



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

BEKHOUCHE Dina

BEGHADALI Sabrina

Sujet du mémoire

***Comportement mécanique des plaques FGM sandwich avec
un cœur en nid d'abeille reposant sur une fondation élastique***

Soutenu publiquement le 25/06/2023 devant le jury composé de :

Mr, KRIM Abdallah

Président

Mr, RABAHI Abderezak

Rapporteur

Mr, KERROUM Nadir

Examineur

Mr, DJEBLI Benyagoub

Examineur

2022/2023

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu Tout-Puissant de nous avoir donné le courage d'accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer nos remerciements à nos parents qui nous ont suivis durant nos études, et à notre encadrant, RABAHI Abderezak, enseignant au Département de Génie Civil, Faculté des Sciences appliquées, Université Ibn Khaldoun, Tiaret, pour son aide et sa gentillesse, son écoute et sa très grande expertise ce travail.

Aussi nous remercions les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de juger ce travail,

Mr. Karim Abdellah

Mr. DJebli benyagoub

Mr. Karroum Nadir

Et puis, un merci spécial à tous les amis avec qui nous avons gardé de bons souvenirs et nos proches, que Dieu les protège pour nous.

Dédicaces

Je dédie en premier lieu cette modeste recherche à mon cher père (Ali) et ma chère mère (Zineb), Merci pour tout ce que vous m'avez donné dans ma vie rien dans l'existence ne peut exprimer l'étendue de mon amour pour vous et mon respect pour vos sacrifices pour mon éducation. Et mon oncle, mon deuxième père (Amar), que dieu le protège et le garde pour nous, aussi à mes grands parents que dieu les protège et le prolonge leur vie, mon grand-père paternel (Alhadj Issa), ma grand-mère paternelle (Alhadja Fatna), mon grand-père maternel (Alhadj Boudaoud), ma grand-mère maternelle (Alhadja Fatna), ainsi à tous les proches de la famille et mes amis et mes proches.

Dina

Grand merci à dieu qui nous a aidés à accomplir le meilleur.

J'ai l'honneur de dédier cet acte à ceux qui m'ont donné l'espoir pour lequel je vis et qui m'ont donné vie et qui m'ont enseigné les principes de la vie et m'ont élevé sur l'honnêteté et la sincérité mes chers parents, À mon mari pour son soutien indéfectible et la foi en moi toujours malgré toutes les difficultés Dieu le récompense. À mes frères (Amer et Mokhtar) et mes sœurs (Asmaa et Meriam), ma grand-mère affectueuse, la fille de la famille Elena Faris et toute ma famille (Beghdali, Mehdi, Mechkak) qui m'a toujours soutenue et encouragé tout au long de ces longues années d'études à partager avec moi la difficulté de préparer les mémoires. À mon amie (Dina) Et toute sa famille généreuse. J'aimerais aussi remercier mes collègues et amis pour l'aide et les moments agréables que nous avons passé ensemble. Je suis très reconnaissante à notre superviseur Dr. Rabahi Abderazak qui nous a donné tout ce qu'il faut pour préparer ce travail et encore merci à Dieu et mon mari pour m'avoir donné la capacité de me battre et d'atteindre mes objectifs et mon succès

Sabrina

Sommaire

Liste des tableaux	IV
Liste des figures	V
Liste des notations	Erreur ! Signet non défini.
Résumé.....	VII
Abstract.....	VIII
ملخص.....	Erreur ! Signet non défini.
Introduction générale	IX
I.1.Introduction sur les matériaux FGM	1
I.2. Définition et aperçu historique sur les matériaux FGM.....	2
I.3. La différence entre les matériaux composites classiques et les FGM.....	3
I.4. Modélisation des propriétés matérielles effectives	4
I.4.1. Les lois de mélanges	6
I.4.1.1. Propriétés matérielle de la plaque P-FGM.....	7
I.4.1.2. Propriétés matérielle de la plaque E-FGM.....	8
I.4.1.3. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	8
I.4.2. Modèle de Mori-Tanaka	9
I.4.3. Modèle auto-cohérent	10
I.5. Caractérisation des propriétés.....	10
I.5.1. Propriétés thermiques.....	11
I.5.1.1. Coefficient de dilatation thermique	11
I.5.2. Module d'élasticité	11
I.5.3. La déformation et la résistance	12
I.6. Une revue sur les techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés..	12
I.6.1. Coulage en bande (tape casting)	12
I.6.2. Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)	13

