine, et cela la notion de la stabilité seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions. On définit alors la notion d'attractivité.*

Définition 1.1.3 (***Attractivité***) [12, 16].

On dit que l'origine $x = 0$ *est :*

- *Un point d'équilibre attractif, s'il existe un voisinage de l'origine $U(0)$, tel que*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t, t_0, x_0) = 0, \quad \forall x_0 \in U(0).$$

- *Un point d'équilibre globalement attractif si :*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t, t_0, x_0) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.1.4 (***Stabilité asymptotique***) [12, 16].

On dit que l'origine $x = 0$ est :

i) *Un point d'équilibre asymptotiquement stable (ou AS), s'il est stable et attractif.*

ii) *Un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, s'il est stable et globalement attractif.*

Définition 1.1.5 (***Bornitude uniforme***)[12].

La solution de (1.1.1) est dite uniformément bornée, s'il existe une constante strictement positive a, telle que $\forall \alpha \in]0, a[$, il existe une fonction $c(.)$ croissante vérifiant :

$$\|x_0\| < \alpha \Longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < c(\alpha), \forall t \geq t_0.$$

Elle est dite globalement uniformément bornée, si la propriété précédente est vraie pour tout $\alpha > 0$.

Définition 1.1.6 (***Stabilité uniforme***)[12].

i) *On dit que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément stable (ou noté US) si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, tel que*

$$\|x_0\| < \delta \Longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

ii) *L'origine est un point d'équilibre globalement uniformément stable (noté GUS), s'il est uniformément stable et toutes les solutions du système (1.1.1) sont globalement uniformément bornée.*

Remarque 1.1.3 *La stabilité uniforme entraine la stabilité , mais la réciproque n'est pas toujours vraie. L'exemple suivant montre que la réciproque est fausse*

Exemple 1.1.1 *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$\dot{x}(t) = (6t\sin(t) - 2t)x$$

où $t \in \mathbb{R}$. *La solution de condition initiale* (t_0, x_0) *est donnée par :*

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0)\exp[\int_{t_0}^{t}(6s \;\; sin\ s - 2s)ds] \\ &= x(t_0)\exp[6\sin t - 6t\cos t - t^2 - 6\sin t_0 + 6t_0\cos t_0 + t_0^2]. \end{aligned}$$

Ensuite, du fait que le terme $-t^2$ *est dominant pour tout* t_0*, on peut lier*

$\exp[6\sin t - 6t\cos t - t^2 - 6\sin t_0 + 6t_0\cos t_0 + t_0^2]$ *par une constante* $c(t_0)$ *qui dépend de* t_0 *;*

$$|x(t)| < |x(t_0)|c(t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Ainsi, pour un $\varepsilon > 0$ *donné, on peut choisir* $\delta = \varepsilon/c(t_0)$ *pour indiquer que l'origine est stable. Maintenant, si nous supposons que* t_0 *prend des valeurs continues* $t_0 = 2n\pi$*,* $n \in N$ *et* $x(t, t_0, x_0)$ *s'évalue en* $t_0 + \pi$*, alors*

$$x(t_0 + \pi, t_0, x_0) = x_0\exp[(4n + 1)(6 - \pi)\pi].$$

Donc, pour un $\varepsilon > 0$ *donné, il n'y a pas de* δ *indépendant de* t_0*, ce qui permet de dire que l'origine* $x = 0$ *est uniformément stable.*

Définition 1.1.7 (***Attractivité uniforme***).

a) *On dit que l'origine* $x = 0$ *est un point d'équilibre uniformément attractif (noté UA), s'il existe un voisinage* $U(0)$ *de l'origine, tel que* $\forall x_0 \in U(0)$*,* $\forall\varepsilon > 0$ $\exists T = T(\varepsilon)$*, tel que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq T + t_0.$$

b) *L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément attractif (noté GUA), si*

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0\ \exists T = T(\varepsilon)$, *tel que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq T + t_0.$$

Définition 1.1.8 (***Stabilité asymptotique uniforme***) [16].

a) *L'origine est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable (noté UAS), s'il est uniformément stable et uniformément attractif.*

b) *L'origine est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable (noté GUAS), s'il globalement uniformément stable et uniformément attractif.*

L'exemple suivant montre que la stabilité est uniforme mais l'attractivité est non uniforme :

Exemple 1.1.2 *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$\dot{x}(t) = -\frac{x}{1+t} \quad , \quad t \geq t_0$$

où $t \in \mathbb{R}$. La solution de condition initiale (t_0, x_0) est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) \quad &= x(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} -\frac{1}{1+s} ds \\ &= x(t_0) \frac{1+t_0}{1+t}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|x(t)| \leq |x(t_0)|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Alors, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta = \varepsilon$ tel que

$$|x(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon, \quad \forall \geq t_0.$$

D'où l'origine est un point d'équilibre uniformément stable.

D'autre part, la fonction $x(t)$ converge vers 0, quand t tend vers ∞, d'une manière non uniforme, donc

$$|x(t)| = \left| x(t_0) \frac{1+t_0}{1+t} \right| < \varepsilon,$$

donc,

$$t > t_0 + \left(\frac{|x(t_0)|}{\varepsilon}(1 + t_0) - 1 - t_0 \right).$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ donné, il n'existe pas de T indépendant de t_0 qui permet de dire que l'origine $x = 0$ est uniformément attractive.

Définition 1.1.9 (***Stabilité exponentielle***)[12].

a) L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable, s'il existe un voisinage de l'origine $U(0)$, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, tels que

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \lambda_1 \|x_0\| e^{\lambda_2 (t-t_0)}, \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall x_0 \in U(0).$$

b) L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable, s'il existe un $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, tels que

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \lambda_1 \|x_0\| e^{\lambda_2 (t-t_0)}, \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.1.4 *Il est important de noter que le caractère exponentiellement stable du système conduit nécessairement à une stabilité asymptotique de ce dernier.*

Pour étudier la stabilité du système, on se réfère souvent à la théorie de Lyapunov. En théorie qualitative, on l'appelle la méthode directe car elle ne nécessite pas de résoudre le système [11].

1.2 Théorie de Lyapunov

L'utilisation des fonctions définies positives est l'une des techniques les plus efficaces pour analyser la stabilité de systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires.

L'utilisation de ces fonctions fournit des critères permettant de tirer des conclusions sur la stabilité ou la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre sans qu'il soit nécessaire d'intégrer le système d'équations. Les résultats remontent au 19ème siècle, attribués à Lyapunov. Pour une démonstration, le lecteur est invité pour consulter [16].

1.2.1 Fonction de comparaison

Définition 1.2.1 (***Fonction de classe*** $\mathcal{K}$)[28].

Une fonction continue $\alpha : [0, a] \to [0, +\infty[$ *appartient à la classe* $\mathcal{K}$ *(ou est une* $\mathcal{K}$*-fonction) si elle est strictement croissante et si* $\alpha(0) = 0$*. Une* $\mathcal{K}$*-fonction appartient à la classe* $\mathcal{K}_\infty$ *si de plus* $a = +\infty$ *et* $\alpha(x) \to +\infty$ *quand* $r \to +\infty$*.*

Exemple 1.2.1 *Donnons deux exemples de fonctions de classe* $\mathcal{K}$ *et de classe* $\mathcal{K}_\infty$ *:*

1. α *définie par* $\alpha(r) = \arctan(r)$ *est strictement croissante car*

$$\alpha'(r) = \frac{1}{1 + r^2} > 0.$$

Ainsi, α *appartient à la classe* $\mathcal{K}$*, mais* α *n'appartient pas à la classe* $\mathcal{K}_\infty$ *car* $\lim\limits_{r \to +\infty} \alpha(r) = \frac{\pi}{2}$*.*

2. *Soit* $c > 0$*,* α *définie par* $\alpha(r) = r^c$ *est strictement croissante car*

$$\alpha'(r) = cr^{c-1} > 0.$$

De plus, $\lim\limits_{r \to +\infty} \alpha(r) = +\infty$*, donc* α *appartient à la classe* $\mathcal{K}_\infty$*.*

Définition 1.2.2 (***Fonction de classe*** $\mathcal{KL}$).

Une fonction continue

$$\beta : [0, a[\times[0, +\infty[\to [0, +\infty[$$

est dite de classe $\mathcal{KL}$*, si pour tout* s *fixé, l'application* $r \longmapsto \beta(r, s)$ *est de classe* $\mathcal{K}$ *et pour tout* r *fixé, l'application* $s \longmapsto \beta(r, s)$ *est décroissante et* $\beta(r, s) \to 0$ *quand* $s \to +\infty$*.*

Exemple 1.2.2 *Soit* $k > 0$*,* β *définie par* $\beta(r, s) = \frac{r}{ksr+1}$ *est strictement croissante en* r *car*

$$\frac{\partial \beta}{\partial r}(r, s) = \frac{1}{(ksr + 1)^2} > 0$$

et strictement décroissante en s *car*

$$\frac{\partial \beta}{\partial s}(r,s) = \frac{-kr^2}{(ksr+1)^2} < 0.$$

De plus, $\lim_{s \to +\infty} \beta(r,s) = 0$ *; donc* β *appartient à la classe* $\mathcal{KL}$.

FIGURE 1.1 – Les fonctions $\mathcal{K}_\infty$ et $\mathcal{KL}$

Le lemme suivant résume certaines propriétés des fonctions des classes $\mathcal{K}$ et $\mathcal{KL}$.

Lemme 1.2.1 *Soient* α_1 *et* α_2 *deux fonctions de classe* $\mathcal{K}$ *sur* $[0, a[$, *et* α_3, α_4 *deux fonctions de classe* $\mathcal{K}_\infty$ *et* β *une fonction de classe* $\mathcal{KL}$. *On note l'inverse de* α_i *par* α_i^{-1}. *Alors*

* α_1^{-1} *définie sur* $[0, \alpha_1(a)[$ *est de classe* $\mathcal{K}$.
* α_3^{-1} *définie sur* $[0, +\infty[$ *est de classe* $\mathcal{K}_\infty$.
* $\alpha_1 \circ \alpha_2$ *est de classe* $\mathcal{K}$.
* $\alpha_3 \circ \alpha_4$ *est de classe* $\mathcal{K}_\infty$.
* $\sigma(r,s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ *est de classe* $\mathcal{KL}$.

