

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Ibn Khaldoun de Tiaret**



**Faculté des Sciences Appliquées**

**Département de Génie Civil**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du  
diplôme de Master**

**Spécialité : Génie Civil Option : structure**

**Présenté par :**

DJOUDI Ilyes

KHELIFI El mahdi

**Sujet du mémoire**

***Modélisation du comportement des poutres  
en flexion par différents type d'élément barre***

*Soutenu publiquement le 25/06/2023 devant le jury composé de :*

M.HADJI. L

Président

M. ABDELAZIZ .H. H

Rapporteur

M. R . BENFERHAT

Examineur

**Promotion 2022/2023**

## Remerciements

Au terme de ce mémoire, nous tenons à remercier dieu tout puissant, de nous avoir donné le courage, la santé, la volonté, et la patience pour accomplir notre travail.

Nous tenons à remercier profondément notre encadrant

Dr HADJ HENNI

Pour les nombreuses heures qu'il a passées à nous orienter, pour la confiance qu'il nous a accordée en acceptant d'encadrer ce travail de recherche, pour ses qualités humaines et scientifiques, ses conseils ainsi que son enthousiasme durant ces deux années de master.

Nous tenons à exprimer nos reconnaissances envers les membres de jury

Qui ont accepté de juger ce travail.

J'adresse aussi nos remerciements à tous nos professeurs de la filière de génie civil, et surtout au chef de département.

## Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail a ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père **Mohamed**

A la femme qui a souffert sans ma laisser souffrir, qui n'a jamais dit non âmes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère **hamida**

A mon adorable sœur **RYMA** qui me conseille, encourager et soutenir tout au long de mes études

A ma grande mère, mes oncles et mes tantes. Que dieu leur donne une longue et joyeuse vie

A tous les cousins, les voisins et les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant

Merci pour leurs amours et leurs encouragements.

Sans oublie mon binôme **khelifi el mahdi** pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension

***ILYES***



## Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail a ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect :  
mon cher père

A la femme qui a souffert sans ma laisser souffrir, qui n'a jamais dit non âmes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère

A ma grande mère, mes oncles et mes tantes. Que dieu leur donne une longue et joyeuse vie

A tous les cousins, les voisins et les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant

Merci pour leurs amours et leurs encouragements.

Sans oublie mon binôme **djoudi ilyes** pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension

***EL MAHDI***

## Résumé

:

À ce sujet, nous avons abordé l'application de la méthode des éléments finis en utilisant deux types éléments barre à deux et à trois nœuds. Pour examiner la validité de la présente méthode nous avons effectué une comparaison avec la théorie élémentaire résistance des matériaux.

Notre objectif est de déterminer les déplacements et moments réduits dans une poutre travaillant en flexion surtout pour les systèmes hyperstatiques à cet effet nous avons développé une formulation en éléments barres à deux et à trois nœuds basée sur des modèles de déplacement sous forme polynomiale. par la suite il est intéressant de développer un code de calcul ou un programme en langage Maple afin d'exploiter les résultats souhaités.

Cette méthode est utile et de trouver des solutions aux problèmes et de corriger les erreurs.

Et réparer les paquets qui peuvent répondre à notre objectif dans la pratique. Nous avons fourni des exemples concrets et des preuves de mon programme de compte dans le dernier chapitre de cette recherche.

**Mots-clés:** poutres, éléments finis, résistance des matériaux, systèmes hyperstatiques , Maple, déplacements, moments.

.

.

## **Abstract**

In this regard, we discussed the application of the finite element method using two types of two- and three-node bar elements. To examine the validity of this method we have made a comparison with the elementary resistance theory of materials.

Our objective is to determine the displacements and reduced moments in a beam working in bending especially for hyper static systems for this purpose we have developed a two- and three-node bar element formulation based on displacement models under polynomial form. Then it is interesting to develop a calculation code or a program in Maple language in order to exploit the desired results.

This method is useful and finds solutions to problems and correct errors.

And repair packages that can meet our goal in practice. We provided concrete examples and evidence of my account program in the last chapter of this research.

## **Keywords:**

Beams, finite elements, material resistance, hyper static systems, maple, displacements, moments.



## ملخص:

في هذا الصدد، ناقشنا تطبيق طريقة العناصر المحدودة باستخدام نوعين من عناصر الشريط ثنائي وثلاث عقدة.

لفحص صحة هذه الطريقة، قمنا بإجراء مقارنة مع نظرية المقاومة الأولية للمواد.

هدفنا هو تحديد الإزاحة واللحظات المخفضة في شعاع يعمل في الانحناء خاصة للأنظمة شديدة الثبات لهذا

الغرض، قمنا بتطوير تركيبة عنصر شريط ثنائي وثلاث عقدة بناءً على نماذج الإزاحة تحت شكل متعدد الحدود.

ثم من المثير للاهتمام تطوير رمز حساب أو برنامج بلغة مابل من أجل استغلال النتائج المرجوة.

هذه الطريقة مفيدة وتجد حلولاً للمشاكل والأخطاء الصحيحة.

وإصلاح الحزم التي يمكن أن تحقق هدفنا في الممارسة العملية. قدمنا أمثلة وأدلة ملموسة على برنامج حسابي في

الفصل الأخير من هذا البحث.

**الكلمات المفتاحية :** الحزم، العناصر المحدودة، مقاومة المواد، الأنظمة شديدة الثبات، القيقب، الإزاحة،

اللحظات.

## NOTATIONS PINCIPALES

M.E.F : Méthode d'éléments finis

$[K]^e$  : Matrice de rigidité élémentaire

M : Moment de flexion

$\theta$  : Rotation autour d'un axe

{F} : Vecteur des forces nodales globales

{q} : Vecteur des déplacements nodaux

L : La longueur de la poutre

A : La section transversale

[N] : Matrice de fonction d'interpolation

E : Module d'élasticité longitudinal

I : Moment d'inertie

[B] : Matrice de gradient d'interpolation

$F_i^e$  : Force élastique intérieure au nœud i

$[\lambda]$  : La matrice de passage

$P_i$  : Une charge concentrée aux i nœuds

[D] : La matrice des propriétés élastiques des matériaux

## Liste de figures

Figure.I. 1 : domaine V discrétisé par sous domaine $V_e$ .....	7
Figure I.2. : Maillage du domaine en triangles à trois nœuds. ....	8
Figure I.3. : principe d'analyse par la MEF .....	12
Figure II.1 : Domaines d'utilisation des poutres. ....	17
Figure II .2 : poutres métalliques.....	18
Figure II.3 : poutres en bois.....	19
Figure II.4: poutres en béton.....	19
Figure II.5 poutres précontraintes.....	20
Figure II.6. poutre simple .....	21
Figure II.7 poutre console.....	21
Figure II.9 poutre encastree et appuyee .....	23
Figure II.10 poutre continue.....	24
Figure II.11 Poutre à double encastrement .....	23
Figure II.12 Poutre supportee à double encastrement .....	24
Figure II.13 Charge concentrée .....	24
Figure II.14 Charge uniformément répartie.....	25
Figure II.15 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des poutres. ....	29
Figure III.1 :degré de liberté d'un élément en flexion simple .....	33
Figure III.2 : Assemblage de deux éléments .....	40

## Liste de tableaux

Tableau I.1. : les types d'éléments finis .....	10
Tableau III.1: comparaison des résultats des déplacements et des moments réduits obtenus par éléments barre a 2 et 3 nœuds avec ceux d'RDM en fonction du nombre d éléments....	52
Tableau III.2. Valeurs des déplacements et moments réduits pour une poutre continue a plusieurs travées par élément barre à deux nœuds .....	53
Tableau III.3 Valeurs des déplacements et moment réduits pour une poutre continue a plusieurs travées en plu élément barre à trois nœuds .....	54

## Table des matières

Remerciements.....	I
Dédicace.....	II
Résumé.....	II
Liste de figures.....	V
Liste de tableaux.....	VI
<i>Introduction</i> .....	01

### *Chapitre I Généralités sur la méthode des éléments finis*

I)- Généralités : .....	4
I-1)- Introduction : .....	4
I-2)- Définition de la méthode des éléments finis : .....	4
I-3)- Historique de la méthode des éléments finis : .....	4
I-4)- Avantages et inconvénients de la MEF : .....	5
I.4.A) - Les Avantages de la MEF : .....	5
I.4.B) - Les inconvénients de la MEF : .....	6
I-5)- Etapes de l'utilisation de la méthode des éléments finis « MEF » : .....	6
I-6)- Caractéristiques d'un élément fini: .....	6
I.6.A)- Les nœuds géométriques : .....	6
I.6.B)- Attributs d'un élément fini : .....	7
I.6.C)- Concept de la méthode des éléments finis: .....	8
I.6.D)- Type des éléments finis: .....	8
I.6.E)- Choix des éléments finis: .....	10
F)- Qualité des éléments finis : .....	11
G)- Principe de la MEF : .....	11
H)- Différents type de modèles d'un EF : .....	12
I.6.I)- Domaines d'application de la MEF : .....	14
I.6.J)- Etapes logiques de calcul par méthodes des éléments finis : .....	14

I.6.K)- Utilisation d'un Logiciel élément fini : .....	14
I.7 Conclusion : .....	15

*Chapitre II Les différentes théories des poutres*

II.1. Introduction .....	17
II.2 définition de la poutre : .....	17
II.3 Domaines d'utilisation des poutres .....	17
II.4 Poutres de construction .....	18
II.4.1 Les poutres métalliques .....	18
II.4.2 Les poutres en bois .....	19
II.4.3 Les poutres en béton .....	19
II.4.4 Les poutres précontraintes .....	20
II.5 Types des poutres .....	21
II.5.1 Poutre simple .....	21
II.5.2 Poutre console .....	21
II.5.3 Poutre avec porte-à-faux .....	22
Équilibre de translation: .....	22
Équilibre de rotation: .....	22
II.5.4 Poutre encastree et appuyee .....	23
II.5.5 Poutre continue .....	23
II.5.6 Poutre à double encastrement .....	23
II.5.7 Poutre supportee à double encastrement .....	24
II.6 Types des charges : .....	24
II.6.1 Charge concentrée : .....	24
II.6.2 Charge uniformément répartie .....	25
II.7 Théories des poutres .....	26
II.8 Historique des théories des poutres .....	26
Conclusion .....	30

### *Chapitre III Modélisation des poutres par différents types d'élément*

III.1. Introduction :	32
III.2. Etapes de calcul par la méthode des éléments finis :	32
III.3. Formulation en éléments finis:	33
III.3.1.Elément de barre à deux (02) nœuds :	33
III.3.1.1 Equation fondamentale pour éléments finis :	34
III.3.1.2 Relation déplacement - déformation :	36
III.3.1.3 Relation déformation -contrainte :	37
III.3.1.4 équation fondamentale d'éléments finis	38
III.3.1.5 Les efforts internes (moment de flexion):	39
III.3.1.6 Formulation globale :	39
III.3.2.1 Interpolation nodale sur les déplacements :	42
III.3.2.2 Matrice de rigidité élémentaire :	44
III.3.2.3 Code de calcul par éléments finis :	45
III.3.2.6. Exemple de calcul	54
<i>Conclusion</i>	55
<i>Liste de références</i>	55
<i>Les annexes</i>	55



*Introduction  
générale*

# *Introduction générale*

---

## **Introduction générale**

Le calcul des poutres dans le domaine de génien civil nécessite d'appliquer des méthodes analytiques celles de la mécanique des structures, mais des fois en rencontre des difficultés de calcul sur tout pour les systèmes hyperstatiques. A cet effet nous pouvons utiliser d'autre méthode basée sur le sur principe de discrétisation du domaine a étudié en sous domaines (éléments) de géométries simples et par la suite construisons les matrices de rigidité des éléments qu'on doit les assembler pour obtenir la rigidité globale du système qui est lié aux déplacement inconnus et les charges imposées sous forme d'un système d'équations a résoudre

Notre travail porte principalement une modélisation du comportement des poutres en flexion par différent types d'élément barre

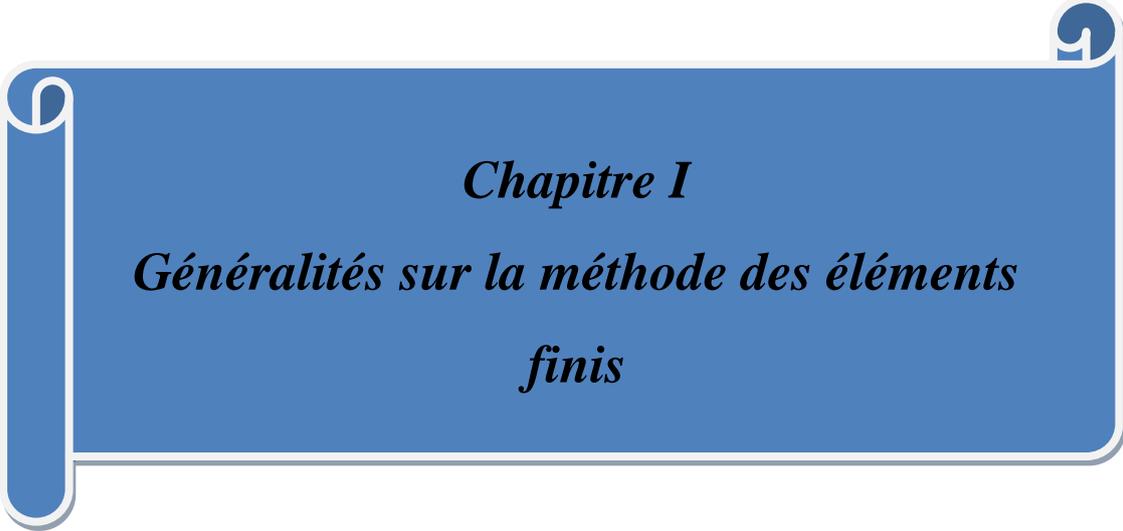
Ce manuscrit est composé de trois chapitres :

Dans les premiers nous présentons une étude bibliographique sur la méthode de l'élément finis

Dans Le second nous exposons des généralités sur les poutres et leurs méthodes de calcul

Le dernier chapitre est consacré à la présentation de la formulation en éléments finis pour les deux types d'éléments barre et au traitement de calcul des systèmes hyperstatiques

Et a la fin une conclusion générale est dégagée

A blue horizontal scroll graphic with a white border and decorative scroll ends on the left and right sides. The text is centered within the scroll.

*Chapitre I*  
*Généralités sur la méthode des éléments*  
*finis*

**I)- Généralités :****I-1)- Introduction :**

La méthode des éléments finis est une technique d'analyse numérique qui permet d'obtenir des solutions approchées dans une large variété de problèmes d'ingénieries. Tout au début cette méthode était développée pour étudier les structures complexes.

**I-2)- Définition de la méthode des éléments finis :**

La présente méthode dite : Méthode des éléments finis (MEF) est une procédure numérique pour analyser les structures et les milieux continus. Généralement la problématique est compliquée à résoudre d'une manière satisfaisante par des méthodes analytiques classiques. Les problèmes rencontrés précédemment tout à fait insurmontables sont devenus actuellement résolus par habitude.

Les procédures des éléments finis sont employées dans des divers domaines à savoir la conception des bâtiments, des moteurs de chaleur ou électriques et même dans le domaine spatial , cette méthode (MEF) est basée sur l'introduction de beaucoup d'équations algébriques simultanées, qui sont produites et résolues sur un ordinateur numérique.

Le procédé de calcul par MEF est exécuté sur l'ordinateur (calcul numérique), ce pendant l'intervalle d'erreurs sera diminué tout en traitant plusieurs sortes d'équations avec des résultats assez précis pour la technologie qui sont liés à des coûts raisonnables.

Le problème peut concerner la méthode d'analyse des contraintes, la conduction de la chaleur, Ou n'importe lequel de plusieurs autres secteurs, actuellement les éléments finis sont également employés pour analyser des problèmes du transfert thermique, champs de lubrification de flux de fluide, électriques et magnétiques et beaucoup d'autres.[1]

**I-3)- Historique de la méthode des éléments finis :**

Théoriquement les méthodes des éléments finis sont basées (M.E.F) d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximations, elle est mise au point en 1953 chez Boeing (SEATTLE USA, calcul des structures d'ailes d'avion), on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par TURNER CLOUGH , MARTIN et TOPP en 1956).

Par contre les bases théoriques générales, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de 1954 à 1960 (ARGYIS KELSEY) certaines idées ont été apparues auparavant et précisément chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites. L'expression élément finie a été inventée par SLOUGH en 1960, la MEF s'attaque à tous les domaines du calcul de structures.

La méthode des éléments finis (MEF) est applicable dans le domaine de la mécanique des solides et des structures avec la conception de gros ordinateurs tels que : ABAQUES, SAP2000, CATIA, FORTRAN, etc.