I.6.3. Dépôt par électrophorèse	14
I.6.4. Compaction sèche des poudres	14
I.6.5. Projection plasma.....	14
I.6.6. Frittage en infiltration	14
I.6.7. Implantation ionique	15
<i>I.7. Les domaines d'application</i>	<i>15</i>
<i>I.8. Conclusion.....</i>	<i>17</i>
<i>II.1. Introduction</i>	<i>16</i>
<i>II.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité.....</i>	<i>16</i>
II.2.1. Approche monocouche équivalente.....	17
II.2.1.1. Théorie classique des plaques.....	18
II.2.1.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre FSDT.....	20
II.2.1.3. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT	21
II.2.2. Approche par couche	22
II.2.2.1. Les modèles zig-zig	24
<i>II.3. Une revue de littérature des études sur les structures FGM</i>	<i>25</i>
<i>II.4. Conclusion</i>	<i>26</i>
<i>III.1. Introduction</i>	<i>29</i>
<i>III.2. Définition et présentation sur les matériaux sandwichs.....</i>	<i>29</i>
III.2.1. Définition	29
III.2.2. Présentation	30
<i>III.3. Structures composites en nid d'abeilles</i>	<i>32</i>
III.3.1. Définition une plaque sandwich en nid d'abeilles	32
III.3.2. Historique du nid d'abeilles	32
III.3.3. Fabrication du nid d'abeilles	34
III.3.4. Domaine d'application :	35

III.3.5. Géométrie d'une cellule de nid d'abeilles.....	36
<i>III.5. Théorie des plaques sandwichs</i>	<i>38</i>
III.5.1. Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs	38
<i>III.6. Conclusion.....</i>	<i>39</i>
<i>IV.1. Introduction</i>	<i>41</i>
<i>IV.2. Formulation du problème</i>	<i>42</i>
IV.2.1. Champs de déplacement et déformations.....	42
IV.2.2. Relations constitutives	44
IV.2.3. Équations gouvernantes	44
IV.2.4. Solution exacte pour une plaque FGM	47
IV.3. Résultats numériques et discussions	48
IV.3.1. Validation du modèle	49
<i>IV.4. Conclusion.....</i>	<i>53</i>
<i>Conclusion générale.....</i>	<i>61</i>
<i>Référence bibliographique</i>	

Liste des tableaux

Tableau II.1 : Différentes fonctions de gauchissement utilisées dans les théories des poutres.....	22
Tableau (IV.1) : Comparaisons du paramètre de flèche d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwichs (1-1-1).....	50
Tableau (IV.2) : Comparaisons du paramètre de contraintes (σ_{xx} ; σ_{yy} ; τ_{xy}) d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwichs (1-1-1).....	51
Tableau (IV.3) : Comparaisons du paramètre de contraintes (σ_{xx} ; σ_{yy} ; τ_{xy}) d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwichs (1-2-1).....	52

Liste des figures

Figure I.1 : Types de FGM (a) Gradient de matériau (b) Gradient de porosité (c) Gradient microstructure de l'Al-Sic-Graphite. (Rajan&pai, 2014).....	2
Figure I.2 : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal (Yin et al 2004).....	3
Figure I.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM. (Yin et al 2004).	4
Figure I.4 : Modèle analytique pour une couche en FGM.....	5
Figure I.5 : Géométrie d'une plaque FGM	7
Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM.....	7
Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM.....	8
Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM.....	9
Figure I.9 : Utilisation dans le domaine aérospatial	15
Figure I.10 : Utilisation dans l'industrie automobile.....	15
Figure I.11 : Utilisation des FGM dans les implants dentaires	16
Figure I.12 : Utilisation dans l'industrie d'énergie	16
Figure II.1 : Schéma d'un élément de poutre.....	17
Figure II.2 : Description du déplacement du modèle: monocouche équivalente (à gauche) et par couche. Cas linéaire et non-linéaire.....	17
Figure II.3 : Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff.....	18
Figure II.4 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	20
Figure II.5 : Illustration de la cinématique de la plaque d'ordre élevé.....	21
Figure II.6 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.	23
Figure II.7 : Champ de déplacements des modèles zig-zig, approche cinématique.....	23
Figure II.8 : Géométrie et notations employées dans les théories en Zig-Zag	24
Figure II.9 : Champ de déplacements des modèles zig-zig du premier ordre.....	25
Figure II.10 : Champ de déplacements des modèles zig-zig d'ordre supérieur.....	25

