



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle et équations différentielles »

Présenté Par :
MANSOUR Keltoum Nadjat
MEDJAHED Ikram Kheira

Sous L'intitulé :

Sur une classe d'équations intégrales non linéaires de Volterra-Fredholm sous conditions aux limites de Dirichlets

Soutenu publiquement le 26 / 06 / 2023
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr BENALI Halim	MCA Université de Tiaret	Président
Mme SABIT Souhila	MCA Université de Tiaret	Encadreur
Mr SOUID Mohammed Said	PROF Université de Tiaret	Examinateur

Année universitaire: 2022/2023

Remerciements

Louange à ALLAH, seigneur des mondes, une louange grande,
bonne et bénie qui convient
à la majesté de son visage et à la grandeur de son autorité,
et les prières et la paix soient
sur l'exemple des éducateurs, notre prophète MOHAMED, que les prières
de ALLAH et que la paix soit sur lui.

Et conformément à sa parole que les prières et la paix d'ALLAH soient sur
lui :

"Celui qui n'est pas reconnaissant pour un peu n'est pas reconnaissant pour
beaucoup et celui qui n'est pas reconnaissant envers les gens
n'est pas reconnaissant envers ALLAH".

Rapporté par AHMED et AL-TIRMIDHI.

Nous exprimons nos sincères remerciements et notre gratitude :

À l'honorable et compétente professeur, Madame SABIT Souhila qui n'a pas
été avare de ses conseils.

À notre égard, vous avez toute notre reconnaissance et notre gratitude.

Aux membres du jury,

Mr.BENALI Halim, qui nous avoir fait l'honneur de présider

le jury de soutenance de notre mémoire

et Mr. SOUID Mohammed Said, qui examine notre mémoire.

À tous ceux qui ont contribué à notre formation tout au long de notre
parcours d'étude.

À tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire de près
ou de loin.

Dédicace

À celle qui m'a nourri d'amour et de tendresse, au symbole de l'amour et au nom de la guérison, au coeur qui "Brille de blanc", ma chère mère Khadidja.

À celui qui a avalé la coupe vide pour me donner une goutte d'amour,
à celui qui a mangé ses doigts pour m'offrir un moment de bonheur,
à celui qui a récolté les épines de mon chemin pour paver le chemin
de la connaissance au grand coeur, mon père M'hamed.

Aux bougies qui illuminent ma vie, qui par ses présences je gagne en
force et en amour sans limite, mes chères soeurs Manel et Douâa,
mon chère frère Abdeldjalil, je leurs souhaite du
succès dans leurs vie.

À mes chères grands parents. Au coeur pur et doux et aux âmes innocentes au
vents de ma vie mon grand père Allah.

À mes chères oncles Abdelkader, Sadek, Larbi et Ahmed.

À mes chères tentes Fadhila, Naima et Nourelhouda.

À toute ma famille et mes proches.

À ma chère binôme Ikram et sa famille.

À mes amies.

Si je vous dis merci, alors mes remerciements n'accompliront pas notre vraie quête
et la quête a été appréciée.

Si mon encre se tarit d'expression, il vous écrira la pureté de l'amour comme
expression.

Mansour Keltoum Nadjet

Dédicace

À l'homme de ma vie, école de mon enfance, mon exemple éternel qui a été
mon ombre

durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à
encouragement,

à me donner l'aide et à me protéger, à toi mon père « Ahmed ».

À celle qui m'a donnée la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon
bonheur

et ma réussite, à ma mère.

À mes chers frères et ma soeur et leurs enfants.

À tous ma famille Medjahed et Amir.

À ma chère binôme « Nadjet» et à toute sa famille.

Au nom de l'amitié qui nous réunit, et au nom de nos souvenirs inoubliables.

À tous ceux qui me sont chers.

Medjahed Ikram kheira

Table des matières

Table des matières	3
1 Préliminaires	6
1.1 Quelques espaces fonctionnels	6
1.2 Quelques théorèmes du point fixe	7
1.3 Généralités sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles	9
1.3.1 Classification des équations intégrales non linéaires	9
1.3.2 Classification des équations intégro-différentielles non linéaires	10
2 Résolution des équations intégro-différentielles	12
2.1 Méthode de transformation différentielle (polynôme d'Adomian)	12
2.1.1 Polynôme d'Adomian	12
2.1.2 Application de la méthode d'Adomian	13
2.1.3 La convergence de la méthode d'Adomian	14
2.1.4 Résolution approchée des équations intégro-différentielles non linéaire par la transformation différentielle d'Adomian	15
2.1.5 Transformation différentielle d'une fonction non linéaire	16
2.1.6 Applications numériques	17
2.2 Méthode de la transformation de l'analyse d'Homotopie	19
2.2.1 Application de la méthode de transformée d'Homotopie sur l'équation intégro-différentielle de Volterra en utilisant l'opérateur de Laplace	20
2.2.2 Convergence de la méthode	21
2.2.3 Estimation de l'erreur	21
2.3 L'existence et l'unicité des solutions des équations intégro-différentielles non linéaires	23
2.3.1 Les hypothèses de l'existence et l'unicité de la solution	23
2.3.2 L'existence d'une solution continue	26
2.3.3 L'unicité de la solution	29
3 Résolution numérique des équations intégro-différentielles non linéaires de Volterra-Fredholm	30
3.1 La méthode de la transformation différentielle d'Adomian	30
3.2 La méthode de l'analyse d'Homotopie	49
Table des figures	65
Liste des Tableaux	66
Bibliographie	68

Introduction

Les équations intégro-différentielles ont été étudiées pour la première fois par Vito-Volterra. Ces équations jouent un rôle très important dans plusieurs domaines tels que : les Mathématiques, la mécanique, la physique, la biologie,...etc

L'équation fonctionnelle que nous appelons équation intégro-différentielle est sous la forme suivante :

$$\varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) + \lambda \int_{\Omega} K(x, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) dt.$$

Avec :

Ω : ensemble mesurable.

φ : la fonction inconnue.

K : le noyau.

λ : paramètre numérique.

n : l'ordre de l'équation ($n \in \mathbb{N}$).

L'objectif de ce mémoire est de présenter la méthode de décomposition d'Adomian et la méthode de transformation de l'analyse d'Homotopie de résolution numérique des équations intégro-différentielles non linéaires de Volterra-Fredholm.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

- Le premier chapitre est un rappel sur les équations intégrales, les équations intégro-différentielles non linéaires et quelques définitions et théorèmes du point fixe.
- Dans le deuxième chapitre, on présente la méthode de décomposition d'Adomian et la méthode de transformation de l'analyse d'Homotopie, on étudie l'existence et l'unicité des solutions continues pour les équations intégro-différentielles.
- Dans le troisième chapitre, on essaye de trouver la solution numérique de l'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra-Fredholm avec l'étude de la convergence par les méthodes choisies en estimant l'erreur qui résulte de la comparaison de la solution approchée et la solution exacte et enfin une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques espaces fonctionnels

Définition 1.1. (Espace vectoriel normé [18])

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}_+ , vérifiant les axiomes suivants :

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in E.$ (Séparation)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$ (Homogénéité)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E.$ (Inégalité triangulaire)

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2. (Espace métrique complet [18])

On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Définition 1.3. (Espace de Banach [18])

Tout espace vectoriel normé complet est un espace de Banach.

Exemple 1.1.

$(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Définition 1.4. (Produit scalaire)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , un produit scalaire sur \mathbb{R} est application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ possède les propriétés suivantes :

$\forall x, y, z \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

- i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle.$
- ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$
- iii) $\langle x, x \rangle \geq 0.$
- iv) $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un est préhilbertien.

Remarque 1.

Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante :

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 1.5. (Espace de Hilbert)

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Définition 1.6. (Espace $C[a, b]$ [18])

C'est l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, de norme

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

Exemple 1.2.

Soit $C([a, b], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

Définition 1.7. (Espace $C^k[a, b]$ [18])

C'est l'espace des fonctions k fois continument dérivables sur $[a, b]$, de norme

$$\|x\| = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a, b]} |x^{(i)}(t)|,$$

telle que $x^{(0)}(t) = x(t)$.

Théorème 1.1. (Théorème d'Ascoli-Arzelà)

Soit $A \subset C(E, F)$ est relativement compact si et seulement si :

1. A est équicontinue c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall t_1, t_2 \in [a, b] \text{ telque } |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon.$$

2. A est uniformément bornée.

1.2 Quelques théorèmes du point fixe

Théorème 1.2. (Principe de contraction de Banach)

Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et $T : E \rightarrow E$ une application contractante, c'est-à-dire

$$\exists k \in]0, 1[\text{ telque } \forall x, y \in E, d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors T admet un point fixe unique $x_0 = T(x_0) \in E$.

Théorème 1.3. (Théorème du point fixe de Krasnoselski [6])

Soit K un sous ensemble non vide convexe fermé d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Supposons que A et B sont deux applications de K dans X telles que

- i) A est continue et compact.
- ii) $Ax + By \in K, \quad \forall x, y \in K$.
- iii) B est une contraction.

Alors $\exists y \in K$ telque $Ay + By = y$.

Remarque 2.

- a) Si $A = 0$, le théorème se résume au théorème de Banach.
- b) Si $B = 0$, le théorème n'est autre que le théorème de Schauder.

Démonstration 1.1.

D'après la condition iii), on a :

$$\begin{aligned}
 \|(I - B)x - (I - B)y\| &= \|(x - y) - (Bx - By)\| \\
 &\leq \|x - y\| + \|Bx - By\| \\
 &\leq \|x - y\| + \alpha\|x - y\| \\
 &\leq (1 + \alpha)\|x - y\|.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 \|(I - B)x - (I - B)y\| &= \|(x - y) - (Bx - By)\| \\
 &\geq \|x - y\| - \|Bx - By\| \\
 &\geq \|x - y\| - \alpha\|x - y\| \\
 &\geq (1 - \alpha)\|x - y\|.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

En résumé,

$$(1 - \alpha)\|x - y\| \leq \|(I - B)x - (I - B)y\| \leq (1 + \alpha)\|x - y\|. \tag{1.3}$$

Cette inégalité montre que $(I - B) : K \rightarrow (I - B)K$ est continue.

Montrons que $(I - B)^{-1}$ existe et continue

On a :

$$\|(I - B)x - (I - B)y\| \neq 0 \Rightarrow (I - B)x \neq (I - B)y.$$

On conclut que $(I - B)$ est injective et comme $(I - B) : K \rightarrow (I - B)K$, alors $\forall y \in (I - B)K$, $\exists x \in K$ telque $(I - B)x = y$ d'où $(I - B)$ est surjective et donc $(I - B)^{-1}$ existe.

Il reste à montrer $(I - B)^{-1} : (I - B)K \rightarrow K$ est continue.

Comme $(I - B)^{-1}$ existe donc

$$\begin{aligned}
 \|(I - B)^{-1}(x) - (I - B)^{-1}(y)\| &\geq (1 - \alpha)\|x - y\| \\
 \Leftrightarrow \|x' - y'\| &\geq (1 - \alpha)\|(I - B)^{-1}x' - (I - B)^{-1}y'\|.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Donc

$$\|(I - B)^{-1}x' - (I - B)^{-1}y'\| \leq \frac{1}{1 - \alpha}\|x' - y'\| \text{ avec } (1 - \alpha) \neq 0.$$

D'où $(I - B)^{-1}$ est lipschitzienne donc continue.

Posons $U = (I - B)^{-1}A$. Il est clair que U est une application compacte puisque U est une composition d'une application continue avec une application compacte donc d'après le théorème de Schauder U admet un point fixe c'est-à-dire

$$\exists x \in K \text{ telque } (I - B)^{-1}Ax = x.$$

Ceci équivalent à dire $Ax + Bx = x$.

1.3 Généralités sur les équations intégrales et les équations intégrales différentielles

Définition 1.1. [18]

On appelle équation intégrale non linéaire une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration. C'est en générale l'équation par rapport à l'inconnue φ de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.5)$$

où

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t) F(\varphi(t)) dt. \quad (1.6)$$

Avec Ω un espace mesuré, f une fonction mesurable donnée sur Ω .

λ : un scalaire donné qui peut être réel ou complexe (un paramètre numérique).

K : une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale.

F : une fonction non linéaire avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation (1.5) où f , F et K sont des fonctions connues et φ la fonction inconnue.

Remarque 3.

Si on prend

$$K(x, t, \varphi(t)) = k(x, t)\varphi(t) \text{ où } F(\varphi(t)) = \varphi(t),$$

les équations (1.5) et (1.6) deviennent linéaires.

1.3.1 Classification des équations intégrales non linéaires

Une équation intégrale non linéaire de Fredholm de premier espèce est de la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = 0.$$

Une équation intégrale non linéaire de Fredholm de second espèce est de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

Une équation intégrale non linéaire de Volterra de premier espèce est de la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = 0.$$

Une équation intégrale non linéaire de Volterra de second espèce est de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt.$$

Exemple 1.3.

En illustrant par les exemples

1. $\cos(2x) + t + 0,01 \int_{-1}^1 e^{-x} \cosh(\varphi(t)) dt = 0.$

2. $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x-t) \sin(\varphi(t)) dt.$

$$3. 1 - e^{3x} + \int_0^x x \frac{1}{1 + \varphi^2(t)} dt = 0.$$

$$4. \varphi(x) = x^3 + 6x + 4 \int_0^x (x - 2t)\varphi^2(t)dt.$$

respectivement.

Remarque 4.

1. Si $f(x) = 0$, alors l'équation est dite homogène.
2. Si $f(x) \neq 0$, alors l'équation est dite non homogène.

Définition 1.2.

Les équations intégro-différentielles apparaissent dans de nombreuses applications scientifiques, surtout lorsque nous convertissons des problèmes à valeurs initiales ou des problèmes à valeurs au bord en équations intégrales. Les équations intégro-différentielles contiennent à la fois des opérateurs intégraux et différentiels. Les dérivées des fonctions inconnues peuvent apparaître dans n'importe quel ordre.

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} K(x, t)F(\varphi(t))dt. \quad (1.7)$$

Où $h(x)$, $g(x)$, $f(x)$, λ et le noyau $K(x, t)$ sont donnés.

Les équations intégro-différentielles seront classées en types distincts selon les bornes de l'intégration et le noyau $K(x, t)$. [21]

1.3.2 Classification des équations intégro-différentielles non linéaires

a) Équations intégro-différentielles de Fredholm

L'équation intégro-différentielle de Fredholm apparaît sous la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)F(\varphi(t))dt. \quad (1.8)$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la n-ème dérivée de $\varphi(x)$.

Exemple 1.4.

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 x\varphi^3(t)dt.$$

b) Équations intégro-différentielles de Volterra

Les équations intégro-différentielles de Volterra apparaissent lorsque nous convertissons les problèmes à valeurs initiales en équations intégrales. L'équation intégro-différentielle de Volterra contient la fonction inconnue $\varphi(x)$ et l'une de ses dérivées $\varphi^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral. L'équation intégro-différentielle de Volterra apparaît sous la forme suivante :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(\varphi(t))dt. \quad (1.9)$$

où $\varphi^{(n)}(x)$ indique la n-ème dérivée de $\varphi(x)$.

Exemple 1.5.

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = \sin(x) - \cos(x) + \int_0^x te^{\varphi(t)}dt.$$

c) **Équations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm**

On appelle équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)F(\varphi(t))dt + \lambda \int_a^b K(x, t)F(\varphi(t))dt.$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la n-ème dérivée de $\varphi(x)$.

Exemple 1.6.

1. $\varphi'(x) = 2x^3 + x + 2 \int_0^x (x-t)\varphi^3(t)dt + 2 \int_0^1 (x-t)\varphi^3(t)dt.$
2. $\varphi''(x) + \varphi(x) = \sin(x) - \cos(x) + \int_0^x te^{\varphi(t)}dt + \int_0^1 te^{\varphi(t)}dt.$
3. $\varphi''(x) + \varphi(x) = x - \sin(x) - \int_0^x xt \sinh(\varphi(t))dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt \sinh(\varphi(t))dt.$

Chapitre 2

Résolution des équations intégrales-différentielles

2.1 Méthode de transformation différentielle (polynôme d'Adomian)

Le traitement des équations intégrales-différentielles non linéaires par la méthode de transformée différentielle, elle consiste à remplacer le terme non linéaire par les polynômes d'Adomian pour l'indice k , et les autres termes de l'équation donnée par la relation récurrente pour les composantes de transformée différentielle pour le même but. [5, 17]

2.1.1 Polynôme d'Adomian

On utilise les polynômes d'Adomian pour trouver $y(x)$, solution d'une équation non linéaire notée $g(y)$ [5, 9], telle que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x), g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

g : opérateur non linéaire

$A_n, (n \geq 0)$: polynômes d'Adomian donnés par la formule :

$$A_0 = g(y_0), A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} g \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i \right) \right]_{\lambda=0}.$$

Les six premiers polynômes d'Adomian [4, 20] :

$$A_0 = g(y_0).$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{d\lambda} g \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i \right) \right]_{\lambda=0} = y_1 g^{(1)}(y_0).$$

$$A_2 = y_2 g^{(1)}(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 g^{(2)}(y_0).$$

$$A_3 = y_3 g^{(1)}(y_0) + y_1 y_2 g^{(2)}(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 g^{(3)}(y_0).$$

$$A_4 = y_4 g^{(1)}(y_0) + (y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_1^2) g^{(2)}(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 g^{(3)}(y_0) + \frac{1}{4!} y_1^4 g^{(4)}(y_0).$$

$$A_5 = y_5 g^{(1)}(y_0) + (y_2 y_3 + y_1 y_4) g^{(2)}(y_0) + \frac{1}{2!} (y_1^2 y_3 + y_1 y_2^2) g^{(3)}(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 y_2 g^{(4)}(y_0) + \frac{1}{5!} y_1^5 g^{(5)}(y_0).$$

Alors on a la relation réccurante suivante :

$$A_0 = g(y_0), A_n = \sum_{k=1}^n C_n^k g^{(k)}(y_0), n \geq 1$$

les coefficients C_n^k [7, 8] définie par

$$\begin{aligned} C_n^k &= y_n, k \leq 1 \\ C_n^k &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-k} (j+1) y_{j+1} C_{n-1-j}^{k-1}, (2 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

2.1.2 Application de la méthode d'Adomian

Soit le problème du deuxième ordre [12, 15] suivant

$$\begin{cases} Ly &= g(y) + f(x), (a \leq x \leq b) \\ y(a) &= \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \quad (2.1)$$

telle que

$$L = \frac{d^2}{dx^2},$$

$f(x)$: fonction continue.

$g(y)$: fonction analytique non linéaire.

$$L^{-1}\bullet = \int_a^x \int_a^{t_2} \bullet dt_1 dt_2,$$

on applique L^{-1} sur les deux membres de l'équation (2.1), on obtient

$$y(x) - y(a) - y'(a)(x-a) = L^{-1}(g(y)) + L^{-1}(f(x)). \quad (2.2)$$

Soit ($x = b$), on obtient

$$y'(a) = \frac{y(b) - y(a) - [L^{-1}(g(y))]_{x=b} - [L^{-1}(f(x))]_{x=b}}{b-a},$$

tel que

$$[L^{-1}\bullet]_{x=b} = \int_a^b \int_a^{t_2} \bullet dt_1 dt_2. \quad (2.3)$$

Substituons l'équation (2.3) dans l'équation (2.2), on a

$$y(x) = y(a) + \frac{y(b) - y(a)}{b-a}(x-a) - \frac{x-a}{b-a} [L^{-1}g]_{x=b} + L^{-1}f + L^{-1}g(y) - \frac{x-a}{b-a} [L^{-1}f]_{x=b}. \quad (2.4)$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x), \quad g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

$$\begin{cases} y_0 &= y(a) + \frac{y(b) - y(a)}{b-a}(x-a) - \frac{x-a}{x-b} [L^{-1}f]_{x=b} + L^{-1}f \\ y_{n+1} &= L^{-1}A_n - \frac{x-a}{x-b} [L^{-1}A_n]_{x=b}, n \geq 0 \end{cases}$$

2.1.3 La convergence de la méthode d'Adomian

Soit l'opérateur non linéaire g d'un espace de Hilbert H dans lui même, pour toute série $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ convergente on définit $g(y)$ par

$$g(y) = \sum_{i=0}^n A_i(y_1, y_2, \dots, y_i).$$

La méthode devient à déterminer la suite $(S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ à l'aide du schéma itératif suivant :

$$S_{n+1} = g(y_0 + S_n), S_0 = 0.$$

Alors il y a donc l'équivalence de la méthode d'Adomian et la relation qui correspond à la résolution de l'équation $S = g(y_0 + S)$ qui conduit au problème du point fixe.

• Si g est contractante ($\|g\| < 1$) alors la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge à l'unique solution de l'équation $g(y_0 + S) = S$, on a en plus $y_n = (S_n - S_{n-1}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ [5, [11], [14].