La crédibilité des résultats obtenus va permettre l'utilisation de la méthode des éléments finis par des entreprises et des bureaux d'études de taille réduite. [1] , [2]

#### **I-4)- Avantages et inconvénients de la MEF :**

Toutes les méthodes permettront de résoudre des problèmes aux limites de manière approximative (séries, différences finies...) la méthode des éléments finis présente de tels avantages qu'elle est la plus utilisée sauf cas particuliers.[1],[3]

##### **I.4.A) - Les Avantages de la MEF :**

□ La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa généralité et sa souplesse et cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire exécuter sur un mode de calcul (logiciel...) sur un ordinateur avec :

- Sélection du type de problème.
  - Sa géométrie et forme.
  - Type d'élément.
  - Etat de chargement et des conditions aux limites.
- Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite. Elle peut être applicable à une variété de problèmes mécanique ou bien physiques, la géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de nature quelconque.
- La méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle.

**I.4.B) - Les inconvénients de la MEF :**

- La méthode des éléments finis a néanmoins quelques inconvénients, elle donne un résultat numérique particulier pour un problème spécifique. Elle ne fournit aucune forme de solution susceptible de permettre une étude analytique de l'effet d'un changement de paramètre par exemple.
- Un ordinateur, un programme fiable et une utilisation intelligente sont nécessaires.
- Les programmes généraux de calcul doivent être fortement documentés.

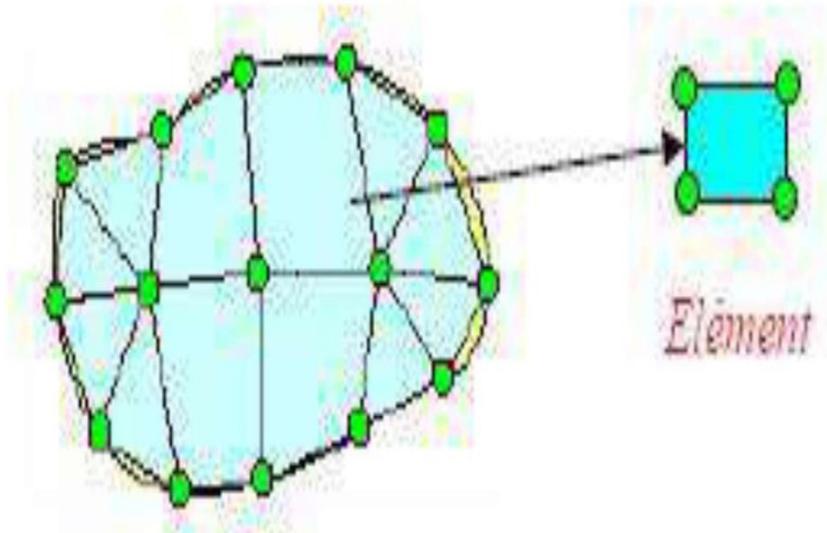
**I-5)- Etapes de l'utilisation de la méthode des éléments finis « MEF » :**

Concernant les applications précitées, les méthodes éléments finis perdent leur signification physique d'éléments structuraux : la méthode MEF est considérée comme un outil de mathématique appliquée destinée à résoudre les équations différentielles et les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines.
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine.
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- Assemblage des matrices élémentaires.
- Prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équations.
- Introduction des conditions aux limites essentielles et résolution ;
- Évaluation, dans chaque élément, des grandeurs utiles (contraintes, déplacements...).
- Jugement de manière critique les résultats obtenus.

**I-6)- Caractéristiques d'un élément fini:****I.6.A)- Les nœuds géométriques :**

Nous choisissons un ensemble de  $n$  points, sur le domaine  $V$ , qui servira à définir la géométrie des éléments, ces points sont appelés les nœuds géométriques, ils coïncident éventuellement avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine  $V$  par un ensemble de domaines  $V_e$  de formes relativement simples.



« Figure.I. 1 : domaine V discrétisé par sous domaine  $V_e$  ».

### I.6.B)- Attributs d'un élément fini :

Un découpage artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu en éléments finis permet d'isoler un de ces éléments pour l'étudier et établir ses caractéristiques, l'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

**Géométrie** : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangulaire ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.

**Matériau** : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope... etc.).

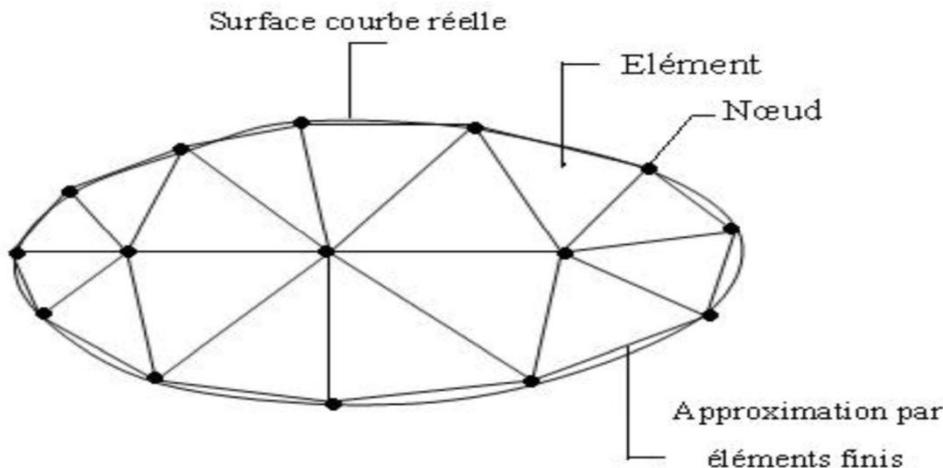
**Nœuds** : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connectivité des éléments les uns aux autres, ils occupent les sommets, les milieux des arêtes et faces, selon le type de l'élément et la théorie adaptée.

**Degrés de liberté** : la fonction d'approximation (ex : le champ de déplacements) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.[2]

Forces nodales : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température...etc).

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur force.

### I.6C)- Concept de la méthode des éléments finis:



« Figure I.2. : Maillage du domaine en triangles à trois nœuds ».

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés (Éléments finis) et le comportement de chaque élément est exprimé en terme d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage des éléments.

### I.6.D)- Type des éléments finis:

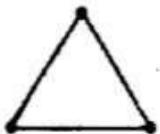
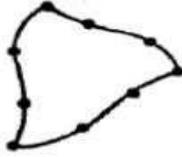
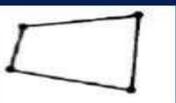
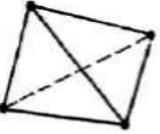
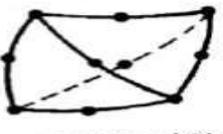
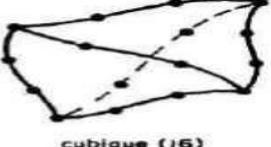
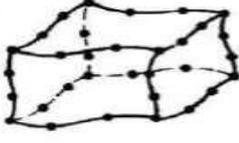
La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement. Ils sont groupés en quatre classes :

- 1- les déplacements et les déformations planes.
- 2- la flexion des plaques.
- 3- les coques.
- 4- l'analyse des solides

On peut classer, les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie (Tableau 1.6.D) comme suit :

- Les éléments unidimensionnels: barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques pour modéliser les raidisseurs dans un voile.
- Les éléments bidimensionnels: élasticité plane (déformation ou contraint) ou plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- Les éléments tridimensionnels: éléments de volume ou coques épaisses.
- Les éléments axisymétriques : qui constituent une classe bien particulière : toutes à section triangulaire ou quadrangulaire, coques conique ou méridienne courbe, (éléments de volume ou coques épaisses).[1],[3]

Tableau 1.1. : les types d'éléments finis

Elements	Linéaires	paraboliques (quadratiques)	cubiques
Unidimensionnels	 linéaire (2)	 quadratique (3)	 cubique (4)
Bidimensionnels Triangulaires	 linéaire (3)	 quadratique (6)	 cubique (9)
Bidimensionnels quadrilatéraux	 linéaire (4)	 quadratique (8)	 cubique (12)
Tridimensionnel Tétraédriques et hexaédriques	 linéaire (4)	 quadratique (10)	 cubique (16)
	 linéaire (8)	 quadratique (20)	 cubique (32)
autres types	 Masse	 Ressort	 Contact

**I.6.E)- Choix des éléments finis:**

Les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristiques de la modélisation certains programmes offrent un choix très vaste, d'autres très limité.

Il convient donc de passer en revue les particularités essentielles des éléments disponibles :

- Modèle (déplacement, équilibre, mixte, ...).
- Nœuds, et inconnues aux divers nœuds.
- Convergence (critères et taux).
- Degré (des divers champs).
- Compatibilité des éléments les uns avec les autres.
- Performances et limitations.

**F)- Qualité des éléments finis :**

Un bon élément fini doit réunir les propriétés suivantes :

- Aucun défaut de base (mécanisme...).
- Convergence rapide.
- Bonne précision, déjà dans un maillage grossier.
- Vecteurs forces consistants.
- Connexion (conforme) possible avec d'autres modèles.
- Qualités de convergence et précision conservée pour une distorsion raisonnable.

**G)- Principe de la MEF :**

La M.E.F est basée sur une idée simple qui consiste à subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de formes géométriques simples (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœud:

A)- Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

B)- La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

C)- Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation.[4]

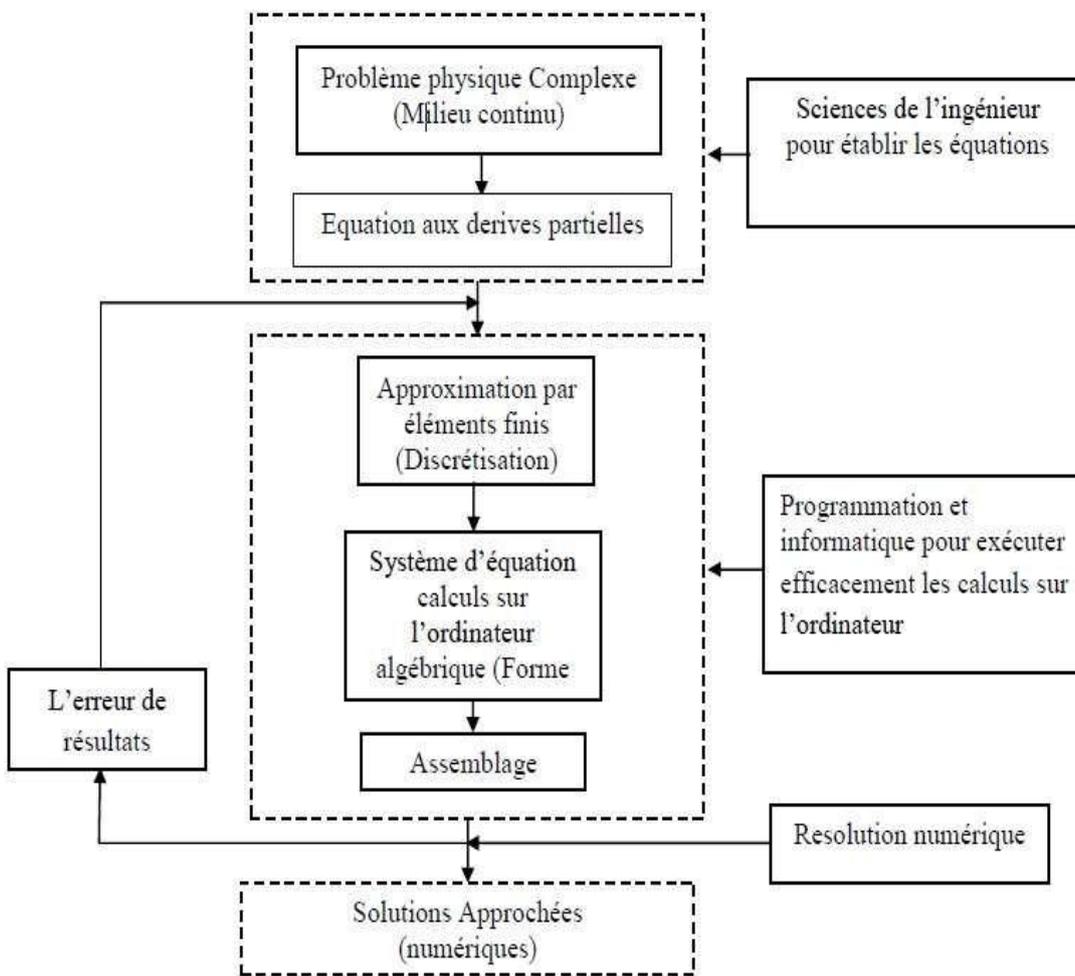


Figure I.3. : principe d'analyse par la MEF .

### H)- Différents type de modèles d'un EF :

Le plus souvent, le champ interpolé est celui des déplacements, et il est rarement celui des déformations ou des contraintes et ces interpolations portent sur tout l'élément ou une partie de celui-ci, à l'intérieur ou à la frontière. On peut créer divers types, dits « modèles » d'éléments finis selon la combinaison choisie comme.

- Modèle déplacement :

Ce modèle est le plus populaire, le plus connu et le plus développé et dans cette catégorie, les éléments finis sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendu à tout l'élément , les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans

la structure, donc les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continués aux frontières.

- Modèle Mixte :

Ce modèle est basé sur des approximations indépendantes des divers champs inconnus (déplacements, déformations, contraintes), étendues à tout l'élément et en général, les paramètres inconnus des champs de ce modèle sont conservés comme degrés de liberté.

La mise au point peut être longue et coûteuse, mais les éléments peuvent être d'excellente qualité, parfois le modèle mixte est utilisé pour corriger certains défauts du modèle déplacement, par exemple pour améliorer la précision au niveau des contraintes on interpole certaines composantes internes de la déformation, les paramètres correspondants peuvent alors être éliminés par condensation, de telle sorte que l'élément reprend l'aspect d'un modèle déplacement.

- Modèle équilibre ou contrainte :

Contrairement au précédent, un tel élément est construit à partir d'une approximation du seul champ des contraintes. La connaissance des contraintes est alors détaillée, celle des déplacements est par contre sommaires. Ce modèle est rarement employé en pratique car, il conduit en général à qualité égale à un plus grand nombre d'inconnues que le modèle déplacement.

- Modèle hybride :

Ce modèle est basé sur deux interpolations a priori indépendantes, l'une portant sur un champ à l'intérieur de l'élément, l'autre sur un champ touchant la seule frontière, le critère vibrationnel utilisé est une variante de l'énergie potentielle complémentaire. Le modèle hybride fournit d'ordinaire de meilleurs résultats que le modèle déplacement, surtout au niveau des contraintes.

- Modèle en déformation :

Ce modèle présente une approximation qui se fait sur le champ de déformation, puis on intègre pour retrouver le champ de déplacement de telle sorte que les équations d'équilibres et de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément.

**I.6.I)- Domaines d'application de la MEF :**

- Analyse linéaire (statique et dynamique).
- Modélisation des structures.
- Mécanique des fluides.
- Electromagnétisme.
- Analyse non linéaire (grands déplacements et rotations, grandes déformations, contact et frottement, flambage, ...).
- Mise en forme des matériaux thermique (en régime permanent et transitoire...).
- Dynamique rapide (choc, impact, crash).
- Optimisation des structures. [5]

**I.6.J)- Etapes logiques de calcul par méthodes des éléments finis :**

1)- Définir les nœuds et les propriétés des éléments (Créer le maillage) :

- Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire  $[K_e]$ .
- Reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux  $\{U\}$  et les forces  $\{F_e\}$  appliquées aux nœuds :  $[K_e] \{U_e\} = \{F_e\}$ .

2)- Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global.

$$[K] \{U\} = \{F\} \text{ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds.}$$

3)- Modifier le système global en tenant compte des conditions aux Limites.

4)- Résoudre le système  $[K] \{U\} = \{F\}$  et obtenir les déplacements  $\{U\}$  aux nœuds.

5)- Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont Imposées.

**I.6.K)- Utilisation d'un Logiciel élément fini :**

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes Variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces Programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer Pouvoir traiter un problème réel de façon correcte.

Citons à titre d'exemple quelques noms de Logiciels : NASTRAN, ANSYS, ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, CESAR, FORTRAN,

Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses :

- Prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, de plasticité, d'écoulement, etc. ) pouvant être couplés.
- Problèmes d'optimisation.
- Ils ne cessent de se développer !
- Prise en compte de lois de comportement complexes.
- Analyse statique ou dynamique.
- Analyse linéaire ou non d'un système physique continu.