Définition 1.2.3 *Une fonction est une* $\mathcal{N}$ *fonction* $\alpha(t) : J \to (0, \infty)$ *si elle est à valeur positive et non décroissante.*

Définition 1.2.4 *Une fonction est une* $\mathcal{NK}_\infty$ *fonction* $\beta(t,s) : J \times J \to J$ *si* $\beta(t,.) \in \mathcal{N}$ *et* $\beta(.,s) \in \mathcal{K}_\infty$.

Voici une autre formulation des notions de stabilité en utilisant les fonctions de classe $\mathcal{K}$ et $\mathcal{KL}$; les démonstrations des propositions suivantes peuvent être consultées dans l'ouvrage [16].

Proposition 1.2.1 [6].

Le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.1.1) est :

- ***Uniformément stable*** *si et seulement s'il existe une fonction α de classe $\mathcal{K}$ et une constante strictement positive c indépendante de t_0, telle que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \alpha(\|x_0\|), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x_0\| < c. \tag{1.2.1}$$

- ***Globalement uniformément stable*** *si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*
- ***Uniformément asymptotiquement stable*** *si et seulement s'il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une constante strictement positive c indépendante de t_0, telle que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0), \forall t \geq t_0, \forall \|x_0\| < c. \tag{1.2.2}$$

- ***Globalement uniformément asymptotiquement stable*** *si et seulement si l'inégalité (1.2.2) est satisfaite pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*
- ***Exponentiellement stable*** *si et seulement si l'inégalité (1.2.2) est satisfaite avec*

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, k > 0, \gamma > 0 \tag{1.2.3}$$

- ***Globalement exponentiellement stable*** *si et seulement si l'inégalité (1.2.3) est satisfaite pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Définition 1.2.5 (***Fonctions définies positives***) [27].

Une fonction continue $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est définie positive, si $V(t, 0) = 0$ et s'il existe une fonction $\varphi(y)$ définie positive, telle que

$$V(t, y) \geq \varphi(y), \forall t \geq t_0, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Lemme 1.2.2 *Une fonction $V(t, y)$ est définie positive, s'il existe φ de classe $\mathcal{K}$, telle que $V(t, 0)$ et*

$$V(t, y) \geq \varphi(\|y\|), \forall t \geq t_0, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Une fonction V est dite définie négative si $-V$ est une fonction définie positive.

Définition 1.2.6 (***Fonction semi-définies positives***).

1. *Une fonction* $v : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *est semi définie positive (respectivement semi définie négative), s'il existe un voisinage* U *de* 0*, tel que*
   (a) $v(0) = 0$.
   (b) *Pour tout* $y \in U$,$v(y) > 0$ *(respectivement* $v(y) < 0$*).*
2. *Elle est dite définie positive (respectivement définie négative) s'il existe un voisinage* U *de* 0*, tel que*
   (a) $v(0) = 0$
   (b) *Pour tout* $y \in U \diagdown \{0\}, v(y) > 0$ *(respectivement* $v(y) < 0$*).*

Définition 1.2.7 (***Fonction décrescente***).
Une fonction $V(t, y)$ *est décrescente, si* $V(t, 0) = 0\ \forall t \geq t_0$ *et s'il existe une fonction* $\psi(y)$ *définie positive, telle que*

$$V(t, y) \leq \psi(y), \forall t \geq t_0, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

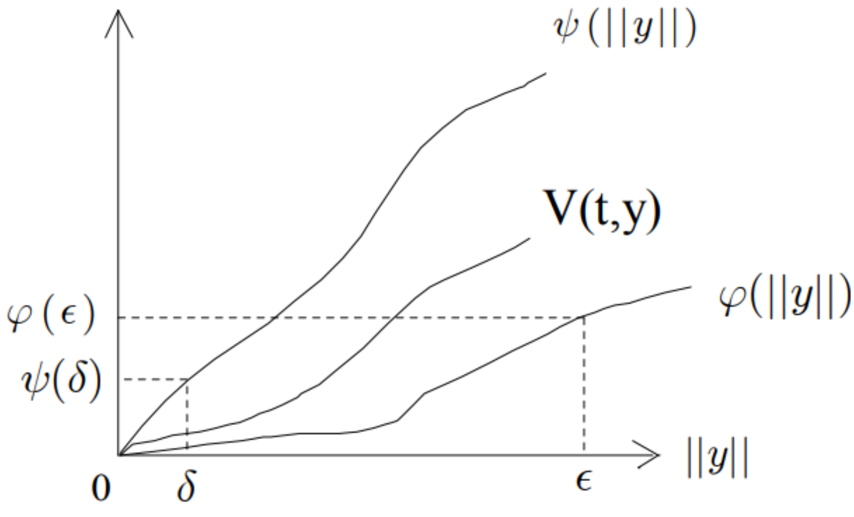

Figure 1.2 – Fonction définie positive et décrescente

.

Lemme 1.2.3 *Une fonction $V(t,y)$ est décrescente, s'il existe ψ de classe $\mathcal{K}$, telle que $V(t,0)=0$ et*

$$V(t,y) \leq \psi(\|y\|), \forall t \geq t_0, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.2.8 (***Fonction propre***).

Une fonction $V(t,x)$ est propre (ou radialement non bornée) si

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(t,x) = +\infty$$

uniformément en t.

Définition 1.2.9 (***Fonction de Lyapunov***) [19, 30].

On considère le système (1.1.1). Soit $U(0)$ un voisinage de 0 et $V : \mathbb{R}_+ \times U(0) \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et différentiable sur $U(0)$.

- *On dit que V est une fonction de Lyapunov au sens large en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

  a) V est définie positive.

  b) $\dot{V}(t,x) \leq 0$ pour tout $x \in U(0)$.

- *On dit que V est une fonction de Lyapunov stricte en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

  a) V est définie positive.

  b) $\dot{V}(t,x) < 0$ pour tout $x \in U(0) \setminus \{0\}$.

Lemme 1.2.4 *Une fonction continue $V(t,x)$ est propre, s'il existe une fonction $\alpha(.)$ de classe $\mathcal{K}_\infty$, telle que*

$$V(t,x) \geq \alpha(\|x\|), \forall t \geq t_0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.2.1 *La dérivée de $V(t,x)$ le long des trajectoires de (1.1.1) est notée par $\dot{V}(t,x)$ où*

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x)$$

Théorème 1.2.1 *L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre de (1.1.1) et D un domaine de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soit $V : [0, +\infty[\times D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Lyapunov continûment différentiable, telle que*

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \leq -W_3(x)$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in D$ avec W_1 et W_2 sont continue et définie positives.

1) *Si $W_3 = 0$ sur D, alors l'origine $x = 0$ est uniformément stable.*
2) *Si W_3 est continue et définie positive sur D, alors l'origine $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.*
3) *Si $D = \mathbb{R}^n$, W_3 est continue sur D et $W_1(x)$ est propre ou radialement non bornée, alors l'origine $x = 0$ est globalement uniformément asymptotiquement stable.*

Lemme 1.2.5 *Soit $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Lyapunov continue et définie positive sur $D \subset \mathbb{R}^n$ qui contient l'origine. Soit $\mathcal{B}(0, r) \subset D$ pour un certain $r > 0$ où $\mathcal{B}(0, r)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon r. Alors, ils existent des fonctions de classe $\mathcal{K}$, α_1 et α_2 définie sur $[0, r[$, telle que*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{1.2.4}$$

pour tout $x \in \mathcal{B}(0, r)$.

Si $D = \mathbb{R}^n$ et les fonctions α_1 et α_2 sont définies sur $[0, +\infty[$ alors l'inégalité (1.2.4) est vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. De plus, $V(x)$ est propre alors α_1 et α_2 peuvent être choisies de classe $\mathcal{K}_\infty$.

Lemme 1.2.6 *On considère l'équation différentielle autonome*

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{E}$$

avec α une fonction localement Lipschitzienne et de classe $\mathcal{K}$ définie sue $[0, a[$. Pour tout $0 \leq y_0 \leq a$, cette équation admet une unique solution définie pour tout $t_0 \leq t$. De plus,

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0)$$

avec $\sigma(r,s)$ est une fonction de classe $\mathcal{KL}$ définie sur $[0,a[\times[0,+\infty[$.

Lemme 1.2.7 (***Lemme de comparaison***).
On considère l'équation différentielle

$$\dot{u} = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0$$

où $f(t,u)$ est continue en t et localement Lipschitzienne en u, pour tout $t \geq 0$ et tout $u \in J \subset \mathbb{R}^n$. Soit $[t_0, T[$ (T pourrait être l'infini) l'intervalle maximal de la solution de $u(t)$ et on suppose que $u(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T[$. Soit $v(t)$ une fonction continue dont la dérivée à droite $\dot{v}(t)$ satisfait l'inéquation différentielle

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) = u_0$$

où $v(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T[$ avec

$$\dot{v}(t) = \lim_{t \to 0^+} \tfrac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

Alors,

$$v(t) \leq u(t), \quad t \in [t_0, T.$$

Exemple 1.2.3 *On considère l'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(x) = -(1+x^2)x, \quad x(0) = a$$

a une solution unique sur $[0, t_1[$ pour certains $t_1 > 0$ car $f(x)$ est localement Lipschitzienne. Soit $v(t) = x^2(t)$. La fonction $v(t)$ est différentiable et sa dérivée est bornée par

$$\dot{v}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) = -2x^2(t) - 2x^4(t) \leq -2x^2(t).$$

Donc, $v(t)$ satisfait l'inéquation différentielle

$$\dot{v}(t) \leq -2v(t), \quad v(0) = a^2.$$

Soit $u(t)$ une solution de l'équation différentielle

$$\dot{u}(t) = -2u. \quad u(0) = a^2 \Longrightarrow u(t) = a^2 e^{-2t}.$$

Alors, en utilisant le lemme de comparaison, la solution $x(t)$ est bien définie pour tout $t \geq 0$ et satisfait

$$|x(t)| = \sqrt{v(t)} \leq e^{-t}|x|, \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.2.2 *Si $\alpha(.)$ n'est pas localement Lipschitzienne, on peut choisir une fonction $\beta(.)$ localement Lipschitzienne de classe $\mathcal{K}$ telle que*

$$\alpha(r) \geq \beta(r)$$

dans le domaine où on s'intéresse.