Exemple 2.1. [11]

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y''(x) &= e^y, \quad (0 \leq x \leq 1) \\ y(0) &= 1, \quad y(1) = 0, \end{cases}$$

la solution exacte est

$$y^*(x) = 2 \ln \left(k \sec \frac{k(2x-1)}{4} \right) - \ln(2), \quad \text{où } \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)},$$

telle que k satisfait $k \sec \frac{k}{4} = \sqrt{2}$.

On a

$$y(x) = y(a) + \frac{y(b) - y(a)}{b - a} (x - a) - \frac{x - a}{b - a} [L^{-1}f]_{x=a} + L^{-1}f + L^{-1}g(y) - \frac{x - a}{b - a} [L^{-1}g(y)]_{x=a}.$$

De même, on a

$$f(x) = 0, \quad g(y) = e^y, \quad (b = 1, a = 0)$$

telle que

$$L^{-1} \bullet = \int_0^x \int_0^{t_2} \bullet dt_1 dt_2.$$

Les polynômes d'Adomian de la fonction $g(y) = e^y$ sont :

$$A_0 = g(y_0) = e^{y_0}.$$

$$A_1 = e^{y_0} y_1.$$

$$A_2 = e^{y_0} \left(y_2 + \frac{y_1^2}{2} \right).$$

$$A_3 = e^{y_0} \left(\frac{y_1^3}{6} + y_1 y_2 + y_3 \right).$$

$$A_4 = e^{y_0} \left(\frac{y_1^4}{24} + \frac{1}{2} y_1^2 y_2 + \frac{y_1^2}{2} + y_1 y_3 + y_4 \right), \dots$$

On a

$$y_0 = 0,$$

$$y_n = L^{-1}A_{n-1} - x[L^{-1}A_{n-1}]_{x=1}, n = 1, 2, \dots$$

où on obtient

$$y_1 = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2 = \frac{x}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24},$$

$$y_3 = -\frac{x}{160} + \frac{x^3}{144} + \frac{x^4}{96} + \frac{x}{24} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{180}, \dots$$

La solution approchée est

$$\tilde{y}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{24} + \frac{x}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24} - \frac{x}{160} + \frac{x^3}{144} + \frac{x^4}{96} + \frac{x}{24} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{180} + \dots$$

2.1.4 Résolution approchée des équations intégrales non linéaires par la transformation différentielle d'Adomian

La transformation de la k-ième dérivée d'une fonction d'une seule variable est

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=x_0}. \quad (2.5)$$

La transformée inverse est définie par

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)(x - x_0)^k.$$

Dans ce travail nous utilisons une lettre minuscule pour les fonctions originales et une lettre majuscule pour la transformée de la fonction. [3]

On a les résultats suivants :

Théorème 2.1. [1, 2, 10]

1. Si $y(x) = f(x) \pm h(x)$, alors $Y(k) = F(k) \pm H(k)$.
2. Si $y(x) = cf(x)$, alors $Y(k) = cF(k)$ telle que c est constante.
3. Si $y(x) = f^{(n)}(x)$, alors $Y(k) = \frac{(k+n)!}{k!} F(k)$.
4. Si $y(x) = f(x)h(x)$, alors $Y(k) = \sum_{k_1=0}^k F(k_1)H(k-k_1)$.
5. Si $y(x) = x^m$, alors $Y(k) = \delta(k-m)$, telle que

$$\delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

6. Si $y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, alors $Y(k) = \frac{F(k-1)}{k}, k \geq 1$.

7. Si $y(x) = \int_{x_0}^x f_1(t)f_2(t)dt$, alors $Y(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} F_1(k_1)F_2(k - k_1 - 1), k \geq 1$.

8. Si $y(x) = f(x) \int_{x_0}^x h_1(t)h_2(t)dt$, alors

$$Y(k) = \sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} H_1(k_1 - 1)H_2(k_2 - k_1)H_1(k - k_2), k \geq 1.$$

9. $y(x) = e^{\lambda x}$ alors $Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!}, \lambda$ constante.

10. $y(x) = \cos(\omega x + \alpha), Y(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos(\frac{k\pi}{2} + \alpha)$.

11. $y(x) = \sin(\omega x + \alpha), Y(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin(\frac{k\pi}{2} + \alpha)$.

La relation suivante est utile dans la solution des équations intégro-différentielles de Fredholm, elle peut être obtenue à partir de

$$\int_a^b f_1(t)f_2(t)dt = \sum_{k_1=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} [(b - x_0)^k - (a - x_0)^k] \sum_{k_1=0}^{k-1} F_1(k_1)F_2(k - k_1 - 1) \right\}.$$

2.1.5 Transformation différentielle d'une fonction non linéaire

g : opérateur non linéaire.

$g(y)$: fonction analytique non linéaire, alors

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \left[g \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i \right) \right] \right]_{\lambda=0}. \quad (2.6)$$

A_n : polynômes d'Adomian.

Ainsi les composantes de la transformée différentielle de $g(y)$ sont calculées en utilisant leurs propriétés. [3]

Pour $x = 0$, on a

$$G(0) = g(Y(0)).$$

$$G(1) = Y(1)g^{(1)}(Y(0)).$$

$$G(2) = Y(2)g^{(1)}(Y(0)) + \frac{1}{2!}Y^2(1)g^{(2)}(Y(0)).$$

$$G(3) = Y(3)g^{(1)}(Y(0)) + Y(1)Y(2)g^{(2)}(Y(0)) + \frac{1}{3!}Y^3(1)g^{(3)}(Y(0)).$$

$$G(4) = Y(4)g^{(1)}(Y(0)) + (Y(1)Y(3) + \frac{1}{2!}Y^2(2))g^{(2)}(Y(0)) + \frac{1}{2!}Y^2(1)Y(2)g^{(3)}(Y(0)) + \frac{1}{4!}Y^4(1)g^{(4)}(Y(0)). \quad (2.7)$$

2.1.6 Applications numériques

Appliquons la méthode proposée sur les exemples suivants avec des types non-linéaires.

Exemple 2.2. [3]

On considère l'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra

$$y''(x) - 6y(x) = -4 + 8 \int_0^x ty(t) \ln y(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.8)$$

telle que les conditions initiales

$$y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \quad (2.9)$$

On applique la transformée différentielle pour l'équation (2.8), on obtient

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - 6Y(k) = -4\delta(k) + \frac{8}{k}G(k-2), \quad (2.10)$$

telle que $G(k)$ sont polynômes d'Adomian de la fonction non linéaire $g(y) = y \ln(y)$. substituons $k=0$, $k=1$ dans l'équation (2.10), on obtient :

$$2Y(2) - 6Y(0) = -4.$$

$$6Y(3) - 6Y(1) = 0.$$

Pour $k \geq 2$ l'équation (2.10) devient

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[6Y(k) + \frac{8}{k}G(k-2) \right].$$

La transformée de la condition initiale (2.10) en utilisant (2.6)

$$Y(0) = 1 \text{ et } Y(1) = 0.$$

On utilise la relation (2.6) pour calculer les polynômes d'Adomian pour la fonction non linéaire

$$g(y) = y \ln y.$$

$$G(0) = Y(0) = 1.$$

$$G(1) = Y(1).$$

$$G(2) = Y(2) - \frac{1}{2}Y^2(1).$$

$$G(3) = Y(3) - Y(1)Y(2) + \frac{1}{3}Y^3(1).$$

$$G(4) = Y(4) - Y(1)Y(3) + \frac{1}{2}Y^2(2) + Y^2(1)Y(2) - \frac{1}{4}Y^4(1).$$

$$G(5) = Y(5) - Y(2)Y(3) - Y(1)Y(4) + Y^2(1)Y(3) + Y(1)Y^2(2) - Y^3(1)Y(2) + \frac{1}{5}Y^5(1).$$

$$G(6) = Y(6) - \frac{1}{2}Y^2(3) - Y(2)Y(4) - Y(1)Y(5) + \frac{1}{2}Y^2(1)Y^2(2)$$

$$+ \frac{1}{3}Y^3(1)Y(3) - \frac{3}{2}Y^2(1)Y^2(2) - Y^3(1)Y(3) + Y^4(1)Y(2) - \frac{1}{6}Y^6(1).$$

En utilisant la transformée inverse, on obtient la solution approximative

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{120}x^{10} + O(x^{11}).$$

Exemple 2.3. [3]

On considère l'équation intégro-différentielle non linéaire de Fredholm

$$(x^3 + 1)y^{(4)}(x) - \frac{8}{315}y'(x) = \frac{x^2}{8} + \int_0^1 xt(x+t)y^3(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.11)$$

les conditions initiales sont :

$$y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = 2, y^{(3)}(0) = 0. \quad (2.12)$$

Les transformées différentielles de (2.11) et les conditions initiales (2.12) sont :

$$Y(k+4) = \frac{k!}{(k+4)!} \left[\frac{k!}{(k-3)!} Y(k) + \frac{8(k+1)}{315} Y(k+1) + \left(\frac{1}{8} + \alpha \right) \delta(k-2) + \beta \delta(k-1) \right], \quad (2.13)$$

telle que

$$\alpha = \int_0^1 ty^3(t)dt, \quad \beta = \int_0^1 t^2y^3(t)dt, \quad (2.14)$$

et

$$Y(0) = -1, Y(1) = 0, Y(3) = 0, Y(4) = 0.$$

Substituant $k = 1$ et $k = 2$ dans l'équation (2.13) donc

$$Y(5) = \frac{2}{4725} + \frac{\beta}{120}.$$
$$Y(6) = \frac{1}{2880} + \frac{\alpha}{360}.$$

La relation suivante est obtenue à partir de l'équation (2.14)

$$Y(k+4) = \frac{k!}{(k+4)!} \left[-\frac{k!}{(k-3)!} Y(k) + \frac{8(k+1)}{315} Y(k+1) \right]_{k \geq 3}.$$

Par (2.14), on peut montrer que :

$$\alpha = \sum_{k=2}^N \frac{G(k-2)}{k}, \quad \beta = \sum_{k=3}^N \frac{G(k-3)}{k}.$$

$$G(0) = Y^2(0) = -1.$$

$$G(1) = -3Y(1).$$

$$G(2) = 3Y(2) + Y(1)Y(2) - 3Y^2(1).$$

$$G(3) = 3Y(3) - 6Y(1)Y(2) + Y^3(1).$$

$$G(4) = 3Y(4) - 6Y(1)Y(3) - 3Y^2(2) + 3Y^2(1)Y(2).$$

$$G(5) = 3Y(5) - 6(Y(2)Y(3) + Y(1)Y(4)) + 3(Y^2(1)Y(3) + Y(1)Y^2(2)).$$

$$G(6) = 3Y(6) - (3Y^2(3) + 6Y(2)Y(4) + 6Y(1)Y(5)) + Y^3(2) + 6Y(1)Y(3) + 3Y^2(1)Y(4).$$

$$\alpha = -\frac{1}{8}, \quad \beta = -\frac{16}{315},$$

la solution est : $y(x) = -1 + x^2$.

2.2 Méthode de la transformation de l'analyse d'Homotopie

Cette méthode a été prouvée comme l'une des techniques pour résoudre de nombreuses équations fonctionnelles linéaires et non linéaires. Avant de donner le principe de cette méthode avec des exemples appliquées sur les équations intégrales-différentielles, on présente un tout petit peu d'Homotopie. [17]

Définition 2.1. Applications Homotopies [19]

On se donne deux espaces topologiques X et Y , deux fonctions continues $f, g : X \rightarrow Y$, elles sont dites Homotopes (dans Y) s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que

$$\forall x \in X, H(x, 0) = f(x),$$

$$\forall x \in X, H(x, 1) = g(x),$$

on dit alors que H est une Homotopie de f à g .

Autrement dit, selon les valeurs du paramètre t la fonction H passe continûment de f pour ($t = 0$) et (pour $t = 1$). Chaque valeur du paramètre t correspond à une fonction :

$$h_t : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto H(x, t), \quad \text{"située entre } f \text{ et } g"$$

Une autre manière de le voir est que pour chaque $x \in X$, la fonction H définit un chemin γ_x reliant $f(x)$ à $g(x)$.

$$\gamma_x : [0, 1] \rightarrow Y, \quad t \mapsto H(x, t).$$

Exemple 2.4.

On prend $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ et $g(x) = -1$ alors, f et g sont homotopes dans Y via la fonction continue :

$$H(x, t) = 1 - 2t.$$

(à noter dans cet exemple, rien ne dépend de la variable x , ce qui est exceptionnel...).

NB : La mention " homotope dans Y " peut s'avérer très importante : en effet dans l'exemple précédent si on remplace $Y = \mathbb{R}$ par le sous-espace $Y' = \mathbb{R}^*$, f et g sont toujours à valeurs dans Y' mais elles ne sont pas homotopes dans Y' , car il n'existe pas la fonction continue reliant -1 à 1 dans \mathbb{R}^* (le théorème des valeurs intermédiaires).

Exemple 2.5.

On prend $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{C}$, $f(x) = e^{2i\pi x}$ et $g(x) = 0$, f décrit un cercle de rayon unité autour de l'origine : g reste à l'origine. Alors f et g sont homotopes via la fonction continue : $H(x, t) = (1 - t)e^{2i\pi x}$ (pour chaque valeur de t la fonction $h_t(x) = H(x, t)$ décrit un cercle de rayon $1 - t$ autour de l'origine).

• L'équation de déformation d'ordre zéro qui est définie par le Mathématicien Liao :

$$(1 - q)\mathcal{L}[H(x, q) - y_0(x)] = hqN[H(x, q)], \quad q \in [0, 1]$$

N : un opérateur non linéaire.

\mathcal{L} : opérateur de Laplace.

2.2.1 Application de la méthode de transformée d'Homotopie sur l'équation intégral-différentielle de Volterra en utilisant l'opérateur de Laplace

Soit l'équation intégral-différentielle de Volterra :

$$y^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)y(t)dt, \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.15)$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}.$$

\mathcal{L} : opérateur de Laplace

$$\mathcal{L}[y^{(n)}(x)] = \mathcal{L}[f(x)] + \mathcal{L}\left[\int_0^x K(x,t)y(t)dt\right].$$

- On définit l'équation non linéaire N comme suit :

$$N[H(x, q)] = \mathcal{L}[H^{(n)}(x, q)] - \mathcal{L}[f(x)] - \mathcal{L}\left[\int_0^x K(x, t)H(t, q)dt\right],$$

telle que $q \in [0, 1]$.

On note que l'opérateur non linéaire N vérifie $N[y(x)] = 0$, où $y(x)$ est une fonction inconnue de l'équation intégral-différentielle.

- Montrons que $y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x)$.

Par le développement de Taylor de $H(x, q)$ on a :

$$H(x, q) = H(x, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot \frac{\partial^m H(x, q)}{\partial q^m} \Bigg|_{q=0}.$$

On pose

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \cdot \frac{\partial^m H(x, q)}{\partial q^m} \Bigg|_{q=0}.$$

On obtient

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x), \text{ avec } y_0 = H(x_0, q).$$

On a

$$(1 - q)\mathcal{L}[H(x, q) - y_0(x)] = hqN[H(x, q)]. \quad (2.16)$$

La dérivée de (2.16) donne :

$$-\mathcal{L}[H(x, q) - y_0(x)] + (1 - q)\mathcal{L}\left[\frac{\partial H(x, q)}{\partial q}\right] = hN[H(x, q)] + qh\frac{\partial N[H(x, q)]}{\partial q}.$$

Pour $q = 0$, on obtient :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial H(x, 0)}{\partial q}\right] = hN[H(x, 0)].$$

On a

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \cdot \frac{\partial^m H(x, q)}{\partial q^m} \Bigg|_{q=0}.$$

Pour $m = 1$, on obtient :

$$y_1(x) = \frac{1}{1!} \cdot \frac{\partial H(x, q)}{\partial q} \Big|_{q=0}.$$

$$\vec{y}_m = (y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)).$$

L'équation de déformation d'ordre m est

$$\mathcal{L}[y_m(x) - X_m y_{m-1}(x)] = h R_m(y_{m-1}(x)).$$

$$R_m(y_{m-1}(x)) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{\partial^{m-1} H(x, q)}{\partial q^{(m-1)}} \Big|_{q=0}.$$

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

$$y(x) = \sum_{m=0}^M y_m(x). \quad (2.17)$$

Pour $M \rightarrow \infty$, on obtient une approximation précise de l'équation originale.

2.2.2 Convergence de la méthode

Définition 2.2. [13, 16]

Soit $\varphi_m(x)$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. L'approximation successive de la solution $y(x)$ du problème si les constantes positives P, L existent telle que

$$L = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\varphi_{m+1}(x_i) - y(x_i)|}{|\varphi_n(x_i) - y(x_i)|^P}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

alors la méthode est converge.

P : l'ordre de la convergence.

L : facteur de la convergence.

2.2.3 Estimation de l'erreur

Définition 2.3. [16]

L'erreur relative δ_n de n termes d'approximation de la méthode d'analyse d'Homotopie est donnée par :

$$\delta_n = \frac{|u_{\text{exacte}}(x) - u_{\text{approchée}}(x)|}{|u_{\text{exacte}}(x)|}.$$

L'erreur maximale est définie par :

$$E_n = \|y_{\text{exacte}}(x) - \varphi_n(x)\|_{\infty}, \quad n = 1, 2, \dots$$

où n est le nombre d'itérations.

Exemple 2.6.

Nous utilisons la méthode proposé pour trouver la solution approximative de l'équation intégro-différentielle suivante :

Soit le problème

$$\begin{cases} y^{(8)}(x) = -8e^x + x^2 + y(x) + \int_0^1 x^2 y'(t) dt, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1, y^{(3)}(0) = -2, \\ y^{(4)}(0) = -3, y^{(5)}(0) = -4, y^{(6)}(0) = -5, y^{(7)}(0) = -6. \end{cases} \quad (2.18)$$

La solution exacte est

$$y(x) = e^x - xe^x.$$

On applique la tranformation de Laplace des deux cotés de (2.18)

$$\begin{aligned} L[y^{(8)}(x)] &= L[-8e^x + x^2] + L[y(x)] + \frac{2}{s^3} \int_0^1 y'(t) dt \\ \iff s^8 \mathcal{L}[y(x)] &- s^7 y(0) - s^6 y'(0) - s^5 y''(0) - s^4 y^{(3)}(0) - s^3 y^{(4)}(0) - s^2 y^{(5)}(0) \\ &- s y^{(6)}(0) - y^{(7)}(0) + \frac{8}{s-1} - \frac{2}{s^3} - \mathcal{L}[y(x)] - \frac{2}{s^3} \int_0^1 y'(t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

tenant compte les conditions initiales

$$\begin{aligned} L[y(x)] &+ \left(-\frac{s^7}{(s^8-1)} + \frac{s^5}{(s^8-1)} + \frac{2s^4}{(s^8-1)} + \frac{3s^3}{(s^8-1)} + \frac{4s^2}{(s^8-1)} + \frac{5s}{(s^8-1)} \right. \\ &+ \left. \frac{6}{(s^8-1)} + \frac{8}{(s^8-1)(s-1)} - \frac{2}{s^3(s^8-1)} \right) - \frac{2}{s^3(s^8-1)} \int_0^1 y'(t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

On définit l'équation non linéaire N comme suit :

$$\begin{aligned} N[H(x, t; q)] &= L[H(x, t; q)] \\ &+ \left(-\frac{s^7}{(s_1^8)} + \frac{s^5}{(s_1^8)} + \frac{2s^4}{(s_1^8)} + \frac{3s^3}{(s_1^8)} + \frac{4s^2}{(s_1^8)} + \frac{5s}{(s_1^8)} + \frac{6}{(s_1^8)} + \frac{8}{(s_1^8)(s-1)} - \frac{2}{s^3(s_1^8)} \right) \\ &- \frac{2}{s^3(s^8-1)} \int_0^1 y'(t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'équation de déformation du m-ème ordre

$$y_m(x, t) = X_m y_{m-1}(x, t) + h \mathcal{L}^{-1}(R_m(\vec{y}_{m-1}(x, t))),$$

telle que

$$\begin{aligned} R_m(\vec{y}_{m-1}) &= \mathcal{L}[y_{m-1}] + \left(-\frac{s^7}{(s^8-1)} + \frac{s^5}{(s^8-1)} + \frac{2s^4}{(s^8-1)} + \frac{3s^3}{(s^8-1)} + \frac{4s^2}{(s^8-1)} \right. \\ &+ \left. \frac{5s}{(s^8-1)} + \frac{6}{(s^8-1)} + \frac{8}{(s^8-1)(s-1)} - \frac{2}{s^3(s^8-1)} \right) - \frac{2}{s^3(s^8-1)} \int_0^1 y'(t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, on trouve :

$$y_0(x) = 0.$$

$$y_1(x) = e^x h x + h x^2 + \frac{1}{2} \left(\cos[x] - 3 \cosh[x] - 2 \sinh[x] - 2 \sin \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \sinh \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right).$$

$$y_2(x) = e^x h (1+h) - \frac{h t^2 \left(h + e \left(-4 + h \left(e - 2 \left(6 + \cos[1] - 2 \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \sinh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right) \right) \right) \right)}{4e} \\ + \frac{h \left(\cosh[x] \left(h + e \left(-12 + h \left(-20 + e - 2 \cos[1] + 4 \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \sinh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right) \right) \right) \right)}{8e} \\ - \frac{8e(1+h \sinh[x]) + \left(h + e \left(-4 + h \left(-12 + e - 2 \cos[1] + 4 \sin \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \sinh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right) \right) \right)}{8e} \\ + \frac{\left(\cos[x] - 2 \sin \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \sinh \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)}{8e}.$$

Pour $h = -1$, on aura la solution :

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x) = e^x - x e^x.$$

2.3 L'existence et l'unicité des solutions des équations intégrales différentielles non linéaires

2.3.1 Les hypothèses de l'existence et l'unicité de la solution

Afin de prouver tous les théorèmes, on considère les hypothèses suivantes :

H.1 Les fonctions A et B sont des éléments de l'espace $C(I, \mathbb{R})$.