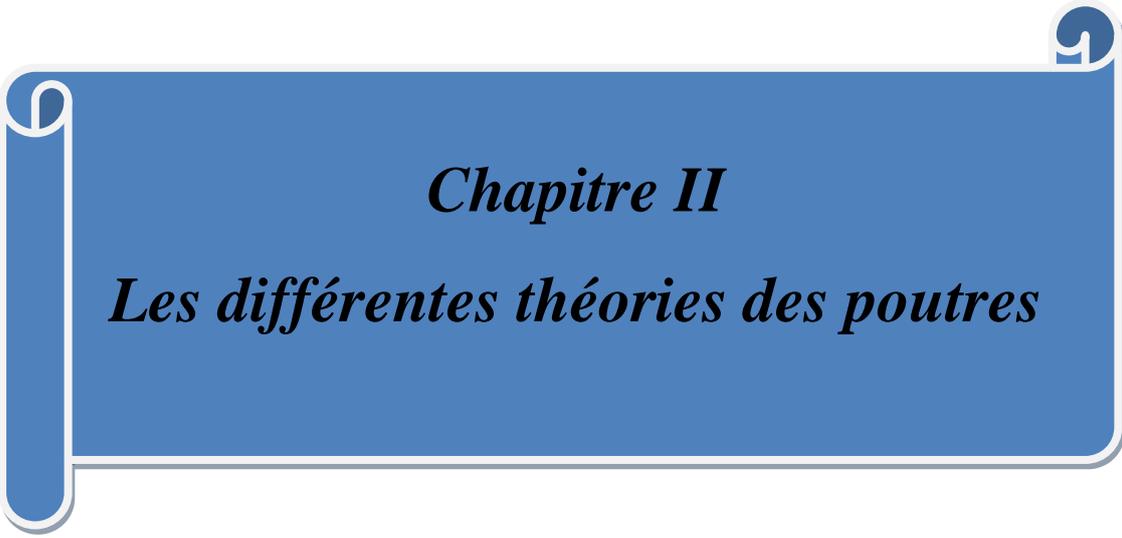
L'utilisation de tels programmes nécessite une formation de base minimum, suivie d'applications pratiques sur des problèmes simples.

Voyons tout d'abord comment se déroule une étude basée sur l'utilisation d'un logiciel éléments finis.

### **I.7 Conclusion :**

la méthode des éléments finis est une technique récente à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base : la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée.

Notre objet dans ce chapitre est de donner un aperçu sur la méthode des éléments finis.



*Chapitre II*  
*Les différentes théories des poutres*

**II.1. Introduction**

Une poutre est une membrure mince soumise à des charges transversales généralement normales à son axe. La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines.

En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre. On appelle effort tranchant ( $V$ ) la force interne transversale et moment fléchissant ( $M$ ) le moment interne. Dans ce chapitre, nous présentons ces forces et ces moments; nous allons voir de quelle façon ils varient d'une zone à l'autre le long de la poutre et où sont situées les zones les plus sollicitées afin de pouvoir déterminer le type de poutre à utiliser.

**II.2 définition de la poutre :**

Est une membrure qui supporte des charges perpendiculairement à son axe longitudinal et qui les transmet à des appuis situés le long de son axe.

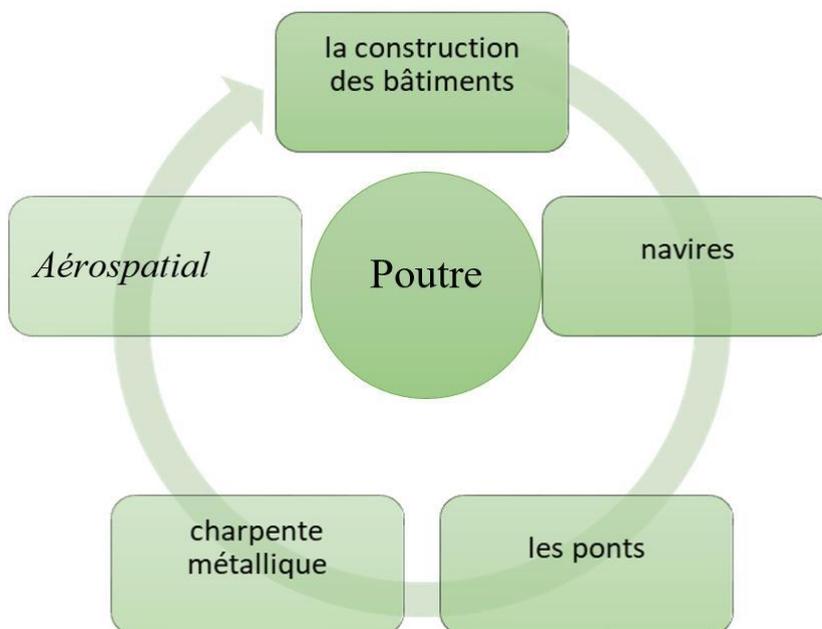
**II.3 Domaines d'utilisation des poutres**

Figure II.1 : Domaines d'utilisation des poutres.

### II.4 Poutres de construction

Le marché de la construction ouvre sur un panel très large concernant la nature des matériaux et la composition entrant dans la mise en œuvre d'une poutre.

De toute façon, il n'existe pas de type de matériau destiné à un type d'ouvrage : les structures de bâtiments peuvent admettre des assemblages entre (le métal et le bois), ou (le béton et le bois). C'est un choix que se réserve le maître d'œuvre (architecte) dans sa conception.

#### II.4.1 Les poutres métalliques



Figure II .2 : poutres métalliques [6]

Elles sont sollicitées dans les **charpentes métalliques** lors des montages en kit ou sur mesure. Elles sont également utilisées en renfort et consolidation d'une structure existante.

. Les poutres métalliques sont à ce titre facile à manœuvrer et efficace pour reprendre les charges. Par exemple lors de travaux d'extension d'un magasin, il arrive qu'on ait recours à la démolition d'une partie ou totalité d'un mur.

**II.4.2 Les poutres en bois**

Figure II.3 : poutres en bois [6]

Les poutres en bois ne sont exclusivement réservées aux maisons à ossature bois. Ce matériau se mélange de manière élégante avec le béton, notamment lorsqu'il est apparent. Une solive a la propriété d'être plus solide que le béton, notamment sa résistance à la compression grâce aux fibres contenues dans le duramen.

La mise en œuvre d'une solive en bois dépend de la section, des entraxes laissés entre chaque poutre mais aussi de la longueur de celle-ci. Vous trouverez en cliquant sur le lien suivant le détail

**II.4.3 Les poutres en béton**

Figure II.4: poutres en béton [6]

Les poutres en béton sont des armatures noyées dans du béton formant un bloc résistant aux différentes charges des dalles

Largement utilisées dans la construction. Elles sont souvent préfabriquées, répondant à des dimensions variées et rarement coulées sur chantier.

La portée d'une poutre en béton ne doit pas dépasser 5 m.

Le béton répond à une mise en œuvre traditionnelle, avec le poteau poutre comme ossature, les poutres et les hourdis de remplissage pour constituer la dalle et enfin une chape et la pose d'un plancher.

### II.4.4 Les poutres précontraintes

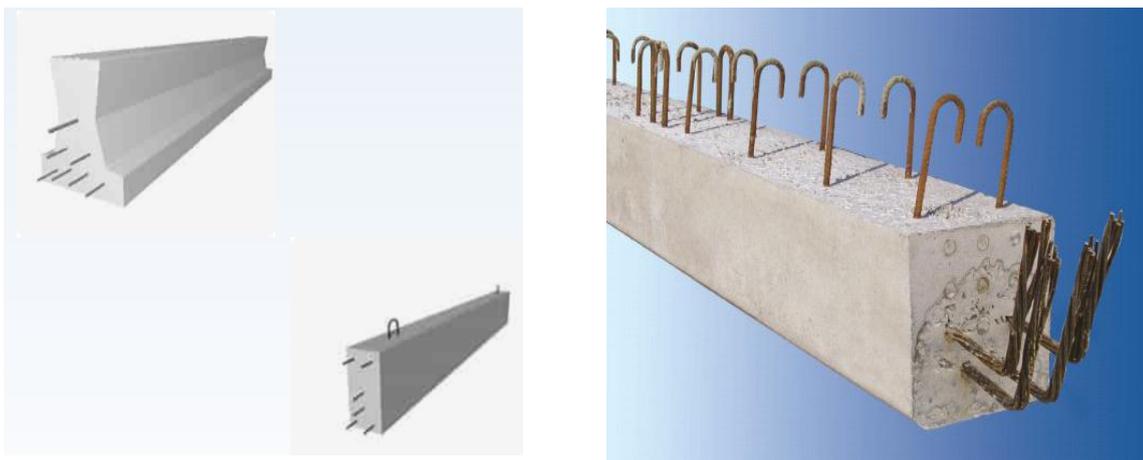


Figure II.5 poutres précontraintes[6]

La poutre prête à l'usage est limitée dans sa portée (5 m) mais il arrive, pour des besoins architecturaux et de fonctionnement des espaces, de solliciter des ouvrages en **béton précontraint** pouvant atteindre 10 m de portée et plus.

Les armatures sont alors libérées de leurs embouts et demeurent en précontrainte La précontrainte, dont l'utilisation est souvent dédiée à la construction des ouvrages d'art, consiste en le tirage des armatures à l'aide de machines avant de procéder au coulage du béton et au séchage de l'ensemble.[7]

**II.5 Types des poutres**

Une poutre est une barre d'une charpente, une membrure d'une structure, ou un élément d'une machine. Les poutres sont placées dans la position horizontale et supportent des charges. Les charges sur les poutres tendent à les trancher (cisailier) et à les courber ou plier.

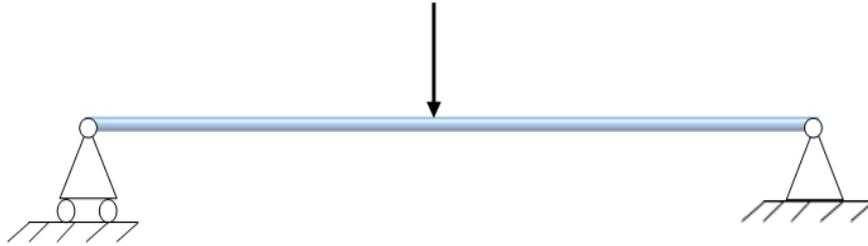
**II.5.1 Poutre simple**

Figure II.6. poutre simple

C'est une poutre (simplement appuyée) :

Reposant sur deux supports (un appui double et un appui simple).et Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

**II.5.2 Poutre console**

Figure II.7 poutre console

C'est une poutre encadrée : tandis que extrémité est entièrement libre.et l'autre L'extrémité encadrée ne bouge pas pendant la flexion.

II.5.3 Poutre avec porte-à-faux

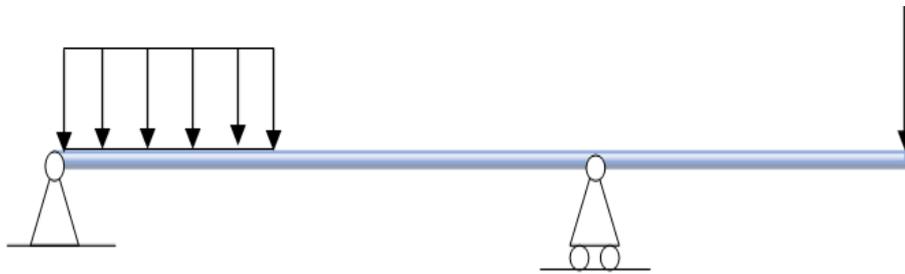


Figure II.8 poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre qui repose sur deux appuis (un simple et l'autre double) et a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux).

Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Les trois types de poutres précédentes entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique) puisqu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même aux trois équations d'équilibre.

Équilibre de translation:

1/  $\sum F_x = 0$  translation horizontale

2/  $\sum F_y = 0$  translation verticale

Équilibre de rotation:

3/  $\sum M_z = 0$  rotation par rapport à n'importe lequel axe perpendiculaire au plan des forces xy.

**II.5.4 Poutre encastrée et appuyée**

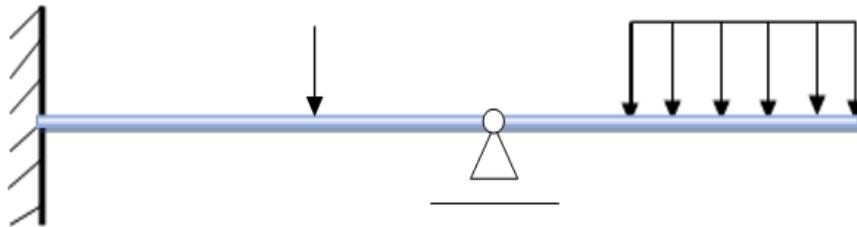


Figure II.9 poutre encastrée et appuyée

C'est une combinaison des types A et B. Dans ce cas la poutre a quatre réactions (4 inconnus) c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

**II.5.5 Poutre continue**



Figure II.10 poutre continue

C'est une poutre soutenue par plus de deux supports, donc une poutre en équilibre hyperstatique.

**II.5.6 Poutre à double encastrement**

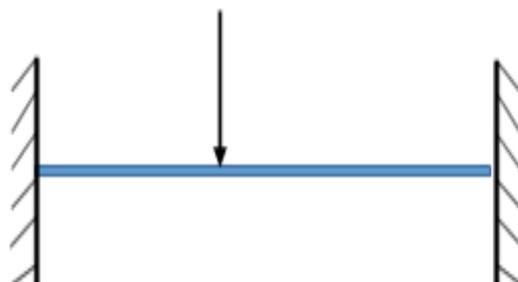


Figure II.11 Poutre à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastrement, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. La figure nous montre une poutre à double encastrement.

### II.5.7 Poutre supportée à double encastrement

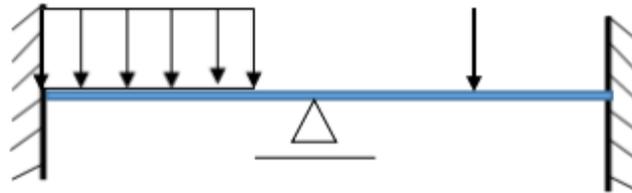


Figure II.12 Poutre supportée à double encastrement

Soutenue par deux encastremets et supportée par un ou plusieurs supports, c'est également une poutre en équilibre hyperstatique.

Les des poutres hyperstatiques. Elles et plus de fixations ou supports que nécessaires. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre. Les équations des statiques ne suffisent pas pour analyser ces poutres. On a recourt à différentes méthodes.

## II.6 Types des charges :

### II.6.1 Charge concentrée :

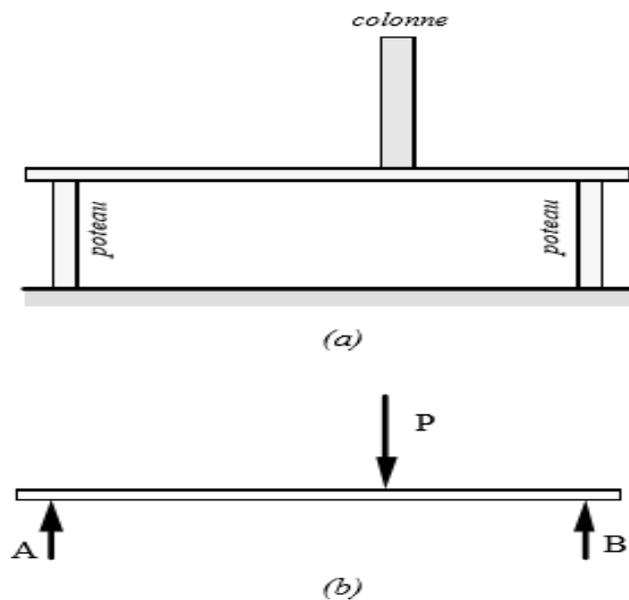


Figure II.13 Charge concentrée

Une charge concentrée est une charge qui s'étend sur une distance relativement très courte de la poutre, de sorte que l'on puisse considérer que cette charge agit en un point, sans erreur appréciable. Une colonne de béton supportée par une poutre reposant sur deux poteaux d'acier, est un exemple d'une charge concentrée.

On considère également que les réactions des poteaux agissent en des points situés aux centres de ces poteaux, même si la longueur d'appui est la largeur du poteau.