Exemple 1.2.4 *Soit $\alpha(r) = \sqrt{r}$ est une fonction de classe $\mathcal{K}$ mais non localement Lipschitzienne en $r = 0$.*
On définie la fonction β par :

$$\beta(r) = \begin{cases} r & si\ r < 1 \\ \sqrt{r} & si\ r \geq 1 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{K}$ et localement Lipschitzienne. De plus, $\alpha(r) \geq \beta(r) \quad \forall r \geq 0$.

Preuve du théorème de stabilité de Lyapunov :

D'après [22]

1. Si $W_3 = 0$ sur D, on choisit $r > 0$ assez petit tel que $\mathcal{B}_r \subset D$ et

$$0 < c < \alpha = \min_{\|x\|=r} W_1(x).$$

Alors,

$$S_1 = \{x \in \mathcal{B}_r / W_1(x) \leq c\}$$

est à l'intérieur de $\mathcal{B}_r$.

On définit l'ensemble qui dépend du temps $\Omega_{t,c}$:

$$\Omega_{t,c} = \{x \in \mathcal{B}_r / V(t,x) \leq c\}.$$

L'ensemble $\Omega_{t,c}$ contient $S_2 = \{x \in \mathcal{B}_r / W_2(x) \leq c\}$ car

$$W_2(x) \leq c \Longrightarrow V(t,x) \leq c.$$

D'autre part, $\Omega_{t,c}$ est inclus dans la boule $\{x \in \mathcal{B}_r / W_1(x) \leq c\}$ car

$$V(t,x) \leq c \Longrightarrow W_1(x) \leq c. \tag{1.2.5}$$

Donc,

$$\{x \in \mathcal{B}_r / W_2(x) \leq c\} \subseteq \Omega_{t,c} \subseteq \{x \in \mathcal{B}_r / W_1(x) \leq c\} \subset \mathcal{B}_r \subset D, \quad \forall t \geq 0.$$

On a $V(t,x) \leq 0$ sur D, donc toute trajectoire $x(t)$ de condition initiale $x(t_0)$ dans $\Omega_{t_0,c}$ reste dans $\Omega_{t,c}$ pour tout $t \geq t_0$. Alors, toutes trajectoires de condition initiale dans l'ensemble S_2 restent dans $\Omega_{t,c} \subset S_1$ pour tout $t \geq t_0$, donc ces trajectoires sont définies et bornées pour tout $t \geq t_0$. D'après le lemme (1.2.5) et la remarque (1.2.2), il existe des fonctions de classe $\mathcal{K}$ et localement Lipschitzienne $\alpha_1(.)$ et $\alpha_2(.)$ définies sur $[0, r[$ vérifiant $\forall t \geq 0$ et $\forall x \in D$, tels que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x\|).$$

Alors,

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(t,x)) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(V(t_0, x(t_0))) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(t_0)\|)).\end{aligned}$$

D'après le lemme (1.2.1). $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2$ est une fonction de classe $\mathcal{K}$. Ce qui implique que $x = 0$ est uniformément stable.

2. On a W_3 est définie positive alors il existe une fonction de classe $\mathcal{K}$, telle que

$$W_3(x) \geq \alpha_3(\|x\|).$$

On a

$$\dot{V}(t,x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(t,x))) = -\alpha(V(t,x)).$$

La fonction $\alpha(.)$ est de classe $\mathcal{K}$ définie sur $[0, \alpha_1(r)[$ d'après le lemme (1.2.1). On doit supposer que $\alpha(.)$ est localement Lipschitzienne (Voit la remarque (1.2.2)). Soit l'équation différentielle du première ordre :

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = V(t_0, x(t_0)) \geq 0.$$

Il est clair que

$$V(t, x(t)) \leq y(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

D'après le lemme (1.2.6), il existe une fonction $\sigma(r,s)$ de classe $\mathcal{KL}$ définit sur $[0, \alpha_1(r)[\times[0, +\infty[$ telle que

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, \alpha_1(r).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0)) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(x(t_0)), t - t_0)) \\ &= \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0). \end{aligned}$$

D'après le lemme (1.2.1), $\beta(.,.)$ est une fonction de classe $\mathcal{KL}$. Donc, l'inéquation (1.2.2) est satisfaite ce qui implique que $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.

3. Si $D = \mathbb{R}^n$, les fonctions α_1, α_2 et α_3 sont définie sur $[0, +\infty[$. Alors, α et aussi β sont indépendantes de c. On a $W_1(x)$ est radialement non bornée alors on peut choisir c assez grande de sorte que la condition initiale dans l'ensemble $\{W_2(x) \leq c\}$.
   Donc, (1.2.2) est satisfaite pour toute condition initiale ce qui implique que l'origine est globalement uniformément asymptotiquement stable. $\square$

Théorème 1.2.2 (***Théorème de stabilité exponentielle***).
L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre de (1.1.1) et D un domaine de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soit $V : [0, +\infty[\times D \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction de Lyapunov continûment différentiable, telle que

$$\begin{aligned} k_1\|x\|^2 \leq V(t,x) &\leq k_2\|x\|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) &\leq -k_3\|x\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq k_4\|x\|^2 \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

$\forall t \geq t_0$ et $\forall x \in D$, avec k_1, k_2, k_3 et k_4 des constantes positives. Alors, l'origine $x = 0$ est exponentiellement stable.
Si $D = \mathbb{R}^n$, alors l'origine $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

Théorèmes inverses

Théorème 1.2.3 [16]
Supposons que l'origine est un point d'équilibre du système non-linéaire (1.1.1) où f est continûment différentiable, $U = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r\}$ un voisinage de l'origine et $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$ est bornée sur U, uniformément en t. Soient les constantes $k, \gamma, r_0 > 0$, telles que $r_0 < \frac{r}{k}$ et $\mathcal{B}(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r_0\}$. Supposons que toute trajectoire du système satisfait :

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leq k\|x_0\|e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad x_0 \in \mathcal{B}_0, t \geq t_0 \geq 0.$$

Alors, il existe une fonction $V : [0, +\infty[\times \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}$ *et des constantes* k_1, k_2, k_3 *et* $k_4 > 0$ *qui vérifient les inégalités suivantes :*

$$k_1\|x\|^2 \leq V(t,x) \leq k_2\|x\|^2 \tag{1.2.7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -k_3\|x\|^2 \tag{1.2.8}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq k_4\|x\|. \tag{1.2.9}$$

De plus, si $r = \infty$ *et l'origine est (GES), alors la fonction* $V(t,x)$ *satisfait les inégalités ci-dessus sur* $\mathbb{R}^n$*. Si le système est autonome,* V *peut être choisie indépendante de* t*.*

Théorème 1.2.4 *Supposons que l'origine est un point d'équilibre du système non linéaire (1.1.1) où* f *est continûment différentiable,* $U = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r\}$ *un voisinage de l'origine et* $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$ *est bornée sur* U*, uniformément en* t*.*
Soient β *une fonction de classe* $\mathcal{KL}$ *et* r_0 *une constante strictement positive telles que* $\beta(r_0, 0) < r$ *et* $\mathcal{B}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r_0\}$*. Supposons que toute trajectoire du système satisfait :*

$$\|x(t, t_0, x)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0), \quad \forall x_0 \in \mathcal{B}_0, \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Alors, il existe une fonction $V : [0, +\infty[\times \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}$ *continûment différentiable qui satisfait les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x) &\leq \alpha_2(\|x\|), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) &\leq -\alpha_3(\|x\|), \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq \alpha_4(\|x\|). \end{aligned}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *et* α_4 *sont des fonction de classe* $\mathcal{K}$ *définies sur* $[0, r_0]$*.*

Chapitre 2

Stabilité des systèmes perturbés

2.1 Les systèmes perturbés

On considère le système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)), \tag{2.1.1}$$

où f et g sont deux fonctions continues par rapport à la première variable et localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. On peut voir ce système comme perturbation du système nominal

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{2.1.2}$$

La perturbation g peut résulté des erreurs de modélisation des non-linéarités qui existent dans n'importe quel modèle réel. Une analyse complète de l'étude de stabilité des systèmes perturbés de la forme (2.1.1) sont faite par [14, 17].
Pour l'étude de la stabilité de ses systèmes, on souhaite toujours garder la stabilité du système perturbé pour une classe de perturbation. C'est à dire, on veut que la perturbation $g(t, x)$ qui est supposée un terme déstabilisant n'influe pas sur la stabilité du système qui est assurée par le système nominal. La préservation de la stabilité du système perturbé dépend de la stabilité du système nominal et de la perturbation.
Les systèmes perturbés considérés ici sont à travers lesquels la perturbation vérifie

$$g(t,0) = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

cela veut dire que l'origine $x = 0$, qui est un point d'équilibre pour le système nominal, reste un point d'équilibre du système perturbé.

Le théorème suivant établit la stabilité exponentielle de l'origine du système perturbé, si l'on suppose que l'origine est exponentiellement stable et la perturbation vérifie une condition de bornitude.

Théorème 2.1.1 [17]
Supposons que l'origine du système nominale (2.1.2) est UES. Soit $V(t,x)$ une fonction de Lyapunov du système nominal vérifiant les inégalités (1.2.7),(1.2.8) et (1.2.9) sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_r$. Supposons que la perturbation $g(t,x)$ satisfait

$$\|g(t,x(t))\| \leq \gamma \|x(t)\|, \quad \gamma < \frac{c_3}{c_4} \tag{2.1.3}$$

Alors, l'origine du système perturbé (2.1.1) est un point d'équilibre UES. Si De plus, toutes les conditions sont satisfaites globalement alors l'origine est GUES.