H.2 La fonction connue f est un élément de l'espace $C^2(I, \mathbb{R})$.

H.3 Pour chaque $y \in I$ le noyau $(x, y) \mapsto \psi(x, y)$ est continue en x , $x \in \mathbb{R}$.

$$\left(\int_a^b (\psi(x, y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma, \quad \forall x \in I, \quad \gamma > 0. \quad (2.19)$$

H.4 $(\alpha + (k_1 |\lambda_1| + |\lambda_2|) C^*(1)) \leq |\omega|$, où $\alpha = (b-a)(\|A\|_\infty + (b-a)\|B\|_\infty)$,

$$C^*(l) = \binom{p}{l} \frac{\gamma (b-a)^{2l+\frac{1}{2}} (d^*(l))^{\frac{1}{2}}}{(2p-2l+1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.20)$$

et

$$d^*(l) = \{ \eta_2^{2p-2l} + \eta_2^{2p-2l-1} \eta_1 + \dots + \eta_1^{2p-2l} \}.$$

H.5 $(\alpha + (|\lambda_1| + |\lambda_2|) \Lambda) \leq |\omega|$, où

$$\Lambda = \sum_{l=1}^p \frac{e(l) C^*(l)}{(b-a)^{3l-3}},$$

où $I = [a, b]$, $k_1 = 1$.

Théorème 2.1.

Soit le problème aux limites

$$\begin{aligned} \omega\phi''(x) + A(x)\phi'(x) + B(x)\phi(x) &= f(x) + \lambda_1 \int_a^x \psi(x, y)[\phi(y)]^p dy \\ &+ \lambda_2 \int_a^b \psi(x, y)[\phi(y)]^p dy, \quad \forall x \in [a, b], \end{aligned} \quad (2.21)$$

avec les conditions initiales

$$\phi(a) = \eta_1, \quad \phi(b) = \eta_2, \quad \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.22)$$

qui satisfait les conditions **(H.1)**, **(H.2)** et **(H.3)**.

Alors (2.21) est équivalente à l'équation intégrale non linéaire de Volterra-Fredholm suivante :

$$\begin{aligned} \omega u(x) &+ \int_a^b [W(x, t) - \lambda_1 \int_a^x R(x, y; 1)H_2(y, t)dy - \lambda_2 \int_a^b R(x, y; 1)H_2(y, t)dy] u(t)dt \\ &= F(x) + \lambda_1 \int_a^x \sum_{l=2}^p R(x, y; l) \left(\int_a^b H_2(y, t)u(t)dt \right)^l dy \\ &+ \lambda_2 \int_a^b \sum_{l=2}^p R(x, y; l) \left(\int_a^b H_2(y, t)u(t)dt \right)^l dy. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Où

$$u(x) := \phi''(x), \quad (2.24)$$

$$W(x, t) := \frac{1}{b-a} \times \begin{cases} W_1(x, t) = (t-a)(A(x) - (b-x)B(x)), & a \leq t \leq x, \\ W_2(x, t) = (t-b)(A(x) - (a-x)B(x)), & x \leq t \leq b, \end{cases} \quad (2.25)$$

$$R(x, y; l) := \binom{p}{l} \frac{\psi(x, y)}{(b-a)^p} [\eta_1(b-y) + \eta_2(y-a)]^{p-l}, \quad (2.26)$$

$$H_2(y, t) := \begin{cases} (b-y)(a-t), & a \leq t \leq y, \\ (a-y)(b-t), & y \leq t \leq b, \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\mu(x) := \frac{1}{b-a} (\eta_1[-A(x) + (b-x)B(x)] + \eta_2[A(x) + (x-a)B(x)]), \quad (2.28)$$

$$F(x) := f(x) - \mu(x) + \lambda_1 \int_a^x R(x, y; 0)dy + \lambda_2 \int_a^b R(x, y; 0)dy. \quad (2.29)$$

Démonstration 2.1.

Soit $\phi''(x) := u(x)$, avec la fonction $x \mapsto u(x)$ est à valeur dans l'espace $C(I, \mathbb{R})$.

Nous avons

$$\phi'(x) = \phi'(a) + \int_a^x u(t)dt, \quad (2.30)$$

et

$$\phi(a) = \eta_1 + (x-a)\phi'(a) + \int_a^x (x-t)u(t)dt. \quad (2.31)$$

On remplace x par b dans l'équation (2.31), puis on utilise les équations (2.30) et (2.31), on trouve :

$$\phi'(x) = \frac{1}{b-a} \left[(\eta_2 - \eta_1) + \int_a^b H_1(x, t) u(t) dt \right], \quad (2.32)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{b-a} \left[\eta_1(b-x) + \eta_2(x-a) + \int_a^b H_2(x, t) u(t) dt \right]. \quad (2.33)$$

Où

$$H_1(x, t) := \begin{cases} (t-a), & a \leq t \leq x, \\ (t-b), & x \leq t \leq b, \end{cases}$$

$$H_2(x, t) := \begin{cases} (b-x)(a-t), & a \leq t \leq x, \\ (a-x)(b-t), & x \leq t \leq b, \end{cases}$$

et

$$[\phi(x)]^p = \frac{1}{b-a} \sum_{l=0}^p \binom{p}{l} [\eta_1(b-x) + \eta_2(x-a)]^{p-l} \left(\int_a^b H_2(x, t) u(t) dt \right)^l. \quad (2.34)$$

Substituons les équations (2.32) et (2.34) dans l'équation (2.21), on trouve

$$\begin{aligned} \omega u(x) &+ \frac{1}{b-a} \int_a^b [A(x)H_1(x, t) + B(x)H_2(x, t)] u(t) dt - \lambda_1 \int_a^x R(x, y; 1) H_2(y, t) dy u(t) dt \\ &- \lambda_2 \int_a^b R(x, y; 1) H_2(y, t) dy u(t) dt \\ &= F(x) + \lambda_1 \int_a^x \sum_{l=2}^p R(x, y; l) \left(\int_a^b H_2(x, t) u(t) dt \right)^l \\ &+ \lambda_2 \int_a^b \sum_{l=2}^p R(x, y; l) \left(\int_a^b H_2(x, t) u(t) dt \right)^l. \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} \omega u(x) &+ \int_a^b [W(x, t) - \lambda_1 \int_a^x R(x, y; 1) H_2(y, t) dy \\ &- \lambda_2 \int_a^b R(x, y; 1) H_2(y, t) dy] u(t) dt \\ &= F(x) + \lambda_1 \int_a^x \sum_{l=2}^p R(x, y; l) \left(\int_a^b H_2(x, t) u(t) dt \right)^l \\ &+ \lambda_2 \int_a^b \sum_{l=2}^p R(x, y; l) \left(\int_a^b H_2(x, t) u(t) dt \right)^l. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Avec $W(x, t)$, $R(x, y; l)$, $\mu(x)$ et $F(x)$ sont définis dans les équations (2.25), (2.26), (2.28) et (2.29) respectivement.

2.3.2 L'existence d'une solution continue

Théorème 2.2.

Si l'équation intégrale non linéaire de Volterra-Fredholm (2.35) satisfait les conditions de (H.1) jusqu'à (H.4). Alors elle admet une solution continue.

Démonstration 2.2.

Soit $\Gamma_r = \{u \in C(I, \mathbb{R}) : \|u\|_\infty = \sup_{x \in I} |u(x)| \leq r\}$. Le rayon r est une solution de l'équation

$$\sum_{l=2}^p (|\lambda_1|k_1^l + |\lambda_2|)C^*(l)r^l + [(\alpha + k_1|\lambda_1| + |\lambda_2|)C^*(1) - |\omega|]r + \|F\|_\infty = 0.$$

Où k_1 est une borne supérieure de $|H_2(x, t)|$.

Pour $u_1, u_2 \in \Gamma_r$, on définit les deux opérateurs suivants à partir de l'équation (2.23)

$$(Tu_1)(x) = \frac{1}{\omega}F(x) - \frac{1}{\omega} \int_a^b [W(x, t) - \lambda_1 \int_a^x R(x, y; 1)H_2(y, t)dy - \lambda_2 \int_a^b R(x, y; 1)H_2(y, t)dy]u(t)dt. \quad (2.36)$$

$$(Wu_2)(x) = \frac{\lambda_1}{\omega} \int_a^x \sum_{l=2}^p R(x, y; l) \left(\int_a^b H_2(y, t)u(t)dt \right)^l dy + \frac{\lambda_2}{\omega} \int_a^b \sum_{l=2}^p R(x, y; l) \left(\int_a^b H_2(y, t)u(t)dt \right)^l dy. \quad (2.37)$$

Alors

$$\begin{aligned} |(Tu_1)(x)| &\leq \frac{1}{|\omega|}|F(x)| + \frac{r}{|\omega|} \int_a^b |W(x, t)|dt \\ &+ \frac{|\lambda_1|r}{|\omega|} \int_a^x \int_a^b |R(x, y; 1)||H_2(y, t)|dtdy \\ &+ \frac{|\lambda_2|r}{|\omega|} \int_a^b \int_a^b |R(x, y; 1)||H_2(y, t)|dtdy \\ &\leq \frac{1}{|\omega|}|F(x)| + \frac{ar}{|\omega|} + \frac{k_1|\lambda_1|pr}{|\omega|(b-a)^{p-3}} \int_a^b \frac{|\psi(x, y)|}{|(\eta_1 - \eta_2)y + (\eta_2b - \eta_1a)|^{1-p}} dy \\ &+ \frac{|\lambda_2|pr}{|\omega|(b-a)^{p-3}} \int_a^b \frac{|\psi(x, y)|}{|(\eta_1 - \eta_2)y + (\eta_2b - \eta_1a)|^{1-p}} dy \\ &\leq \frac{1}{|\omega|}|F(x)| + \frac{ar}{|\omega|} + (k_1|\lambda_1| + |\lambda_2|) \frac{p(b-a)^{\frac{5}{2}}(d^*(1))^{\frac{1}{2}}r}{|\omega|(2p-1)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_a^b (\psi(x, y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|(Tu_1)(x)\|_\infty \leq \frac{1}{|\omega|}\|F(x)\|_\infty + \frac{1}{|\omega|}(\alpha + (k_1|\lambda_1| + |\lambda_2|)C^*(1))r. \quad (2.38)$$

De même,

$$\begin{aligned}
|(Wu_2)(x)| &\leq \frac{|\lambda_1|}{|\omega|} \int_a^x \sum_{l=2}^p |R(x, y; l)| \left(\int_a^b |H_2(y, t)u(t)| dt \right)^l dy \\
&+ \frac{|\lambda_2|}{|\omega|} \int_a^b \sum_{l=2}^p |R(x, y; l)| \left(\int_a^b |H_2(y, t)u(t)| dt \right)^l dy \\
&\leq |\lambda_1| \sum_{l=2}^p \binom{p}{l} \frac{(b-a)^{2l+\frac{1}{2}} (d^*(l))^{\frac{1}{2}} (k_1 r)^l}{|\omega| (2p-2l+1)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_a^b (\psi(x, y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ |\lambda_2| \sum_{l=2}^p \binom{p}{l} \frac{(b-a)^{2l+\frac{1}{2}} (d^*(l))^{\frac{1}{2}} r^l}{|\omega| (2p-2l+1)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_a^b (\psi(x, y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|(Wu_2)(x)\|_\infty \leq \frac{1}{|\omega|} \sum_{l=2}^p (|\lambda_1| k_1^l + |\lambda_2|) C^*(l) r^l. \quad (2.39)$$

Utilisant les équations (2.38) et (2.39), on trouve

$$\begin{aligned}
\|T(u_1) - W(u_2)\|_\infty &\leq \|T(u_1)\|_\infty + \|W(u_2)\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{|\omega|} \|F(x)\|_\infty + \frac{r}{|\omega|} (\alpha + (k_1|\lambda_1| + |\lambda_2|) C^*(1)) r \\
&+ \frac{1}{|\omega|} \sum_{l=2}^p (|\lambda_1| k_1^l + |\lambda_2|) C^*(l) r^l = r.
\end{aligned} \quad (2.40)$$

Ainsi

$$T(u_1) + W(u_2) \in \Gamma_r, \quad \forall u_1, u_2 \in \Gamma_r.$$

On suppose que $x_1 < x_2$, avec $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Les fonctions F, W_1 et W_2 sont continues en x , appliquant les conditions (H.1), (H.2) et (H.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
|(T(u_1))(x_2) - (T(u_1))(x_1)| &\leq \frac{1}{|\omega|} |F(x_2) - F(x_1)| \\
&+ \frac{r}{|\omega|(b-a)} \int_a^{x_1} |W_1(x_2, t) - W_1(x_1, t)| dt \\
&+ \frac{r}{|\omega|(b-a)} \int_{x_2}^b |W_2(x_2, t) - W_2(x_1, t)| dt \\
&+ \int_{x_1}^{x_2} |W_1(x_2, t) - W_2(x_1, t)| dt \\
&+ \frac{(k_1|\lambda_1| + |\lambda_2|)pr}{|\omega|(b-a)^{p-3}} \\
&\times \int_a^b \frac{|\psi(x_2, y)| - |\psi(x_1, y)|}{|(\eta_1 - \eta_2)y + (\eta_2 b - \eta_1 a)|^{1-p}} dy,
\end{aligned} \quad (2.41)$$

$$|(T(u_1))(x_2) - (T(u_1))(x_1)| \longrightarrow 0, \text{ quand } x_2 \text{ tend vers } x_1.$$

Aussi,

$$\begin{aligned} |(W(u_2))(x_2) - (W(u_2))(x_1)| &\leq \sum_{l=2}^p \frac{k_1^l |\lambda_1| + |\lambda_2|}{|\omega|} \binom{p}{l} (b-a)^{3l-p} r^l \\ &\times \int_a^b \frac{|\psi(x_2, y)| - |\psi(x_1, y)|}{|(\eta_1 - \eta_2)y + (\eta_2 b - \eta_1 a)|^{2l-2p}} dy. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Donc, Tu_1 et Wu_2 sont des éléments dans l'espace $C([a, b], R)$.

Par conséquent, l'opérateur $T + W$ est un opérateur qui transforme dans lui même sur Γ_r .

Soient u et u^* deux fonctions définissent sur Γ_r ,

$$\|T(u) - T(u^*)\|_\infty \leq \frac{1}{|\omega|} (\alpha + (k_1 |\lambda_1| + |\lambda_2|) C^*(1)) \|u - u^*\|_\infty. \quad (2.43)$$

Par conséquent, l'opérateur T est une contraction sur Γ_r , selon la condition **(H.4)**.

Considérons la suite u_n avec $u_n \in \Gamma_r$, telle que $u_n \longrightarrow u$ quand n tend vers ∞ .

Il est clair que $u \in \Gamma_r$ et $\sup_{x \in [a, b]} |u_n(x)| \leq r, \forall n \in \mathbb{N}$.

Appliquant le théorème d'Ascoli-Arzelà, alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |(Wu_n)(x) - (Wu)(x)| &\leq \sum_{l=2}^p \frac{(k_1^l |\lambda_1| + |\lambda_2|)}{|\omega|} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |R(x, y; l)| \\ &\times \left| \left(\int_a^b H_2(y, t) u_n(t) dt \right)^l - \left(\int_a^b H_2(y, t) u(t) dt \right)^l \right| \\ &\leq \sum_{l=2}^p \frac{(k_1^l |\lambda_1| + |\lambda_2|)}{|\omega|} e(l) \int_a^b |R(x, y; l)| \\ &\times \left(\int_a^b |H_2(y, t)| \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u| dt \right) dy = 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

où $e(l)$ est une constante positive dépend de l .

Par conséquent, l'opérateur W est un opérateur continu sur Γ_r . Il est clair de l'équation [\(2.39\)](#) que

$$\forall W_{u_n} \in \sup_{x \in [a, b]} |(Wu_2)(x)| \leq \sum_{l=2}^p \frac{(k_1^l |\lambda_1| + |\lambda_2|)}{|\omega|} C^*(l) r^l,$$

l'ensemble $W\Gamma_r$ est uniformément borné.

Considérons la suite $(W_{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $(W_{u_n}) \in W\Gamma_r$.

L'utilisation des étapes similaires à celles que nous avons suivies dans l'équation [\(2.42\)](#) implique

$$|(Wu_2)(x_2) - (Wu_2)(x_1)| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N} \text{ quand } |x_2 - x_1| < \delta.$$

Donc, il existe une sous-suite $\{W_{u_{n_k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément dans $W\Gamma_r$ par l'application du théorème d'Ascoli-Arzelà.

Par conséquent, l'ensemble $W\Gamma_r$ est compact. L'opérateur W est complètement continue.

Toutes les conditions du théorème de Krasnoselskii sont satisfaites.

D'où l'opérateur $T + W$ a au moins un point fixe dans l'ensemble Γ_r , qui est une solution du problème [\(2.35\)](#).

2.3.3 L'unicité de la solution

Théorème 2.3.

Si l'équation intégrale non-linéaire de Volterra Fredholm (2.35) satisfait les conditions (H.1) (H.2), (H.3) et (H.5), alors l'équation admet une unique solution.

Démonstration 2.3.

Il est clair que l'opérateur $T + W$ est un opérateur qui transforme dans lui-même sur Γ_r . Suivons les mêmes étapes de (2.43), nous conduits à :

$$\|W(v) - W(v^*)\|_\infty \leq \frac{1}{\omega} (\alpha + (|\lambda_1| + |\lambda_2|) \sum_{l=2}^p \frac{e(l)C^*(l)}{(b-a)^{3l-3}}) \|v - v^*\|_\infty, \quad \forall v, v^* \in \Gamma_r. \quad (2.45)$$

En utilisant l'équation (2.43) avec la constante $k_1 = 1$ et l'équation (2.45), on trouve

$$\begin{aligned} \|(T + W)(v) - (T + W)(v^*)\|_\infty &\leq \|(T)(v) - (T)(v^*)\| + \|(W)(v) - (W)(v^*)\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{|\omega|} (\alpha + (|\lambda_1| + |\lambda_2|)C^*(l)) \|v - v^*\|_\infty \\ &\quad + \sum_{l=2}^p \frac{1}{|\omega|} (\alpha + (|\lambda_1| + |\lambda_2|) \frac{e(l)C^*(l)}{(b-a)^{3l-3}}) \|v - v^*\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{|\omega|} (\alpha + (|\lambda_1| + |\lambda_2|)\Lambda) \|v - v^*\|_\infty \\ \|(T + W)(v) - (T + W)(v^*)\|_\infty &\leq \|v - v^*\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Par conséquent, l'opérateur $T + W$ est une contraction sur Γ_r , selon la condition (H.1). Ainsi, l'équation intégrale non linéaire de Volterra-Fredholm (2.35) possède une unique solution continue dans Γ_r en se basant sur le théorème du point fixe de Banach.

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales-différentielles non linéaires de Volterra-Fredholm

3.1 La méthode de la transformation différentielle d'Adomian

Exemple 3.1.

Considérons l'équation intégrale-différentielle non linéaire de Volterra-Fredholm suivante :

$$\begin{cases} 4y''(x) + 2xy'(x) + y(x) = \frac{-1}{100} \left(\frac{(1+x)(1+x^{10})}{10} \right) + 48x^2 + 9x^4 \\ \quad + 0,01 \int_0^x (t+tx)y^2(t)dt + 0,01 \int_0^1 (t+tx)y^2(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est : $y_{\text{exacte}}(x) = x^4$.

Puisque

1. Les fonctions $A(x) = 2x$, $B(x) = 1$ sont continues sur $[0, 1]$.

2. $f(x) = \frac{-1}{1000} \left((1+x)(1+x^{10}) \right) + 48x^2 + 9x^4$ appartient à $C^2([0, 1], \mathbb{R})$.