La situation de la figure (a) est donc représentée symboliquement par la figure (b), où P (poids de la colonne) est une charge concentrée, tandis que A et B sont des réactions d'appuis concentrés.[7]

### II.6.2 Charge uniformément répartie

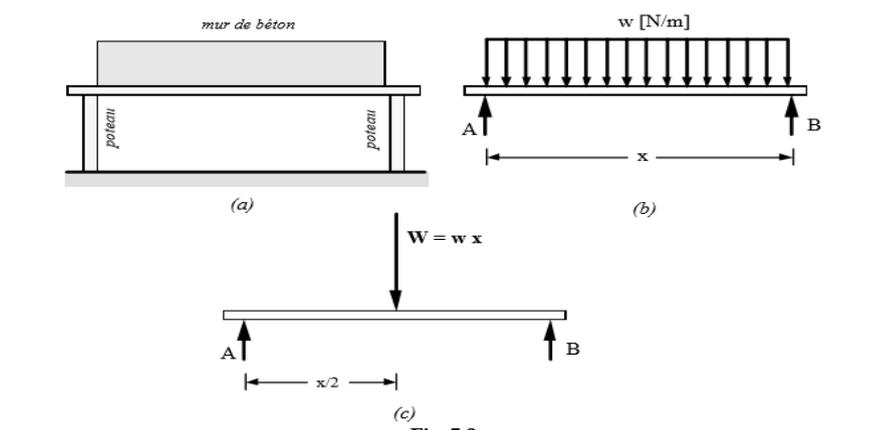


Figure II.14 Charge uniformément répartie

Une charge uniformément répartie ou distribuée est une charge qui agit sur une distance considérable de la poutre, et ce de façon uniforme, c'est-à-dire la charge sollicitant par unité de longueur " $w$ " [N/m] de la poutre est constante.

Le poids de la poutre, lui aussi, est une charge uniformément répartie sur toute sa longueur. La figure montre une charge distribuée (mur de béton) sur une poutre. La charge totale " $W$ " de cette charge distribuée est le produit (aire de la charge: base ( $x$ ) x hauteurs ( $w$ )) de la charge linéaire par la longueur ( $wx$ ) et est appliquée au centre ( $x/2$ ) de cette distribution.

**II.7 Théories des poutres**

En mécanique des structures, la théorie des poutres permet de simplifier les problèmes rencontrés, en assimilant le solide étudié à une poutre, à savoir une structure élancée, dont une dimension est grande devant les deux autres. Celle-ci s'applique dans un domaine d'efforts permettant au matériau homogène et isotrope de demeurer linéaire et élastique, ce qui implique, entre autres, qu'après déformation, le solide reprend sa forme initiale.

Dans la littérature on trouve plusieurs théories des poutres, qui permet d'obtenir une solution approchée pour les champs de contrainte et de déformation et donne une bonne idée des efforts et des déplacements. Les plus connues sont la théorie classique des poutres (C.B.T.), la théorie des poutres du premier ordre (F.S.D.T.) et la théorie des poutres d'ordre élevé (H.S.D.T.). Mais le nombre de variables inconnues a toujours été une préoccupation importante. Dans ce qui suit, seules les théories les plus utilisées dans l'analyse des poutres (F.G.M.), seront exposées.

**II.8 Historique des théories des poutres**

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

Voici dans un ordre chronologique les principaux événements marquant l'évolution de la théorie des poutres.

En 1750, Leonhard Euler et Jacques Bernoulli ont été les premiers à donner une

approche mathématique au comportement des poutres, en introduisant respectivement deux notions, l'indéformabilité axiale de la fibre neutre (elle se déforme en flexion sans se contracter ni se comprimer) et la faculté des sections droites à rester droites après déformation.

Les premières hypothèses fondamentales de la théorie des poutres :

➤ **Principe de Saint venant**

Le principe de saint venant s'énonce : «La contrainte en un point éloigné des points d'applications d'un système de forces ne dépend que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces, même si la répartition des contraintes n'est pas la même, la solution trouvée sera valable, si on place suffisamment loin du point d'application des charges»

➤ **Principe de Navier Bernoulli généralisé**

L'hypothèse de Navier Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre. Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure où l'effort tranchant est nul. Par contre, dans le cas de la flexion simple avec effort tranchant, les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme de lettre S très aplaties. De même lorsque nous étudions la torsion, nous verrons qu'une section non circulaire, ayant deux axes symétries, prend sous l'effet d'un couple de torsion, un gauchissement radial.

Le principe de Navier Bernoulli est fondé sur les observations suivantes :

Le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section voisine, est toujours très petite, non seulement vis-à-vis de la distance des deux sections infiniment voisines.

Le principe de Navier Bernoulli revient à négliger le cisaillement et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre. Il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich etc...) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple et

facile et ne coûte pas chère en temps de calcul.

Dans cette optique, plusieurs théories ont été développées pour la prise en compte du cisaillement transverse, sur la base de la cinématique issue de la théorie des poutres. Celles-ci sont présentées dans les paragraphes suivants : [7]

➤ **Théorie classique des poutres**

La théorie d'Euler-Bernoulli est probablement une des plus anciennes théories des poutres connues Elle est basée sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli suivantes :

1. Les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation. H1
2. Les sections planes restent planes après déformation. H2
3. Les sections sont indéformables suivant l'axe z. H3
4. Cette théorie est applicable dans le cas des poutres élancées et minces.

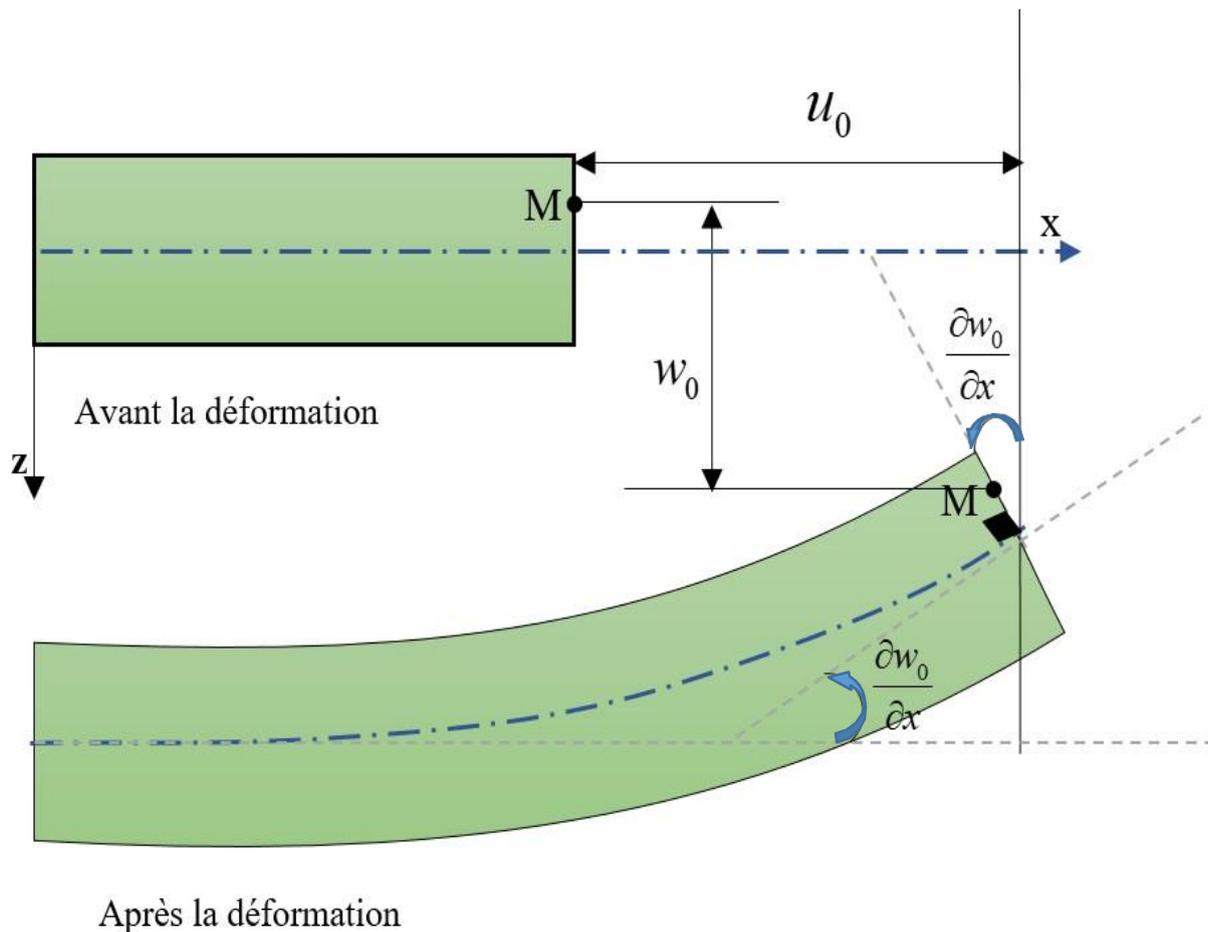


Figure II.15 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des poutres.

Le champ des déplacements d'un point de coordonnées  $(x, y, z)$  à l'instant  $(t)$  s'écrit :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II. 1})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (\text{II. 2})$$

$u, w$  : Sont les déplacements suivant les directions  $x, z$  respectivement.

$u_0, w_0$  : Sont les déplacements de la fibre moyenne suivant les directions  $x, z$  respectivement.

Donc il en résulte que le cisaillement est négligeable par les hypothèses de cette théorie. Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les poutres courtes.

**Conclusion**

Dans ce chapitre, on a exposé les différents modèles des théories des poutres développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des poutres.

Ces dernières ont été développées afin de surpasser les limitations des théories existantes. En général, il est rare de trouver une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles et aux différents domaines et qui soit simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul. En effet, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes

## *Chapitre III*

*Modélisation des poutres par différents  
types d'éléments barre*

### III.1. Introduction :

Actuellement la complexité des calculs est résolue par l'utilisation de l'ordinateur qui facilite la tâche de calcul, dans ce cadre des problèmes autrefois considérés insolubles avec les méthodes classiques, sont maintenant facilement accessibles avec les méthodes numériques, et conduit à l'apparition d'une nouvelle méthode qui convient par une nouvelle méthode dite méthode des éléments finis (**M E F**).

La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis entraîne le calcul des matrices de rigidité et des forces nodales de tous les éléments de la structure discrétisée puis l'assemblage des matrices de rigidité et des forces nodales de toute la structure.

Le vecteur de charge est relié au vecteur des déplacements nodaux

A cet effet, on est intéressé d'utiliser deux types d'éléments barre à savoir à deux et à trois nœuds qui travaillent en sollicitation de flexion des poutres afin d'examiner la validité de ces deux types d'élément.

### III.2. Etapes de calcul par la méthode des éléments finis :

Les étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivantes :

1. Introduction des données :

Les caractéristiques géométriques et physique-mécaniques

2. Discrétisation du domaine :

Division du domaine en éléments finis (type d'élément souhaité) avec numérotation des nœuds et des éléments

3. Formulation élémentaire :

-Construction de la matrice de rigidité élémentaire  $[K]^e$ .

- Construction du vecteur des forces nodales  $\{F\}^e$ .

4. Formulation globale :

Assemblage des matrices de rigidité et vecteurs des forces nodales.

$$[K]^G = \sum_{e=1}^{ne} [K]^e$$

$$\{F\}^G = \sum_{e=1}^{ne} \{F\}^e$$

D'où : (ne : nombre d'élément constituant une structure)

5. Introduction des conditions d'appuis ou les déplacements imposés.

6. Résolution du système global :  $[K].\{q\}^e = \{F\}$

Afin de déterminer des déplacements aux nœuds.

7. Calcul des efforts dans chaque élément

### III.3. Formulation en éléments finis:

Dans notre étude on est intéressé d'utiliser les deux types d'élément de barre à deux et à trois nœuds

#### III.3.1.Élément de barre à deux (02) nœuds :

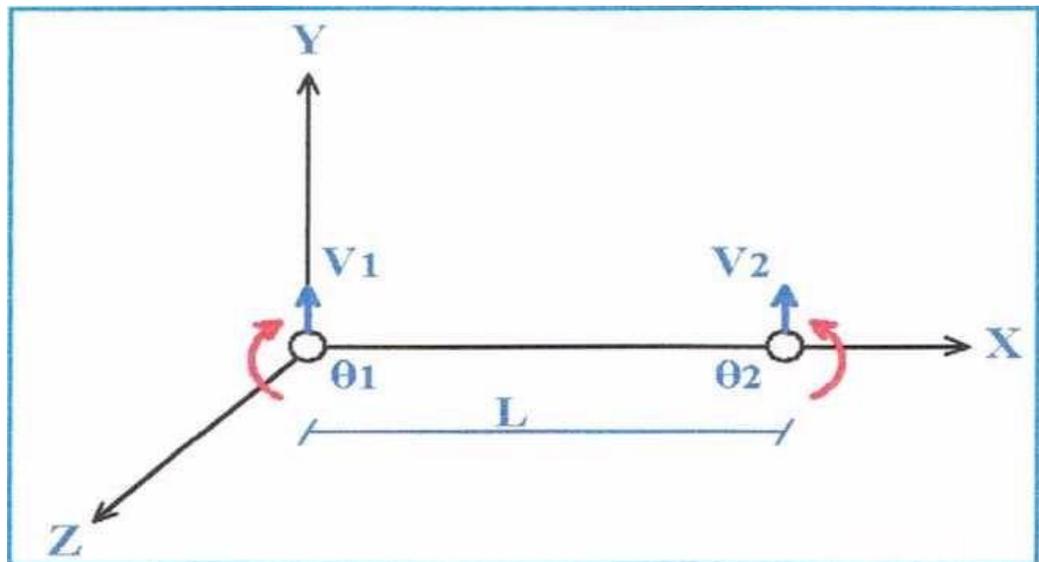


Figure III.1 :degré de liberté d'un élément en flexion simple

On considère un élément de barre à deux (02) nœuds, chaque nœud possède deux degrés de liberté, un déplacement vertical (V) et une rotation (θ) autour de l'axe(y).

Le nombre total de degrés de liberté est égal à quatre (04) ainsi que le vecteur de déplacement nodal {q} et le vecteur de charges (forces) nodales {F}.

**III.3.1.1 Equation fondamentale pour éléments finis :**

$$[K]^e \times \{q\} = \{F\} \quad \text{III. 1}$$

[K]<sup>e</sup>: est la matrice de rigidité élémentaire

**Fonction de déplacement :**

On choisit le polynôme suivant qui définit (V) sur le domaine de la poutre.

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots \text{III.2}$$

La rotation (θ) étant la dérivée de déplacement (V) par rapport à (x)

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 + \dots \text{III.3}$$

Sous une forme matricielle V(x) et θ(x) deviennent :

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \dots \text{III.4}$$

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = F(x) \{a\} \dots \text{III.5}$$

On veut relier les coefficients de déplacements aux déplacements nodaux

**Nœud 01:**

$$\text{Pour } x=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} v(0) = a_1 = V_1 \\ \theta(0) = a_2 \end{array} \right.$$
  

$$\text{Pour } x=L \quad \left\{ \begin{array}{l} v(L) = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 = V_2 \\ \theta(L) = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 = \theta_2 \end{array} \right.$$

$$\{q\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L^2 & 3L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{q\} = [A] \times \{a\} \Rightarrow \{a\} = \{q\} \times [A]^{-1} \dots \dots \dots \text{III 6}$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ V_2 \\ \theta_1 \\ V_1 \end{Bmatrix}$$

**Calculons [A]-1:**

Après la résolution du système (4), on a trouvé les résultats suivants :

$$a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 = V_2 \dots \dots \dots \text{III 7}$$

$$a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 = \theta_2$$

$$a_1$$

$$a_2 = \theta_1$$

On obtient :

$$\begin{cases} a_3 = \frac{3}{l^2}(v_2 - v_1) - \frac{1}{l}(2\theta_1 + \theta_2) \\ a_4 = \frac{2}{l^2}(v_1 - v_2) - \frac{1}{l^2}(2\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{III.8}$$

En remplaçant {a} dans l'expression (3) on aura :

$$\{f(x)\} = [\phi(x)] \times [A]^{-1} \times \{q\} \dots\dots\dots \text{III.9}$$

**III.3.1.2 Relation déplacement - déformation :**

La fonction s(x) des déformations est obtenue par la dérivation de la fonction de déplacement f(x) ;

Soit :  $s(x) = f'(x)$

D'après l'expression (4) la fonction s(x) devient :

$$\varepsilon(x) = [B(x)] \times [A]^{-1} \times \{q\} \dots\dots\dots \text{III.10}$$

Avec:  $[B(x)] =$  dérive de  $[\phi(x)]$

D'après l'équation de la ligne élastique de flexion des poutres on a :

$$M(x) = -EI \frac{d^2V}{dx^2} \dots \dots \dots \text{III.11}$$

$$\varepsilon(x) = -\frac{d^2V}{dx^2}$$

D'autre part on a :

$$-\frac{d^2V}{dx^2} = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \times \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon(x) = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \times \{a\}$$

Avec :  $\{a\} = \{q\} \times [A]^{-1}$

$$\varepsilon(x) = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \times [A]^{-1} \times \{q\}$$

$$\varepsilon(x) = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l^2} & \frac{-2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & \frac{-2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots \text{III. 12}$$

$$\varepsilon(x) = \left[ \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left( \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \right] \times \{q\} \dots \dots \dots \text{III. 13}$$