Figure III.1: <i>Un sandwich typique</i>	30
Figure III.2 : <i>matériau d'âmes nid d'abeille</i>	31
Figure III.3 : <i>panneau sandwich en nid d'abeilles</i>	32
Figure III.4 : <i>Références directionnelles du NIDA[Audrey GRÉDÉ 2009].</i>	34
Figure III.5 : <i>Repère d'étude [Gibson L. J, Ashby M. F, "Cellular Solids 1988]</i>	36
Figure III.6 : <i>Géométrie d'un nid d'abeille</i>	37
Figure III.7 : <i>Structure en nid d'abeille régulière</i>	37
Figure III.11 : <i>configuration de la flexion trois points</i>	38
Figure IV.1 : <i>Géométrie d'une plaque rectangulaire composée de FGM.</i>	42
Figure IV.2 : <i>Comparaisons du paramètre de flèche d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwichs (1-1-1).</i>	50
Figure IV.3 : <i>Comparaisons du paramètre de flèche d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwichs (1-1-1).</i>	51
Figure IV.4 : <i>Comparaisons du paramètre de flèche d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwichs (1-2-1).</i>	52

Résumé

Les matériaux sandwichs connaissent un essor important, tant dans les applications les utilisant, que dans les technologies les mettant en œuvre. Ils présentent un intérêt pour les applications qui requièrent à la fois rigidité et légèreté, notamment les transports, la marine, le nautisme, l'aéronautique, l'aérospatial, les sports et loisirs, l'industrie lourde, le génie civil et l'armée. Il est intéressant de connaître leurs propriétés mécaniques pour prédire et calculer leur comportement dans des environnements spécifiques.

Le principal objectif de l'utilisation des panneaux sandwichs est d'augmenter le rapport rigidité/poids en remplissant le cœur de la structure avec des matériaux plus légers, comme les "nids d'abeilles" (NIDA). Où nous avons défini les panneaux sandwich (nid d'abeilles) et la structure et les propriétés mécaniques de celui-ci.

Dans ce travail, une étude analytique sur le comportement mécanique d'une plaque sandwich de peau FGM avec une âme en nid d'abeille reposante sur une fondation élastique. Les résultats obtenus seront comparés avec celle de littérature. Cette étude nous a permis de déterminer la flèche et les contraintes pour différents types de fondation élastique.

Mots clés : matériau à gradient fonctionnel, Plaque sandwich, nid d'abeille.

Abstract

Metal structural elements that suffer early damage require either reinforcement or repair. Currently available reinforcement techniques include composite materials, which have become a popular substitute for conventional materials because of their exceptional strength and specific stiffness. In addition, composite materials are preferred for their adjustable mechanical properties.

The main form of failure that occurs in reinforced metal beams is the detachment of the reinforcing plate from the composite plate and the beam. This is an important issue since the introduction of composite reinforcements.

In this work, an analytical study on the mechanical component of an FGM skin sandwich plate with a honeycomb core resting on an elastic foundation. The results obtained will be compared with those of the literature. This study allows us to complete the deflection and stresses for different types of elastic foundations.

Keywords: Functionally graded material, sandwich plate, honeycomb.

Introduction générale

Un " matériau composite " est un assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion). Le nouveau matériau ainsi constitué possède des propriétés que les éléments seuls ne possèdent pas. Ce phénomène, qui permet d'améliorer la qualité de la matière face à une certaine utilisation (Légèreté, rigidité à un effort, maintenance réduite, etc.), explique l'utilisation croissante des matériaux composites, dans différents secteurs industriels. Néanmoins, la description fine des Composites reste complexe du point de vue mécanique.

Et ainsi de suite les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) de type céramique-métal sont bien connus comme étant des matériaux dans lesquels une composition matérielle varie progressivement dans une ou plusieurs directions afin d'optimiser les propriétés mécaniques et thermiques. Ces matériaux peuvent être conçus pour réduire les contraintes résiduelles d'origine thermique et utilisées comme barrière thermique et résistent à la corrosion côté céramique, le côté métal offre une résistance mécanique à cause de la forte ténacité des métaux. L'étude du comportement en rupture des FGM de type céramique-métal est compliquée en raison du gradient des propriétés mécaniques et thermiques. Dans les matériaux FGM de type céramique-métal, les fissures se comportent de plusieurs façons selon les conditions de variation des propriétés graduées et du chargement appliqué.