3. $\left(\int_0^1 (y+yx)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x+1}{\sqrt{3}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}, \forall x \in [0, 1]$.

4. $\alpha = 3$, $d^*(1) = 1$, $C^*(1) = \frac{4}{3}$,

$$(\alpha + (k_1|\lambda_1| + |\lambda_2|)C^*(1)) \simeq 3,026 \leq 4.$$

Donc l'équation admet une solution d'après théorème (2.1) et (2.2)

La transformée différentielle de l'équation est :

$$\begin{aligned} Y(k+2) &= \frac{1}{4(k+1)(k+2)} \left[- (2k+1)Y(k) - \frac{1}{1000} (\delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-10) + \delta(k-11)) \right. \\ &\quad \left. + 48\delta(k-2) + 9\delta(k-4) + 0,02 \frac{G(k-2)}{k} + 0,01(\delta(k-1) + 1) \sum_{k'=2}^{k+5} \frac{G(k'-2)}{k'} \right]. \end{aligned}$$

telle que $G(k)$ sont des transformées différentielles (polynômes d'Adomian) de la fonction non linéaire $g(y) = y^2$ et la condition initiale $Y(0) = 0$ et $Y(1) = 1$.

Le polynôme d'Adomian pour cette fonction est :

$$G(0) = g(Y(0)) = g(0) = 0.$$

$$G(1) = Y(1)g'(Y(0)) = 0 \text{ car } g'(Y(0)) = 2Y(0) = 0.$$

$$G(2) = Y(2)g'(Y(0)) + \frac{1}{2!}Y^2(1)g''(Y(0)) = Y^2(1) = 1.$$

Si $k > 2$, alors

$$G(k) = \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^m Y(i)Y(k-i), & \text{si } k = 2m + 1 \\ 2 \sum_{i=1}^{m-1} Y(i)Y(k-i) + Y^2(m), & \text{si } k = 2m \end{cases}$$

Donc

$$G(3) = 2Y(1)Y(2).$$

$$G(4) = 2Y(1)Y(3) + Y^2(2).$$

$$G(5) = 2(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)).$$

$$G(6) = 2(Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + Y^2(3).$$

$$G(7) = 2(Y(1)Y(6) + Y(2)Y(5) + Y(3)Y(4)).$$

$$G(8) = 2(Y(1)Y(7) + Y(2)Y(6) + Y(3)Y(5)) + Y^2(4).$$

$$G(9) = 2(Y(1)Y(8) + Y(2)Y(7) + Y(3)Y(6) + Y(4)Y(5)).$$

$$G(10) = 2(Y(1)Y(9) + Y(2)Y(8) + Y(3)Y(7) + Y(4)Y(6)) + Y^2(5).$$

$$G(11) = 2(Y(1)Y(10) + Y(2)Y(9) + Y(3)Y(8) + Y(4)Y(7) + Y(5)Y(6)).$$

$$G(12) = 2(Y(1)Y(11) + Y(2)Y(10) + Y(3)Y(9) + Y(4)Y(8) + Y(5)Y(7)) + Y^2(6).$$

$$G(13) = 2(Y(1)Y(12) + Y(2)Y(11) + Y(3)Y(10) + Y(4)Y(9) + Y(5)Y(8) + Y(6)Y(7)).$$

$$G(14) = 2(Y(1)Y(13) + Y(2)Y(12) + Y(3)Y(11) + Y(4)Y(10) + Y(5)Y(9) + Y(6)Y(8)) + Y^2(7).$$

Si $k = 0$, on a :

$$\begin{aligned} Y(2) &= \frac{1}{8} \left[-Y(0) - \frac{1}{1000} + 0,01 \sum_{k'=2}^5 \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\ &= \frac{5}{40 - 0,02Y(1)} \left[-Y(0) - \frac{1}{1000} + \frac{0,01}{4} Y^2(1) \right]. \end{aligned}$$

Si $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned} Y(3) &= \frac{1}{24} \left[-3Y(1) - \frac{1}{1000} + 0,02 \sum_{k'=2}^6 \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\ &= \frac{3}{72 - 0,02Y(1)} \left[-3Y(1) - \frac{1}{1000} + \frac{0,01}{2} Y^2(1) + \frac{0,04}{5} Y(1)Y(2) + \frac{0,01}{3} Y^2(2) \right]. \end{aligned}$$

Si $k = 2$, on a :

$$\begin{aligned} Y(4) &= \frac{1}{48} \left[-5Y(2) + 48 + 0,01 \sum_{k'=2}^7 \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\ &= \frac{7}{336 - 0,02Y(1)} \left[-5Y(2) + 48 + \frac{0,01}{4} Y^2(1) + \frac{0,02}{5} Y(1)Y(2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,01}{3} Y(1)Y(3) + \frac{0,01}{6} Y^2(2) + \frac{0,02}{7} Y(2)Y(3) \right]. \end{aligned}$$

Si $k = 3$, on a :

$$\begin{aligned} Y(5) &= \frac{1}{80} \left[-7Y(3) + 0,01 \sum_{k'=2}^8 \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\ &= \frac{4}{320 - 0,01Y(1)} \left[-7Y(3) + \frac{0,01}{4} Y^2(1) + \frac{0,02}{5} Y(1)Y(2) + \frac{0,01}{3} Y(1)Y(3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,01}{6} Y^2(2) + \frac{0,02}{7} Y(1)Y(4) + \frac{0,02}{7} Y(2)Y(3) + \frac{0,01}{4} Y(2)Y(4) + \frac{0,01}{8} Y^2(3) \right]. \end{aligned}$$

Si $k = 4$, on a :

$$\begin{aligned} Y(6) &= \frac{1}{120} \left[-9Y(4) + 9 + 0,02 \frac{G(2)}{4} + 0,01 \sum_{k'=2}^9 \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\ &= \frac{9}{1080 - 0,02Y(1)} \left[-9Y(4) + 9 + \frac{0,03}{4} Y^2(1) + \frac{0,02}{5} Y(1)Y(2) + \frac{0,01}{3} Y(1)Y(3) + \frac{0,01}{6} Y^2(2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,02}{7} (Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + \frac{0,01}{4} (Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + \frac{0,01}{8} Y^2(3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,02}{9} (Y(2)Y(5) + Y(3)Y(4)) \right]. \end{aligned}$$

Si $k = 5$, on a :

$$\begin{aligned} Y(7) &= \frac{1}{168} \left[-11Y(5) + \frac{0,02}{5} G(3) + 0,01 \sum_{k'=2}^{10} \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\ &= \frac{5}{840 - 0,01Y(1)} \left[-11Y(5) + \frac{0,06}{5} Y(1)Y(2) + \frac{0,01}{4} Y^2(1) + \frac{0,01}{3} Y(1)Y(3) + \frac{0,01}{6} Y^2(2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,02}{7} (Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + \frac{0,01}{4} (Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + \frac{0,01}{8} Y^2(3) + \frac{0,02}{9} (Y(1)Y(6) \right. \\ &\quad \left. + Y(2)Y(5) + Y(3)Y(4)) + \frac{0,01}{5} (Y(2)Y(6) + Y(3)Y(5)) + \frac{0,01}{10} Y^2(4) \right]. \end{aligned}$$

Si $k = 6$, on a :

$$\begin{aligned} Y(8) &= \frac{1}{224} \left[-13Y(6) + \frac{0,01}{3} G(4) + 0,01 \sum_{k'=2}^{11} \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\ &= \frac{11}{2464 - 0,02Y(1)} \left[-13Y(6) + 0,01Y(1)Y(3) + \frac{0,01}{2} Y^2(2) + \frac{0,01}{4} Y^2(1) + \frac{0,02}{5} Y(1)Y(2) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{0,02}{7}(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + \frac{0,01}{4}(Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + \frac{0,01}{8}Y^2(3) + \frac{0,02}{9}(Y(1)Y(6) \\
& + Y(2)Y(5) + Y(3)Y(4)) + \frac{0,01}{5}(Y(1)Y(7) + Y(2)Y(6) + Y(3)Y(4)) + \frac{0,01}{10}Y^2(4) + \frac{0,02}{11}(Y(2)Y(7) \\
& + Y(3)Y(6) + Y(4)Y(5)) \Big].
\end{aligned}$$

Si $k = 7$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(9) &= \frac{1}{288} \left[-15Y(7) + \frac{0,02}{7}G(5) + 0,01 \sum_{k'=2}^{12} \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\
&= \frac{6}{1728 - 0,01Y(1)} \left[-15Y(7) + \frac{0,06}{7}(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + \frac{0,01}{4}Y^2(1) + \frac{0,02}{5}Y(1)Y(2) \right. \\
&+ \frac{0,01}{3}Y(1)Y(3) + \frac{0,01}{6}Y^2(2) + \frac{0,01}{4}(Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + \frac{0,01}{8}Y^2(3) + \frac{0,02}{9}(Y(1)Y(6) \\
&+ Y(2)Y(5) + Y(3)Y(4)) + \frac{0,01}{5}(Y(1)Y(7) + Y(2)Y(6) + Y(3)Y(5)) + \frac{0,01}{10}Y^2(4) + \frac{0,02}{11}(Y(1)Y(8) \\
&+ Y(2)Y(7) + Y(3)Y(6) + Y(4)Y(5)) + \left. \frac{0,01}{6}(Y(2)Y(8) + Y(3)Y(7) + Y(4)Y(6)) + \frac{0,01}{12}Y^2(5) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 8$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(10) &= \frac{1}{360} \left[-17Y(8) + \frac{0,01}{4}G(6) + 0,01 \sum_{k'=2}^{13} \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\
&= \frac{13}{4680 - 0,02Y(1)} \left[-17Y(8) + \frac{0,03}{4}(Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + \frac{0,03}{8}Y^2(3) + \frac{0,01}{4}Y^2(1) \right. \\
&+ \frac{0,02}{5}Y(1)Y(2) + \frac{0,01}{3}Y(1)Y(3) + \frac{0,01}{6}Y^2(2) + \frac{0,02}{7}(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + \frac{0,02}{9}(Y(1)Y(6) \\
&+ Y(2)Y(5) + Y(3)Y(4)) + \frac{0,01}{5}(Y(1)Y(7) + Y(2)Y(6) + Y(3)Y(5)) + \frac{0,01}{10}Y^2(4) + \frac{0,02}{11}(Y(1)Y(8) \\
&+ Y(2)Y(7) + Y(3)Y(6) + Y(4)Y(5)) + \frac{0,01}{6}(Y(1)Y(9) + Y(2)Y(8) + Y(3)Y(7) + Y(4)Y(6)) \\
&+ \left. \frac{0,01}{12}Y^2(5) + \frac{0,02}{13}(Y(2)Y(9) + Y(3)Y(8) + Y(4)Y(7) + Y(5)Y(6)) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 9$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(11) &= \frac{1}{440} \left[-19Y(9) + \frac{0,02}{9}G(7) + 0,01 \sum_{k'=2}^{14} \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\
&= \frac{7}{3080 - 0,01Y(1)} \left[-19Y(9) + \frac{0,02}{3}(Y(1)Y(6) + Y(2)Y(5) + Y(3)Y(4)) + \frac{0,01}{4}Y^2(1) \right. \\
&+ \frac{0,02}{5}Y(1)Y(2) + \frac{0,01}{3}Y(1)Y(3) + \frac{0,01}{6}Y^2(2) + \frac{0,02}{7}(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + \frac{0,01}{4}(Y(1)Y(5) \\
&+ Y(2)Y(4)) + \frac{0,01}{8}Y^2(3) + \frac{0,01}{5}(Y(1)Y(7) + Y(2)Y(6) + Y(3)Y(5)) + \left. \frac{0,01}{10}Y^2(4) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{0,02}{11} (Y(1)Y(8) + Y(2)Y(7) + Y(3)Y(6) + Y(4)Y(5)) + \frac{0,01}{6} (Y(1)Y(9) + Y(2)Y(8) + Y(3)Y(7) \\
& + Y(4)Y(6)) + \frac{0,01}{12} Y^2(5) + \frac{0,02}{13} (Y(1)Y(10) + Y(2)Y(9) + Y(3)Y(8) + Y(4)Y(7) + Y(5)Y(6)) \\
& + \frac{0,01}{7} (Y(2)Y(10) + Y(3)Y(9) + Y(4)Y(8) + Y(5)Y(7)) + \frac{0,01}{14} Y^2(6) \Big].
\end{aligned}$$

Si $k = 10$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(12) &= \frac{1}{528} \left[-21Y(10) - \frac{1}{1000} + \frac{0,02}{10} G(8) + 0,01 \sum_{k'=2}^{15} \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\
&= \frac{15}{7920 - 0,02Y(1)} \left[-21Y(10) - \frac{1}{1000} + \frac{0,03}{5} (Y(1)Y(7) + Y(2)Y(6) + Y(3)Y(5)) + \frac{0,03}{10} Y^2(4) \right. \\
&+ \frac{0,01}{4} Y^2(1) + \frac{0,02}{5} Y(1)Y(2) + \frac{0,01}{3} Y(1)Y(3) + \frac{0,01}{6} Y^2(2) + \frac{0,02}{7} (Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) \\
&+ \frac{0,01}{4} (Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + \frac{0,01}{8} Y^2(3) + \frac{0,02}{9} (Y(1)Y(6) + Y(2)Y(5) + Y(3)Y(4)) \\
&+ \frac{0,02}{11} (Y(1)Y(8) + Y(2)Y(7) + Y(3)Y(6) + Y(4)Y(5)) + \frac{0,01}{6} (Y(1)Y(9) + Y(2)Y(8) + Y(3)Y(7) \\
&+ Y(4)Y(6)) + \frac{0,01}{12} Y^2(5) + \frac{0,02}{13} (Y(1)Y(10) + Y(2)Y(9) + Y(3)Y(8) + Y(4)Y(7) + Y(5)Y(6)) \\
&+ \frac{0,01}{7} (Y(1)Y(11) + Y(2)Y(10) + Y(3)Y(9) + Y(4)Y(8) + Y(5)Y(7)) + \frac{0,01}{14} Y^2(6) \\
&\left. + \frac{0,02}{15} (Y(2)Y(11) + Y(3)Y(10) + Y(4)Y(9) + Y(5)Y(8) + Y(6)Y(7)) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 11$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(13) &= \frac{1}{624} \left[-23Y(11) - \frac{1}{1000} + \frac{0,02}{11} G(9) + 0,01 \sum_{k'=2}^{16} \frac{G(k'-2)}{k'} \right] \\
&= \frac{8}{4992 - 0,01Y(1)} \left[-23Y(11) - \frac{1}{1000} + \frac{0,06}{11} (Y(1)Y(8) + Y(2)Y(7) + Y(3)Y(6) + Y(4)Y(5)) \right. \\
&+ \frac{0,01}{4} Y^2(1) + \frac{0,02}{5} Y(1)Y(2) + \frac{0,01}{3} Y(1)Y(3) + \frac{0,01}{6} Y^2(2) + \frac{0,02}{7} (Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) \\
&+ \frac{0,01}{4} (Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + \frac{0,01}{8} Y^2(3) + \frac{0,02}{9} (Y(1)Y(6) + Y(2)Y(5) + Y(3)Y(4)) \\
&+ \frac{0,01}{5} (Y(1)Y(7) + Y(2)Y(6) + Y(3)Y(5)) + \frac{0,01}{10} Y^2(4) + \frac{0,01}{6} (Y(1)Y(9) + Y(2)Y(8) + Y(3)Y(7) \\
&+ Y(4)Y(6)) + \frac{0,01}{12} Y^2(5) + \frac{0,02}{13} (Y(1)Y(10) + Y(2)Y(9) + Y(3)Y(8) + Y(4)Y(7) + Y(5)Y(6)) \\
&\left. + \frac{0,01}{7} (Y(1)Y(11) + Y(2)Y(10) + Y(3)Y(9) + Y(4)Y(8) + Y(5)Y(7)) + \frac{0,01}{14} Y^2(6) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{0,02}{15} (Y(1)Y(12) + Y(2)Y(11) + Y(3)Y(10) + Y(4)Y(9) + Y(5)Y(8) + Y(6)Y(7)) \\
& + \frac{0,01}{8} (Y(2)Y(12) + Y(3)Y(11) + Y(4)Y(10) + Y(5)Y(9) + Y(6)Y(8)) + \frac{0,01}{16} Y^2(7) \Big].
\end{aligned}$$

Si $k > 11$, alors

$$Y(k+2) = \frac{1}{4(k+1)(k+2)} \left[-(2k+1)Y(k) + 0,02 \frac{G(k-2)}{k} + 0,01 \sum_{k'=2}^{k+5} \frac{G(k'-2)}{k'} \right].$$

Dans le tableau (3.1), on présente l'erreur

$$E_n = \|y_{\text{exacte}}(x) - S_n(x)\|_{\infty}, \quad n = 1, 2, \dots$$

en fonction n avec

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n Y(k)x^k.$$

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
E_n	1	5.579×10^{-4}	5.299×10^{-4}	4.630×10^{-6}

TABLE 3.1 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte pour l'exemple (3.1)

On remarque que l'erreur approche de zéro quand n est grand.

Dans la figure (3.1), on a tracé la solution calculé avec la méthode Adomian et la solution exacte de cet exemple.

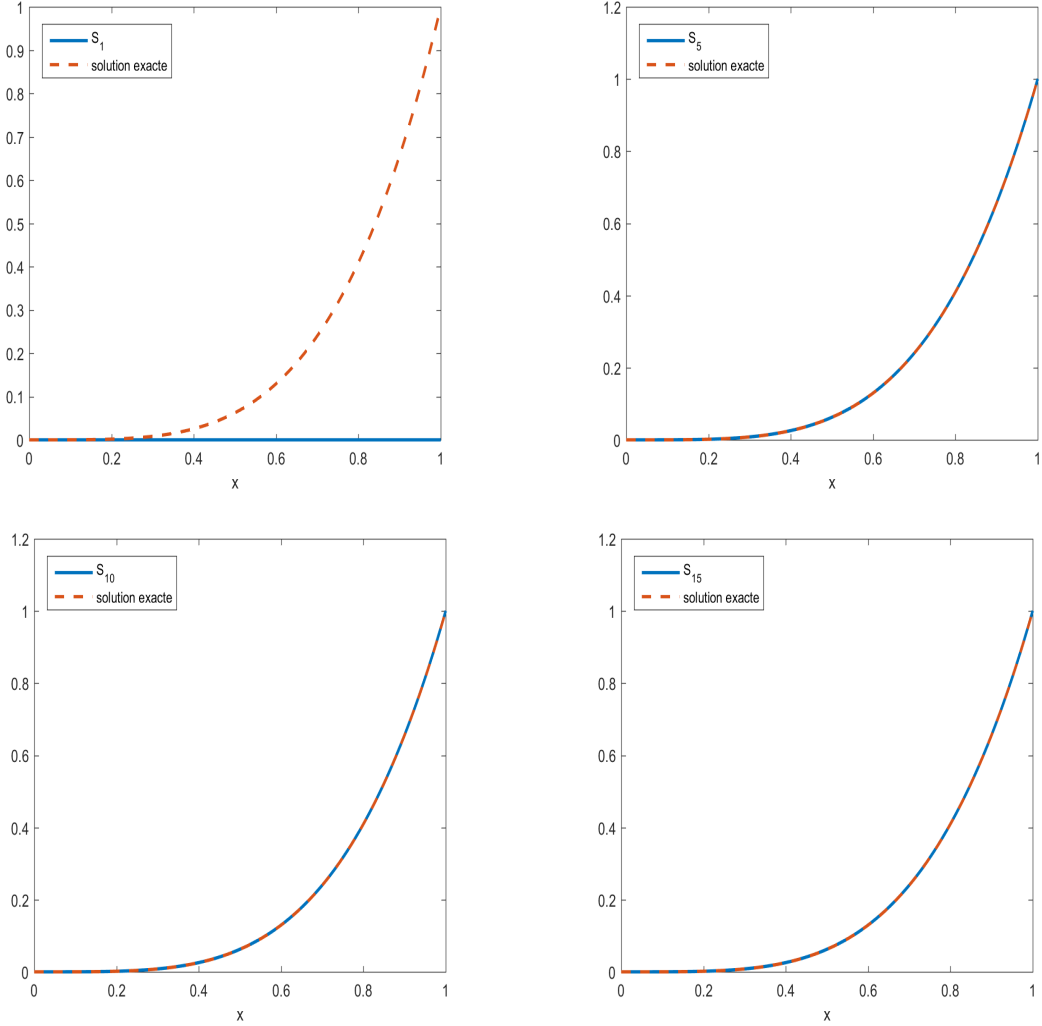


FIGURE 3.1 – Comparaison entre la solution calculé avec la méthode d’Adomian et la solution exacte pour l’exemple (3.1)

Exemple 3.2.