**III.3.1.3 Relation déformation -contrainte :**

En général :  $\{\sigma(x)\} = [D] \times \{\varepsilon(x)\}$  III. 14

Où [D]: représente la matrice des propriétés élastiques d'élément. D'après la théorie des poutres on a :

$\{\sigma(x)\} = E \times \{\varepsilon(x)\}$ ; (pour notre cas [D] est égal au module d'élasticité E)

$$\{\sigma(x)\} = [D] \times [\varepsilon(x) \times [A]^{-1}] \times \{q\} \dots \dots \dots \text{III.15}$$

### III.3.1.4 équation fondamentale d'éléments finis

Appliquons le principe des travaux virtuels:

$$\sum F_q = \int \sigma \times \epsilon \times dv \dots\dots\dots \text{III. 16}$$

Le premier terme représente le travail externe des forces nodales dues à un déplacement virtuel.

$$Q_e = dq_1 p_1 + dq_2 p_2 + \dots\dots\dots + dq_n p_n \dots\dots\dots \text{III.17}$$

$$Q_e = [dq]^{-1} \times \{p\}$$

Le deuxième membre représente le travail interne  $Q_i$ , par unité de volume :

$$Q_i = \int [d\epsilon(x)]^T \times \{\sigma(x)\} \dots\dots\dots \text{III. 18}$$

En utilisant les équations précédentes (6) et (7) on obtient :

$$Q_i = \int y^2 \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dV$$

$$Q_i = y^2 \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dS \times dx \dots\dots\dots \text{III. 19}$$

**Avec :**  $\iint y^2 dS = I$

I: étant le moment d'inertie. D'où:

$$Q_i = \int_0^L I \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dx \quad \text{III.20}$$

En égalisant le premier et le second terme ; on obtient :

$$\{dq\} \{P\} = \int_0^L I \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dx \quad \text{III.21}$$

On sait que :  $\{P\} = [K] \{q\}$  D'où:

$$[K] = \int_0^L I \{ [B(x)][A]^{-1} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} dx \quad \text{III.22}$$

Avec :  $[D] = E$

$$[K] = \int_0^L EI \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \times \left[ \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left( \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \right] dx \dots \text{III. 23}$$

Si "I" est constant, la matrice de rigidité élémentaire d'un élément de barre a deux nœuds soumis à la sollicitation de la flexion s'écrit comme suit :

$$[K]_{flexion}^e = \frac{EI}{L} \times \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

### III.3.1.5 Les efforts internes (moment de flexion):

L'expression du moment s'exprime comme suit :

$$\{M\}^e = (B)_F \times \{q\} \quad \text{III. 25}$$

Avec :

$$(B)_F = \left[ \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left( \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \right] \times \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Et encore :

$$\{M\}^e(x) = \left[ \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left( \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \right] \times \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots \text{III. 26}$$

### III.3.1.6 Formulation globale :

Afin d'établir cette formulation ; on doit déterminer la matrice de rigidité globale et le vecteur des forces nodales globales, pour une structure composée des plusieurs éléments.

On appelle une matrice globale est la matrice correspondante à la somme des matrices élémentaires aussi de rigidité et des forces appliquées.

$$[K]^G = \sum_{e=1}^{ne} [k] ; \{F\} = \sum_{e=1}^{ne} \{F\} \quad \text{III. 27}$$

D'où: (n: nombre d'élément constituant une structure)

➤ **assemblage pour plusieurs éléments :**

Prenons un exemple simple d'une structure composée de deux éléments de barre unidimensionnels, ayant deux degrés de liberté en chaque nœud.

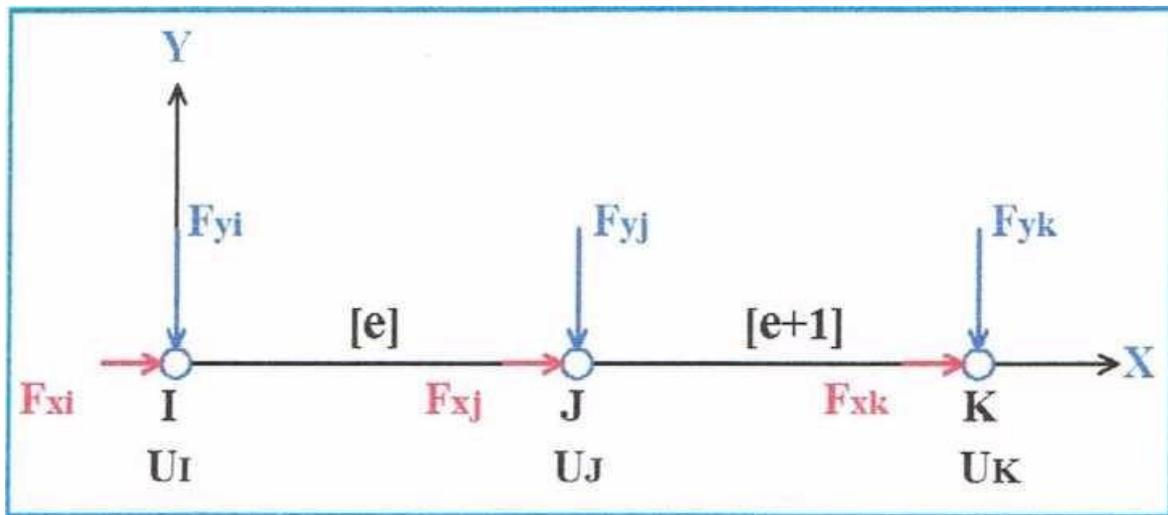


Figure III.2 : Assemblage de deux éléments

$$[K]^e = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix}$$

$$[K]^{e+1} = \begin{bmatrix} K_{jj}^{e+1} & K_{jk}^{e+1} \\ K_{jk}^{e+1} & K_{kk}^{e+1} \end{bmatrix}$$

$$[F]^e = \begin{Bmatrix} fy_i^e \\ M_i^e \\ fy_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix}$$

$$[F]^{e+1} = \begin{Bmatrix} fy_j^{e+1} \\ M_j^{e+1} \\ fy_k^{e+1} \\ M_k^{e+1} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots II. 28$$

➤ **matrice de rigidité globale (par assemblage):**

$$[K] = \sum_{e=1}^{ne} [k] = [K] + [K]^{+1} \dots\dots\dots III. 29$$

$F_i^e$ : Force élastique intérieure au nœud i

La condition d'équilibre statique aux différents nœuds

Nœud(i) :  $F_{xi} - F_i^e = 0$

Nœud(j) :  $F_{xi} - F_i^e - F_i^{e+1} = 0$

Nœud(k) :  $F_{xk} - F_k^{e+1} = 0$

Ou encore :

$$F_i^e = F_{xi} \stackrel{1}{\Leftrightarrow} k_{ii}^e \times q_i + k_{ij}^e \times q_j = F_{xi}$$

$$F_k^{e+1} = F_{xk} \stackrel{1}{\Leftrightarrow} k_{jk}^{e+1} \times q_j + k_{kk}^{e+1} \times q_k = F_{xk}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & 0 \\ k_{ij}^e & k_{jj}^e + k_{jj}^{e+1} & k_{jk}^{e+1} \\ 0 & k_{jk}^{e+1} & k_{kk}^{e+1} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} \stackrel{1}{\Leftrightarrow} [k] \times \{q\} = \{F\} \dots\dots\dots III. 30$$

[K] : Matrice de rigidité globale

{q} : vecteur des déplacements nodaux

{F} : vecteur des forces nodales globales

D'après l'expression matricielle ci-dessus on peut constater que la règle d'assemblage des matrices de rigidités

élémentaires consiste pour un nœud donné à additionner les sous matrices de rigidité affectées aux nœuds des

éléments ayant ce nœud en commun.

### III.3.2 Elément de barre à trois (03) nœuds :

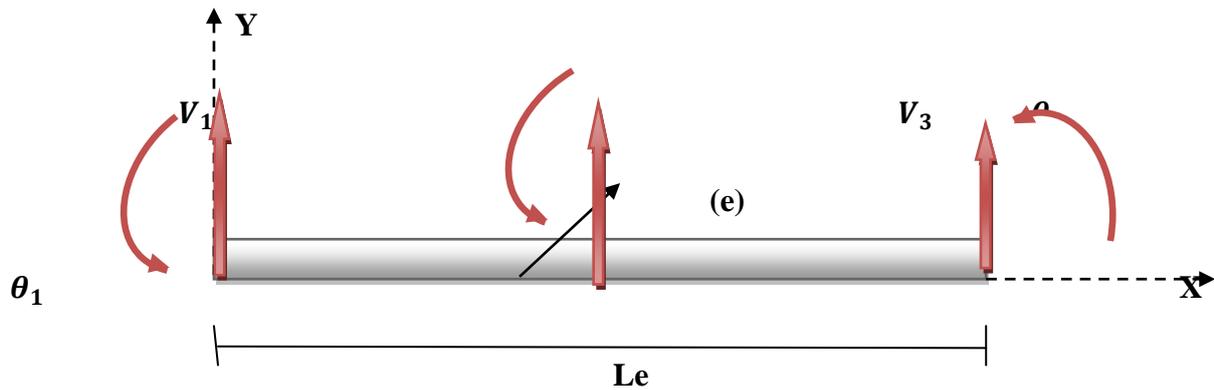


Figure III.3 : Elément de barre à trois nœuds

Dans ce type d'élément on considère en total six degrés de liberté.

#### III.3.2.1 Interpolation nodale sur les déplacements :

Pour ce problème, on se propose le modèle de déplacements sous forme d'un polynôme d'approximation suivant :

$$V(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4 + \alpha_6 x^5$$

La rotation ( $\theta$ ) étant la dérivée de déplacement ( $V$ ) par rapport à ( $x$ )

$$\theta(x) = \frac{dV}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 + 4\alpha_5 x^3 + 5\alpha_6 x^4$$

Le vecteur de déplacement :

$$\{q\}^e = \langle V_1 \theta_1, V_2 \theta_2, V_3 \theta_3 \rangle^T$$

Sous une forme matricielle :

$$\{U\} = [Px] * \{\alpha\} \quad \text{et} \quad \{U\} = [A]^{-1} * \{\alpha\}^e$$

Avec :

$$P_x := \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-23}{L^2} & \frac{-6}{L} & \frac{16}{L^2} & \frac{-8}{L} & \frac{7}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{66}{L^3} & \frac{13}{L^2} & \frac{-32}{L^3} & \frac{32}{L^2} & \frac{-34}{L^3} & \frac{5}{L^2} \\ \frac{-68}{L^4} & \frac{-12}{L^3} & \frac{16}{L^4} & \frac{-40}{L^3} & \frac{52}{L^4} & \frac{-8}{L^3} \\ \frac{24}{L^5} & \frac{4}{L^4} & 0 & \frac{16}{L^4} & \frac{-24}{L^5} & \frac{4}{L^4} \end{bmatrix}$$

D'où :  $\{U\} = [P_x] * [A]^{-1}\{\alpha\}^e$

Avec

$$[N] = [P_x] \cdot [A]^{-1}$$

Ou [N] : est la matrice d'interpolation

$$N := \left[ 1 - \frac{23x^2}{L^2} + \frac{66x^3}{L^3} - \frac{68x^4}{L^4} + \frac{24x^5}{L^5}, x - \frac{6x^2}{L} + \frac{13x^3}{L^2} - \frac{12x^4}{L^3} + \frac{4x^5}{L^4}, \frac{16x^2}{L^2} - \frac{32x^3}{L^3} + \frac{16x^4}{L^4}, -\frac{8x^2}{L} + \frac{32x^3}{L^2} - \frac{40x^4}{L^3} + \frac{16x^5}{L^4}, \frac{7x^2}{L^2} - \frac{34x^3}{L^3} + \frac{52x^4}{L^4} - \frac{24x^5}{L^5}, -\frac{x^2}{L} + \frac{5x^3}{L^2} - \frac{8x^4}{L^3} + \frac{4x^5}{L^4} \right], \left[ -\frac{46x}{L^2} + \frac{198x^2}{L^3} - \frac{272x^3}{L^4} + \frac{120x^4}{L^5}, 1 - \frac{12x}{L} + \frac{39x^2}{L^2} - \frac{48x^3}{L^3} + \frac{20x^4}{L^4}, \frac{32x}{L^2} - \frac{96x^2}{L^4} + \frac{64x^3}{L}, -\frac{16x}{L} + \frac{96x^2}{L^2} - \frac{160x^3}{L^3} + \frac{80x^4}{L^4}, \frac{14x}{L^2} - \frac{102x^2}{L^3} + \frac{208x^3}{L^4} - \frac{120x^4}{L^5} - \frac{2x}{L} + \frac{15x^2}{L^2} - \frac{32x^3}{L^3} + \frac{20x^4}{L^4} \right]$$

La matrice [B] peut être écrite explicitement sous la forme :

$$B1 := -\frac{46}{L^2} + \frac{396x}{L^3} - \frac{816x^2}{L^4} + \frac{480x^3}{L^5}$$

$$B2 := -\frac{12}{L} + \frac{78x}{L^2} - \frac{144x^2}{L^3} + \frac{80x^3}{L^4}$$

$$B3 := \frac{32}{L^2} - \frac{192x}{L^3} + \frac{192x^2}{L^4}$$

$$B4 := -\frac{16}{L} + \frac{192x}{L^2} - \frac{480x^2}{L^3} + \frac{320x^3}{L^4}$$

$$B5 := \frac{14}{L^2} - \frac{204x}{L^3} + \frac{624x^2}{L^4} - \frac{480x^3}{L^5}$$

$$B(6) := -\frac{2}{L} + \frac{30x}{L^2} - \frac{96x^2}{L^3} + \frac{80x^3}{L^4}$$

➤ Les expressions des moments s'expriment alors comme suit :

Moment de gauche :

$$M_g = EI \left( \frac{-46}{Le^2} \times V1 + \frac{-12}{Le} \times \theta1 - \frac{32}{Le^2} \times V2 - \frac{-16}{Le} \times \theta2 + \frac{14}{Le^2} \times V3 + \frac{-2}{Le} \times \theta3 \right)$$

Moment intermédiaire :

$$M_i = EI \left( \frac{-4.75}{2Le^2} \times V1 + \frac{0.125}{Le} \times \theta1 - \frac{1}{Le^2} \times V2 + \frac{-3.5}{Le} \times \theta2 + \frac{2.75}{2Le^2} \times V3 + \frac{-0.375}{Le} \times \theta3 \right)$$

Moment de droite :

$$M_d = EI \left( \frac{-2}{Le^2} \times V1 + \frac{-0.5}{Le} \times \theta1 - \frac{4}{Le^2} \times V2 + 0 \times \theta2 + \frac{2}{Le^2} \times V3 + \frac{0.5}{Le} \times \theta3 \right)$$

Au lieu de Q

### III.3.2.2 Matrice de rigidité élémentaire :

La matrice de rigidité  $[K]^e$  dans ce cas est exprimée par :

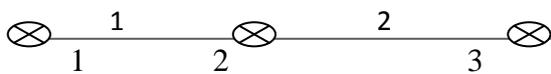
$$[K]^e = \begin{bmatrix} \frac{5092}{35} \frac{eiz}{L^3} & \frac{1138}{35} \frac{eiz}{L^2} & -\frac{512}{5} \frac{eiz}{L^3} & \frac{348}{7} \frac{eiz}{L^2} & -\frac{1508}{35} \frac{eiz}{L^3} \\ \frac{1138}{35} \frac{eiz}{L^2} & \frac{332}{35} \frac{eiz}{L} & -\frac{128}{5} \frac{eiz}{L^2} & \frac{64}{7} \frac{eiz}{L} & -\frac{242}{35} \frac{eiz}{L^2} \\ \frac{35}{5} \frac{eiz}{L^3} & \frac{35}{5} \frac{eiz}{L^2} & \frac{1024}{5} \frac{eiz}{L^3} & 0 & -\frac{512}{5} \frac{eiz}{L^3} \\ \frac{384}{7} \frac{eiz}{L^2} & \frac{64}{7} \frac{eiz}{L} & 0 & \frac{256}{7} \frac{eiz}{L} & -\frac{384}{7} \frac{eiz}{L^2} \\ -\frac{1508}{35} \frac{eiz}{L^3} & -\frac{242}{35} \frac{eiz}{L^2} & -\frac{512}{5} \frac{eiz}{L^3} & -\frac{384}{7} \frac{eiz}{L^2} & \frac{5092}{35} \frac{eiz}{L^3} \\ \frac{242}{35} \frac{eiz}{L^2} & \frac{38}{35} \frac{eiz}{L} & \frac{128}{5} \frac{eiz}{L^2} & \frac{64}{7} \frac{eiz}{L} & -\frac{1138}{35} \frac{eiz}{L^2} \\ \frac{35}{35} \frac{eiz}{L^3} & \frac{35}{35} \frac{eiz}{L} & \frac{5}{5} \frac{eiz}{L^2} & \frac{7}{7} \frac{eiz}{L} & -\frac{35}{35} \frac{eiz}{L^2} \end{bmatrix}$$

### III.3.2.3 Code de calcul par éléments finis :

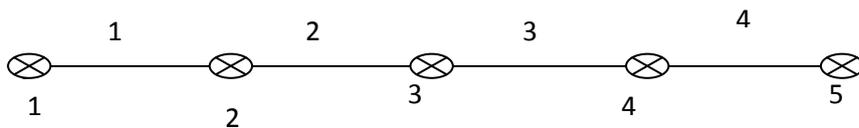
Pour le calcul des poutres on a réalisé des programmes en langage MAPLE et de cela on a exploité les résultats de calcul numérique qui sont représenté en annexe.