Preuve 2.1.1 *Soit $V(t,x)$ une fonction de Lyapunov du système nominal vérifiant les inégalités (1.2.7), (1.2.8) et (1.2.9) sur $\mathbb{R}^n \times \mathcal{B}_r$. Choisissons $V(t,x)$ comme fonction de Lyapunov du système perturbé et en la dérivant le long des solutions du système perturbé (2.1.1) on obtient*

$$\dot{V}_{(2.1.1)}(t,x) \leq -c_3\|x\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right\| \|g(t,x)\|. \tag{2.1.4}$$

En utilisant les estimations (1.2.7)-(1.2.9)-(2.1.3) on obtient

$$\dot{V}_{(2.1.1)}(t,x) \leq -(c_3 - \gamma c_4)\|x\|^2. \tag{2.1.5}$$

On conclure que l'origine est UES si les hypothèses sont satisfaites localement, et il est GUES si les hypothèses sont globaux.

On va énoncer un autre résultat établissant que l'origine du système perturbé est GUAS en utilisant les mêmes techniques. Plus précisément, on suppose que l'origine du système nominal est GUAS et la perturbations vérifie

$$\|g(t,x)\| \leq \gamma\varphi(x) \tag{2.1.6}$$

où φ est une fonction de classe $\mathcal{K}$, alors l'origine du système perturbé (2.1.1) est GUAS.$\square$

Théorème 2.1.2 [*17*].
Supposons que l'origine du système nominale (2.1.2) est UES. Soit $V(t,x)$ une fonction de Lyapunov du système nominal vérifiant l'inégalité (1.2.7), sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_r$ et,

$$\dot{V}_{(2.1.2)}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -c_3\varphi(x)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4\varphi(x)$$

où φ est une fonction de classe $\mathcal{K}$. Si la perturbation $g(t,x)$ satisfait l'inégalité (2.1.6) avec $\gamma < \frac{c_3}{c_4}$, alors l'origine du système perturbé (2.1.1) est un point d'équilibre UAS. Si De plus, toutes les conditions sont satisfaites globalement alors l'origine est GUAS.

2.2 Stabilité pratique

L'analyse de la stabilité pratique des systèmes non linéaire est étudiée par plusieurs auteurs notamment dans [2, 7, 19].
Certains systèmes peuvent être instables et pourtant ces systèmes peuvent osciller suffisamment prés de cet état pour que leurs performances soient acceptables. Pour faire face à ces situations, nous avons besoin d'une notion de stabilité plus adaptée à plusieurs situations que la stabilité de Lyapunov, un concept appelé stabilité pratique. Cette stabilité, introduite par LaSalle et Lefschetz, concerne l'analyse quantitative par opposition à l'analyse de Lyapunov qui est de nature qualitative. Ainsi, contrairement à la stabilité de Lyapunov, l'étude de la stabilité pratique ramène à l'étude de la stabilité d'une boule centrée à l'origine. C'est pourquoi nous commençons par donner la définition de la stabilité uniforme et de l'attractivité uniforme d'une boule bornée $\mathcal{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\}$.
Dans cette section, on présente la stabilité uniforme et l'attractivité uniforme d'une boule fermée B_r présentées par Corless dans [28].

FIGURE 2.1 – Illustration de la stabilité pratique

.

Définition 2.2.1 (***Stabilité uniforme du*** B_r).

i) *La boule $\mathcal{B}_r$ est dite uniformément stable, si* $\forall\varepsilon > r$, $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que*

$$\|x_0\| < \delta \Longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

ii) *La boule $\mathcal{B}_r$ est dite globalement uniformément stable, si elle est uniformément stable et toutes les solutions du système (1.1.1) sont globalement uniformément bornée.*

Définition 2.2.2 (***Attractivité uniforme du*** B_r)[2].

i) *La boule $\mathcal{B}_r$ est dite uniformément attractive, si* $\forall\varepsilon > r$, $\exists T(\varepsilon) > 0$ *et* $c > 0$, *tels que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon), \quad \forall \|x_0\| < c.$$

ii) *La boule $\mathcal{B}_r$ est dite globalement uniformément attractive si* $\forall c > 0$ *et* $\varepsilon > r$, $\exists T(\varepsilon, c) > 0$, *tel que*

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, c), \quad \forall \|x_0\| < c.$$

L'ensemble $R = \{x_0 \in \mathbb{R}^n / \|x(t)\|\} \to r$ *quand* $t \to +\infty$ *est appelé région d'attraction de* $\mathcal{B}_r$.

Définition 2.2.3 (***Stabilité asymptotique pratique***).

i) *On dit que le système (1.1.1) est pratiquement uniformément asymptotiquement stable ou simplement pratiquement stable de région d'attraction R, s'il existe une boule* $\mathcal{B}_r \subset \mathbb{R}^n$, *telle que $\mathcal{B}_r$ soit uniformément stable et uniformément attractive.*

ii) *On dit que le système (1.1.1) est globalement pratiquement uniformément asymptotiquement stable ou simplement globalement pratiquement stable, s'il est pratiquement uniformément asymptotiquement stable de région d'attraction $\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.2.4 (***Stabilité exponentielle***).
Soit $U(0) \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de l'origine.

i) *La boule $\mathcal{B}_r$ est uniformément exponentiellement stable, s'il existe $\gamma > 0$ et $k \geq 0$, tels que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $x_0 \in U(0)$,*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq k\|x_0\|e^{-\gamma(t-t_0)} + r, \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.2.1}$$

ii) *La boule $\mathcal{B}_r$ est globalement uniformément exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité (2.2.1) est satisfaite pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On dit dans ce cas que le système est globalement pratiquement fortement stable.*

Remarque 2.2.1 *L'inégalité (2.2.1) donne que les solutions de (1.1.1) sont bornées. Dans ce cas, γ est appelé taux de convergence et le nombre r est appelé borne asymptotique du système (1.1.1). Si $r = 0$, alors le système est uniformément exponentiellement stable.*
Pour expliquer la notion de stabilité pratique, nous considérons l'équation scalaire :

$$\dot{x} = -x + \frac{\sin t}{1 + tx^2} \tag{2.2.2}$$

avec $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Soit $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ la fonction de Lyapunov candidate pour l'équation différentielle (2.2.2). La dérivée de V le long des trajectoire est donnée par :

$$\dot{V}(x) = -x^2(1 - \frac{\sin t}{1 + tx^2}) \leq -x^2 + \left|\frac{\sin t}{t}\right|.$$

Il s'ensuit que,

$$\dot{V}(x) \leq -2V(x) + \left|\frac{\sin t}{t}\right|.$$

Remarquons que, les solutions de (2.2.2) ne peuvent pas être données explicitement. Dans ce cas, on ne peut pas déduire la stabilité à l'origine mais en utilisant cette fonction de Lyapunov *noue pouvons donner une estimation sur les trajectoires. Puisque* $\left|\frac{\sin t}{t}\right|$ *est bornée par* 1*, on obtient l'inégalité suivante :*

$$V(x(t)) \leq (V(x(0)) - \frac{1}{2})e^{-2t} + \frac{1}{2}.$$

Alors, pour $x(0) < -1$ *ou* $x(0) > 1$*, on a*

$$|x(t)| \leq (x(0)^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{-t} + 1.$$

Ainsi, pour $x(0) < -1$ *ou* $x(0) > 1$*,* $\mathcal{B}_1$ *est uniformément exponentiellement stable. Ici, nous ne pouvons plus étudier la stabilité de l'origine comme un point d'équilibre. La dernière inégalité implique que* $x(t)$ *est ultimement bornée par une borne suffisamment petite et puisque* $\left|\frac{\sin t}{t}\right|$ *tend vers* 0 *quand* t *tend vers* $+\infty$ *alors la borne ultime s'approche de* 0 *et par suite* $x(t)$ *converge vers l'origine. Ce qui implique l'attractivité de l'origine.*

Définition 2.2.5 *La boule* $\mathcal{B}_r$ *est (GPUS), s'il existe une fonction* $\alpha(.)$ *de classe* $\mathcal{K}$*, telle que*

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x_0\|) + r, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{2.2.3}$$

où r *est une constante strictement positive.*

Définition 2.2.6 [6].
La boule $\mathcal{B}_r$ *est (GPUAS), s'il existe une fonction* $\beta(.,.)$ *de classe* $\mathcal{KL}$*, telle que*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0) + r, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.4}$$

Définition 2.2.7

i) La boule $\mathcal{B}_r$ *est (UES) si et seulement si l'inégalité (2.2.4) est satisfaite avec*

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, \quad \gamma > 0. \tag{2.2.5}$$

ii) La boule $\mathcal{B}_r$ *est (GUES) si et seulement si l'inégalité (2.2.5) est satisfaite pour toute condition initiale* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*.*

La stabilité uniforme exponentielle pratique d'un point d'équilibre nécessite l'existence d'une fonction de Lyapunov qui satisfait certaines conditions. Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour garantir la stabilité pratique asymptotique globale.

Théorème 2.2.1 [11].

Considérons le système (1.1.1). *Supposons qu'ils existent une fonction* $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$, *deux fonctions* α_1 *et* α_2 *de classe* $\mathcal{K}_\infty$, *une fonction* α_3 *de classe* $\mathcal{K}$ *et un réel positif* r *suffisamment petit, tels que les inégalités suivantes sont satisfaites pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{2.2.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x) \leq -\alpha_3(\|x\|) + r. \tag{2.2.7}$$

Alors, le système est globalement pratiquement stable avec

$$\mathcal{B}_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1}(r) \right\}.$$

Preuve 2.2.1 [11].

La démonstration comportera trois étapes.

⋆ *La première partie sera consacré à la bornitude globale uniforme des solutions du système* (1.1.1). *Soit* $\delta > 0$ *tel que* $\|x_0\| < \delta$ *et choisissons* $\hat{\delta} = \max\{\delta, R\}$ *avec* $R = \alpha_3^{-1}(r)$.