Considérons l'équation intégral-différentielle non linéaire de Volterra-Fredholm suivante :

$$\begin{cases} 8y''(x) = 8(\cos(x) - \sin(x)) - \frac{1}{50}(1 - 3\cos(x) - 2\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(2x)) \\ \quad + 0,02 \int_0^x \sin(x-t)y^2(t)dt + 0,02 \int_0^\pi \sin(x-t)y^2(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ y(0) = -1, \quad y(\pi) = 1. \end{cases}$$

La solution exacte est : $y_{\text{exacte}}(x) = \sin(x) - \cos(x)$.

Puisque

1. $f(x) = 8(\cos(x) - \sin(x)) - \frac{1}{50}(1 - 3\cos(x) - 2\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(2x))$ appartient à $C^2([0, \pi], \mathbb{R})$.
2. $\left(\int_0^\pi (\sin(x-y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^2}{4}, \quad \forall x \in [0, \pi]$.
3. $\alpha = 3, \quad d^*(1) = 1, \quad C^*(1) = \frac{4}{3}$

$$(\alpha + (k_1|\lambda_1| + |\lambda_2|)C^*(1)) \simeq 3,026 \leq 4.$$

Donc l'équation admet une solution d'après théorème (2.1) et (2.2)

La transformé différentielle de l'équation est :

$$\begin{aligned} Y(k+2) &= \frac{1}{8(k+1)(k+2)} \left[\frac{403}{50k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{398}{50k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{\delta(k)}{50} - \frac{2^k}{150k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right. \\ &\quad + 0,02 \left[\sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \sin\left(\frac{(k_1-1)\pi}{2}\right) \frac{1}{(k-k_2)!} \cos\left(\frac{(k-k_2)\pi}{2}\right) G(k_2-k_1) \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \cos\left(\frac{(k_1-1)\pi}{2}\right) \frac{1}{(k-k_2)!} \sin\left(\frac{(k-k_2)\pi}{2}\right) G(k_2-k_1) \right] \right. \\ &\quad + 0,02 \left[\frac{1}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sum_{k'=1}^N \frac{\pi^{k'}}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} \cos\left(\frac{k_1\pi}{2}\right) G(k'-k_1-1) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sum_{k'=1}^N \frac{\pi^{k'}}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} \sin\left(\frac{k_1\pi}{2}\right) G(k'-k_1-1) \right] \right] \end{aligned}$$

telle que $G(k)$ sont des transformées différentielles (polynômes d'Adomian) de la fonction non linéaire $g(y) = y^2$ et la condition initiale $Y(0) = -1$ et $Y(1) = 1$.

Le polynôme d'Adomian pour la fonction non linéaire est :

$$G(0) = g(Y(0)) = 1.$$

$$G(1) = Y(1)g'(Y(0)) = -2Y(1).$$

$$G(2) = Y(2)g'(Y(0)) + \frac{1}{2!}Y^2(1)g''(Y(0)) = Y^2(1) - 2Y(2).$$

$$G(3) = Y(3)g'(Y(0)) + Y(1)Y(2)g''(Y(0)) + \frac{1}{3!}Y^3(1)g^{(3)}(Y(0)) = -2Y(3) + 2Y(1)Y(2).$$

$$\begin{aligned}
G(4) &= Y(4)g'(Y(0)) + (Y(1)Y(3) + \frac{1}{2!}Y^2(2)g''(Y(0))) + \frac{1}{2!}Y^2(1)Y(2)g^{(3)}(Y(0)) + \frac{1}{4!}Y^4(1)g^{(4)}(Y(0)) \\
&= -2Y(4) + 2Y(1)Y(3) + Y^2(2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(5) &= Y(5)g'(Y(0)) + (Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3))g''(Y(0)) + \frac{1}{2!}(Y(3)Y^2(1) + Y^2(2)Y(1))g^{(3)}(Y(0)) \\
&\quad + \frac{1}{3!}Y(2)Y^3(1)g^{(4)}(Y(0)) + \frac{1}{5!}Y^5(1)g^{(5)}(Y(0)) \\
&= -2Y(5) + 2(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(6) &= Y(6)g'(Y(0)) + (Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4) + \frac{1}{2!}Y^2(3))g''(Y(0)) \\
&= -2Y(6) + 2(Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + Y^2(3)
\end{aligned}$$

Si $k = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(2) &= \frac{1}{16} \left[\frac{402}{50} - 0,02 \sum_{k'=1}^4 \frac{\pi^{k'}}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} \sin\left(\frac{k_1\pi}{2}\right) G(k' - k_1 - 1) \right] \\
&= \frac{1}{16} \left[\frac{402}{50} - 0,02 \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3}(-2Y(1)) + \frac{\pi^4}{4} \left(Y^2(1) - 2Y(2) - \frac{1}{3!} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{16 - 0,01\pi^4} \left[\frac{402}{50} - 0,02 \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi^3}{3}Y(1) + \frac{\pi^4}{4} \left(Y^2(1) - \frac{1}{3!} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(3) &= \frac{1}{48} \left[\frac{-1196}{150} + 0,02 \left(\sum_{k'=1}^4 \frac{\pi^{k'}}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} \cos\left(\frac{k_1\pi}{2}\right) G(k' - k_1 - 1) \right) \right] \\
&= \frac{1}{48} \left[\frac{-1196}{150} + 0,02 \left(\pi + \frac{\pi^2}{2}(-2Y(1)) + \frac{\pi^3}{3}(Y^2(1) - 2Y(2) - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\pi^4}{4}(-2Y(3) + 2Y(1)Y(2) + 2Y(2)) \right) \right] \\
&= \frac{1}{48 + 0,01\pi^4} \left[\frac{-1196}{150} + 0,02 \left(\pi - \pi^2Y(1) + \frac{\pi^3}{3}(Y^2(1) - 2Y(2) - 1) + \frac{\pi^4}{4}(2Y(1)Y(2) + 2Y(2)) \right) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(4) &= \frac{1}{96} \left[\frac{-403}{100} + 0,02 \left[\sum_{k_2=1}^2 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \sin\left(\frac{(k_1-1)\pi}{2}\right) \frac{1}{(k-k_2)!} \cos\left(\frac{(k-k_2)\pi}{2}\right) G(k_2 - k_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{k_2=1}^2 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \cos\left(\frac{(k_1-1)\pi}{2}\right) \frac{1}{(k-k_2)!} \sin\left(\frac{(k-k_2)\pi}{2}\right) G(k_2 - k_1) \right] \right. \\
&\quad \left. + 0,01 \left(\sum_{k'=1}^6 \frac{\pi^{k'}}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} \sin\left(\frac{k_1\pi}{2}\right) G(k' - k_1 - 1) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{96} \left[\frac{-403}{100} - 0,01G(0) + 0,01 \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3} (-2Y(1)) + \frac{\pi^4}{4} (Y^2(1) - 2Y(2) - \frac{1}{3!}) + \frac{\pi^5}{5} (-2Y(3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2Y(1)Y(2) - \frac{1}{3!} (-2Y(1))) + \frac{\pi^6}{6} (-2Y(4) + 2Y(1)Y(3) + Y^2(2) - \frac{1}{3!} (Y^2(1) - 2Y(2)) + \frac{1}{5!}) \right) \right] \\
&= \frac{3}{288 + 0,01\pi^6} \left[\frac{-404}{100} + 0,01 \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi^3}{3} Y(1) + \frac{\pi^4}{4} (Y^2(1) - 2Y(2) - \frac{1}{3!}) + \frac{\pi^5}{5} (-2Y(3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2Y(1)Y(2) + \frac{1}{3} Y(1)) + \frac{\pi^6}{6} (2Y(1)Y(3) + Y^2(2) - \frac{1}{3!} (Y^2(1) - 2Y(2)) + \frac{1}{5!}) \right) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 3$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(5) &= \frac{1}{160} \left[\frac{398}{3!50} + \frac{8}{3!150} \right. \\
&\quad \left. + 0,02 \left(\sum_{k_2=1}^3 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \sin \left(\frac{(k_1-1)\pi}{2} \right) \frac{1}{(k-k_2)!} \cos \left(\frac{(k-k_2)\pi}{2} \right) G(k_2 - k_1) \right) \right. \\
&\quad \left. + 0,02 \left(\frac{-1}{3!} \sum_{k'=1}^6 \frac{\pi^{k'}}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} \cos \left(\frac{k_1\pi}{2} \right) G(k' - k_1 - 1) \right) \right] \\
&= \frac{1}{160} \left[\frac{15125}{11250} - \frac{0,01}{3} G(1) - \frac{0,01}{3} \left(\sum_{k'=1}^6 \frac{\pi^{k'}}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} \cos \left(\frac{k_1\pi}{2} \right) G(k' - k_1 - 1) \right) \right] \\
&= \frac{1}{160} \left[\frac{15125}{11250} + \frac{0,02}{3} Y(1) - \frac{0,01}{3} \left(\pi - \pi^2 Y(1) + \frac{\pi^3}{3} (Y^2(1) - 2Y(2) - \frac{1}{2}) + \frac{\pi^4}{4} (-2Y(3) + Y(1)Y(2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Y(1)) + \frac{\pi^5}{5} (-2Y(4) + 2Y(1)Y(3) + Y^2(2) - \frac{1}{2!} (Y^2(1) - 2Y(2)) + \frac{1}{4!}) + \frac{\pi^6}{6} (-2Y(5) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) - \frac{1}{2!} (-2Y(3) + 2Y(1)Y(2)) + \frac{1}{4!} (-2Y(1))) \right) \right] \\
&= \frac{9}{1440 - 0,01\pi^6} \left[\frac{15125}{11250} + \frac{0,02}{3} Y(1) - \frac{0,01}{3} \left(\pi - \pi^2 Y(1) + \frac{\pi^3}{3} (Y^2(1) - 2Y(2) - \frac{1}{2}) + \frac{\pi^4}{4} (-2Y(3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Y(1)Y(2) + Y(1)) + \frac{\pi^5}{5} (-2Y(4) + 2Y(1)Y(3) + Y^2(2) - \frac{1}{2!} (Y^2(1) - 2Y(2)) + \frac{1}{4!}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\pi^6}{6} (2Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + Y(3) - Y(1)Y(2) - \frac{1}{12} Y(1) \right) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 4$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(6) &= \frac{1}{240} \left[\frac{403}{4!50} + 0,02 \left[\sum_{k_2=1}^4 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \sin \left(\frac{(k_1-1)\pi}{2} \right) \frac{1}{(k-k_2)!} \cos \left(\frac{(k-k_2)\pi}{2} \right) G(k_2 - k_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{k_2=1}^4 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \cos \left(\frac{(k_1-1)\pi}{2} \right) \frac{1}{(k-k_2)!} \sin \left(\frac{(k-k_2)\pi}{2} \right) G(k_2 - k_1) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4!} \sum_{k'=1}^8 \frac{\pi^{k'}}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} \sin\left(\frac{k_1\pi}{2}\right) G(k' - k_1 - 1) \Big] \Big] \\
& = \frac{1}{240} \left[\frac{403}{1200} + 0,02 \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{12} (Y^2(1) - 2Y(2)) - \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3} (-2Y(1)) + \frac{\pi^4}{4} (Y^2(1) - 2Y(2) - \frac{1}{3!}) \right) \right. \right. \\
& + \frac{\pi^5}{5} \left(-2Y(3) + 2Y(1)Y(2) - \frac{1}{3!} (-2Y(1)) \right) + \frac{\pi^6}{6} \left(-2Y(4) + 2Y(1)Y(3) + Y^2(2) - \frac{1}{3!} (Y^2(1) \right. \\
& - 2Y(2)) + \frac{1}{5!} \left. \right) + \frac{\pi^7}{7} \left(-2Y(5) + 2(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) - \frac{1}{3!} (-2Y(3) + 2Y(1)Y(2)) \right. \\
& + \frac{1}{5!} (-2Y(1)) \left. \right) + \frac{\pi^8}{8} \left(-2Y(6) + 2(Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + Y^2(3) - \frac{1}{3!} \left(-2Y(4) + 2Y(1)Y(3) \right. \right. \\
& \left. \left. + Y^2(2) \right) + \frac{1}{5!} \left(Y^2(1) - 2Y(2) \right) - \frac{1}{7!} \right) \Big] \Big] \\
& = \frac{48}{11520 - 0,01\pi^8} \left[\frac{403}{1200} + 0,02 \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{12} (Y^2(1) - 2Y(2)) - \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3} (-2Y(1)) + \frac{\pi^4}{4} (Y^2(1) \right. \right. \right. \\
& - 2Y(2) - \frac{1}{3!}) + \frac{\pi^5}{5} \left(-2Y(3) + 2Y(1)Y(2) - \frac{1}{3!} (-2Y(1)) \right) + \frac{\pi^6}{6} \left(-2Y(4) + 2Y(1)Y(3) + Y^2(2) \right. \\
& - \frac{1}{3!} (Y^2(1) - 2Y(2)) + \frac{1}{5!} \left. \right) + \frac{\pi^7}{7} \left(-2Y(5) + 2(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) - \frac{1}{3!} (-2Y(3) + 2Y(1)Y(2)) \right. \\
& + \frac{1}{5!} (-2Y(1)) \left. \right) + \frac{\pi^8}{8} \left(2(Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + Y^2(3) - \frac{1}{3!} \left(-2Y(4) + 2Y(1)Y(3) + Y^2(2) \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{5!} \left(Y^2(1) - 2Y(2) \right) - \frac{1}{7!} \right) \right] \Big].
\end{aligned}$$

Si $k \geq 5$, alors

$$\begin{aligned}
Y(k+2) & = \frac{1}{8(k+1)(k+2)} \left[\frac{403}{50k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{398}{50k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{50} - \frac{2^k}{150k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right. \\
& + 0,02 \left[\sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \sin\left(\frac{(k_1-1)\pi}{2}\right) \frac{1}{(k-k_2)!} \cos\left(\frac{(k-k_2)\pi}{2}\right) G(k_2 - k_1) \right. \\
& \left. - \sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \cos\left(\frac{(k_1-1)\pi}{2}\right) \frac{1}{(k-k_2)!} \sin\left(\frac{(k-k_2)\pi}{2}\right) G(k_2 - k_1) \right] \\
& + 0,02 \left[\frac{1}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sum_{k'=1}^N \frac{\pi^{k'}}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} \cos\left(\frac{k_1\pi}{2}\right) G(k' - k_1 - 1) \right. \\
& \left. - \frac{1}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sum_{k'=1}^N \frac{\pi^{k'}}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} \sin\left(\frac{k_1\pi}{2}\right) G(k' - k_1 - 1) \right] \Big].
\end{aligned}$$

Dans le tableau (3.2), on présente l'erreur

$$E_n = \|y_{\text{exacte}}(x) - S_n(x)\|_{\infty}, n = 1, 2, \dots$$

en fonction n avec

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n Y(k)x^k.$$

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
E_n	1.141	6.023×10^{-1}	7.131×10^{-3}	1.05×10^{-3}

TABLE 3.2 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte pour l'exemple(3.2)

On remarque que l'erreur approche de zéro quand n est grand.

Dans la figure (3.2), on a tracé la solution calculé avec la méthode Adomian et la solution exacte de cet exemple.

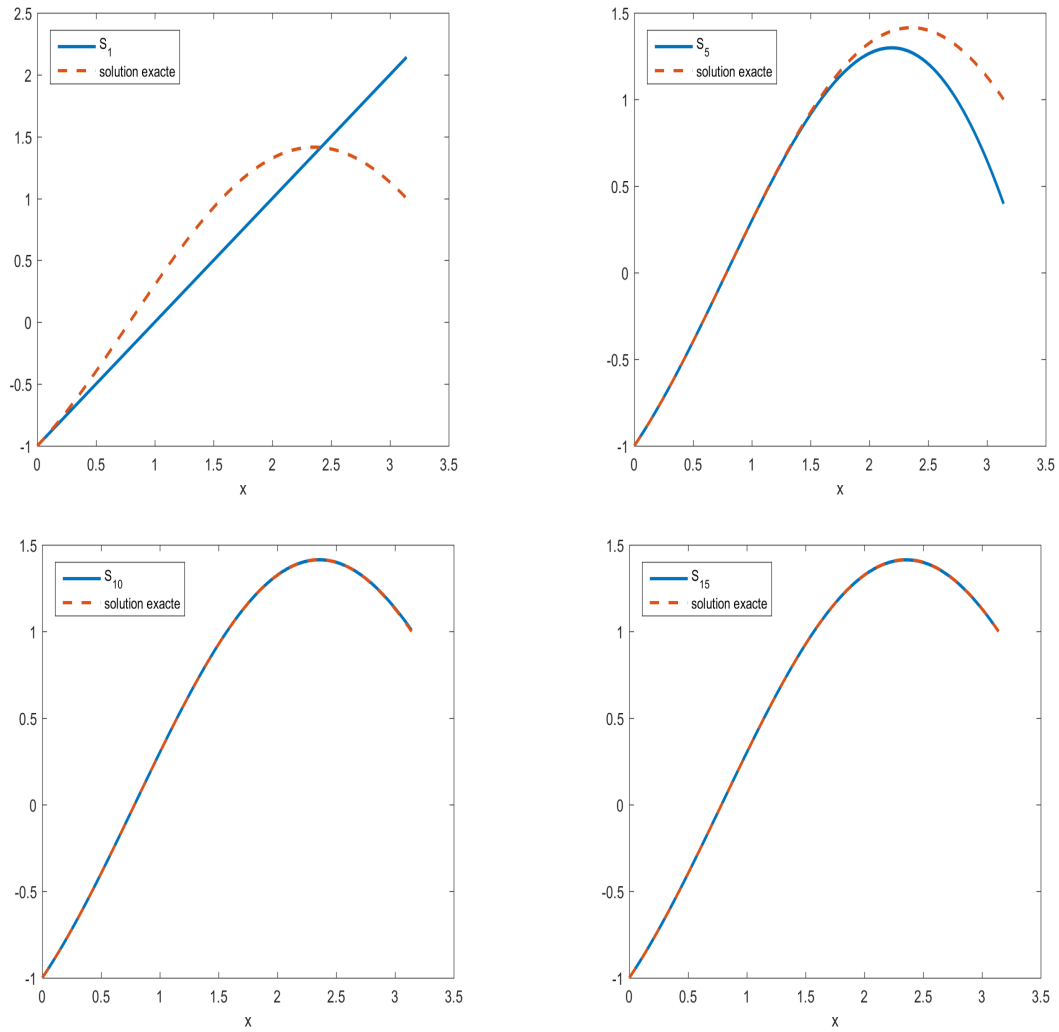


FIGURE 3.2 – Comparaison entre la solution calculé avec la méthode d’Adomian et la solution exacte pour l’exemple (3.2)

Exemple 3.3.

Considérons l'équation intégrale-différentielle non linéaire de Volterra-Fredholm suivante :

$$\begin{cases} 1000y''(x) + y(x) &= 1001e^{-x} - \left(\frac{-3e^{-3x} + 2e^x}{8} + \frac{2e^{-x}}{4} \right) - \left(\frac{-e^{x-4}}{8} - \frac{e^{-x-2}}{4} \right) \\ &+ \int_0^x \cosh(x-t)y^3(t)dt + \int_0^1 \cosh(x-t)y^3(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-1}. \end{cases}$$

La solution exacte est : $y_{\text{exacte}}(x) = e^{-x}$.

Puisque

1. $A(x) = 0$, $B(x) = 1$ sont continues.

2. $f(x) = 1001e^{-x} - \left(\frac{-3e^{-3x} + 2e^x}{8} + \frac{2e^{-x}}{4} \right) - \left(\frac{-e^{x-4}}{8} - \frac{e^{-x-2}}{4} \right)$ appartient à $C^2([0, 1], \mathbb{R})$.

3. $\left(\int_0^1 (\cosh(x-y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{(e^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{2}$, $\forall x \in [0, 1]$.