Les matériaux constitutifs disponibles sont extrêmement variés offrant ainsi de nombreux champs d'applications aux panneaux sandwichs : panneaux de structure, d'isolation acoustique, thermique, d'absorption d'énergie (amortisseurs de chocs). Les peaux peuvent être métalliques : aluminium haute performance, titane ; ou encore composites : stratifiés à fibres de carbone ou de verre noyées dans une résine époxyde par exemple. Les âmes sont en général des matériaux alvéolaires comme des mousses ou des nids d'abeilles, ce type particulier de sandwichs est également très employé, il s'agit des sandwichs en nid d'abeilles. Ils font l'objet de ces travaux.

De ce fait, les domaines d'application très variés font qu'il est intéressant de connaître leurs propriétés mécaniques pour prédire et calculer leur comportement dans des environnements spécifiques. Ces matériaux sandwichs sont composés de plusieurs parties interagissant entre elles. Il sera donc possible d'associer judicieusement les propriétés des peaux ou semelles et celles des matériaux de cœur ou âme. L'assemblage de ces deux parties se réalise par collage, soudage ou brasage en mettant en jeu un autre composant de comportement différent.

Pour cela, notre travail s'articule autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre décrira, à travers une étude bibliographique sur les différents types de matériaux composites.

Le deuxième chapitre sera consacré sur les différentes théories mathématique de FGM et composite en nid d'abeille.

Le troisième chapitre fera l'objet d'une description mathématique sur le comportement statique des sandwiches FGM avec un cœur en nid d'abeille.

Le quatrième chapitre portera sur les résultats trouvés et voir leurs influences sur le comportement du sandwich FGM avec un cœur en nid d'abeille.

CHAPITRE I

Introduction aux matériaux à gradient de propriétés

I.1.Introduction sur les matériaux FGM

Le concept de la FGM a été proposé en 1984 par un groupe de spécialistes des matériaux, à Sendai, au Japon, pour les barrières thermiques ou propriétés de blindage [Koizumi M.1992] de chaleur. Au début le FGM a été conçu comme un matériau de barrière thermique pour l'application dans l'aérospatiale et les réacteurs de fusion. Plus tard, les FGM ont été développés pour les industries militaires, automobile, biomédicale et les semi-conducteurs et comme un élément de structure générale dans des environnements thermiques élevés.

Le FGM est l'un des matériaux à haute température de pointe pour les environnements Haute température capable de résister à des températures extrêmes. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont inhomogènes à l'échelle microscopique, dans lequel les propriétés mécaniques varient de façon régulière et de façon Continue d'une surface à l'autre. Ceci est réalisé en faisant varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, ces matériaux sont fabriqués à partir d'un mélange de céramique et de métal ou d'une combinaison de différents matériaux.

Le constituant de la matière céramique fournit la résistance à haute température en raison de sa faible conductivité thermique et protège le métal de l'oxydation. Le constituant de métal ductile, d'autre part, empêche la rupture provoquée par contraintes dues au gradient à haute température dans un très court laps de temps. En outre, un mélange d'une céramique et d'un métal avec une fraction de volume variant de façon continue peuvent être facilement fabriqués [M.J. Pindera, J. Aboudi, A.M. Glaeser, S.M. Arnold, 1997] Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de la FGM ont été publiés au cours des dernières années[M.J. Pindera, J. Aboudi1997-O.V.D. Biest, M. Gasik, J. Vleugels,2004] .

Les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites

Face à une conception de pièces et de machines, puisque leur tenue aux contraintes thermiques est Très limitée. Donc, les soucis des chercheurs sont orienté vers la recherche de matériaux avec un rapport résistance/poids assez élevé ; donc des matériaux composés de plus d'une matière, ont été

Utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques avant d'être appliqués dans le domaine de génie civil. Ces matériaux sont appelés matériaux composites

I.2. Définition et aperçu historique sur les matériaux FGM

Les matériaux composite est l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux non miscible, qui se complètent et il s'adaptant parfaitement a tout sorte d'environnement même les plus hostiles , de plus , se développent ajour d'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans divers réalisation de hautes technologies, on distingue deux sortes de matériaux composites structuraux : les stratifiés et les sandwiche on parmi les matériaux composites les plus utilisée , on notera les matériaux sandwiche . Et le sandwiche de ce cas est une structure à trois couche se composant de deux plaque FGM (inferieure et supérieur) et on milieu couche de nid d'abeille

Les plaques FGM sont des matériaux constitués de plusieurs matériaux, contenant des composants déferents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement homogènes

Et nid d'abeille avec sa rangée régulière de cellules hexagonales et ils sont de plus en plus utilisés dans plusieurs domaines et leur forte capacité à supporter les charges à attirer considérablement l'attention de nombre chercheurs.