Tout d'abord considérons la fonction $c(.)$ *sur* $]0, +\infty[$ *définie par*

$$c(\delta) = \begin{cases} (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(R), & si\ \delta \leq R; \\ (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(\delta), & si\ \delta > R. \end{cases}$$

En tenant compte de la condition (2.2.6), *on a* $\hat{\delta} \leq (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(\hat{\delta})$.

Il s'ensuit que

$$\|x(t_0)\| = \|x_0\| \leq \hat{\delta} \leq (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(\hat{\delta}).$$

Supposons qu'il existe $t_2 > t_0$ *tel que* $\|x(t_2)\| > (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(\hat{\delta})$. *Puisque* $x(\cdot)$ *est continue* *sur* $[t_0, t_2]$, *il existe* $t_1 > t_0$ *tel que* $\|x(t_1)\| = \hat{\delta}$ *et donc* $\|x(t)\| \geq \hat{\delta}$ *pour tout* $t \in [t_1, t_2]$. *Il est ainsi clair d'après* (2.2.6) *et* (2.2.7) *que*

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\|x(t_2)\|) &\leq V(t_2, x(t_2)) \\
&= V(t_1, x(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}(\tau, x(\tau))d\tau \\
&\leq \alpha_2(\|x(t_1)\|) + \int_{t_1}^{t_2} (-\alpha_3(\|x(\tau)\|) + r)d\tau \\
&\leq \alpha_2(\hat{\delta}) + \int_{t_1}^{t_2} (-\alpha_3(R) + r)d\tau,
\end{aligned}$$

ce qui entraine $\|x(t_2)\| \leq (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(\hat{\delta})$, *d'où une contradiction.*

Enfin, on aura $\|x(t)\| \leq c(\delta), t \geq t_0$ *si* $\|x_0\| \leq \delta$, *puisque* $\|x_0\| \leq \hat{\delta}$ *et* $R \leq \hat{\delta}$.

⋆ *Dans la deuxième partie nous nous intéressons à la stabilité uniforme de la boule* $\mathcal{B}_r$. *Prenons* $\varepsilon > (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(R)$. *On considère* $(\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(\delta) = \varepsilon$, *alors* $\delta(\varepsilon) = (\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1)(\varepsilon) > R > 0$.

Donc, d'après l'étape 1 , on a $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon)$ *alors* $\|x(t)\| \leq (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(\delta(\varepsilon)) = \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

⋆ *Troisième étape : On montre que* $\mathcal{B}_r$ *est globalement uniformément attractive.*

Soit $\delta > 0$ *tel que* $\|x_0\| < \delta$, *on considère* $\bar{c} > (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(R)$ *et* $\bar{R} = (\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1)(\bar{c})$ *alors* $\bar{R} > R$ *et donc par définition* $c(\bar{R}) = (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)(\bar{R}) = \bar{c}$.

Ainsi, si $\delta \leq \bar{R}$ *alors* $\|x_0\| \leq \bar{R}$, *il s'ensuit que, d'après l'étape* (1), $\|x(t)\| \leq c(\bar{R}) = \bar{c}$.

Maintenant, par l'absurde, on considère que $\delta > \bar{R}$ *et on suppose que*

$$\|x(t)\| > \bar{R}, \forall t \in [t_0, t_1], \tag{2.2.8}$$

avec $t_1 = t_0 + T(\bar{c}, \delta)$ *et* $T(\bar{c}, \delta) = \frac{\alpha_2(\delta) - \alpha_1(\bar{R})}{\alpha_3(\bar{R}) - r}$.

En tenant compte de (2.2.6) *et* (2.2.7), *on obtient*

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\|x(t_1)\|) &\leq V(t, x(t_1)) \\
&= V(t_0, x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(\tau, x(\tau))d\tau \\
&\leq \alpha_2(\|x(t_0)\|) + \int_{t_0}^{t_1} (-\alpha_3(\|x(\tau)\|) + r)d\tau \\
&\leq \alpha_2(\delta) + T(\bar{c}, \delta)[-\alpha_3(\bar{R}) + r],
\end{aligned}$$

donc,

$$\alpha_1(\|x(t_1)\|) = \alpha_2(\delta) + \frac{\alpha_2(\delta) - \alpha_1(\bar{R})}{\alpha_3(\bar{R}) - r}[-\alpha_3(\bar{R}) + r]$$
$$= \alpha_1(\bar{R}).$$

Par conséquent $\|x(t_1)\| \leq \bar{R}, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$, *ce qui contre dit* (2.2.8).

Alors, il existe $t_2 \in [t_0, t_1]$ *tel que* $\|x(t_2)\| \leq \bar{R}$. *Donc comme conséquence de la bornitude uniforme des solutions dans l'étape* 1, *on aura* $\|x(t)\| \leq c(\bar{R}) = \bar{c}, \quad \forall t \geq t_2$. *D'où, on conclut que,*

$$\|x(t)\| \leq \bar{c}, \forall t \geq t_1 = t_0 + T(\bar{c}, \delta).\square$$

Le théorème suivant donne des conditions pour que le système (1.1.1) soit globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable.

Théorème 2.2.2 (***Stabilité exponentielle pratique***).
On considère le système (1.1.1). *S'il existe une fonction* $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continument différentiable vérifiant :*

$$k_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq k_2\|x\|^2 \tag{2.2.9}$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -k_3 V(t, x) + r \tag{2.2.10}$$

pour tout $t \geq 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$, *où* k_1, k_2, k_3 *et* r *sont des constantes strictement positives.*
Alors, le système (1.1.1) *est globalement pratiquement uniformément exponentiellement stable.*
De plus, $\mathcal{B}_\alpha$ *est globalement uniformément exponentiellement stable avec* $\alpha = \sqrt{\frac{r}{k_1 k_3}}$.

Preuve 2.2.2 *La dérivée de* V *le long des trajectoires du système* (1.1.1) *est donnée par :*

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x)$$
$$\leq -k_3 V(t, x) + r.$$

Ce qui implique que

$$V(t, x) \leq V(t_0, x_0) e^{-k_3(t - t_0)} + \tfrac{r}{k_3}.$$

Alors,

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \|x_0\| e^{-\frac{k_3}{2}(t - t_0)} + \sqrt{\frac{r}{k_1 k_3}}.\square$$

2.3 Stabilité exponentielle pratique uniforme de certains systèmes non linéaires

L'analyse de la stabilité des systèmes non linéaire variant dans le temps est étudiée par plusieurs auteurs notamment [9, 18, 21, 29]. La stabilité exponentielle uniforme d'un point d'équilibre peut être établi en exigent l'existence d'une fonction de Lyapunov qui satisfait certains conditions [2, 3, 9].

On considère le système non linéaire (1.1.1). On impose des nouvelles conditions suffisantes pour garantir la stabilité exponentielle pratique uniforme du système (1.1.1). Ensuite, on va étudier le cas inverse.

Par la suite, on s'intéresse à la stabilité exponentielle pratique uniforme du système perturbé (2.1.1).

2.3.1 Stabilité exponentielle pratique globale uniforme

La stabilité exponentielle pratique uniforme exige l'existence d'une fonction de Lyapunov qui satisfait certaines conditions.

Théorème 2.3.1 [*9*].

Considérons le système (1.1.1). *S'il existe une fonction de Lyapunov* $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continûment différentiable vérifiant*

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t,x) \leq c_2\|x\|^2 + \mu e^{-\eta t} \tag{2.3.1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -c_3\|x\|^2 + \rho e^{-\delta t} \tag{2.3.2}$$

pour tout $t \geq 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$*,où* $c_1, c_2, c_3, \mu, \rho, \eta$ *et* δ *sont des constantes strictement positives, et si*

$$\frac{c_3}{c_2} > \max\{\eta, \delta\}. \tag{2.3.3}$$

Alors le système (1.1.1)*est globalement uniformément exponentiellement stable.*

Preuve.

La dérivée de la fonction V le long des trajectoires du système (1.1.1) est donnée par :

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x).$$

D'après la condition (2.3.1) on a

$$\|x\|^2 \geq \frac{V(t,x) - \mu e^{-\eta t}}{c_2}.$$

En vertu de la condition (2.3.2), pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &\leq -c_3 \left(\frac{V(t,x) - \mu e^{-\eta t}}{c_2} \right) + \rho e^{-\delta t} \\ &\leq -\frac{c_3}{c_2} V(t,x) + \frac{\mu c_3}{c_2} e^{-\eta t} + \rho e^{-\delta t}.\end{aligned}$$

Soit $y(t) = V(t,x) e^{\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)}$, pour tout $t \geq t_0 \geq 0$, ce qui implique que

$$\dot{y}(t) = (\dot{V}(t,x) + V(t,x)) e^{\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)}.$$

Il s'ensuit que

$$\dot{y}(t) \leq \left(\frac{\mu c_3}{c_2} e^{-\eta t} + \rho e^{-\delta t} \right) e^{\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)}.$$

En tenant compte de la condition (2.3.3), on obtient

$$y(t) \leq y(t_0) + \left(\frac{\mu c_3}{c_3 - c_2 \eta} e^{-\eta t} + \frac{\rho c_2}{c_3 - c_2 \delta} e^{-\delta t} \right) e^{\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)},$$

alors,

$$V(t,x) \leq V(t_0,x_0) e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)} + \frac{\mu c_3}{c_3 - c_2 \eta} e^{-\eta t} + \frac{\rho c_2}{c_3 - c_2 \delta} e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \tag{2.3.4}$$

De plus, la fonction V satisfait (2.3.1), alors, on aura les inégalités suivant :

$$\begin{aligned} V(t_0,x_0) &\leq c_2 \|x_0\|^2 + \mu e^{-\eta t_0} \\ \|x(t)\| &\leq \sqrt{\frac{V(t,x(t))}{c_1}}. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Substituons (2.3.5) dans (2.3.4) et d'après (2.3.3), on obtient

$$\|x(t)\|^2 \leq \left(\frac{c_2 \|x_0\|^2 + \mu e^{-\eta t_0}}{c_1} \right) e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)} + \frac{\mu c_3}{c_1(c_3 - c_2 \eta)} e^{-\eta t} + \frac{\rho c_2}{c_1(c_3 - c_2 \delta)} e^{-\delta t}.$$

Et par suite,

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{c_2}{c_1} \|x_0\| e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)} + \left(\frac{\mu}{c_1} + \frac{\mu c_3}{c_1(c_3 - c_2 \eta)} + \frac{\rho c_2}{c_1(c_3 - c_2 \delta)} \right) e^{-\min\{\eta,\delta\} t},$$

d'où,

$$\|x(t)\| \leq \left(\left(\frac{c_2}{c_1} \right) \|x_0\| e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)} + \left[\frac{\mu}{c_1} + \frac{\mu c_3}{c_1(c_3 - c_2\eta)} + \frac{\rho c_2}{c_1(c_3 - c_2\delta)} \right] e^{-\min\{\eta,\delta\}t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La dernière inégalité montre que (2.3.1) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable. Notons que lorsque t tend vers ∞, la trajectoire converge vers 0.□

2.3.2 Les systèmes perturbés

Dans cette partie, on va étudier la stabilité des systèmes non linéaires perturbés. Notre objectif est d'assurer la stabilité exponentielle du système perturbé tout en imposant à la fonction $g(t, x(t))$ de vérifier une condition bien déterminée. L'idée de résolution de ce problème revient a utiliser la fonction de Lyapunov du système nominal comme étant une fonction de Lyapunov candidate pour le second.