4. $\alpha = 1$, $d^*(1) = e^{-4} + e^{-3} + e^{-2} + e^{-1} + 1$,

$$C^*(1) \simeq 2,44 \quad (\alpha + (k_1|\lambda_1| + |\lambda_2|)C^*(1)) \simeq 5,9 < 1000.$$

Donc l'équation admet une solution d'après théorème (2.1) et (2.2)

On sait que $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, alors

$$\cosh(x-t) = \frac{e^{x-t} + e^{-(x-t)}}{2} = \frac{e^{x-t}}{2} + \frac{e^{-(x-t)}}{2} = \frac{e^x e^{-t}}{2} + \frac{e^{-x} e^t}{2}$$

La transformée différentielle de l'équation est :

$$\begin{aligned} Y(k+2) &= \frac{1}{1000(k+1)(k+2)} \left[-Y(k) + 1001 \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-3)^{k+1}}{k!8} - \frac{1}{k!4} - \frac{(-1)^k}{k!2} + \frac{1}{k!8e^4} + \frac{(-1)^k}{k!4e^2} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \frac{(-1)^{k-k_2}}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) + \sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{(-1)^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \frac{1}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{k!} \sum_{k'=1}^N \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1!} G(k'-k_1-1) + \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{k'=1}^N \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} G(k'-k_1-1) \right] \right]. \end{aligned}$$

Si k est pair, alors

$$\begin{aligned} Y(k+2) &= \frac{1}{1000(k+1)(k+2)} \left[-Y(k) + \frac{1001}{k!} + \frac{3^{k+1}}{8k!} - \frac{1}{4k!} - \frac{1}{2k!} + \frac{1}{8e^4 k!} + \frac{1}{4e^2 k!} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \frac{(-1)^{k-k_2}}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) + \sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{(-1)^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \frac{1}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{k!} \sum_{k'=1}^{k+3} \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1!} G(k'-k_1-1) + \frac{1}{k!} \sum_{k'=1}^{k+3} \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} G(k'-k_1-1) \right] \right]. \end{aligned}$$

Si k est impair, alors

$$\begin{aligned}
Y(k+2) &= \frac{1}{1000(k+1)(k+2)} \left[-Y(k) - \frac{1001}{k!} - \frac{3^{k+1}}{8k!} - \frac{1}{4k!} + \frac{1}{2k!} + \frac{1}{8e^4k!} - \frac{1}{4e^2k!} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \frac{(-1)^{k-k_2}}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) + \sum_{k_2=1}^k \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{(-1)^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \frac{1}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{k!} \sum_{k'=1}^{k+4} \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1!} G(k'-k_1-1) - \frac{1}{k!} \sum_{k'=1}^{k+4} \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} G(k'-k_1-1) \right] \right].
\end{aligned}$$

telle que $G(k)$ sont des transformées différentielles (polynômes d'Adomian) de la fonction non linéaire $g(y) = y^3$ et la condition initiale $Y(0) = 1$ et $Y(1) = -1$.

Le polynôme d'Adomian pour la fonction non linéaire est :

$$G(0) = g(Y(0)) = g(1) = 1.$$

$$G(1) = Y(1)g'(Y(0)) = 3Y(1).$$

$$G(2) = Y(2)g'(Y(0)) + \frac{1}{2!}Y^2(1)g''(Y(0)) = 3Y(2) + 3Y^2(1).$$

$$G(3) = Y(3)g'(Y(0)) + Y(1)Y(2)g''(Y(0)) + \frac{1}{3!}Y^3(1)g^{(3)}(Y(0)) = 3Y(3) + 6Y(1)Y(2) + Y^3(1).$$

$$\begin{aligned}
G(4) &= Y(4)g'(Y(0)) + (Y(1)Y(3) + \frac{1}{2!}Y^2(2))g''(Y(0)) + \frac{1}{2!}Y^2(1)Y(2)g^{(3)}(Y(0)) + \frac{1}{4!}Y^4(1)g^{(4)}(Y(0)) \\
&= 3Y(4) + 6Y(1)Y(3) + 3Y^2(2) + 3Y^2(1)Y(2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(5) &= Y(5)g'(Y(0)) + (Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3))g''(Y(0)) + \frac{1}{2!}(Y^2(1)Y(3) + Y(1)Y^2(2))g^{(3)}(Y(0)) \\
&\quad + \frac{1}{3!}Y(2)Y^3(1)g^{(4)}(Y(0)) + \frac{1}{5!}Y^5(1)g^{(5)}(Y(0)) \\
&= 3Y(5) + 6(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + 3Y^2(1)Y(3) + 3Y(1)Y^2(2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(6) &= Y(6)g'(Y(0)) + (Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4) + \frac{1}{2!}Y^2(3))g''(Y(0)) \\
&\quad + (\frac{1}{2}Y^2(1)Y(4) + \frac{1}{3!}Y^3(2) + Y(1)Y(2)Y(3))g^{(3)}(Y(0)) \\
&= 3Y(6) + 6(Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4)) + 3Y^2(3) + Y^3(2) + 3Y^2(1)Y(4) + 6Y(1)Y(2)Y(3).
\end{aligned}$$

Si $k = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(2) &= \frac{1}{2000} \left[-Y(0) + 1001 + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8e^4} + \frac{1}{4e^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\sum_{k'=1}^3 \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1!} G(k'-k_1-1) + \sum_{k'=1}^3 \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} G(k'-k_1-1) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2000} \left[-Y(0) + 1001 + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8e^4} + \frac{1}{4e^2} + G(0) + \frac{1}{2}G(1) + \frac{1}{3}G(2) + \frac{1}{3!}G(0) \right] \\
&= \frac{1}{2000} \left[-Y(0) + 1002 + \frac{-3}{8} + \frac{1}{8e^4} + \frac{1}{4e^2} + \frac{3}{2}Y(1) + Y(2) + Y^2(1) + \frac{1}{3!} \right] \\
&= \frac{1}{1999} \left[\frac{47990}{48} + \frac{1}{8e^4} + \frac{1}{4e^2} + \frac{3}{2}Y(1) + Y^2(1) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(3) &= \frac{1}{6000} \left[-Y(1) - 1001 - \frac{9}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8e^4} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{k_2=1}^1 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \frac{(-1)^{k-k_2}}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k_2=1}^1 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{(-1)^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \frac{1}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) + \frac{1}{k!} \sum_{k'=1}^5 \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1!} G(k'-k_1-1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{k!} \sum_{k'=1}^5 \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} G(k'-k_1-1) \right] \right] \\
&= \frac{1}{6000} \left[-Y(1) - 1001 - \frac{9}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8e^4} - \frac{1}{4e^2} + G(0) + \left(-\frac{1}{2} - Y(1) - \frac{3}{4}(Y(2) + Y^2(1)) - \frac{1}{24} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{5}(3Y(3) + 6Y(1)Y(2) + Y^3(1)) - \frac{1}{10}Y(1) \right) \right] \\
&= \frac{5}{30003} \left[-\frac{21}{10}Y(1) + \frac{24014}{24} + \frac{1}{8e^4} - \frac{1}{4e^2} - \frac{3}{4}(Y(2) + Y^2(1)) - \frac{1}{5}(6Y(1)Y(2) + Y^3(1)) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(4) &= \frac{1}{12000} \left[-Y(2) + \frac{1001}{2} + \frac{27}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8e^4} + \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{k_2=1}^2 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \frac{(-1)^{k-k_2}}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k_2=1}^2 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{(-1)^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \frac{1}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) + \frac{1}{2!} \left(\sum_{k'=1}^5 \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1!} G(k'-k_1-1) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \sum_{k'=1}^5 \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} G(k'-k_1-1) \right) \right] \right] \\
&= \frac{1}{12000} \left[-Y(2) + \frac{8029}{16} + \frac{1}{8e^4} + \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{2} \left[3Y(1) + \frac{1}{2} \left(\frac{121}{60} + \frac{15}{4}Y(1) + \frac{39}{15}(Y(2) + Y^2(1)) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left(3Y(3) + 6Y(1)Y(2) + Y^3(1) \right) + \frac{2}{5} \left(3Y(4) + 6(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + 3Y^2(1)Y(2) \right) \right] \right] \\
&= \frac{1}{12000} \left[-\frac{21}{60}Y(2) + \frac{1928896}{3840} + \frac{1}{8e^4} + \frac{1}{4e^2} + \frac{39}{16}Y(1) + \frac{39}{60}Y^2(1) + \frac{1}{8} \left(3Y(3) + 6Y(1)Y(2) + Y^3(1) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{10} \left(3Y(4) + 6(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + 3Y^2(1)Y(2) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{10}{119997} \left[-\frac{21}{60}Y(2) + \frac{1928896}{3840} + \frac{1}{8e^4} + \frac{1}{4e^2} + \frac{39}{16}Y(1) + \frac{39}{60}Y^2(1) + \frac{1}{8} \left(3Y(3) + 6Y(1)Y(2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Y^3(1) \right) + \frac{1}{10} \left(6(Y(1)Y(4) + Y(2)Y(3)) + 3Y^2(1)Y(2) \right) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 3$, on a :

$$\begin{aligned}
Y(5) &= \frac{1}{20000} \left[-Y(3) + \frac{1001}{3!} - \frac{81}{3!8} - \frac{1}{3!4} + \frac{1}{3!2} + \frac{1}{3!8e^4} - \frac{1}{3!4e^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\sum_{k_2=1}^3 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \frac{(-1)^{k-k_2}}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) + \sum_{k_2=1}^3 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{(-1)^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \frac{1}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{3!} \left(\sum_{k'=1}^6 \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1!} G(k'-k_1-1) - \sum_{k'=1}^6 \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} G(k'-k_1-1) \right) \right] \right] \\
&= \frac{1}{20000} \left[-Y(3) + \frac{3253}{4320} + \frac{1}{3!8e^4} - \frac{1}{3!4e^2} + \frac{62}{72} \left(Y(2) + Y^2(1) \right) - \frac{103}{560}Y(1) - \frac{94}{210} \left(3Y(3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 6Y(1)Y(2) + Y^3(1) \right) - \left(Y(4) + 2Y(1)Y(3) + Y^2(2) + Y^2(1)Y(2) \right) - \frac{2}{7} \left(3Y(5) + 6Y(1)Y(4) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 6Y(2)Y(3) + 3Y^2(1)Y(3) + 3Y^2(2)Y(1) \right) \right] \\
&= \frac{14}{280001} \left[-\frac{492}{210}Y(3) + \frac{3253}{4320} + \frac{1}{3!8e^4} - \frac{1}{3!4e^2} + \frac{62}{72} \left(Y(2) + Y^2(1) \right) - \frac{103}{560}Y(1) - \frac{94}{210} \left(6Y(1)Y(2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Y^3(1) \right) - \left(Y(4) + 2Y(1)Y(3) + Y^2(2) + Y^2(1)Y(2) \right) - \frac{2}{7} \left(6Y(1)Y(4) + 6Y(2)Y(3) + 3Y^2(1)Y(3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3Y^2(2)Y(1) \right) \right].
\end{aligned}$$

Si $k = 4$, on a

$$\begin{aligned}
Y(6) &= \frac{1}{30000} \left[-Y(4) + \frac{1001}{4!} + \frac{243}{4!8} - \frac{1}{4!4} + \frac{1}{4!2} + \frac{1}{4!8e^4} - \frac{1}{4!4e^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\sum_{k_2=1}^4 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{1}{(k_1-1)!} \frac{(-1)^{k-k_2}}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) + \sum_{k_2=1}^4 \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_2} \frac{(-1)^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \frac{1}{(k-k_2)!} G(k_2-k_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4!} \left(\sum_{k'=1}^7 \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1!} G(k'-k_1-1) - \sum_{k'=1}^7 \frac{1}{k'} \sum_{k_1=0}^{k'-1} \frac{1}{k_1!} G(k'-k_1-1) \right) \right] \right] \\
&= \frac{1}{30000} \left[-Y(4) + \frac{5205313}{120960} + \frac{1}{4!8e^4} - \frac{1}{4!4e^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{705}{1728}Y(1) + \frac{6642}{60480} \left(Y(2) + Y^2(1) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{76}{144} \left(3Y(3) + 6Y(1)Y(2) + Y^3(1) \right) + \frac{19}{840} \left(3Y(4) + 6Y(1)Y(3) + 3Y^2(2) + 3Y^2(1)Y(2) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{72} \left(3Y(5) + 6Y(1)Y(4) + 6Y(2)Y(3) + 3Y^2(1)Y(3) + 3Y^2(2)Y(1) \right) + \frac{2}{168} \left(3Y(6) + 6(Y(1)Y(5) \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +Y(2)Y(4) + \frac{1}{2}Y^2(3) + Y^2(1)Y(4) + \frac{1}{2}Y^2(1)Y(3) + Y^3(2) + \frac{1}{6}Y(1)Y(2)Y(3) \Big) \Big] \\
& = \frac{56}{1679999} \left[-\frac{1623}{1680}Y(4) + \frac{5205313}{120960} + \frac{1}{4!8e^4} - \frac{1}{4!4e^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{705}{1728}Y(1) + \frac{6642}{60480} \left(Y(2) + Y^2(1) \right) \right. \right. \\
& + \frac{76}{144} \left(3Y(3) + 6Y(1)Y(2) + Y^3(1) \right) + \frac{19}{840} \left(6Y(1)Y(3) + 3Y^2(2) + 3Y^2(1)Y(2) \right) + \frac{1}{72} \left(3Y(5) \right. \\
& + 6Y(1)Y(4) + 6Y(2)Y(3) + 3Y^2(1)Y(3) + 3Y^2(2)Y(1) \Big) + \frac{2}{168} \left(6(Y(1)Y(5) + Y(2)Y(4) + \frac{1}{2}Y^2(3)) \right. \\
& \left. \left. + Y^2(1)Y(4) + \frac{1}{2}Y^2(1)Y(3) + Y^3(2) + \frac{1}{6}Y(1)Y(2)Y(3) \right) \right] \Big].
\end{aligned}$$

Dans le tableau (3.3), on présente l'erreur

$$E_n = \|y_{\text{exacte}}(x) - S_n(x)\|_{\infty}, \quad n = 1, 2, \dots$$

en fonction n avec

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n Y(k)x^k.$$

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
E_n	0.632	6.190×10^{-4}	5.408×10^{-4}	5.4011×10^{-4}

TABLE 3.3 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte pour l'exemple(3.3)

On remarque que l'erreur approche de zéro quand n est grand.

Dans la figure (3.3), on a tracé la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte de cet exemple.

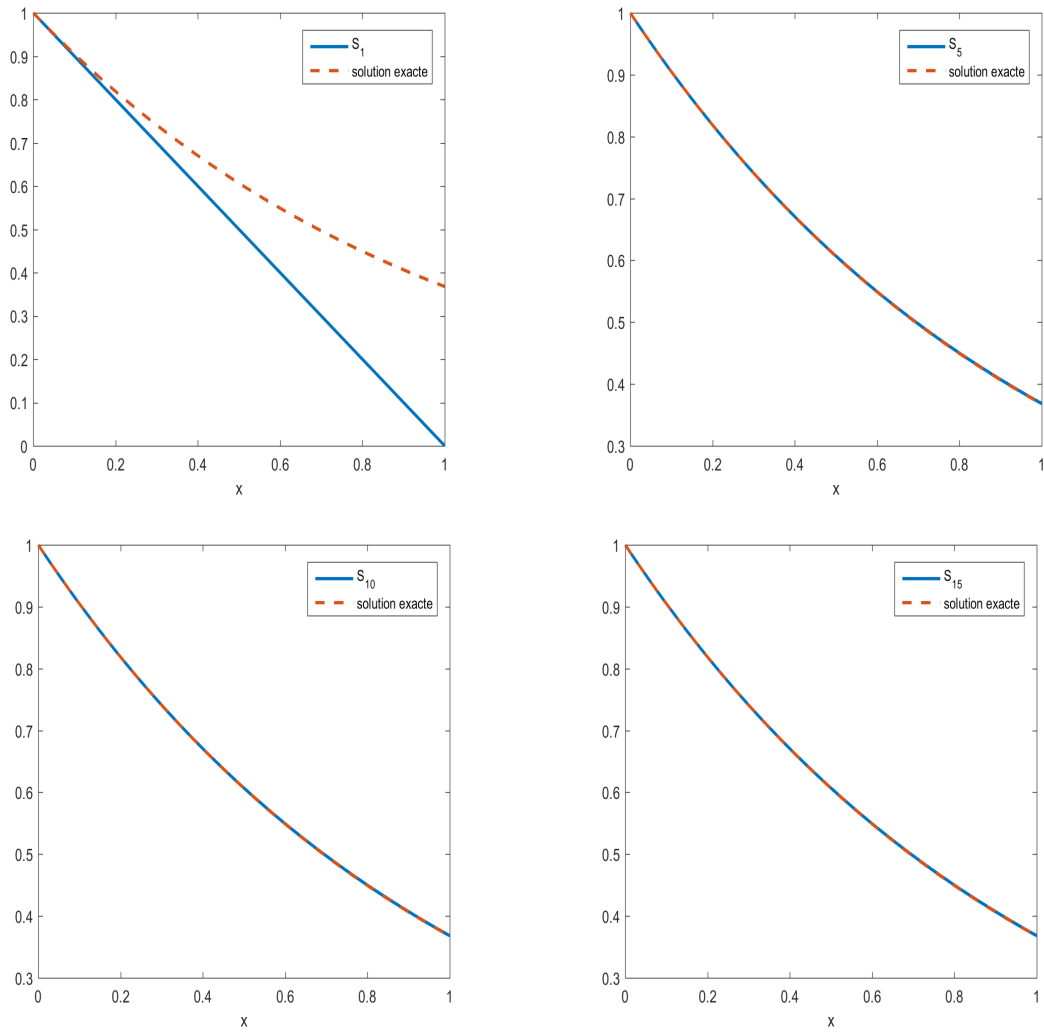


FIGURE 3.3 – Comparaison entre la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte pour l'exemple (3.3)

3.2 La méthode de l'analyse d'Homotopie

Exemple 3.4.

Considérons l'équation intégrale-différentielle non linéaire de Volterra-Fredholm suivante :

$$\begin{cases} 4\varphi''(x) + 2x\varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{-1}{100} \left(\frac{(1+x)(1+x^{10})}{10} \right) + 48x^2 + 9x^4 \\ \quad + 0,01 \int_0^x (t+tx)\varphi^2(t)dt + 0,01 \int_0^1 (t+tx)\varphi^2(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1 \end{cases}$$

$$\omega = 4, \quad A(x) = 2x, \quad B(x) = 1.$$

D'après théorème (2.1), on a :

$$\begin{aligned} 4u(x) + \int_0^1 \left[W(x,t) - 0,01 \int_0^x R(x,y;1)H_2(y,t)dy - 0,01 \int_0^1 R(x,y;1)H_2(y,t)dy \right] u(t)dt \\ = F(x) + 0,01 \int_0^x R(x,y;2) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy + 0,01 \int_0^1 R(x,y;2) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy. \end{aligned}$$

Telque

$$u(x) = \varphi''(x),$$

$$W(x,t) = \begin{cases} W_1(x,t) = t(3x-1), & 0 \leq t \leq x, \\ W_2(x,t) = 3x(t-1), & x \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$R(x,y;l) = \frac{2!}{l!(2-l)!} (y+xy)y^{2-l} \Rightarrow \begin{cases} R(x,y;0) = y^3 + y^3x, \\ R(x,y;1) = 2(y^2 + xy^2), \\ R(x,y;2) = y + xy, \end{cases}$$

$$H_2(y,t) = \begin{cases} t(y-1), & 0 \leq t \leq y, \\ y(t-1), & y \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\mu(x) = 3x,$$

$$F(x) = \frac{-1}{1000} \left((1+x)(1+x^{10}) \right) + 48x^2 + 9x^4 - 3x + 0,01 \int_0^x (y^3 + y^3x)dy + 0,01 \int_0^1 (y^3 + y^3x)dy.$$

Donc

$$\begin{aligned} u(x) + \frac{1}{4} \int_0^1 \left[W(x,t) - 0,01 \int_0^x 2(y^2 + xy^2)H_2(y,t)dy - 0,01 \int_0^1 2(y^2 + xy^2)H_2(y,t)dy \right] u(t)dt \\ - \frac{1}{4} F(x) - \frac{0,01}{4} \int_0^x (y+xy) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy - \frac{0,01}{4} \int_0^1 (y+xy) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy \\ = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

On définit un opérateur non linéaire N par :

$$\begin{aligned} N[u(x)] = u(x) + \frac{1}{4} \int_0^1 \left[W(x,t) - 0,01 \int_0^x 2(y^2 + xy^2)H_2(y,t)dy - 0,01 \int_0^1 2(y^2 + xy^2)H_2(y,t)dy \right] u(t)dt \\ - \frac{1}{4} F(x) - \frac{0,01}{4} \int_0^x (y+xy) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy - \frac{0,01}{4} \int_0^1 (y+xy) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy. \end{aligned} \tag{3.2}$$

D'après (3.1) et (3.2), on a

$$N[u(x)] = 0, \forall x \in [0, 1].$$

On prend $u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)\tau^i$ et $u_0(x) = 0$

$u_n(x) = u_{n-1}(x) + hR_n[u_{n-1}(x)]$, avec

$$R_n[u_{n-1}(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} N(u(x)) \right]_{|\tau=0}.$$

Ainsi

$$u_1(x) = hN(u_0(x)) = \frac{-h}{4} F(x).$$

$$u_2(x) = u_1(x) + hR_2[N(u_1(x))] = u_1(x) + h \left[\frac{\partial}{\partial \tau} N(u(x)) \right]_{|\tau=0}.$$

$$= (1+h)u_1(x)$$

$$+ \frac{h}{4} \int_0^1 \left[W(x,t) - 0,01 \int_0^x 2(y^2 + xy^2)H_2(y,t)dy - 0,01 \int_0^1 2(y^2 + xy^2)H_2(y,t)dy \right] u_1(t)dt.$$

⋮

Dans le tableau (3.4), on présente l'erreur E_n pour $h = -0.89987$ telque

$$E_n = \|y_{\text{exacte}}(x) - S_n(x)\|_{\infty}, n = 1, 2, \dots$$

avec

$$S_n(x) = \frac{1}{b-a} \left[\eta_1(b-x) + \eta_2(x-a) + \int_a^b H_2(x,t)u_n(t)dt \right].$$

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
E_n	5.373×10^{-2}	5.219×10^{-6}	8.31×10^{-8}	8.315×10^{-8}

TABLE 3.4 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.4)

Dans le tableau (3.5), on présente l'erreur E_n pour $h = -0.92987$.