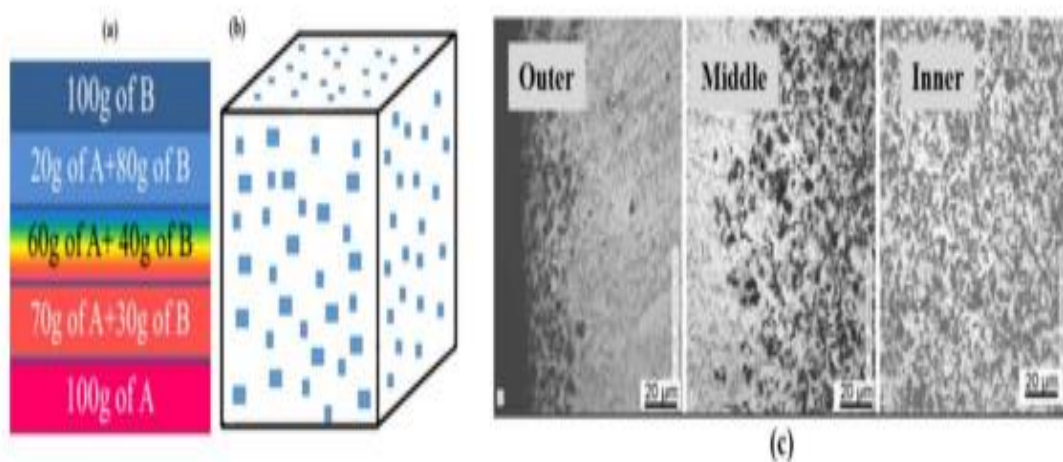


Figure I.1 : Types de FGM (a) Gradient de matériau (b) Gradient de porosité (c) Gradient microstructure de l'Al-Sic-Graphite. (Rajan&pai, 2014)

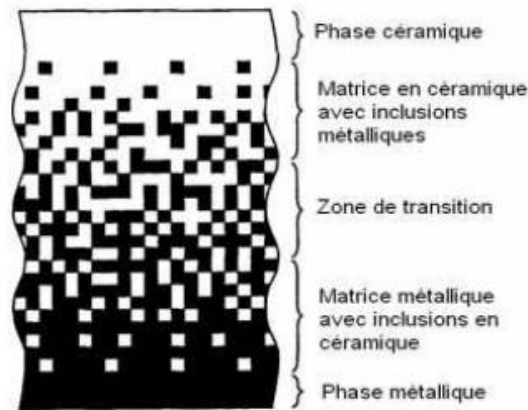


Figure I.2 : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal (Yin et al 2004).

I.3. La différence entre les matériaux composites classiques et les FGM

Les matériaux composites sont le mélange de deux ou plusieurs substances Il a été développé par des chercheurs au fil du temps.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce et il a plusieurs types est :

- Macroscopique comme les matériaux composites à base des fibres (verre, carbone...) + matrice
- Microscopique comme les FGM (matériaux à gradient de propriété)
- Nanos copique comme les nanotubes de carbone

Et maintenant nous parlons de deuxième type FGM est matériaux composites de plusieurs couches contenant différents composants se sont donc des composés avec des propriétés macroscopiquement Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui est composé du métal et de la céramique réunie les caractéristiques de la bonne conductivité thermique et mécanique Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels.

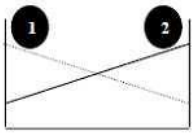
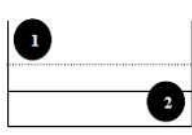
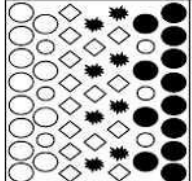
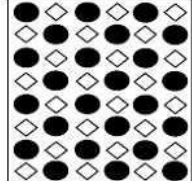
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Éléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM. (Yin et al 2004).

I.4. Modélisation des propriétés matérielles effectives

Les FGM sont très hétérogènes, il sera très utile de les idéaliser comme continua avec leurs propriétés mécaniques variant continûment par rapport aux coordonnées spatiales. Les schémas d'homogénéisation sont nécessaires pour simplifier leurs microstructures hétérogènes complexes afin de les analyser d'une manière efficace.

Un FGM typique représente un composite de particules avec une distribution prescrite des fractions de volume des phases constitutives. Les propriétés des matériaux sont généralement supposées suivre une gradation à travers l'épaisseur d'une manière continue. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants :

- Une variation par morceaux de la fraction volumique des matériaux est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, (figure I.4-a)
- Une variation continue de la fraction volumique des matériaux est assumée (figure I.4-b), et la fraction volumique peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur.