$(\mathcal{H}_1)$ Il existe une fonction de Lyapunov $V(t, x)$ continûment différentiable, des constantes positives c_1, c_2, c_3, c_4, μ, ρ, δ et η, vérifiant

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t,x) \leq c_2\|x\|^2 + \mu e^{-\eta t} \tag{2.3.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -c_3\|x\|^2 + \rho e^{-\delta t} \tag{2.3.7}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4\|x\| \tag{2.3.8}$$

$(\mathcal{H}_2)$ Il existe une constante positive γ telle que

$$\|g(t,x)\| \leq \gamma\|x\|, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3.9}$$

telle que

$$\gamma < \frac{c_1 c_3}{c_2 c_4} \tag{2.3.10}$$

avec γ une constante positive assez petite. Notons que les fonctions qui tendent vers zéro quand $\|x(t)\|$ tend vers zéro et qui sont localement Lipschitziennes en x, uniformément en t pour tout $t \geq 0$ sont situées dans ce dernier cadre (c'est à dire elles vérifient l'inégalité

(2.3.9)). Cependant, il est souvent souhaitable d'établir des résultats plutôt du type global et ceci n'est plus possible si la contrainte (2.3.9) est locale. Une autre façon pour surmonter l'inconvénient de la méthode indirecte de Lyapunov et dans le but de fournir un résultat de stabilité globale, on optera l'idée de construire une fonction de Lyapunov qui sera la combinaison de celle candidate pour le système nominal et d'un terme additif $\psi(t,x)$ qui sera choisi afin de compenser l'effet de la perturbation.

Théorème 2.3.2 *Si les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$ *et* $(\mathcal{H}_2)$ *et si*

$$\frac{c_1c_3 - c_2c_4\gamma}{c_2c_1} > max\left\{\eta, \delta\right\}.$$

Alors le système (2.1.1) *est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable.*

Preuve 2.3.1 *La dérivée de* V *le long des trajectoires de* (2.1.1) *est donnée par :*

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}g(t,x)\\ &\leq \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t,x) + \|\frac{\partial V}{\partial x}\|\|g(t,x)\|.\end{aligned}$$

En utilisant (2.3.7) *et* (2.3.8)*, on a*

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &\leq -c_3\|x\|^2 + \rho\ e^{-\delta t} + c_4\|x\|\gamma\|x\|\\ &\leq -c_3\|x\|^2 + \rho\ e^{-\delta t} + c_4\gamma\|x\|^2.\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

De condition (2.3.6)*, on obtient*

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t,x) et V(t,x) \leq c_2\|x\|^2 + \mu e^{-\eta t}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &\leq -\frac{c_3}{c_2}(V(t,x) - \mu e^{-\eta t}) + \rho\ e^{-\delta t} + \frac{c_4\gamma}{c_1}V(t,x)\\ &\leq -\frac{c_3}{c_2}V(t,x) + \frac{c_3\mu}{c_2}e^{-\eta t} + \rho\ e^{-\delta t} + \frac{c_4\gamma}{c_1}V(t,x)\\ &\leq -\left(\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_4\gamma}{c_1}\right)V(t,x) + \frac{c_3\mu}{c_2}e^{-\eta t} + \rho\ e^{-\delta t}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\dot{V}(t,x) \leq -\alpha V(t,x) + \frac{c_3\mu}{c_2}e^{-\eta t} + \rho\ e^{-\delta t},$$

où $\alpha = -\left(\frac{c_3c_1 - c_2c_4\gamma}{c_1c_2}\right) > 0$ *d'après* (2.3.10).
Enfin, on obtient

$$\|x\| \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}} \|x_0\| e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} + \left[\frac{\mu}{c_1} + \frac{c_3\mu}{c_1c_2(\alpha-\eta)} + \frac{\rho}{c_1(\alpha-\delta)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}min\{\eta,\delta\}}.$$

Donc le système (2.1.1) *est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable.*$\square$

Exemple 2.3.1 *On considère l'équation différentielle non linéaire :*

$$\dot{x} = -2x + \frac{xe^{-3t}}{1+x^6} + \frac{|sinx|}{1+t^2}, \quad t \geq 0. \tag{2.3.12}$$

Dans ce cas, on pose

$$f(t,x) = -2x + \tfrac{xe^{-3t}}{1+x^6} \text{ et } g(t,x) = \tfrac{|sinx|}{1+t^2} \geq |x|.$$

Soit $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (t,x) \mapsto V(t,x) = x^6$, *il s'ensuit alors que* $(\mathcal{H}_1)$ *et* $(\mathcal{H}_2)$ *sont satisfaites avec* $c_1 = c_2 = \gamma = 1$, $c_3 = 12$, $c_4 = p = \rho = 6$, $\delta = 3$ *et* $\mu = \eta = 0$. *Finalement, on peut appliquer le Théorème* 2.3.2 *pour prouver que le système* (2.3.12) *est globalement pratiquement uniformément exponentiellement stable.*

2.4 Stabilité des systèmes avec paramètre

On va introduire maintenant la notion de stabilité exponentielle pratique uniforme globale d'une famille de systèmes dépendant d'un paramètre $\varepsilon > 0$.

Définition 2.4.1 [3] *On considère un système qui dépend d'un paramètre* $\varepsilon > 0$

$$\dot{x} = f^{\varepsilon}(t,x), \quad x(t_0) = x_0.$$

On dit que l'origine de ce système est globalement pratiquement uniformément stable si pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe des constantes positives* $K(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$ *et* $\rho(\varepsilon)$, *telles que*

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leq K(\varepsilon)\|x_0\| e^{-\lambda(\varepsilon)(t-t_0)} + \rho(\varepsilon),$$

avec $\rho(\varepsilon) \to 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Théorème 2.4.1 [3] *On considère le système perturbé de la forme*

$$\dot{x} = f^{\varepsilon}(t,x) + g(t,x). \tag{2.4.1}$$

où $f^{\varepsilon}, g : \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues, localement Lipschitziennes en x. En fait ce système se présente comme étant une perturbation du système nominal

$$\dot{x} = f^{\varepsilon}(t,x). \tag{2.4.2}$$

Supposons que le système (2.4.2) est globalement uniformément exponentiellement stable avec une fonction de Lyapunov associée $V(t,x), V : \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{aligned} \lambda_1\|x\|^2 \leq V^{\varepsilon}(t,x) \leq \lambda_2\|x\|^2, \\ \frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial x} f^{\varepsilon}(t,x) \leq -2\lambda(\varepsilon)V^{\varepsilon}(t,x), \\ \|\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial x}\| \leq \lambda_3(\varepsilon)\|x\|. \end{aligned}$$

Où $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon), \lambda_3(\varepsilon) et\ \lambda(\varepsilon)$ sont des constant positives avec

$$\lambda(\varepsilon) \to \infty\, et\, \frac{\lambda_3(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon\lambda(\varepsilon))} \to 0,\ quand\, \varepsilon \to 0.$$

On suppose aussi que $g(.,.)$ est globalement uniformément bornée et qu'il existe une constante positive δ,telle que

$$\|g(t,x)\| \leq \delta, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}^n.$$

Alors, le système (2.4.1) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable

Preuve

. La dérivée de V le long des trajectoires du système (2.4.1) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}^{\varepsilon}(t,x) &= \frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial x} f^{\varepsilon}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t,x) \\ &\leq -2\lambda(\varepsilon)V^{\varepsilon}(t,x) + \lambda_3(\varepsilon)\delta\|x\| \\ &\leq -2\lambda(\varepsilon)V^{\varepsilon}(t,x) + \frac{\lambda_3(\varepsilon\delta)}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{V^{\varepsilon}(t,x)} \end{aligned}$$

Soit $v(t) = \sqrt{V^{\varepsilon}(t, x(t))}$.

Donc

$$\dot{v}(t) \leq -\lambda(\varepsilon)v(t) + \frac{\lambda_3(\varepsilon)\delta}{2\sqrt{\lambda_1(\varepsilon)}}.$$

Ce qui implique que,

$$v(t) \leq v(t_0, x(t_0))e^{-\lambda(\varepsilon)(t-t_0)} + \frac{\lambda_3(\varepsilon)\delta}{2\sqrt{\lambda_1(\varepsilon)}\lambda(\varepsilon)}.$$

Il en résulte alors que

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2(\varepsilon)}{\lambda_1(\varepsilon)}}\|x(t_0)\|e^{-\lambda(\varepsilon)(t-t_0)} + \frac{\lambda_3(\varepsilon)\delta}{2\lambda_1(\varepsilon)\lambda(\varepsilon)}.\square$$

Théorème 2.4.2 [3] *On considère le système perturbé suivent*

$$\dot{x} = f(t, x) + g^{\varepsilon}(t, x) \tag{2.4.3}$$

où $f, g^{\varepsilon} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *sont continues et localement Lipschitziennes en* x*. Supposons que le système nominal (1.1.1) est globalement uniformément exponentiellement stable avec une fonction de Lyapunov*

$V(t, x), V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *qui satisfait*

$$\lambda_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq \lambda_2\|x\|^2$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t, x) \leq -2\lambda V(t, x).$$

Où λ_1, λ_2 *et* λ *sont des constant positives. On suppose aussi que la fonction* V *vérifie*

$$\|\frac{\partial V}{\partial x}g^{\varepsilon}(t, x)\| \leq r(\varepsilon)$$

avec $r(\varepsilon) \to 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$*. Alors le système (2.4.3) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable.*

Preuve.