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
E_n	4.047×10^{-2}	1.047×10^{-6}	7.777×10^{-8}	7.777×10^{-8}

TABLE 3.5 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.4)

Dans le tableau (3.6), on présente l'erreur E_n pour $h = -0.87987$.

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
E_n	6.273×10^{-2}	1.371×10^{-5}	9.892×10^{-8}	9.922×10^{-8}

TABLE 3.6 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.4)

Dans le tableau (3.7), on présente l'erreur E_n pour $h = -0.90987$.

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
E_n	4.927×10^{-2}	2.893×10^{-6}	6.839×10^{-8}	6.843×10^{-8}

TABLE 3.7 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.4)

On remarque que l'erreur approche de zéro quand n est grand.

Dans la figure (3.4), on a tracé la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de cet exemple pour $h = -0.90987$, car pour ce h la solution approchée est plus proche de la solution exacte.

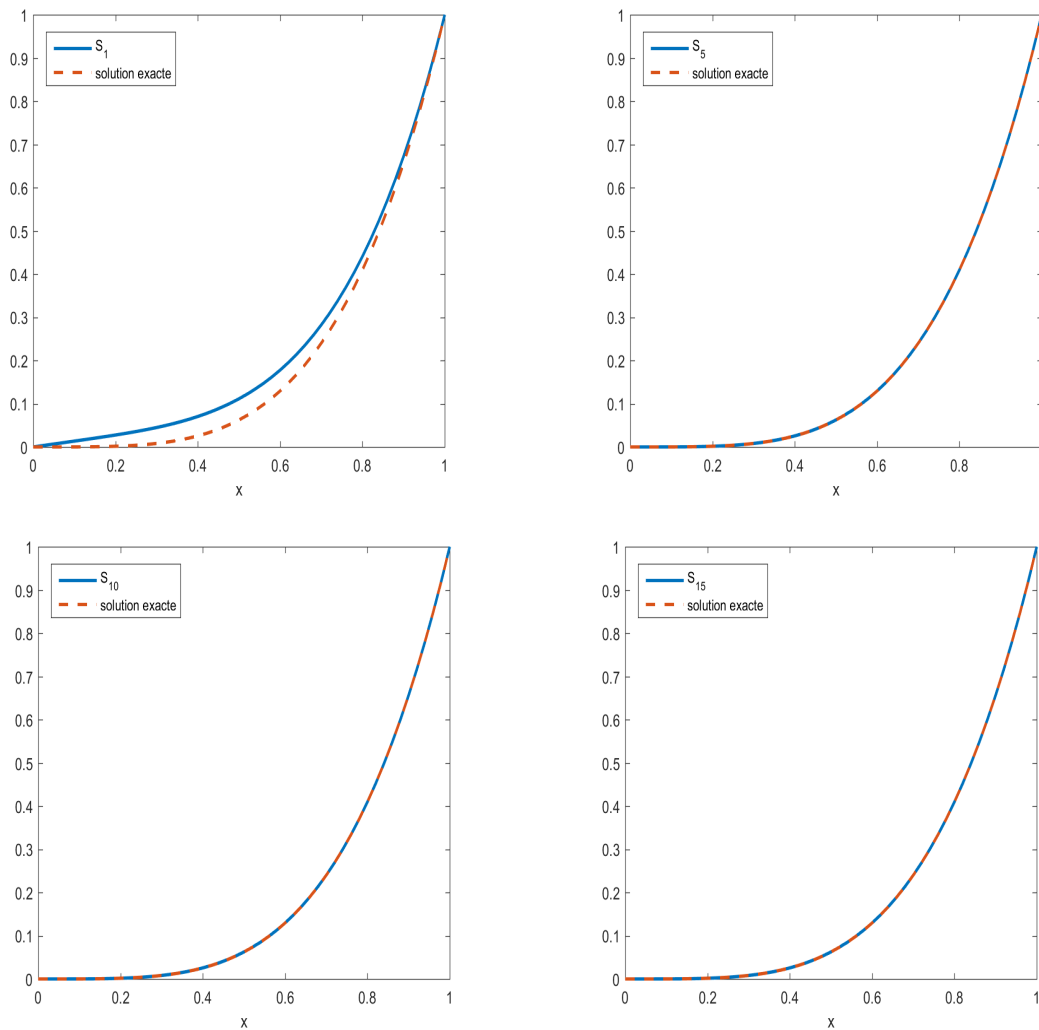


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.4) pour $h = -0.90987$

Dans la figure (3.5), on a tracé la solution du problème (3.1) et la solution exacte de cet exemple pour $h = -0.90987$.

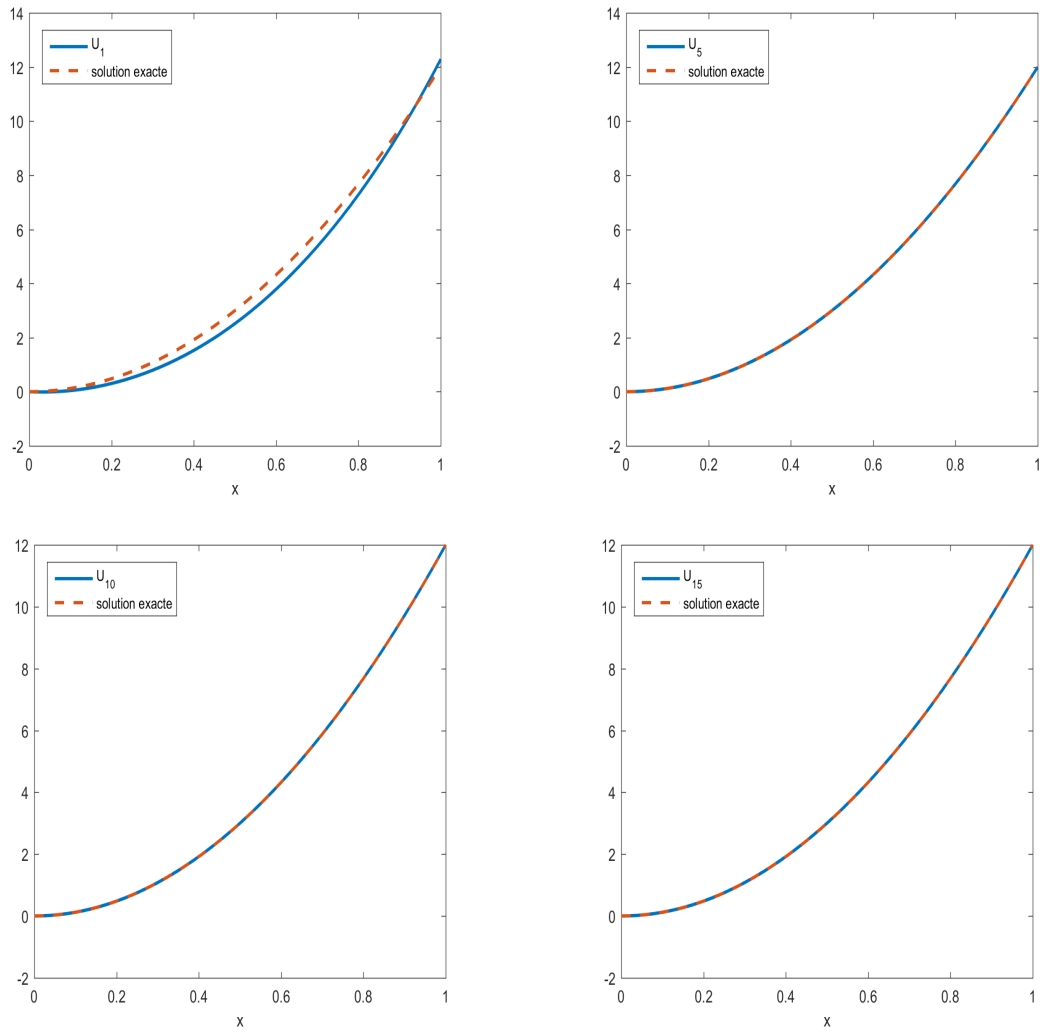


FIGURE 3.5 – Comparaison entre la solution calculé u avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.4) pour $h = -0.90987$

Exemple 3.5.

Considérons l'équation intégrale-différentielle non linéaire de Volterra-Fredholm suivante :

$$\begin{cases} 8\varphi''(x) & = 8(\cos(x) - \sin(x)) - \frac{1}{50} \left(1 - 3\cos(x) - 2\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{3} \right) \\ & + 0,02 \int_0^x \sin(x-t)\varphi^2(t)dt + 0,02 \int_0^\pi \sin(x-t)\varphi^2(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \varphi(0) = -1, \quad \varphi(\pi) = 1 \end{cases}$$

$$\omega = 8, \quad A(x) = 0, \quad B(x) = 0.$$

D'après théorème (2.1), on a :

$$\begin{aligned} 8u(x) &+ \int_0^\pi \left[W(x,t) - 0,02 \int_0^x R(x,y;1)H_2(y,t)dy - 0,02 \int_0^\pi R(x,y;1)H_2(y,t)dy \right] u(t)dt \\ &= F(x) + 0,02 \int_0^x R(x,y;2) \left(\int_0^\pi H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy + 0,02 \int_0^\pi R(x,y;2) \left(\int_0^\pi H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy. \end{aligned}$$

Telque

$$u(x) = \varphi''(x),$$

$$W(x,t) = 0,$$

$$R(x,y;l) = \frac{2!}{l!(2-l)!} \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi)^{2-l} \Rightarrow \begin{cases} R(x,y;0) = \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi)^2, \\ R(x,y;1) = 2 \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi), \\ R(x,y;2) = \frac{\sin(x-y)}{\pi^2}, \end{cases}$$

$$H_2(y,t) = \begin{cases} t(y-\pi), & 0 \leq t \leq y, \\ y(t-\pi), & y \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

$$\mu(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 8(\cos(x) - \sin(x)) - \frac{1}{50} \left(1 - 3\cos(x) - 2\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{3} \right) \\ &+ 0,02 \int_0^x \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi)^2 dy + 0,02 \int_0^\pi \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi)^2 dy. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} u(x) &- \frac{0,01}{2} \int_0^\pi \left[\int_0^x \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi)H_2(y,t)dy + \int_0^\pi \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi)H_2(y,t)dy \right] u(t)dt - \frac{1}{8}F(x) \\ &- \frac{0,01}{4} \int_0^x \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} \left(\int_0^\pi H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy - \frac{0,01}{4} \int_0^\pi \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} \left(\int_0^\pi H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

On définit un opérateur non linéaire N par :

$$\begin{aligned} N[u(x)] &= u(x) - \frac{0,01}{2} \int_0^\pi \left[\int_0^x \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi)H_2(y,t)dy + \int_0^\pi \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi)H_2(y,t)dy \right] u(t)dt \\ &- \frac{1}{8}F(x) - \frac{0,01}{4} \int_0^x \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} \left(\int_0^\pi H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy \\ &- \frac{0,01}{4} \int_0^\pi \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} \left(\int_0^\pi H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy. \end{aligned} \tag{3.4}$$

D'après (3.3) et (3.4), on a

$$N[u(x)] = 0, \forall x \in [0, \pi].$$

On prend $u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)\tau^i$ et $u_0(x) = 0$

$u_n(x) = u_{n-1}(x) + hR_n[u_{n-1}(x)]$, avec

$$R_n[u_{n-1}(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} N(u(x)) \right]_{|\tau=0}.$$

Ainsi

$$u_1(x) = hN(u_0(x)) = \frac{-h}{8}F(x).$$

$$u_2(x) = u_1(x) + hR_2[N(u_1(x))] = u_1(x) + h \left[\frac{\partial}{\partial \tau} N(u(x)) \right]_{|\tau=0}.$$

$$= (1+h)u_1(x)$$

$$-\frac{h}{2} \int_0^\pi \left[\int_0^x \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi)H_2(y,t)dy + \int_0^\pi \frac{\sin(x-y)}{\pi^2} (2y-\pi)H_2(y,t)dy \right] u_1(t)dt.$$

⋮

Dans le tableau (3.8), on présente l'erreur E_n pour $h = -0.89987$ telque

$$E_n = \|y_{\text{exacte}}(x) - S_n(x)\|_\infty, n = 1, 2, \dots$$

avec

$$S_n(x) = \frac{1}{b-a} \left[\eta_1(b-x) + \eta_2(x-a) + \int_a^b H_2(x,t)u_n(t)dt \right].$$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$
E_n	1.294×10^{-1}	1.540×10^{-2}	2.597×10^{-4}	9.200×10^{-5}	9.211×10^{-5}	9.212×10^{-5}

TABLE 3.8 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.5)

Dans le tableau (3.9), on présente l'erreur E_n pour $h = -0.96987$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$
E_n	3.438×10^{-3}	1.464×10^{-3}	9.159×10^{-5}	9.212×10^{-5}	9.212×10^{-5}	9.212×10^{-5}

TABLE 3.9 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.5)

Dans le tableau (3.10), on présente l'erreur E_n pour $h = -0.90987$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$
E_n	9.774×10^{-2}	8.642×10^{-3}	1.125×10^{-4}	9.206×10^{-5}	9.212×10^{-5}	9.212×10^{-5}

TABLE 3.10 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.5)

Dans le tableau (3.11), on présente l'erreur E_n pour $h = -0.92987$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$
E_n	7.662×10^{-2}	5.246×10^{-3}	9.062×10^{-5}	9.209×10^{-5}	9.212×10^{-5}	9.212×10^{-5}

TABLE 3.11 – L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.5)

On remarque que l'erreur approche de zéro quand n est grand.

Dans la figure (3.6), on a tracé la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de cet exemple pour $h = 0.96987$, car pour ce h la solution approchée est plus proche de la solution exacte.

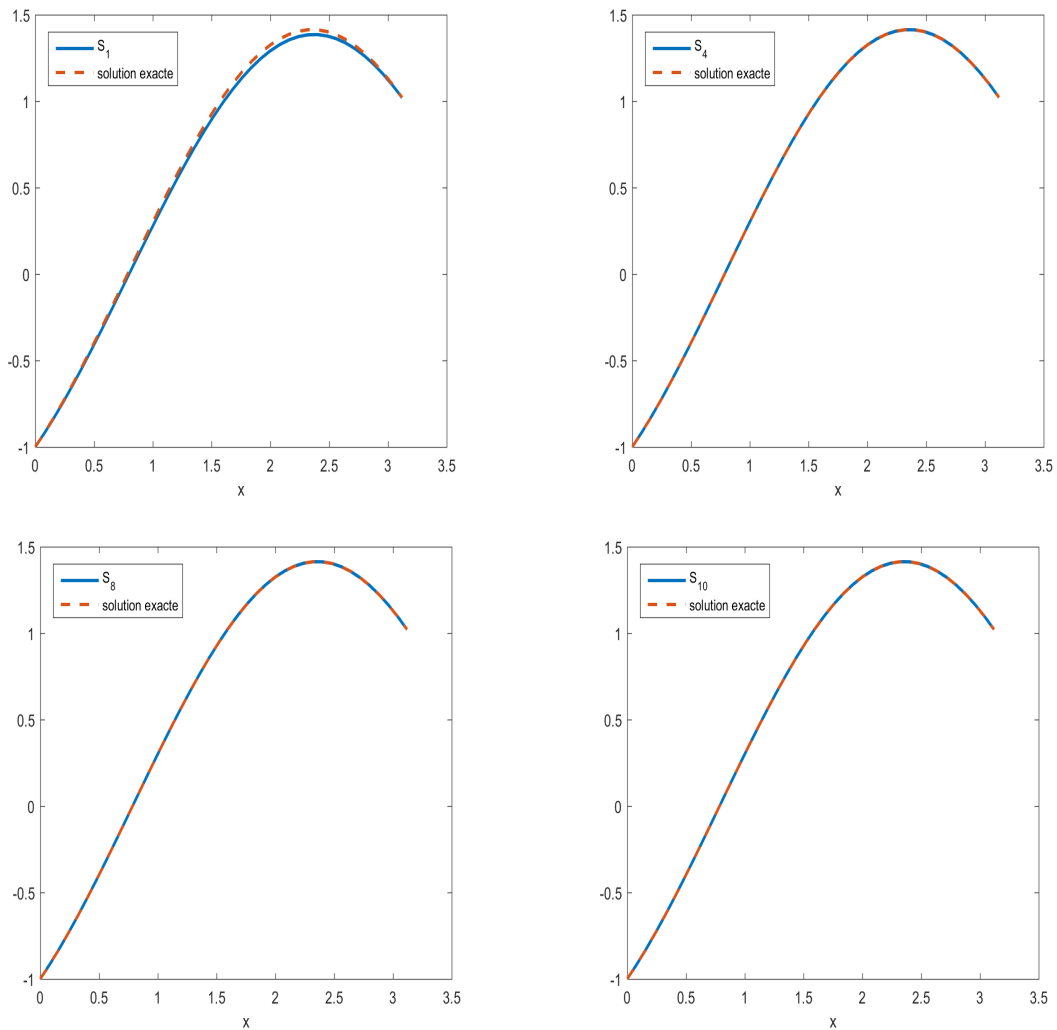


FIGURE 3.6 – Comparaison entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.5) pour $h = -0.96987$

Dans la figure (3.7), on a tracé la solution du problème (3.3) et la solution exacte de cet exemple pour $h = -0.96987$.

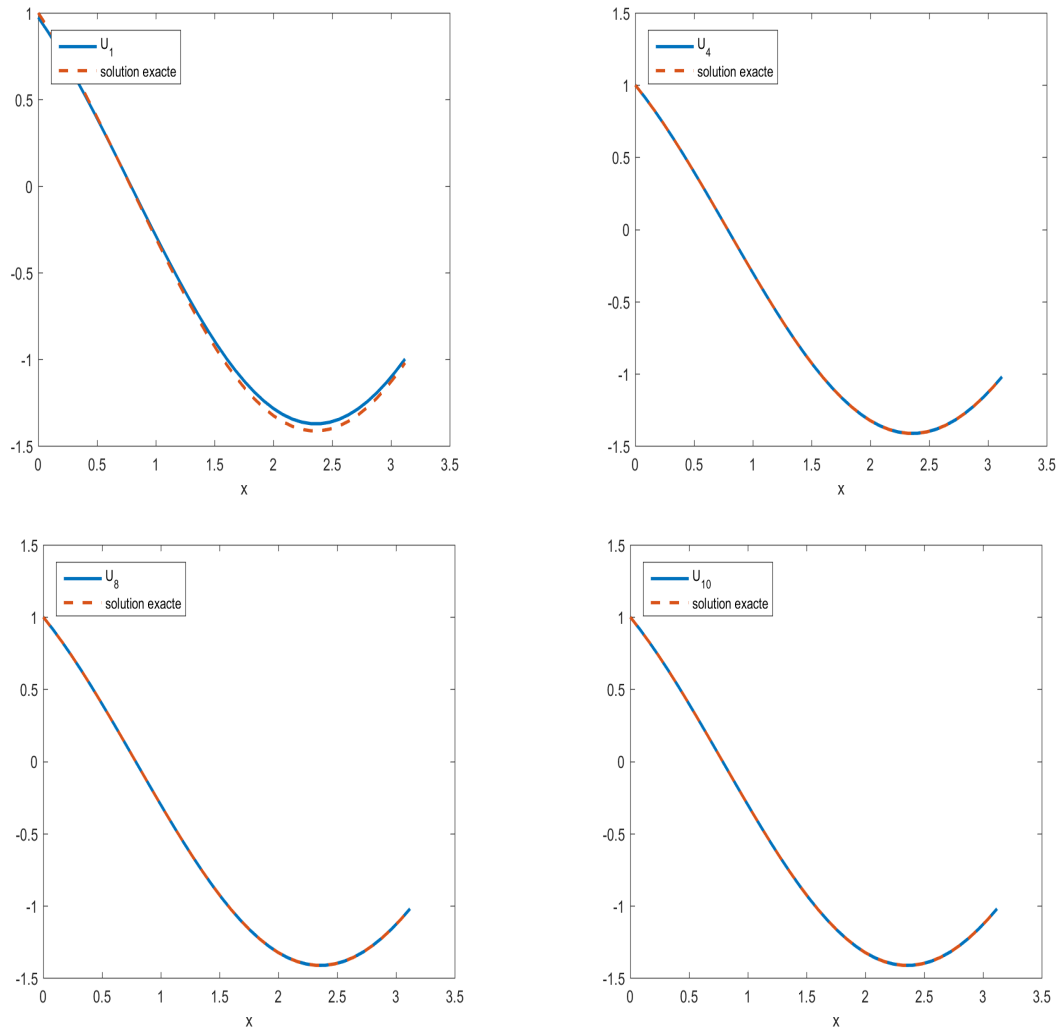


FIGURE 3.7 – Comparaison entre la solution calculé u avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.5) pour $h = -0.96987$

Exemple 3.6.