Dans cette section on a exécuté les programmes de calcul pour une poutres simplement appuyée soumise à une charge uniforme

- discrétisation de la poutre en deux éléments barre à deux nœuds :



- discrétisation de la poutre en deux éléments barre à trois nœuds :



```
> restart;
```

**entree des donnees:**

```
> L:=1;ne:=2;nn:=ne+1;q:=1;eiz:=1;
```

```
> nt:=2;
```

```
> ifix:=nt+1;
```

**appliquer les conditions d'appuis:**

```
> for i to nt+1 do nfix[1,i]:=2*(((i-1)*ne)/nt)+1-1 end do;
```

```
> for i to nt+1 do nfix[1,i]:=2*(((2*(i-1)*ne)/nt)+1)-1 end do;
```

```
> le:=L/ne;
```

Discretisation de la poutre

**>element à deux noeuds**

> for i to ne do;

> N[i,1]:=i;

> N[i,2]:=i+1;

> end;

**> element a trois noeuds**

> for i to ne do;

> N[i,1]:=2\*i-1;

> N[i,2]:=2\*i;N[i,3]:=2\*i+1;

> end;

**> Construction des matrices de rigidité élémentaires**

> for i to ne do;

> k(i):=Matrix(2\*nn,2\*nn);

> end;

**> element a deux noeuds**

> for i to ne do;

> k(i)[2\*N[i,1]-1,2\*N[i,2]-2]:=12\*eiz/(le\*\*3);

> k(i)[2\*N[i,1]-1,2\*N[i,1]]:=6\*eiz/(le\*\*2);

> k(i)[2\*N[i,1]-1,2\*N[i,2]-2]:=-12\*eiz/(le\*\*3);

> k(i)[2\*N[i,1]-1,2\*N[i,2]]:=6\*eiz/(le\*\*2);

```

> k(i)[2*N[i,1],2*N[i,1]-1]:=-6*eiz/(le**2);

> k(i)[2*N[i,1],2*N[i,1]]:=4*eiz/(le);

> k(i)[2*N[i,1],2*N[i,2]-1]:=-6*eiz/(le**2);

> k(i)[2*N[i,1],2*N[i,2]]:=2*eiz/(le);

> k(i)[2*N[i,2]-1,2*N[i,1]-1]:=-12*eiz/(le**3);

> k(i)[2*N[i,2]-1,2*N[i,1]]:=-6*eiz/(le**2);

> k(i)[2*N[i,2]-1,2*N[i,2]-1]:=12*eiz/(le**3);

> k(i)[2*N[i,2]-1,2*N[i,2]]:=-6*eiz/(le**2);

> k(i)[2*N[i,2],2*N[i,1]-1]:=-6*eiz/(le**2);

> k(i)[2*N[i,2],2*N[i,1]]:=2*eiz/(le);

> k(i)[2*N[i,2],2*N[i,2]-1]:=-6*eiz/(le**2);

> k(i)[2*N[i,2],2*N[i,2]]:=4*eiz/(le);print(k(i));

> end;

```

**>matrice de rigidité pour element à trois noeuds**

```

> for i to ne do;

> k(i)[2*N[i,1]-1,2*N[i,1]-1]:=5092*eiz/(35*le**3);

> k(i)[2*N[i,1]+1,2*N[i,1]]:=1138*eiz/(35*le**2);

> k(i)[2*N[i,1]-1,2*N[i,2]-1]:=-512*eiz/(5*le**3);

> k(i)[2*N[i,1]-1,2*N[i,2]]:=384*eiz/(7*le**2);

> k(i)[2*N[i,1]-1,2*N[i,3]-1]:=-1508*eiz/(35*le**3);

> k(i)[2*N[i,1]-1,2*N[i,3]]:=242*eiz/(35*le**2);

```

- >  $k(i)[2*N[i,1],2*N[i,1]-1]:=1138*eiz/(35*le**2);$
- >  $k(i)[2*N[i,1],2*N[i,1]]:=332*eiz/(35*le);$
- >  $k(i)[2*N[i,1],2*N[i,2]-1]:=-128*eiz/(5*le**2);$
- >  $k(i)[2*N[i,1],2*N[i,2]]:=64*eiz/(7*le);$
- >  $k(i)[2*N[i,1],2*N[i,3]-1]:=-242*eiz/(35*le**2);$
- >  $k(i)[2*N[i,1],2*N[i,3]]:=38*eiz/(35*le);$
- >  $k(i)[2*N[i,2]-1,2*N[i,1]-1]:=-512*eiz/(5*le**3);$
- >  $k(i)[2*N[i,2]-1,2*N[i,1]]:=-128*eiz/(5*le**2);$
- >  $k(i)[2*N[i,2]-1,2*N[i,2]-1]:=1024*eiz/(5*le**3);$
- >  $k(i)[2*N[i,2]-1,2*N[i,2]]:=0;$
- >  $k(i)[2*N[i,2]-1,2*N[i,3]-1]:=-512*eiz/(5*le**3);$
- >  $k(i)[2*N[i,2]-1,2*N[i,3]]:=128*eiz/(5*le**2);$
- >  $k(i)[2*N[i,2],2*N[i,1]-1]:=384*eiz/(7*le**2);$
- >  $k(i)[2*N[i,2],2*N[i,1]]:=64*eiz/(7*le);$
- >  $k(i)[2*N[i,2],2*N[i,2]-1]:=0;$
- >  $k(i)[2*N[i,2],2*N[i,2]]:=256*eiz/(7*le);$
- >  $k(i)[2*N[i,2],2*N[i,3]-1]:=-384*eiz/(7*le**2);$
- >  $k(i)[2*N[i,2],2*N[i,3]]:=64*eiz/(7*le);$
- >  $k(i)[2*N[i,3]-1,2*N[i,1]-1]:=-1508*eiz/(35*le**3);$
- >  $k(i)[2*N[i,3]-1,2*N[i,1]]:=-242*eiz/(35*le**2);$
- >  $k(i)[2*N[i,3]-1,2*N[i,2]-1]:=-512*eiz/(5*le**3);$

```

> k(i)[2*N[i,3]-1,2*N[i,2]]:=-384*eiz/(7*le**2);

> k(i)[2*N[i,3]-1,2*N[i,3]-1]:=5092*eiz/(35*le**3);

> k(i)[2*N[i,3]-1,2*N[i,3]]:=-1138*eiz/(35*le**2);

> k(i)[2*N[i,3],2*N[i,1]]:=242*eiz/(35*le**2);

> k(i)[2*N[i,3],2*N[i,1]]:=38*eiz/(35*le);

> k(i)[2*N[i,3],2*N[i,2]]:=128*eiz/(5*le**2);

> k(i)[2*N[i,3],2*N[i,2]]:=64*eiz/(7*le);

> k(i)[2*N[i,3],2*N[i,3]-1]:=-1138*eiz/(35*le**2);

> k(i)[2*N[i,3],2*N[i,3]]:=332*eiz/(35*le);

> end;

```

### Matrice de rigidité globale

```

> #K:=sum(k(j),j=1..ne);

> #for i to ifix do K[nfix[1,i],nfix[1,i]]:=K[nfix[1,i],nfix[1,i]]*10**8 end do;

```

### Vecteurs des forces élémentaires

```

> for i to ne do f(i):=Matrix(2*nn,1)end do;

```

#### Element a deux noeus

```

> for i to ne do f(i)[2*N[i,1]-1,1]:=q*le/2 end do;

> for i to ne do f(i)[2*N[i,2]-1,1]:=q*le/2 end do;

```

#### Element a trois noeuds

```

> for i to ne do f(i)[2*N[i,1]-1,1]:=q*le/4 end do;

> for i to ne do f(i)[2*N[i,2]-1,1]:=q*le/2 end do;

```

```
> for i to ne do f(i)[2*N[i,8]-1,1]:=q*le/4 end do;
```

```
> F:=sum(f(m),m=1..ne);
```

```
> KK:=evalm(K**(-1));
```

### Résolution du systeme

```
> Q:=evalf(evalm(KK&*F));
```

### Déplacements

```
> for i to nn do v(i):=Q[2*i-1,1]end do;
```

```
> for i to nn do teta(i):=Q[2*i,1]end do;
```

### Moments

#### Element a deux noeuds

```
> for i to ne do Mg(i):=eiz*((6/le**2)*Q[2*N[i,1]-1,1]+(4/le)*Q[2*N[i,1],1]-
(6/le**2)*Q[2*N[i,2]-1,1]+(2/le)*Q[2*N[i,2],1]) end do;
```

```
> for i to ne do Md(i):=eiz*((-6/le**2)*Q[2*N[i,1]-1,1]+(-
2/le)*Q[2*N[i,1],1]+(6/le**2)*Q[2*N[i,2]-1,1]+(-4/le)*Q[2*N[i,2],1]) end do;
```

#### Element a trois noeuds

```
> for i to ne do Mg(i):=eiz*((46/(le**2))*Q[2*N[i,1]-1,1]+(12/le)*Q[2*N[i,1],1]-
(32/(le**2))*Q[2*N[i,2]-1,1]+(16/le)*Q[2*N[i,2],1]-(14/(le**2))*Q[2*N[i,3]-
1,1]+(2/le)*Q[2*N[i,3],1]) end do;
```

```
> for i to ne do Mint(i):=eiz*((-8/le**2)*Q[2*N[i,1]-1,1]+(-
1/le)*Q[2*N[i,1],1]+(16/le**2)*Q[2*N[i,2]-1,1]+(0)*Q[2*N[i,2],1]+(-8/le**2)*Q[2*N[i,3]-
1,1]+(1/le)*Q[2*N[i,3],1]) end do;
```

```
> for i to ne do Md(i):=eiz*((-14/le**2)*Q[2*N[i,1]-1,1]+(-2/le)*Q[2*N[i,1],1]+(-
32/le**2)*Q[2*N[i,2]-1,1]+(-16/le)*Q[2*N[i,2],1]+(46/le**2)*Q[2*N[i,3]-1,1]+(-
12/le)*Q[2*N[i,3],1]) end do;
```

### III.3.2.4 Calcul numérique :

#### ➤ étude comparative :

Dans cette partie nous voulons comparer les résultats obtenus par le programme pour les deux types d'élément barre avec ceux donnée par la section RDM en augmentant le nombre d'éléments  $N_e$  constituant une poutre simplement appuyée et uniformément chargée

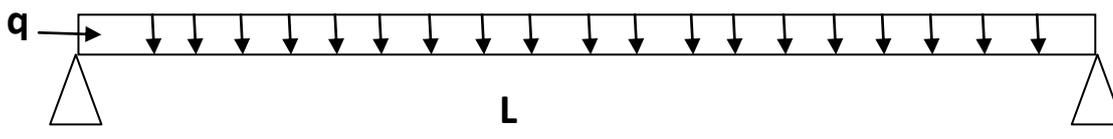


Figure III.6 poutre simplement appuyée et uniformément chargée

Tableau III.1: comparaison des résultats des déplacements et des moments réduits obtenus par éléments barre a 2 et 3 nœuds avec ceux d'RDM en fonction du nombre d éléments

Solution Element Finis						
Ne	Elément à 3 nœuds		Element A 2 noeuds		Solution RDM	
	VEI/QL**4	M/QL**2	VEI/QL**4	M/QL**2	VEI/QL**4	M/QL**2
4	0.0128	0.124	0.1237	0.1249	0.013	0.125
8	0.0129	0.1247	0.1285	0.1249		
16	0.0130	0.1249	0.1298	0.1249		
32	0.0130	0.125	0.01301	0.125		

Le tableaux (III-01) montre les valeurs des déplacements et moments réduits pour les deux types d'éléments barre normaux en comparaison avec celles de la résistance des matériaux en fonction du nombre d'élément d'après ce tableau on constate que les résultats obtenus numériquement sont très satisfaisants et comparables avec ceux de la solution R.D.M surtout

pour le type à trois nœuds mieux que à deux noeuds a partir du nombre d'élément égal à 16 . De cela on peut dire que notre modele numérique est validé.

**III.3.2.5 Calcul des poutres continues a plusieurs travées :**

Après avoir validé le modèle numérique présenté précédemment, par la suite nous voulons déterminer les déplacements et les moments maximums pour des systèmes hyperstatiques (poutres

Continues) comme il est montré dans les tableaux (Valeurs des déplacements et moments réduits pour une poutre continue a plusieurs travées par élément barre à deux nœuds)

Généralement Le calcul des poutres hyperstatiques analytiquement est difficile a cet effet on a exposé plusieurs cas de poutres uniformément chargées a plusieurs travées nt=1 jusqu'a 8 a fin de déterminer les valeurs des déplacements et moment maximales pour chaque cas et pour chaque type.

Tableau III.2. Valeurs des déplacements et moments réduits pour une poutre continue a plusieurs travées par élément barre à deux nœuds

nt						
Nombre de travées	$100 \frac{VEI}{qL^4}$	position	$100 \frac{M_t}{qL^2}$	Position	$100 \frac{M_a}{qL^2}$	position
1	1.3	L/2	12.5	L/2	-----	-----
2	0.0337	0.218L	1.76	0.187L	-3.112	0.5L
3	0.00841	0.138L	0.8905	0.1388L	-1.103	0.333L
4	0.0025	0.375L	0.4852	0.0937L	-0.659	0.25L
5	0.001013	0.1 L	0.3079	0.0666L	-0.4093	0.6L
6	0.000502	0.082L	0.2203	0.0693	-0.210	0.246L
7	0.0002574	0.0714 L	0.15404	0.0714L	-0.2021	0.1428L
8	0.0001508	0.0625L	0.1179	0.0625L	-0.1547	0.1562L

Tableau III.3 Valeurs des déplacements et moment réduits pour une poutre continue a plusieurs travées en plu élément barre à trois nœuds						
nt						
Nombre de travées	$100 \frac{VEI}{qL^4}$	position	$100 \frac{M_t}{qL^2}$	position	$100 \frac{M_a}{qL^2}$	position
1	1.301	1L	12.449	0.5L		0.03125L
2	0.0337	0.25L	1.757	0.187L	-3.123	0.5L
3	0.00848	0.305L	0.886	0.1388L	-0.686	0.361L
4	0.00253	0.2187L	0.4807	0.0937L	-0.668	0.75L
5	0.00104	0.166L	0.303	0.0625L	-0.419	0.2L
6	0.0005008	0.156L	0.2101	0.0625L	-0.292	0.187L
7	0.00026	0.1428L	0.147	0.0625L	-0.2142	0.142L
8	0.0001551	0.0625 L	0.112	0.0625L	-0.164	0.125L

Les tableaux ( III 2 et III 3)montrent que les résultats obtenu pour les deux types d'élément barre sont comparables sur tout si on augmente le nombre de travées et ce la est due a la diminution des distances.

### III..3.2.6. Exemple de calcul

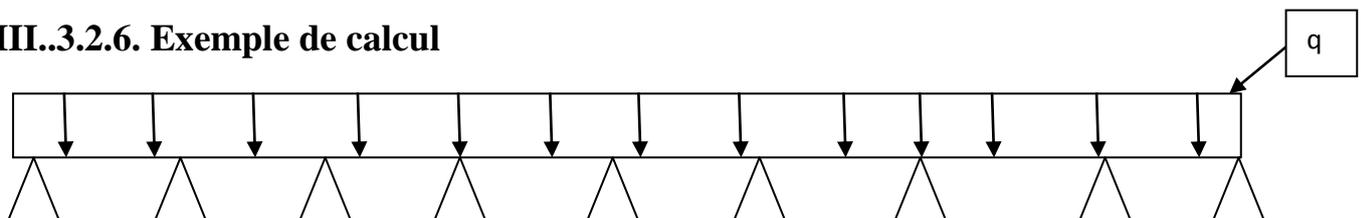


Figure.III.7 : Poutre continue a 8 travée et uniformément chargée

Soit une Poutre continue a 8 travée et uniformément chargée de section transversale  $(0.3 \times 0.4) \text{ m}^2$  de longueur  $L = 20 \text{ m}$ .