La dérivée de V le long des trajectoires du système (2.4.3) est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x} g^{\varepsilon}(t,x) \\ &\leq -2\lambda V(t,x) + r(\varepsilon).\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}V(t,x(t)) &\leq V(t_0,x(t_0))e^{-2\lambda(t-t_0)} + \frac{r(\varepsilon)}{2\lambda} \\ &\leq \lambda_2 \|x(t_0)\|^2 e^{-2\lambda(t-t_0)} + \frac{r(\varepsilon)}{2\lambda}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)} + \sqrt{\frac{r(\varepsilon)}{2\lambda\lambda_1}}. \square$$

2.5 Stabilité à l'aide des fonctions de Lyapunov indéfinies

Lemme 2.5.1 [33].

La fonction scalaire $\mu(t) \in \mathbb{PC}(J,\mathbb{R})$ est

1) *Asymptotiquement stable si et seulement si*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \mu(s)ds = -\infty. \tag{2.5.1}$$

2) *Exponentiellement stable si et seulement s'il existe $\beta(t_0) \geq 0$ et $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_{t_0}^{t} \mu(s)ds \leq -\alpha(t-t_0) + \beta(t_0), \qquad \forall t \geq t_0 \in J. \tag{2.5.2}$$

3) *Uniformément exponentielle stable si et seulement si (2.5.2) est satisfait où β est indépendant de t_0.*

Théorème 2.5.1 [34].

Supposons qu'il existe une fonction de classe C^1 $V : J \times \mathbb{R}^n \to J$, deux fonctions de $\mathcal{NK}_\infty$ $\alpha_i, i = 1, 2,$

et une fonction scalaire $\mu(t) \in \mathbb{PC}(J,\mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha_1(t,|x|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(t,|x|), \tag{2.5.3}$$

$$\dot{V}(t,x) \leq \mu(t)V(t,x). \tag{2.5.4}$$

Alors le système non linéaire (1.1.1) est :

1. *Globalement asymptotiquement stable si $\mu(t)$ est asymptotiquement stable.*
2. *Globalement uniformément asymptotiquement stable si $\mu(t)$ est uniformément exponentiellement stable et α_i sont indépendants de t.*
3. *Globalement exponentiellement stable si $\mu(t)$ est exponentiellement stable et qu'il existe $m > 0$*
   et $k_i(.) \in \mathcal{N}$ tel que $\alpha_i(t,s) = k_i(t)s^m$.
4. *Globalement uniformément exponentiellement stable si $\mu(t)$ est uniformément exponentiellement stable et il existe $m > 0$ et $k_i > 0$ tel que $\alpha_i(t,s) = k_i s^m$.*

Preuve.

Notons que (2.5.4) implique

$$\frac{d}{dt}\ln V(t,x) = \frac{\dot{V}(t,x)}{V(t,x)} \leq \mu(t), \quad \forall t_0 \leq t,$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_0,|x(t)|) &\leq \alpha_1(t,x(t)) \\ &\leq V(t,x(t)) \\ &\leq V(t_0,x(t_0))\phi(t,t_0) \\ &\leq \alpha_2(t_0,|x(t_0)|)\phi(t,t_0). \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Preuve du point 1 : Puisque $\lim_{t\to\infty}\phi(t,t_0) = 0$, il existe un $T = T(t_0)$ tel que $\phi(t,t_0) \leq 1, \forall t_0 + T(t_0) \leq t$. Soit

$$\gamma(t_0) = \max_{s\in[t_0,t_0+T(t_0)]}\{\phi(s,t_0)\} \geq 1.$$

Ensuite, nous avons de (2.5.5) que

$$\alpha_1(t_0,|x(t)|) \leq \alpha_2(t_0,|x(t_0)|)\gamma(t_0), \quad \forall t_0 \leq t. \tag{2.5.6}$$

Ci-après, pour une fonction $\alpha \in \mathcal{NK}_\infty$, on utilise $\alpha^{-1}(t,s)$ désigne la fonction inverse de $\alpha(t,s)$ par rapport à la seconde variable à savoir $\alpha^{-1}(t,\alpha(t,s)) \equiv s$. Maintenant nous avons mis en place

$$\delta(t_0) = \alpha_2^{-1}(t_0, (1/\gamma(t_0))\alpha_1(t_0, \varepsilon))$$

ou de manière équivalente, $\alpha_2(t_0, \delta(t_0))\gamma(t_0) = \alpha_1(t_0, \varepsilon)$. Il s'ensuit alors de (2.5.6) que, pour tout $|x(t_0)| \leq \delta(t_0)$,

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_0, |x(t)|) &\leq \alpha_2(t_0, \delta(t_0))\gamma(t_0) \\ &= \alpha_1(t_0, \varepsilon), \quad \forall t_0 \leq t, \end{aligned}$$

ce qui est juste $|x(t)| \leq \varepsilon$, $\forall t_0 \leq t$, d'autre part, de (2.5.1) et (2.5.5) on a $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$. Cela preuve que le système est globalement asymptotiquement stable.

Preuve du point 2 : d'après du point 3 du lemme (2.3.1) et de (2.5.5) on a, pour tout $t_0 \leq t$,

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \alpha_1^{-1}\left(\alpha_2(|x(t_0)|)\phi(t, t_0)\right) \\ &\leq \alpha_1^{-1}\left(\alpha_2(|x(t_0)|)\exp(\beta)\exp(-\alpha(t, t_0))\right) \in \mathcal{KL}, \end{aligned}$$

ce qui montre que le système est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Preuve du point 3 : En notant que $\alpha_i^{-1}(t, s) = s^{1/m}k_i^{-1/m}(t)$ et (2.5.2), on obtient de (2.5.5)

$$|x(t)| \leq \left(\frac{k_2(t_0)}{k_1(t_0}\right)^{1/m} e^{\beta(t_0)/m}|x(t_0)|e^{-(\alpha/m)(t-t_0)}, \tag{2.5.7}$$

ce qui indique que le système est globalement exponentiellement stable.

Preuve du point 4 : Ceci découle de (2.5.7) depuis, $k_i(t_0)$ et $\beta(t_0)$ sont indépendants de t_0.□

Théorème 2.5.2 [34]

Supposons qu'il existe une fonction de classe C^1 $V : J \times \mathbb{R}^n \to J$, deux fonctions de $\mathcal{NK}_\infty$ $\alpha_i, i = 1, 2,$, une fonction asymptotiquement stable $\mu(t) \in \mathbb{C}(J, \mathbb{R})$, une fonction scalaire $\pi(t) \in \mathbb{PC}(J, J)$ telle que, pour tout $(t, x) \in J \times \mathbb{R}^n$, (2.5.3) et l'inégalité suivante

$$\dot{V}(t, x) \leq \mu(t)V(t, x) + \pi(t), \tag{2.5.8}$$

sont satisfaits. Notons que $k(t, t_0) : J \times J \to \mathbb{R}$, comme

$$k(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \phi(t, s)\pi(s)ds. \tag{2.5.9}$$

Alors le système (1.1.1) est globalement asymptotiquement stable si $k(t, t_0)$ est borné pour tout $t_0 \leq t$ et

$$\lim_{t\to\infty} k(t, t_0) = \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \phi(t, s)\pi(s)ds = 0, \quad \forall t_0 \in J. \tag{2.5.10}$$

La preuve de ce théorème est dans [34].

Conclusion générale

Bien entendu, ce mémoire présentant un domaine peu étudié, débouche sur de nombreuses pistes de recherches. Le problème le plus excitant, du moins théoriquement, est de trouver une condition nécessaire et suffisante concernant la stabilité.
D'une manière générale, les travaux ont constitué des avancées majeures pour l'analyse de la stabilité des systèmes non-linéaires, et ont donné lieu à des retombées théoriques et applicatives dans des domaines aussi variés que la commande sous contraintes de communication.

Ce travail ouvre la voie à d'autres développements qui restent ouverts notamment en ce qui concerne la recherche de nouvelles fonctions et la instruction de la fonction de Lyapunov qui permettent de réduire le conservatisme des approches actuellement disponibles dans la littérature.

2.6 Annexe

Lemme 2.6.1 (***Lemme de Barbalât***)[27, 31].
Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*une fonction uniformément continue, c'est à dire,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon.$$

On suppose que $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$ *existe et fini. Alors,* $\phi \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow +\infty$.