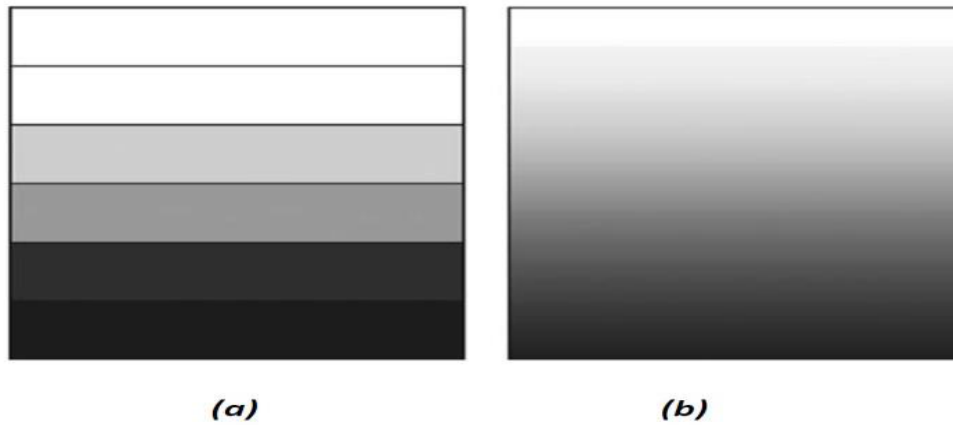


Figure I.4: Modèle analytique pour une couche en FGM

Les propriétés matérielles k de la plaque en FGM telles que le module d'Young E , le coefficient de Poisson ν , et le coefficient de dilatation thermique α sont déterminés par :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left[\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right]^k \quad (\text{I.1})$$

E_m : rigidité de matériaux métal

E_c : rigidité de matériaux céramique

h : la hauteur de l'âme

Z : la distance entre centre de gravité d'une couche donnée et le centre de gravité de l'âme

K : l'indice matériel de la loi de mélange

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Elles varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$ et $\nu = \nu(z)$.

Indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

1.4.1. Les lois de mélanges

Les matériaux FGM sont une combinaison de deux ou plusieurs matériaux dont les caractéristiques et les propriétés diffèrent, où la transition entre les deux matériaux est idéalement continue et graduelle. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.3})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants ; de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (\text{I.4})$$

Avec :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.5})$$

La fraction volumique V_1 est supposée avoir une distribution de loi de puissance suivante :

$$V_1 = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{I.6})$$

Et par conséquence :

$$V_2 = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{I.7})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure. Comme le montre la figure (I.5) Considérant une plaque élastique rectangulaire illustrant sa géométrie.

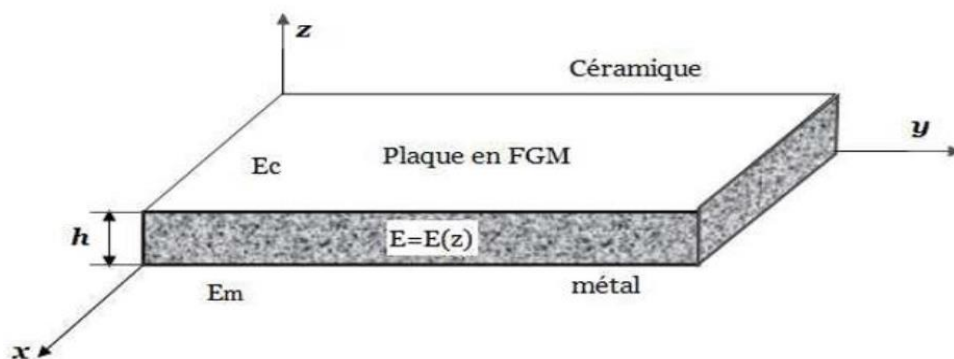


Figure I.5: Géométrie d'une plaque FGM

1.4.1.1. Propriétés matérielle de la plaque P-FGM

La fraction volumique des matériaux P-FGM est supposée obéir à une fonction en loi de puissance représentée par la relation :

$$G(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p \tag{I.8}$$

Où 'P' est un paramètre matériau et 'z' est dirigé suivant l'épaisseur 'h' la hauteur ;

Les propriétés matérielles d'un matériau P-FGM, peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z)_{P-FGM} = E_1 + \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p (E_2 - E_1) \tag{I.9}$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h / 2$) et de la surface supérieure ($z = h / 2$) de matériau FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de matériau P-FGM est représentée sur la figure (I.6).