Avec

$E = 32000 \text{ Mpa} = 32 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  (module de Young)

$I = 0.0016$  (moment d'inertie)

$q = 10 \text{ kN/ml}$  (la charge)

La flèche maximale :

en  $x = 0.0625L = 1.25 \text{ m}$

$$\frac{EI v^{\max}}{qL^4} = 0.000001552$$

$V_{\max} = 4.850 \times 10^{-4} \text{ m}$
---

Le moment maximal en travée :

en  $x = 1.25 \text{ m}$

$$\frac{M_t^{\max}}{qL^2} = 0.001125$$

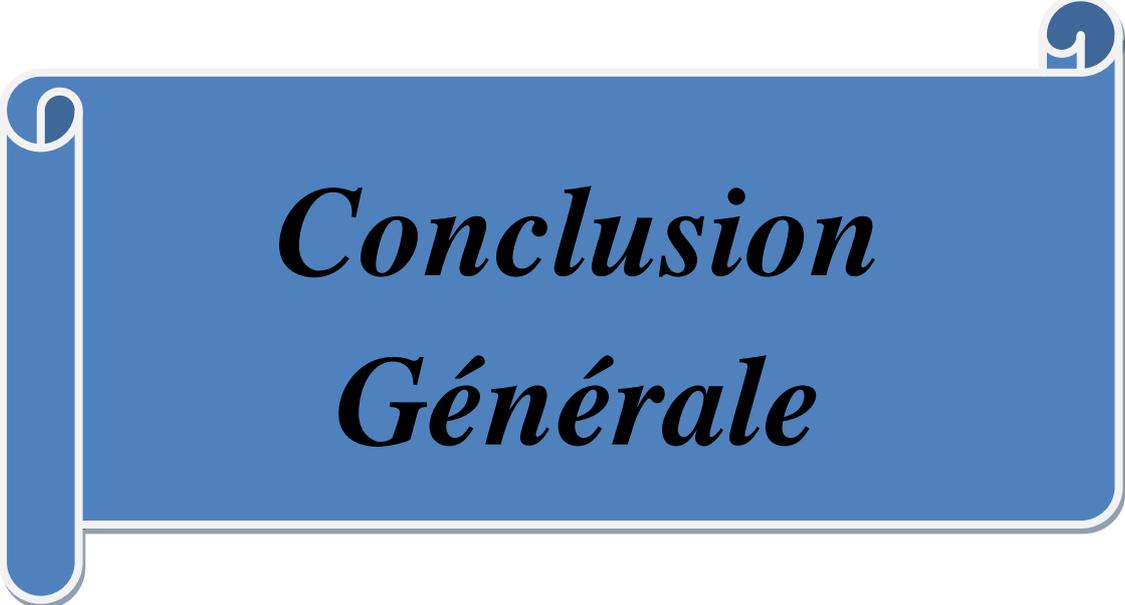
$M_t^{\max} = 4.5 \text{ KN.m}$
---------------------------------

Le moment maximal en appuie :

en  $x = 0.125L = 2.5 \text{ m}$

$$\frac{M_t^{\max}}{qL^2} = -0.00164$$

$M_a^{\max} = -6.56 \text{ KN.m}$
-----------------------------------



***Conclusion  
Générale***

## *Conclusion générale*

---

les éléments finis sont une méthode numérique utilisée pour résoudre les problèmes de mécanique et qui offre plusieurs avantages tout d'abord il permet de modéliser des géométries complexes avec une grande précision.

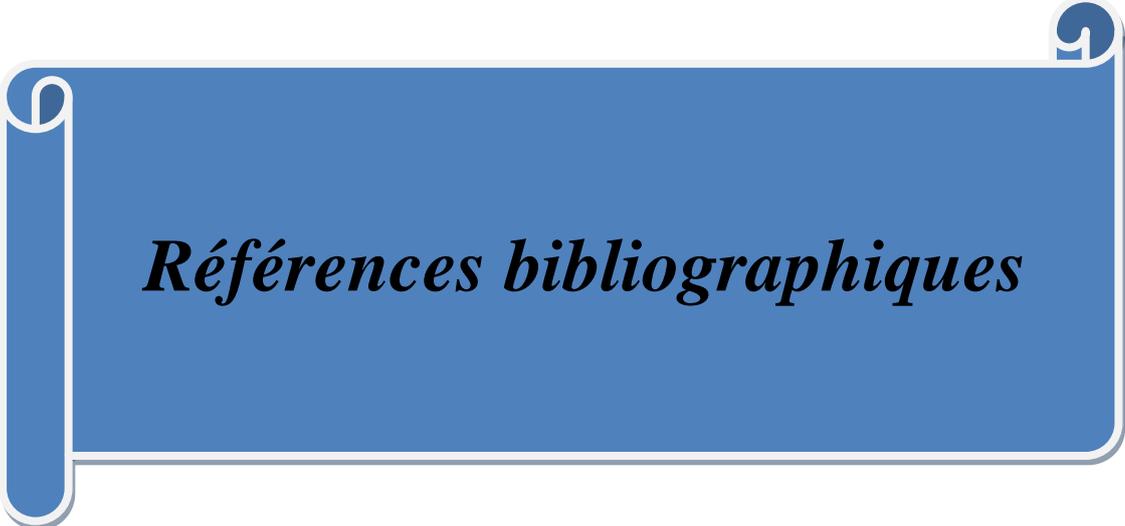
A cette raison nous avons appliqué cette méthode pour prédire les déplacements et les moments dans une poutre en flexion en utilisant les deux types d'éléments barre à deux et à trois nœuds, en comparaison les résultats numériques de ces deux types avec ceux des solutions existantes on a constaté que l'élément à trois nœuds donne des résultats plus satisfaisants de cela on peut tirer que plus on augmente le degré du champ de déplacement plus qu'on obtient une bonne précision.

En conclusion, les éléments finis sont une méthode puissante et polyvalente pour résoudre des problèmes d'ingénierie et de physique.

Ils offrent une approche numérique efficace pour modéliser et analyser des systèmes des poutres hyperstatiques et cela est montré au chapitre du traitement.

Cependant, il est important de prendre en compte les limitations de la méthode, telles que la nécessité de faire des approximations et l'impact du maillage sur la précision des résultats. En utilisant correctement les éléments finis et en validant les résultats obtenus, cette méthode peut être une ressource précieuse pour les chercheurs dans de nombreux domaines.

Un travail reste à faire en utilisant cette approche pour le calcul des poutres en arcs et pour différents chargements.



*Références bibliographiques*

## *références bibliographiques*

---

- [1]. BERDJI, M. E. B., GHERIBI, N., & Hecini, A. Modélisation d'une structure en matériaux isotropes par la méthode des éléments finis (Doctoral dissertation).
- [2]. Bessais, L. A. K. H. D. A. R. (2012). Analyse des structures par la MEF basée sur l'approche en déformation. Génie mécanique, Université Mohamed Khider-Biskra.
- [3]. Meziani, N. (2006). Contribution de l'approche en déformation dans la modélisation des structures a contour circulaire (Doctoral dissertation, Faculté des sciences et de la technologie université Mohamed Khider-Biskra).
- [4]. Barour, S. Analyse de l'effet de cisaillement sur le comportement des poutres.
- [5]. kherraze, Med Fares, Mehda Med Islam, & Hecini, A. (2018). Reformulation et implantation d'un élément finis quadrilatérale (Doctoral dissertation)
- [6] Mahato, K.K., Dutta, K., Ray, B.C., 2020. Emerging advancement of fiber-reinforced polymer composites in structural applications, in: *New Materials in Civil Engineering*. Elsevier, Waltham
- [7] Larbi Chaht, F., 2014. Etude du comportement des nano-poutres en flexion, en flambement et en vibration en utilisant les théories non locales de déformation de cisaillement des poutres. Université djillali liabes sidi bel abbes.



# *Annexe*

# Annexe

---

## Annexe 01 :

*Poutre simplement appuyée soumise a une charge uniforme par élément barre  
a 2 nœuds*

$$NE = 32$$

### *Déplacement verticaux*

$$v(1) := 2.50836215910^{-15}$$

$$v(2) := 0.0000110218922$$

$$v(3) := 0.0000196695327$$

$$v(4) := 0.0000243633985$$

$$v(5) := 0.0000244776407$$

$$v(6) := 0.0000203400850$$

$$v(7) := 0.0000132322311$$

$$v(8) := 0.00000538925330$$

$$v(9) := 3.62594926010^{-15}$$

$$v(10) := -2.43385629210^{-7}$$

$$v(11) := 0.00000250339508$$

$$v(12) := 0.00000558793545$$

$$v(13) := 0.00000731150309$$

$$v(14) := 0.00000692903995$$

$$v(15) := 0.00000464916229$$

$$v(16) := 0.00000163416068$$

$$v(17) := 2.95539700010^{-15}$$

$$v(18) := 0.00000163416068$$

$$v(19) := 0.00000464916229$$

$$v(20) := 0.00000692903995$$

$$v(21) := 0.00000731150309$$

$$v(22) := 0.00000558793545$$

$$v(23) := 0.00000250339508$$

$$v(24) := -2.43385629210^{-7}$$

$$v(25) := 3.62594926010^{-15}$$

$$v(26) := 0.00000538925330$$

## *Annexe*

---

$v(27) := 0.0000132322311$

$v(28) := 0.0000203400850$

$v(29) := 0.0000244776407$

$v(30) := 0.0000243633985$

$v(31) := 0.0000196695327$

$v(32) := 0.0000110218922$

$v(33) := 2.50836215910^{-15}$

### *Rotation*

$teta(1) := 0.000366210937$

$teta(2) := 0.000325679779$

$teta(3) := 0.000219345092$

$teta(4) := 0.0000777244567$

$teta(5) := -0.0000686645507$

$teta(6) := -0.000189304351$

$teta(7) := -0.000253677368$

$teta(8) := -0.000231266021$

$teta(9) := -0.0000915527343$

$teta(10) := 0.0000567436218$

$teta(11) := 0.000104904174$

$teta(12) := 0.0000834465026$

$teta(13) := 0.0000228881835$

$teta(14) := -0.0000462532043$

$teta(15) := -0.0000934600830$

$teta(16) := -0.0000882148742$

$teta(17) := 0.$

$teta(18) := 0.0000882148742$

$teta(19) := 0.0000934600830$

$teta(20) := 0.0000462532043$

$teta(21) := -0.0000228881835$

$teta(22) := -0.0000834465026$

$teta(23) := -0.000104904174$

$teta(24) := -0.0000567436218$

$teta(25) := 0.0000915527343$

## *Annexe*

---

$teta(26) := 0.000231266021$

$teta(27) := 0.000253677368$

$teta(28) := 0.000189304351$

$teta(29) := 0.0000686645507$

$teta(30) := -0.0000777244567$

$teta(31) := -0.000219345092$

$teta(32) := -0.000325679779$

$teta(33) := -0.000366210937$

### ***Moment gauche***

$Mg(1) := 4 \cdot 10^{-11}$

$Mg(2) := 0.0025939941$

$Mg(3) := 0.00421142573$

$Mg(4) := 0.00485229505$

$Mg(5) := 0.0045166015$

$Mg(6) := 0.0032043457$

$Mg(7) := 0.0009155273$

$Mg(8) := -0.00234985351$

$Mg(9) := -0.00659179687$

$Mg(10) := -0.00289916992$

$Mg(11) := -0.00018310545$

$Mg(12) := 0.00155639648$

$Mg(13) := 0.00231933594$

$Mg(14) := 0.00210571287$

$Mg(15) := 0.00091552735$

$Mg(16) := -0.00125122070$

$Mg(17) := -0.00439453124$

$Mg(18) := -0.00125122070$

$Mg(19) := 0.00091552734$

$Mg(20) := 0.00210571289$

$Mg(21) := 0.00231933593$

$Mg(22) := 0.00155639648$

$Mg(23) := -0.00018310547$

$Mg(24) := -0.00289916992$

## *Annexe*

---

$$Mg(25) := -0.0065917968;$$

$$Mg(26) := -0.0023498535$$

$$Mg(27) := 0.0009155274;$$

$$Mg(28) := 0.0032043456;$$

$$Mg(29) := 0.00451660146$$

$$Mg(30) := 0.0048522949;$$

$$Mg(31) := 0.0042114258;$$

$$Mg(32) := 0.0025939941;$$

### **Moment droit**

$$Md(1) := 0.0025939941;$$

$$Md(2) := 0.0042114258;$$

$$Md(3) := 0.00485229503$$

$$Md(4) := 0.00451660150$$

$$Md(5) := 0.0032043456;$$

$$Md(6) := 0.0009155273;$$

$$Md(7) := -0.0023498535$$

$$Md(8) := -0.0065917968;$$

$$Md(9) := -0.00289916992$$

$$Md(10) := -0.0001831054$$

$$Md(11) := 0.0015563964;$$

$$Md(12) := 0.00231933594$$

$$Md(13) := 0.00210571288$$

$$Md(14) := 0.0009155273.$$

$$Md(15) := -0.0012512207$$

$$Md(16) := -0.00439453124$$

$$Md(17) := -0.0012512207$$

$$Md(18) := 0.0009155273;$$

$$Md(19) := 0.00210571288.$$

$$Md(20) := 0.00231933594$$

$$Md(21) := 0.0015563964;$$

$$Md(22) := -0.0001831054$$

$$Md(23) := -0.00289916992$$

$$Md(24) := -0.00659179687$$

## *Annexe*

---

$$Md(25) := -0.0023498535$$

$$Md(26) := 0.0009155273$$

$$Md(27) := 0.0032043456$$

$$Md(28) := 0.00451660160$$

$$Md(29) := 0.00485229506$$

$$Md(30) := 0.0042114256$$

$$Md(31) := 0.0025939940$$

$$Md(32) := 4 \cdot 10^{-11}$$

# *Annexe*

---

## **Annexes 02**

***Poutre simplement appuyée soumise a une charge uniforme par élément  
barre a 3 nœuds***

***Ne=32***

***Déplacement verticaux***

$v(1) := 1.065204778 \cdot 10^{-15}$   
 $v(2) := 0.0006505696413$   
 $v(3) := 0.001299271981$   
 $v(4) := 0.001944288456$   
 $v(5) := 0.002583861351$   
 $v(6) := 0.003216291312$   
 $v(7) := 0.003839939833$   
 $v(8) := 0.004453226769$   
 $v(9) := 0.005054632823$   
 $v(10) := 0.005642697060$   
 $v(11) := 0.006216019392$   
 $v(12) := 0.006773258094$   
 $v(13) := 0.007313132286$   
 $v(14) := 0.007834419453$   
 $v(15) := 0.008335957925$   
 $v(16) := 0.008816644394$   
 $v(17) := 0.009275436401$   
 $v(18) := 0.009711349849$   
 $v(19) := 0.01012346148$   
 $v(20) := 0.01051090642$   
 $v(21) := 0.01087288062$   
 $v(22) := 0.01120863839$

## *Annexe*

---

$v(23) := 0.01151749492$   
 $v(24) := 0.01179882372$   
 $v(25) := 0.01205205917$   
 $v(26) := 0.01227669402$   
 $v(27) := 0.01247228185$   
 $v(28) := 0.01263843461$   
 $v(29) := 0.01277482510$   
 $v(30) := 0.01288118446$   
 $v(31) := 0.01295730472$   
 $v(32) := 0.01300303622$   
 $v(33) := 0.01301829020$   
 $v(34) := 0.01300303622$   
 $v(35) := 0.01295730472$   
 $v(36) := 0.01288118446$   
 $v(37) := 0.01277482510$   
 $v(38) := 0.01263843461$   
 $v(39) := 0.01247228185$   
 $v(40) := 0.01227669402$   
 $v(41) := 0.01205205917$   
 $v(42) := 0.01179882372$   
 $v(43) := 0.01151749492$   
 $v(44) := 0.01120863839$   
 $v(45) := 0.01087288062$   
 $v(46) := 0.01051090642$   
 $v(47) := 0.01012346148$   
 $v(48) := 0.009711349849$   
 $v(49) := 0.009275436401$   
 $v(50) := 0.008816644394$

## *Annexe*

---

$v(51) := 0.008335957925$   
 $v(52) := 0.007834419453$   
 $v(53) := 0.007313132286$   
 $v(54) := 0.006773258094$   
 $v(55) := 0.006216019392$   
 $v(56) := 0.005642697060$   
 $v(57) := 0.005054632823$   
 $v(58) := 0.004453226769$   
 $v(59) := 0.003839939833$   
 $v(60) := 0.003216291312$   
 $v(61) := 0.002583861351$   
 $v(62) := 0.001944288456$   
 $v(63) := 0.001299271981$   
 $v(64) := 0.0006505696413$   
 $v(65) := 1.032429246 \cdot 10^{-15}$