Considérons l'équation intégrale-différentielle non linéaire de Volterra-Fredholm suivante :

$$\begin{cases} 1000\varphi''(x) + \varphi(x) &= 1001e^{-x} - \left(\frac{-3e^{-3x} + 2e^x}{8} + \frac{2e^{-x}}{4} \right) - \left(\frac{-e^{x-4}}{8} - \frac{e^{-x-2}}{4} \right) \\ &+ \int_0^x \cosh(x-t)\varphi^3(t)dt + \int_0^1 (\cosh(x-t)\varphi^3(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = e^{-1}. \end{cases}$$

$\omega = 1000$, $A(x) = 0$, $B(x) = 1$.

D'après théorème (2.1), on a :

$$\begin{aligned} 1000u(x) &+ \int_0^1 \left[W(x,t) - \int_0^x R(x,y;1)H_2(y,t)dy - \int_0^1 R(x,y;1)H_2(y,t)dy \right] u(t)dt \\ &= F(x) + \int_0^x \sum_{l=2}^3 R(x,y;l) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^l dy + \int_0^1 \sum_{l=2}^3 R(x,y;l) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^l dy. \end{aligned}$$

Telque

$$u(x) = \varphi''(x),$$

$$W(x,t) = \begin{cases} W_1(x,t) &= t(x-1), \quad 0 \leq t \leq x, \\ W_2(x,t) &= x(t-1), \quad x \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$R(x,y;l) = \frac{3!}{l!(3-l)!} \cosh(x-y)(1-y+e^{-1}y)^{3-l} \Rightarrow \begin{cases} R(x,y;0) &= \cosh(x-y)(1-y+e^{-1}y)^3, \\ R(x,y;1) &= 3 \cosh(x-y)(1-y+e^{-1}y)^2, \\ R(x,y;2) &= 3 \cosh(x-y)(1-y+e^{-1}y), \\ R(x,y;3) &= \cosh(x-y), \end{cases}$$

$$H_2(y,t) = \begin{cases} t(y-1), \quad 0 \leq t \leq y, \\ y(t-1), \quad y \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\mu(x) = (1-x+e^{-1}x),$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 1001e^{-x} - \left(\frac{-3e^{-3x} + 2e^x}{8} + \frac{2e^{-x}}{4} \right) - \left(\frac{-e^{x-4}}{8} - \frac{e^{-x-2}}{4} \right) - (1-x+e^{-1}x) \\ &+ \int_0^x \cosh(x-y)(1-y+e^{-1}y)^3 dy + \int_0^1 \cosh(x-y)(1-y+e^{-1}y)^3 dy. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} u(x) &+ \frac{1}{1000} \left[\int_0^1 \left[W(x,t) - \int_0^x 3 \cosh(x-y)(1-y+e^{-1}y)^2 H_2(y,t)dy \right. \right. \\ &- \left. \int_0^1 3 \cosh(x-y)(1-y+e^{-1}y)^2 H_2(y,t)dy \right] u(t)dt - F(x) \\ &- \int_0^x 3 \cosh(x-y)(1-y+e^{-1}y) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy - \int_0^x \cosh(x-y) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^3 dy \\ &- \int_0^1 3 \cosh(x-y)(1-y+e^{-1}y) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^2 dy - \int_0^1 \cosh(x-y) \left(\int_0^1 H_2(y,t)u(t)dt \right)^3 dy \Big]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

On définit un opérateur non linéaire N par :

$$\begin{aligned}
N[u(x)] &= u(x) + \frac{1}{1000} \left[\int_0^1 \left[W(x, t) - \int_0^x 3 \cosh(x - y)(1 - y + e^{-1}y)^2 H_2(y, t) dy \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^1 3 \cosh(x - y)(1 - y + e^{-1}y)^2 H_2(y, t) dy \right] u(t) dt - F(x) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^x \cosh(x - y) \left(\int_0^1 H_2(y, t) u(t) dt \right)^3 dy - \int_0^1 \cosh(x - y) \left(\int_0^1 H_2(y, t) u(t) dt \right)^3 dy \right. \\
&\quad \left. - \int_0^x 3 \cosh(x - y)(1 - y + e^{-1}y) \left(\int_0^1 H_2(y, t) u(t) dt \right)^2 dy \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 3 \cosh(x - y)(1 - y + e^{-1}y) \left(\int_0^1 H_2(y, t) u(t) dt \right)^2 dy \right].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

D'après (3.5) et (3.6), on a

$$N[u(x)] = 0, \forall x \in [0, 1].$$

On prend $u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) \tau^i$ et $u_0(x) = 0$

$u_n(x) = u_{n-1}(x) + hR_n[u_{n-1}(x)]$, avec

$$R_n[u_{n-1}(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} N(u(x)) \right]_{|\tau=0}.$$

Ainsi

$$u_1(x) = hN(u_0(x)) = \frac{-h}{1000} F(x).$$

$$u_2(x) = u_1(x) + hR_2[N(u_1(x))] = u_1(x) + h \left[\frac{\partial}{\partial \tau} N(u(x)) \right]_{|\tau=0}.$$

$$= (1 + h)u_1(x) + \frac{h}{1000} \left[\int_0^1 \left[W(x, t) - \int_0^x 3 \cosh(x - y)(1 - y + e^{-1}y)^2 H_2(y, t) dy \right. \right.$$

$$\left. \left. - \int_0^1 3 \cosh(x - y)(1 - y + e^{-1}y)^2 H_2(y, t) dy \right] u_1(t) dt. \right.$$

⋮

Dans le tableau (3.12), on présente l'erreur E_n pour $h = -0.89987$ telque

$$E_n = \|y_{\text{exacte}}(x) - S_n(x)\|_{\infty}, n = 1, 2, \dots$$

avec

$$S_n(x) = \frac{1}{b-a} \left[\eta_1(b-x) + \eta_2(x-a) + \int_a^b H_2(x, t) u_n(t) dt \right].$$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
E_n	8.568×10^{-3}	9.429×10^{-4}	1.043×10^{-4}	1.284×10^{-5}	2.803×10^{-6}

TABLE 3.12 – L’erreur entre la solution calculé avec la méthode de l’analyse d’Homotopie et la solution exacte pour l’exemple (3.6)

Dans le tableau (3.13), on présente l’erreur E_n pour $h = -0.96987$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
E_n	7.009×10^{-3}	6.314×10^{-4}	5.746×10^{-5}	6.440×10^{-6}	1.864×10^{-6}

TABLE 3.13 – L’erreur entre la solution calculé avec la méthode de l’analyse d’Homotopie et la solution exacte pour l’exemple (3.6)

Dans le tableau (3.14), on présente l’erreur E_n pour $h = -0.90987$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
E_n	9.347×10^{-3}	1.122×10^{-3}	1.352×10^{-4}	1.764×10^{-5}	3.546×10^{-6}

TABLE 3.14 – L’erreur entre la solution calculé avec la méthode de l’analyse d’Homotopie et la solution exacte pour l’exemple (3.6)

Dans le tableau (3.15), on présente l’erreur E_n pour $h = -0.92987$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
E_n	5.450×10^{-3}	3.822×10^{-4}	2.742×10^{-5}	3.070×10^{-6}	1.388×10^{-6}

TABLE 3.15 – L’erreur entre la solution calculé avec la méthode de l’analyse d’Homotopie et la solution exacte pour l’exemple (3.6)

On remarque que l’erreur approche de zéro quand n est grand.

Dans la figure (3.8), on a tracé notre solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de cet exemple pour $h = -0.96987$, car pour ce h la solution approchée est plus proche de la solution exacte.

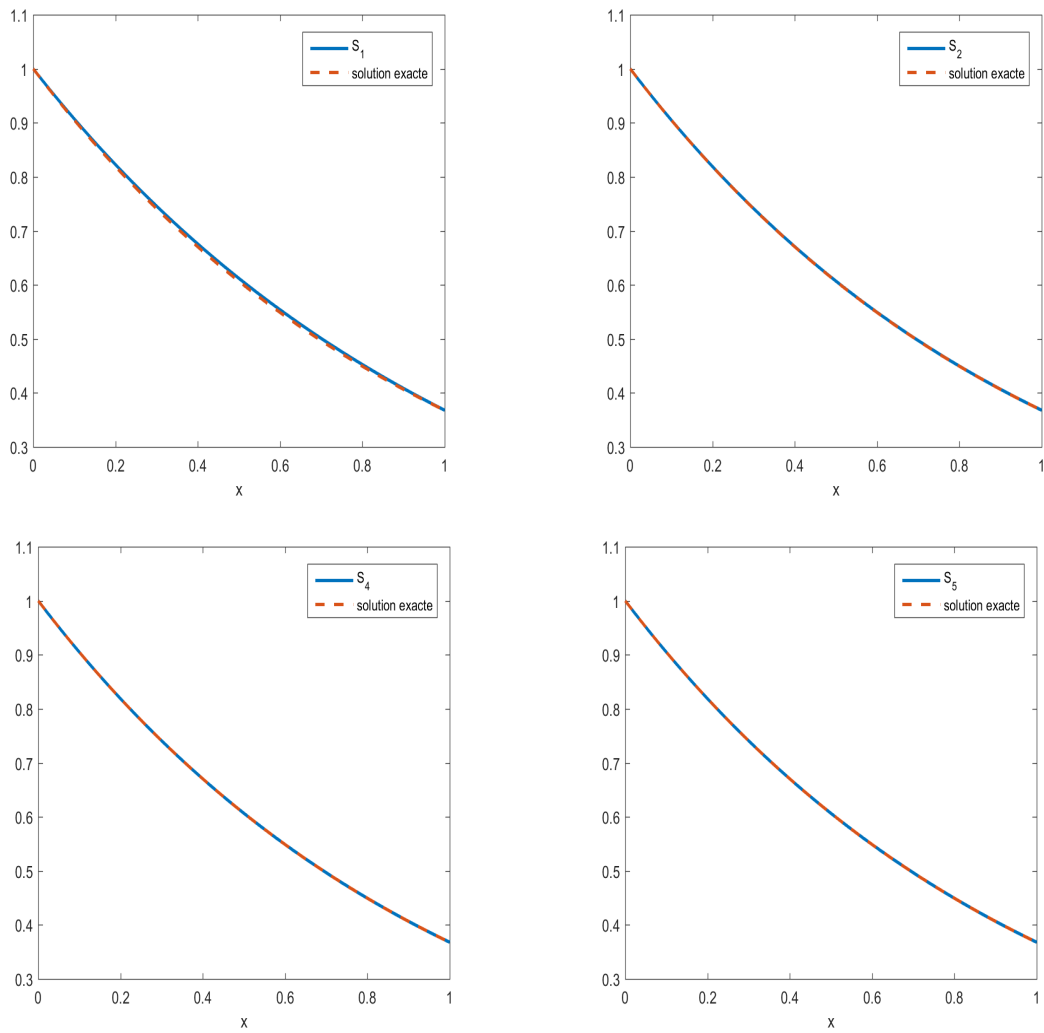


FIGURE 3.8 – Comparaison entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.4) pour $h = -0.96987$

Dans la figure (3.9), on a tracé la solution du problème (3.5) et la solution exacte de cet exemple pour $h = -0.96987$.

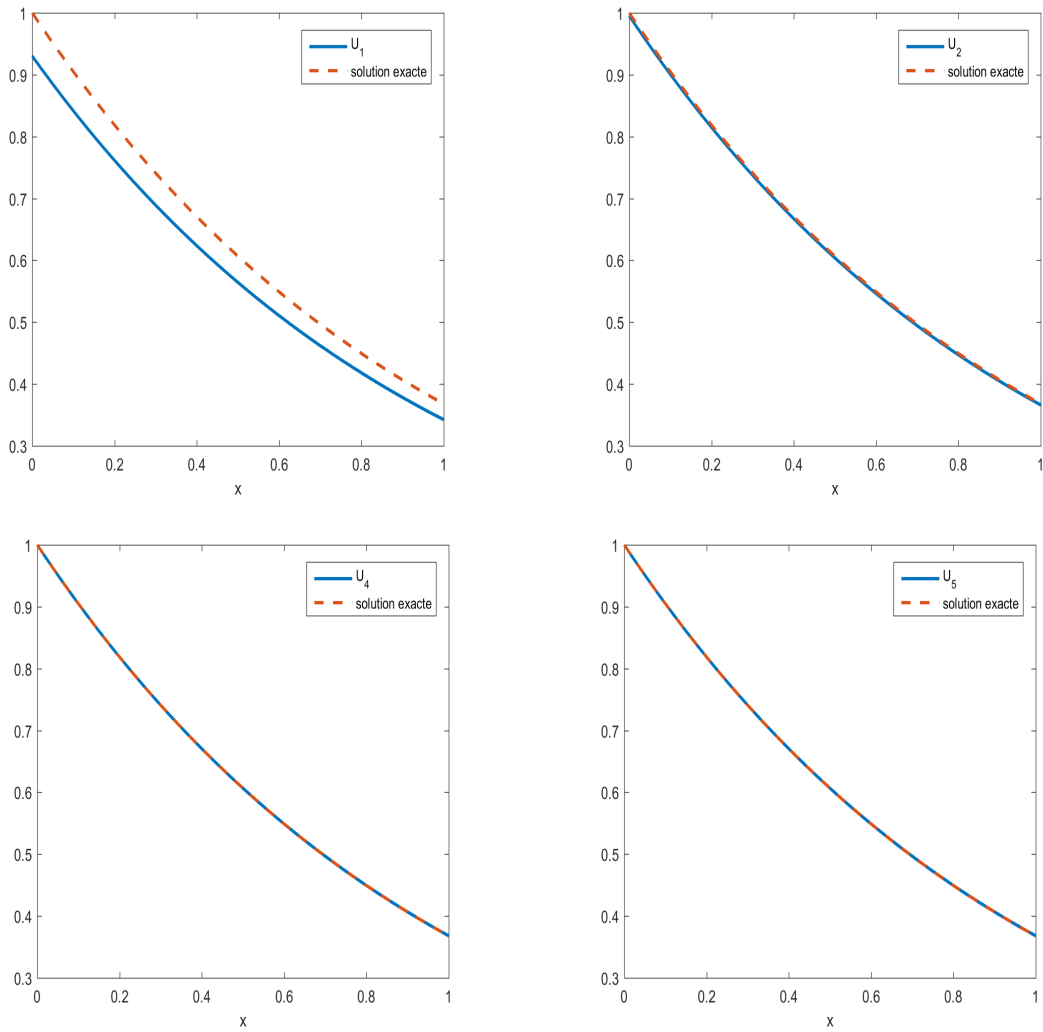


FIGURE 3.9 – Comparaison entre la solution calculé u avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.4) pour $h = -0.96987$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté un rappel sur les équations intégrales non linéaires de Volterra-Fredholm, ensuite l'existence et l'unicité de la solution avec les hypothèses posées sur le problème général. Après, on a donné plusieurs résultats pour trouver la solution approchée de ces équations en utilisant la méthode de transformation d'Adomian et la méthode de l'analyse d'Homotopie. Enfin, on a appliqué ces deux méthodes sur trois exemples différents. Notre but revient à trouver la solution approchée de ces équations. La comparaison entre les deux méthodes de solution utilisées au cours de notre recherche nous a permis de constater que la méthode d'Adomian est la plus appropriée à cause surtout de sa précision et son efficacité rapide et immédiate.

Table des figures

3.1	Comparaison entre la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte pour l'exemple (3.1)	36
3.2	Comparaison entre la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte pour l'exemple (3.2)	42
3.3	Comparaison entre la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte pour l'exemple (3.3)	48
3.4	Comparaison entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.4) pour $h = -0.90987$	52
3.5	Comparaison entre la solution calculé u avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.4) pour $h = -0.90987$	53
3.6	Comparaison entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.5) pour $h = -0.96987$	57
3.7	Comparaison entre la solution calculé u avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.5) pour $h = -0.96987$	58
3.8	Comparaison entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.4) pour $h = -0.96987$	62
3.9	Comparaison entre la solution calculé u avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte de l'exemple (3.4) pour $h = -0.96987$	63

Liste des tableaux

3.1	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte pour l'exemple (3.1)	35
3.2	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte pour l'exemple(3.2)	41
3.3	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode d'Adomian et la solution exacte pour l'exemple(3.3)	47
3.4	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.4)	50
3.5	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.4)	50
3.6	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.4)	51
3.7	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple (3.4)	51
3.8	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple(3.5)	55
3.9	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple(3.5)	55
3.10	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple(3.5)	56
3.11	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple(3.5)	56
3.12	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple(3.6)	61
3.13	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple(3.6)	61
3.14	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple(3.6)	61
3.15	L'erreur entre la solution calculé avec la méthode de l'analyse d'Homotopie et la solution exacte pour l'exemple(3.6)	61

Bibliographie

- [1] R. Abazari A. Borhanifar. Differential transform method for a class of nonlinear integro-differential equations with derivative type kernel. *Canad. J. Comput. Math. Natural Sciences, Eng. and Mid.* 3, pages 1–6, (2012).
- [2] I. Ozkol Arikoglu. Solution of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method. *Comput. Math. Appl.* 65, pages 2411–2417, (2008).
- [3] S. H. Behiry. Nonlinear integro-differential equations by differential transform method with adomian polynomials. *Math. Sci. Lett.* 2(3), pages 209–221, (2013).
- [4] A. Efimov B.Golubov and V. Skvortsov. Walsh series and transforms (theory and applications). *Springer Netherlands*, 1991.
- [5] M. Cakir and D. Arslam. The adomian decomposition method and the differential transform method for numerical solution of multi-pantograph delay differential equations. *Applied Mathematics*, (6), pages 1332–1343, (2015).
- [6] D.R.Smart. Fixed point theorems. *Cambridge Uni.Press.Cambridge*, 1974.
- [7] J. S. Duan. Recurrence triangle for adomian polynomials. *Appl. Math. Comput.* 216, pages 1235–1241, (2010).
- [8] X Feng. An analytic study on the multi- pantograph delay equations with variable coefficients. *Bulletin Mathématique de la society des Sciences mathématiques de Roumanie Tome*, 56, pages 205–215, (2013).
- [9] S. Shahmorad G. Ebadi, M. Y. Rahimi-Ardabili. Numerical solution of the nonlinear volterra integro-differential equations by the tau method. *Appl. Math. Comput.* 188, pages 1580–1586, (2007).
- [10] G.Adomian. Solving frontier problems of physics : The decomposition method. *Kluwer Academic Publishers Boston,MA*, 1994.

-
- [11] M.M. Hosseini and H Nasabzadeh. On the convergence of adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation* ,182, pages 536–543, (2006).
- [12] Raslan K.R. Ismail, H.N and G.S Salem. Solitary wave solutions for the general kdv equation by adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation* ,, pages 17–29, (2004).
- [13] M. Eslami J. Biazar. Differential transform method for systems of volterra integral equations of the second kind and comparison with homotopy perturbation method. *Int. J. Phys. Sci. 6*, pages 1207–1212, (2011).
- [14] at al Keskin, Y. Approximate solutions of generalized pantograph equations by the differential transform method. *International Journal of Non-linear Sciences and Numerical*, 8, pages 159–164, (2007).
- [15] A Kurnaz and G Oturanc. The differential transform approximation for the system ordinary differential equation. *International Journal of Computer Mathematics*,82, pages 709–719, 2005.
- [16] Khaled Geprrel Muteb K. Allethi Mohamed. S . Mohamed and Refah A. Alotabi. Homotopy analysis transform method for integro-differential equations. *Gen. Math. Notes*, 32(1), 2004.
- [17] Miloud Moussai. Résolution des équations intégrales différentielles. *Université Mohamed Boudiaf- M'sila*, pages 22–39, 2018.
- [18] Teharbit.I Sehili.B. Thèse sur la résolution des équations intégrales non linéaires. *Université mohamed el bachir el ibrahimi Bordj bou arreridj*, pages 3–4, 2013.
- [19] S.Liao. Notes on the homotopy analysis method : Some definitions and theorems. *Commun Nonlinear Sci*, 14, pages 983–997, (2009).
- [20] Abdul-Majid Wazwaz. A new algorithm for calculating adomian polynomials for nonlinear operators. *Applied Mathematics and Computation* 111, pages 53–69, (2000).
- [21] Abdul-Majid Wazwaz. Linear and nonlinear integral equations methods and applications. 2011.