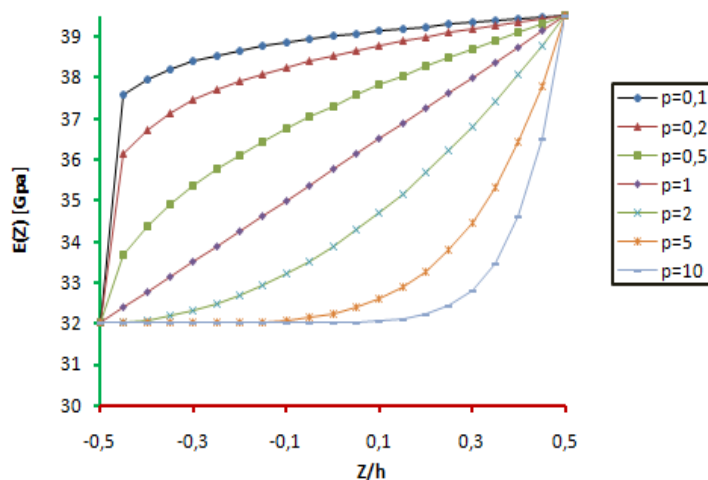


Figure I.6: Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM

1.4.1.2. Propriétés matérielle de la plaque E-FGM

La majorité des chercheurs utilisent la fonction exponentielle, pour décrire les propriétés matérielles des matériaux E-FGM, qui s'écrit sous la forme des relations :

$$E(z)_{P-FGM} = E_2 e^{\beta(z + \frac{h}{2})} \quad (I.10)$$

$$\beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2} \quad (I.11)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I.7:

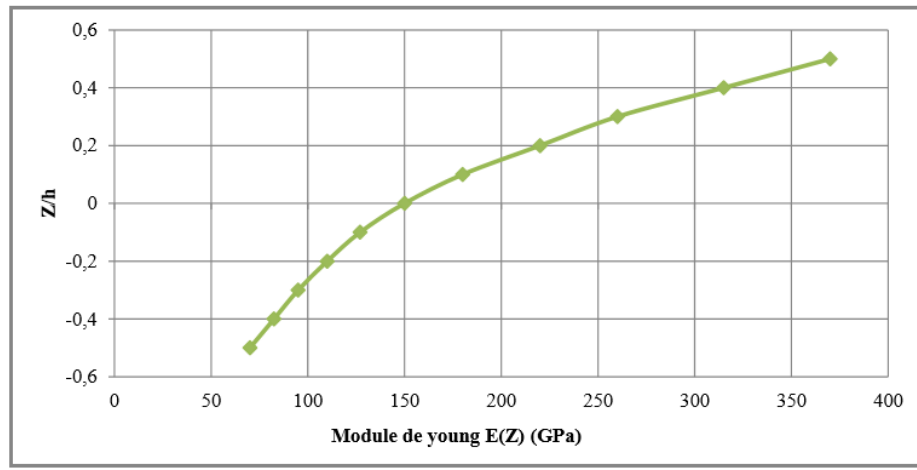


Figure I.7: Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

1.4.1.3. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

La fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{pour } k \frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (I.12)$$

$$g(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{pour } k 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (I.13)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de matériau S-FGM peut être calculé par les relations sa variation est représentée sur la Figure I.8:

$$E(z)_{P-FGM} = g_1(z) E_1 + (1 - g_1(z)) E_2 \text{ pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{I.14}$$

$$E(z)_{P-FGM} = g_2(z) E_1 + (1 - g_2(z)) E_2 \text{ pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \tag{I.15}$$