### ***Retation***

$teta(1) := 0.04165649414$   
 $teta(2) := 0.04159641266$   
 $teta(3) := 0.04141807556$   
 $teta(4) := 0.04112529755$   
 $teta(5) := 0.04072189331$   
 $teta(6) := 0.04021167755$   
 $teta(7) := 0.03959846497$   
 $teta(8) := 0.03888607025$   
 $teta(9) := 0.03807830811$   
 $teta(10) := 0.03717899323$   
 $teta(11) := 0.03619194031$   
 $teta(12) := 0.03512096405$

## *Annexe*

---

$teta(13) := 0.03396987915$   
 $teta(14) := 0.03274250031$   
 $teta(15) := 0.03144264221$   
 $teta(16) := 0.03007411957$   
 $teta(17) := 0.02864074707$   
 $teta(18) := 0.02714633942$   
 $teta(19) := 0.02559471130$   
 $teta(20) := 0.02398967743$   
 $teta(21) := 0.02233505249$   
 $teta(22) := 0.02063465118$   
 $teta(23) := 0.01889228821$   
 $teta(24) := 0.01711177826$   
 $teta(25) := 0.01529693604$   
 $teta(26) := 0.01345157623$   
 $teta(27) := 0.01157951355$   
 $teta(28) := 0.009684562683$   
 $teta(29) := 0.007770538330$   
 $teta(30) := 0.005841255188$   
 $teta(31) := 0.003900527954$   
 $teta(32) := 0.001952171326$   
 $teta(33) := -3.277553163 \cdot 10^{-17}$   
 $teta(34) := -0.001952171326$   
 $teta(35) := -0.003900527954$   
 $teta(36) := -0.005841255188$   
 $teta(37) := -0.007770538330$   
 $teta(38) := -0.009684562683$   
 $teta(39) := -0.01157951355$   
 $teta(40) := -0.01345157623$

## *Annexe*

---

$teta(41) := -0.01529693604$   
 $teta(42) := -0.01711177826$   
 $teta(43) := -0.01889228821$   
 $teta(44) := -0.02063465118$   
 $teta(45) := -0.02233505249$   
 $teta(46) := -0.02398967743$   
 $teta(47) := -0.02559471130$   
 $teta(48) := -0.02714633942$   
 $teta(49) := -0.02864074707$   
 $teta(50) := -0.03007411957$   
 $teta(51) := -0.03144264221$   
 $teta(52) := -0.03274250031$   
 $teta(53) := -0.03396987915$   
 $teta(54) := -0.03512096405$   
 $teta(55) := -0.03619194031$   
 $teta(56) := -0.03717899323$   
 $teta(57) := -0.03807830811$   
 $teta(58) := -0.03888607025$   
 $teta(59) := -0.03959846497$   
 $teta(60) := -0.04021167755$   
 $teta(61) := -0.04072189331$   
 $teta(62) := -0.04112529755$   
 $teta(63) := -0.04141807556$   
 $teta(64) := -0.04159641266$   
 $teta(65) := -0.04165649414$

### *Moment goche*

$Mg(1) := -21.33866896$

$Mg(2) := -63.78778286$

## *Annexe*

---

$$Mg(3) := -105.5236366$$

$$Mg(4) := -146.1083033$$

$$Mg(5) := -185.1351358$$

$$Mg(6) := -222.2287682$$

$$Mg(7) := -257.0451147$$

$$Mg(8) := -289.2713701$$

$$Mg(9) := -318.6260098$$

$$Mg(10) := -344.8587896$$

$$Mg(11) := -367.7507457$$

$$Mg(12) := -387.1141960$$

$$Mg(13) := -402.7927361$$

$$Mg(14) := -414.6612452$$

$$Mg(15) := -422.6258821$$

$$Mg(16) := -426.6240848$$

$$Mg(17) := -426.6245727$$

$$Mg(18) := -422.6273468$$

$$Mg(19) := -414.6636871$$

$$Mg(20) := -402.7961539$$

$$Mg(21) := -387.1185900$$

$$Mg(22) := -367.7561172$$

$$Mg(23) := -344.8651372$$

$$Mg(24) := -318.6333341$$

$$Mg(25) := -289.2796708$$

$$Mg(26) := -257.0543919$$

$$Mg(27) := -222.2390221$$

$$Mg(28) := -185.1463663$$

$$Mg(29) := -146.1205102$$

$$Mg(30) := -105.5368203$$

## *Annexe*

---

$$Mg(31) := -63.80194298$$

$$Mg(32) := -21.35380572$$

### **Moment droit**

$$Md(1) := 0.01512148$$

$$Md(2) := 0.02928167$$

$$Md(3) := 0.04246525$$

$$Md(4) := 0.05467218$$

$$Md(5) := 0.06590272$$

$$Md(6) := 0.07615660$$

$$Md(7) := 0.08543389$$

$$Md(8) := 0.09373473$$

$$Md(9) := 0.101059061$$

$$Md(10) := 0.107406844$$

$$Md(11) := 0.112778128$$

$$Md(12) := 0.117171860$$

$$Md(13) := 0.120589897$$

$$Md(14) := 0.123031881$$

$$Md(15) := 0.124496366$$

$$Md(16) := 0.1249846$$

$$Md(17) := 0.124496734$$

$$Md(18) := 0.123031719$$

$$Md(19) := 0.120590003$$

$$Md(20) := 0.117172140$$

$$Md(21) := 0.112777872$$

$$Md(22) := 0.107406556$$

$$Md(23) := 0.101059239$$

$$Md(24) := 0.09373477$$

$$Md(25) := 0.08543401$$

## *Annexe*

---

$$Md(26) := 0.07615670$$

$$Md(27) := 0.06590268$$

$$Md(28) := 0.05467232$$

$$Md(29) := 0.04246525$$

$$Md(30) := 0.02928163$$

$$Md(31) := 0.01512150$$

$$Md(32) := -0.00001528$$

## *Annexe*

---

Exemple de calcul :

*Poutre à huit travées soumise a une charge uniforme par élément*

*barre a 3 nœuds*

NE =32

*Déplacement verticaux*

$$v(1) := 1.03827899210^{-28}$$

$$v(2) := 6.95971599310^{-7}$$

$$v(3) := 0.00000124317161$$

$$v(4) := 0.00000154156769$$

$$v(5) := 0.00000155197386$$

$$v(6) := 0.00000129356705$$

$$v(7) := 8.46370593810^{-7}$$

$$v(8) := 3.48770702910^{-7}$$

$$v(9) := 1.48397975810^{-28}$$

$$v(10) := -3.23034515710^{-8}$$

$$v(11) := 1.20515061410^{-7}$$

$$v(12) := 2.95515693910^{-7}$$

$$v(13) := 3.90605008910^{-7}$$

$$v(14) := 3.62052451010^{-7}$$

$$v(15) := 2.26973872810^{-7}$$

$$v(16) := 6.08480084210^{-8}$$

$$v(17) := 1.26445550010^{-28}$$

$$v(18) := 1.62467783010^{-7}$$

$$v(19) := 4.20535348110^{-7}$$

$$v(20) := 6.28199479510^{-7}$$

$$v(21) := 7.00303369410^{-7}$$

$$v(22) := 6.10053091210^{-7}$$

$$v(23) := 3.91501126810^{-7}$$

$$v(24) := 1.37062839310^{-7}$$

$$v(25) := 1.32432575210^{-28}$$

$$v(26) := 1.11657895710^{-7}$$

$$v(27) := 3.43110758010^{-7}$$

$$v(28) := 5.43516334110^{-7}$$

$$v(29) := 6.22878779210^{-7}$$

## Annexe

---

$$v(30) := 5.49565130210^{-7}$$

$$v(31) := 3.52788831810^{-7}$$

$$v(32) := 1.20126210210^{-7}$$

$$v(33) := 1.30436900210^{-28}$$

$$v(34) := 1.20126210210^{-7}$$

$$v(35) := 3.52788831810^{-7}$$

$$v(36) := 5.49565130210^{-7}$$

$$v(37) := 6.22878779210^{-7}$$

$$v(38) := 5.43516334110^{-7}$$

$$v(39) := 3.43110758010^{-7}$$

$$v(40) := 1.11657895710^{-7}$$

$$v(41) := 1.32432575210^{-28}$$

$$v(42) := 1.37062839310^{-7}$$

$$v(43) := 3.91501126810^{-7}$$

$$v(44) := 6.10053091210^{-7}$$

$$v(45) := 7.00303369410^{-7}$$

$$v(46) := 6.28199479510^{-7}$$

$$v(47) := 4.20535348110^{-7}$$

$$v(48) := 1.62467783010^{-7}$$

$$v(49) := 1.26445550010^{-28}$$

$$v(50) := 6.08480084210^{-8}$$

$$v(51) := 2.26973872810^{-7}$$

$$v(52) := 3.62052451010^{-7}$$

$$v(53) := 3.90605008910^{-7}$$

$$v(54) := 2.95515693910^{-7}$$

$$v(55) := 1.20515061410^{-7}$$

$$v(56) := -3.23034515710^{-8}$$

$$v(57) := 1.48397975810^{-28}$$

$$v(58) := 3.48770702910^{-7}$$

$$v(59) := 8.46370593810^{-7}$$

$$v(60) := 0.00000129356705$$

$$v(61) := 0.00000155197386$$

$$v(62) := 0.00000154156769$$

$$v(63) := 0.00000124317161$$

$$v(64) := 6.95971599310^{-7}$$

$$v(65) := 1.03827899210^{-28}$$

# Annexe

---

## Rotations

$teta(1) := 0.0000462482885$   
 $teta(2) := 0.0000411597723$   
 $teta(3) := 0.0000278015726$   
 $teta(4) := 0.00000998838660$   
 $teta(5) := -0.00000846508852$   
 $teta(6) := -0.0000237441554$   
 $teta(7) := -0.0000320341169$   
 $teta(8) := -0.0000295202756$   
 $teta(9) := -0.0000123879344$   
 $teta(10) := 0.00000590577568$   
 $teta(11) := 0.0000119037234$   
 $teta(12) := 0.00000942060627$   
 $teta(13) := 0.00000227112131$   
 $teta(14) := -0.00000573003415$   
 $teta(15) := -0.0000107681628$   
 $teta(16) := -0.00000902856748$   
 $teta(17) := 0.00000330344917$   
 $teta(18) := 0.0000153257674$   
 $teta(19) := 0.0000161362677$   
 $teta(20) := 0.00000954964726$   
 $teta(21) := -6.19396721010^{-7}$   
 $teta(22) := -0.0000105561669$   
 $teta(23) := -0.0000164459661$   
 $teta(24) := -0.0000144740969$   
 $teta(25) := -8.25862294610^{-7}$   
 $teta(26) := 0.0000128997969$   
 $teta(27) := 0.0000151039398$   
 $teta(28) := 0.00000960126365$   
 $teta(29) := 2.06465573710^{-7}$   
 $teta(30) := -0.00000926575709$   
 $teta(31) := -0.0000150007071$   
 $teta(32) := -0.0000131836871$   
 $teta(33) := 0.$   
 $teta(34) := 0.0000131836871$   
 $teta(35) := 0.0000150007071$   
 $teta(36) := 0.00000926575709$   
 $teta(37) := -2.06465573710^{-7}$

## Annexe

---

$teta(38) := -0.00000960126365$   
 $teta(39) := -0.0000151039398$   
 $teta(40) := -0.0000128997969$   
 $teta(41) := 8.25862294610^{-7}$   
 $teta(42) := 0.0000144740969$   
 $teta(43) := 0.0000164459661$   
 $teta(44) := 0.0000105561669$   
 $teta(45) := 6.19396721010^{-7}$   
 $teta(46) := -0.00000954964726$   
 $teta(47) := -0.0000161362677$   
 $teta(48) := -0.0000153257674$   
 $teta(49) := -0.00000330344917$   
 $teta(50) := 0.00000902856748$   
 $teta(51) := 0.0000107681628$   
 $teta(52) := 0.00000573003415$   
 $teta(53) := -0.00000227112131$   
 $teta(54) := -0.00000942060627$   
 $teta(55) := -0.0000119037234$   
 $teta(56) := -0.00000590577568$   
 $teta(57) := 0.0000123879344$   
 $teta(58) := 0.0000295202756$   
 $teta(59) := 0.0000320341169$   
 $teta(60) := 0.0000237441554$   
 $teta(61) := 0.00000846508852$   
 $teta(62) := -0.00000998838660$   
 $teta(63) := -0.0000278015726$   
 $teta(64) := -0.0000411597723$   
 $teta(65) := -0.0000462482885$

### Moments

$Mg(1) := -0.00001525880$   
 $Mg(2) := 0.00104326068$   
 $Mg(3) := 0.00112521774$   
 $Mg(4) := 0.000230612227$   
 $Mg(5) := -0.00164055578$   
 $Mg(6) := -0.000066698218$   
 $Mg(7) := 0.000530596863$   
 $Mg(8) := 0.000151329426$

## *Annexe*

---

$Mg(9) := -0.00120450049$   
 $Mg(10) := 0.000230612229$   
 $Mg(11) := 0.00068916242$   
 $Mg(12) := 0.000171150117$   
 $Mg(13) := -0.00132342466$   
 $Mg(14) := 0.000151329429$   
 $Mg(15) := 0.000649521027$   
 $Mg(16) := 0.00017115012$   
 $Mg(17) := -0.00128378327$   
 $Mg(18) := 0.000171150129$   
 $Mg(19) := 0.000649521028$   
 $Mg(20) := 0.000151329441$   
 $Mg(21) := -0.00132342465$   
 $Mg(22) := 0.000171150130$   
 $Mg(23) := 0.00068916242$   
 $Mg(24) := 0.000230612208$   
 $Mg(25) := -0.00120450049$   
 $Mg(26) := 0.000151329434$   
 $Mg(27) := 0.000530596862$   
 $Mg(28) := -0.000066698212$   
 $Mg(29) := -0.00164055578$   
 $Mg(30) := 0.000230612195$   
 $Mg(31) := 0.00112521773$   
 $Mg(32) := 0.00104326070$

$Mint(1) := 0.000628441873$   
 $Mint(2) := 0.00119868012$   
 $Mint(3) := 0.00079235587$   
 $Mint(4) := -0.000590530868$   
 $Mint(5) := -0.000739186080$   
 $Mint(6) := 0.000346390243$   
 $Mint(7) := 0.000455404065$   
 $Mint(8) := -0.000412144611$   
 $Mint(9) := -0.000372503221$   
 $Mint(10) := 0.000574328232$   
 $Mint(11) := 0.000544597193$   
 $Mint(12) := -0.000461696349$

## *Annexe*

---

$Mint(13) := -0.000471606697$   
 $Mint(14) := 0.000514866151$   
 $Mint(15) := 0.000524776498$   
 $Mint(16) := -0.00044187565$   
 $Mint(17) := -0.000441875655$   
 $Mint(18) := 0.000524776498$   
 $Mint(19) := 0.000514866150$   
 $Mint(20) := -0.000471606697$   
 $Mint(21) := -0.000461696349$   
 $Mint(22) := 0.000544597193$   
 $Mint(23) := 0.000574328233$   
 $Mint(24) := -0.000372503220$   
 $Mint(25) := -0.000412144611$   
 $Mint(26) := 0.000455404065$   
 $Mint(27) := 0.000346390244$   
 $Mint(28) := -0.000739186080$   
 $Mint(29) := -0.00059053086$   
 $Mint(30) := 0.000792355872$   
 $Mint(31) := 0.00119868013$   
 $Mint(32) := 0.00062844187$

$Md(1) := 0.0010432607$   
 $Md(2) := 0.00112521773$   
 $Md(3) := 0.00023061221$   
 $Md(4) := -0.00164055578$   
 $Md(5) := -0.00006669821$   
 $Md(6) := 0.000530596867$   
 $Md(7) := 0.00015132943$   
 $Md(8) := -0.00120450049$   
 $Md(9) := 0.00023061221$   
 $Md(10) := 0.000689162420$   
 $Md(11) := 0.00017115012$   
 $Md(12) := -0.00132342465$   
 $Md(13) := 0.00015132943$   
 $Md(14) := 0.000649521029$   
 $Md(15) := 0.00017115011$   
 $Md(16) := -0.00128378327$

## *Annexe*

---

$Md(17) := 0.00017115012$

$Md(18) := 0.000649521020$

$Md(19) := 0.00015132943$

$Md(20) := -0.00132342466$

$Md(21) := 0.00017115012$

$Md(22) := 0.000689162429$

$Md(23) := 0.00023061222$

$Md(24) := -0.00120450049$

$Md(25) := 0.00015132942$

$Md(26) := 0.000530596863$

$Md(27) := -0.00006669821$

$Md(28) := -0.00164055578$

$Md(29) := 0.0002306122$

$Md(30) := 0.00112521774$

$Md(31) := 0.0010432606$

$Md(32) := -0.0000152588$

## *Annexe*

---