Théorème 2.6.1 *On considère le système dynamique variant dans le temps* (1.1.1) *où* $f(t, x)$ *est uniformément bornée pour* $t \geq 0$*, c'est à dire, il existe une fonction continue* $M : D \longrightarrow \mathbb{R}_+$*, telle que*

$$\|f(t, x)\| \leq M(x).$$

Soit $V : [0, \infty[\times D \longrightarrow D$ *une fonction de Lyapunov continûment différentiable, telle que*

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x)$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x)$$

pour tout $t \geq 0$ *et* $x \in D$ *avec* W_1 *et* W_2 *sont continues et définie positives et* $W(x)$ *est une fonction continue semi définie positive sur* D*. On choisit* $r > 0$*, tel que* $B_r \subset D$ *et soit* $\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$*. Alors, toutes les solution du système* (1.1.1) *avec*

$$x(t_0) \in \{x \in B_r / W_2(x) \leq \rho\},$$

sont bornée et satisfait

$$W(x(t)) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

De plus , si $D = \mathbb{R}^n$ *et* $W_1(x)$ *est propre, alors cette statue est vraie pour tout* $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Lemme 2.6.2 *Si* $w(x(t)) \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow +\infty$*, alors l'ensemble* W *limite* $\Omega(t_0, x_0)$ *est inclus dans*

$E = \{x \in D / W(x) = 0\}$

Lemme 2.6.3 (***Lemme de Gronwall***)[5].
Soient $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ *est continue et* $\mu : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ *est continue et non négative. Si une fonction continue* $y : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ *satisfaite*

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s)ds$$

pour $a \leq t \leq b$, *alors, sur le même intervalle*

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s) \exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right] ds$$

en particulier, si $\lambda(t) \equiv \lambda$ *est une constante, donc*

$$y(t) \leq \lambda \exp\left[\int_a^t \mu(\tau)d\tau\right]$$

si, de plus, $\mu(t) \equiv \mu \geq 0$ *est une constante, alors*

$$y(t) \leq \lambda \exp[\mu(t-a)].$$

Preuve : *Soit*

$$z(t) = \int_a^t \mu(s)y(s)ds$$

et

$$v(t) = z(t) + \lambda(t) - y(t) \geq 0$$

alors, z *est différentiable et*

$$\dot{z} = \mu(t)y(t) = \mu(t)z(t) + \mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t).$$

C'est l'équation d'état linéaire scalaire avec la fonction de transition d'état

$$\phi(t,s) = \exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right]$$

depuis $z(a) = 0$, *on a*

$$z(t) = \int_a^t \phi(t,s)[\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s)]ds$$

est non négative. donc,

$$z(t) \leq \int_a^t \exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right] \mu(s)\lambda(s)ds$$

depuis $y(t) \leq \lambda(t) + z(t)$, ceci achève la preuve dans le cas général. Dans le cas particulier où $\lambda(t) \equiv \lambda$, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^t \mu(s)\exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right] ds &= -\int_a^t \frac{d}{ds}\left\{\exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right]\right\} ds \\
&= -\left\{\exp\left[\int_s^t \mu(\tau)d\tau\right]\right\}\Bigg|_{s=a}^{s=t} \\
&= -1 + \exp\left[\int_a^t \mu(\tau)d\tau\right]
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme quand λ est une constante. La preuve quand les deux λ et μ sont des constantes constantes suivies par intégration.□

Lemme 2.6.4 (***Lemme de Gronwall classique***).
Soit x une courbe dérivable dans E définie sur I solution de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x).$$

On suppose que

$$\|f(t, x)\| < a\|x\| + b.$$

Alors pour tout t de I

$$\begin{aligned}
&si \;\; a \neq 0, \quad \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|e^{a|t-t0|} + \frac{b}{a}(e^{a|t-t_0|} - 1) \\
&si \;\; a = 0, \quad \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + b|t - t_0|.
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Fonctions UAS et lemmes de comparaison

Pour construire nos résultats, nous avons besoin du concept suivant de fonctions uniformément stables qui sont introduites dans [33, 34, 35].
Considérons le système scalaire linéaire

$$\dot{y}(t) = \mu(t)y(t), t \in J \tag{2.6.2}$$

où $\mu \in C(J,\mathbb{R})$,$y(t) : J \to \mathbb{R}$

la matrice de transition d'état pour (2.6.2) est donnée par

$$\Phi(t,s) = exp\left(\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right). \tag{2.6.3}$$

Définition 2.6.1 *La fonction $\mu(t) \in C(J,\mathbb{R})$ est dite*

1/ *asymptotiquement stable si le système scalaire (2.6.2) est asymptotiquement stable.*

2/ *exponentiellement stable si le système scalaire (2.6.2) est exponentiellement stable, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $k(t_0) > 0$ et $\alpha > 0$ tel que*

$$|y(t)| \leq k(t_0)|y(t_0)|e^{-\alpha(t-t_0)}, \qquad \forall t \geq t_0 \in J. \tag{2.6.4}$$

3/ *Uniformément exponentiellement stable (ou uniformément asymptotiquement stable) si le système LTV scalaire (2.6.2) est uniformément exponentiellement stable, c'est-à-dire que la constante $k(t_0)$ in (2.6.4) est indépendante de t_0.*

Dans la définition ci-dessus, nous avons remarqué que, pour un système linéaire, stabilité uniformément asymptotique et stabilité exponentielle uniformément sont équivalent (voir par exemple [26]). Notons la matrice de transition (2.6.3), on peut obtenir immédiatement le lemme suivant.

Bien sûr, si $\mu(t) \in \mathbb{PC}(J,\mathbb{R})$ est une fonction périodique de période T, alors il est facile de voir que les trois différents concepts de stabilité dans Définition (2.6.1) sont équivalents, et de plus ils sont équivalents à l'existence de $c > 0$ tel que

$$\int_{t_0}^{t+T} \mu(s)ds \leq -c. \tag{2.6.5}$$

Bibliographie

[1] BenAbdallah, A., Dlala, M., & Hammami, M. A. (2007). A new Lyapunov function for stability of time-varying nonlinear perturbed systems. Systems & control letters, 56(3), 179-187.

[2] Benabdallah, A., Ellouze, I., & Hammami, M. A. (2009). Practical stability of nonlinear time-varying cascade systems. Journal of Dynamical and Control Systems, 15, 45-62.

[3] Benabdallah, A., Ellouze, I., & Hammami, M. A. (2011). Practical exponential stability of perturbed triangular systems and a separation principle. Asian journal of control, 13(3), 445-448.

[4] Benabdallah, A., & Hammami, M. A. (2001). On the output feedback stability for non-linear uncertain control systems. International Journal of control, 74(6), 547-551.

[5] Bihari, I. (1956). A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. Acta Mathematica Hungarica, 7(1), 81-94.

[6] Chaillet, A., & Loría, A. (2006). Necessary and sufficient conditions for uniform semiglobal practical asymptotic stability : Application to cascaded systems. Automatica, 42(11), 1899-1906.

[7] Chaillet, A., & Loría, A. (2006). Uniform global practical asymptotic stability for time-varying cascaded systems. European journal of control, 12(6), 595-605.

[8] Constantin, A. (1997). On a stability theorem of liapunov. Archiv der Mathematik, 68(4).

[9] Corless, M., & Glielmo, L. (1998). New converse Lyapunov theorems and related results on exponential stability. Mathematics of Control, Signals and Systems, 11(1), 79-100.

[10] Corless, M., & Leitmann, G. (1993). Bounded controllers for robust exponential convergence. Journal of Optimization Theory and Applications, 76(1), 1-12.

[11] Corless, M., & Leitmann, G. (1981). Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26, no. 5, pp. 1139-1143.

[12] Ellouze, I. (2010). Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs (Doctoral dissertation, Université Paul Verlaine-Metz ; Université de Sfax).

[13] Ghanmi, B., Hadj Taieb, N., & Hammami, M. A. (2013). Growth conditions for exponential stability of time-varying perturbed systems. International Journal of Control, 86(6), 1086-1097.

[14] Hahn, W. (1967). Stability of Motion Springer. New York, USA.

[15] Hammami, M. A. (2001). On the stability of nonlinear control systems with uncertainty. Journal of Dynamical and Control Systems, 7, 171-179.

[16] Khalil. H.K, (2002). Nonlinear Systems. Macmillan, New York, 3ed edition.

[17] Khalil, H. K., and Grizzle, J. W. (2002). Nonlinear systems (Vol. 3). Upper Saddle River, NJ : Prentice hall.

[18] Lakshmikantham, V., & Leela, S. (1976). On perturbing Lyapunov functions. Mathematical systems theory, 10(1), 85-90.

[19] Lakshmikantham, V., Leela, S., & Martynyuk, A. A. (1990). Practical stability of nonlinear systems. World Scientific.

[20] Lur, A. I. (1957). Some Non-linear Problems in the Theory of Automatic Control : Nekotorye Nelineinye Zadachi Teorii Avtomaticheskogo Regulirovaniya (Gos. Isdat. Tekh. Teor. Lit., 1951, USSR) A Translation from the Russian. HM Stationery Office.

[21] Leela, S., & Lakshmikantham, V. (1974). On Perturbing Lyapunov Functions. University of Texas at Arlington.

[22] Moulay, E. (2007). Stabilité des équations différentielles ordinaires.

[23] Panteley, E., & Loria, A. (2001). Growth rate conditions for uniform asymptotic stability of cascaded time-varying systems. Automatica, 37(3), 453-460.

[24] Panteley, E., & Loria, A. (1998). On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade. Systems & Control Letters, 33(2), 131-138.

[25] Praly, L., & Wang, Y. (1996). Stabilization in spite of matched unmodeled dynamics and an equivalent definition of input-to-state stability. Mathematics of Control, Signals and Systems, 9, 1-33.

[26] Rugh. W. J.(1996). Linear System Theory, Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

[27] Slotine, J. J. E., & Li, W. (1991). Applied nonlinear control (Vol. 199, No. 1, p. 705). Englewood Cliffs, NJ : Prentice hall.

[28] Soldatos, A. G, & Corless, M. (1991). Stabilizing uncertain systems with bounded control. Dynamics and Control, 1(3), 227-238.

[29] Stutson, D., & Vatsala, A. S. (1996). Generalized practical stability results by perturbing Lyapunov functions. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 9(1), 69-75.

[30] Vidyasagar, M. (2002). Nonlinear systems analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[31] Wu, Z., Xia, Y., & Xie, X. (2011). Stochastic Barbalat's lemma and its applications. IEEE Transactions on Automatic Control, 57(6), 1537-1543.

[32] Yoshizawa, T. (1966). Stability theory by Liapunov's second method (Vol. 9). Mathematical Society of Japan.

[33] Zhou, B. (2016). On asymptotic stability of linear time-varying systems. Automatica, 68, 266-276.

[34] Zhou, B. (2017). Stability analysis of non-linear time-varying systems by Lyapunov functions with indefinite derivatives. IET Control Theory & Applications, 11(9), 1434-1442.

[35] Zhou, B., & Egorov, A. V. (2016). Razumikhin and Krasovskii stability theorems for time-varying time-delay systems. Automatica, 71, 281-291.