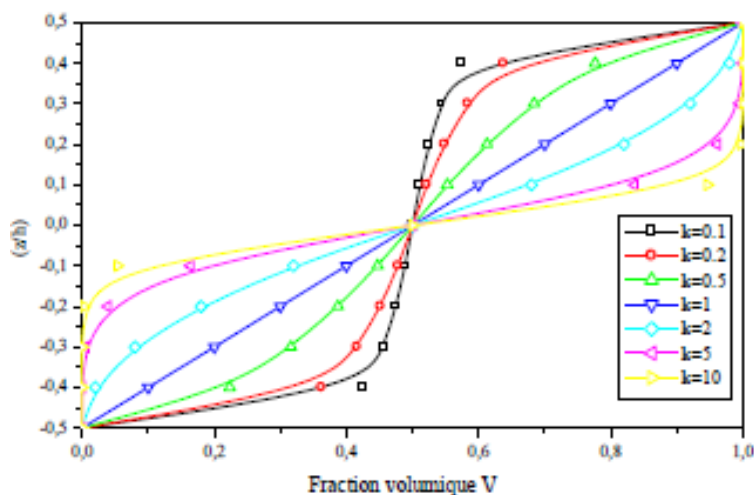


Figure I.8: Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM

1.4.2. Modèle de Mori-Tanaka

En 1973, Mori (Mori et al 1973) a proposé une méthode de calcul de la contrainte moyenne et de l'énergie élastique stockée dans la matrice d'un matériau contenant une fraction volumique d'inclusions. Benveniste (Benveniste 1987) a ensuite publié une interprétation claire de ce modèle.

Dans ce modèle, le renfort est noyé dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice. Le V.E.R. est soumis à la déformation moyenne de la matrice in-situ dans le composite.

Pour un composite élastique linéaire à deux phases avec des inclusions sphériques, le module de compressibilité équivalent K^{MT} et le module de cisaillement équivalent μ^{MT} sont définis par les relations suivantes (Abouti 1991) :

$$K^{MT} = K_1 + f_2 \frac{K_1(K_2 - K_1)}{[(1 - f_2)(K_2 - K_1)\alpha_1 + k_1]} \tag{I.16}$$

$$\mu^{MT} = \mu_1 + f_2 \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{[(1 - f_2)(\mu_2 - \mu_1)\beta_1 + \mu_1]} \tag{I.17}$$

Où les paramètres α_1 et β_1 valent :

$$\alpha_1 = \frac{3k_1}{3k_1 + 4\mu_1} \beta_1 = \frac{6}{5} \frac{(k_1 + 2\mu_1)}{(3k_1 + 4\mu_1)} \quad (\text{I.18})$$

Ce modèle est très couramment employé pour calculer le tenseur de rigidité effectif des matériaux composites parce qu'il est particulièrement adapté à un milieu hétérogène de type Matrice (au sens de la phase continue) dans laquelle sont noyées des hétérogénéités ellipsoïdales. Pour y parvenir il suppose que le renfort est noyé dans un milieu infini ayant les

Propriétés de la matrice, le tout étant soumis à l'infini à la déformation moyenne de la matrice in-situ dans le composite. Le composite est constitué d'une matrice continue et de n phases constituant les hétérogénéités. Une phase est un ensemble hétérogénéités dont la géométrie et les propriétés mécaniques, les modules d'élasticité sont identiques. Deux hétérogénéités appartiennent à deux phases différentes si elles n'ont pas le même élanement (ou orientation) même si leurs propriétés mécaniques sont identiques.

1.4.3. Modèle auto-cohérent

Dans cette méthode, pour tenir compte de l'interaction entre les constituants du milieu hétérogène, on suppose que le milieu entourant chaque inclusion est un milieu infini possédant les caractéristiques du matériau homogénéisé recherché. Pour un composite biphasé, avec des inclusions sphériques, une solution analytique permet d'exprimer les caractéristiques élastiques

Recherchées (abouti 1991) :

$$k^{AC} = k_1 + f_2 \frac{(k_2 - k_1)(3k^{AC} + 4\mu^{AC})}{(3k_2 + 4\mu^{AC})} \quad (\text{I.19})$$

$$\mu^{AC} = \mu_1 + f_2(\mu_2 - \mu_1) \frac{15(1 - \nu^{AC})}{\mu^{AC}(7 - 5\nu^{AC}) + 2(4 - 5\nu^{AC})\mu_2} \quad (\text{I.20})$$

Où K^{AC} et μ^{AC} représentent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement équivalents.

1.5. Caractérisation des propriétés

Le choix des composantes de base d'un matériau à gradient de propriétés, est adapté en fonction des propriétés physiques de chaque constituant. Les FGM sont communément constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal.

Les éléments chimiques majeurs dans le tableau de mandeliev sont les métaux. D'une façon générale, les métaux possèdent plusieurs avantages, sont ordinairement très bons conducteurs de la chaleur et de l'électricité, ils sont plus souvent durs, rigides et déformables plastiquement. Un nombre important possèdent une température de fusion très élevée. Les métaux plus communément utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium.

Les céramiques résultent de la combinaison des éléments métalliques (Al, Ni, Ti, Zr...) avec des éléments non métalliques dont le plus courant est l'oxygène. Elles sont utilisées typiquement dans les régions ou les environnements extrêmes (hautes températures, etc.). Ils sont caractérisés généralement par leurs comportements réfractaires schématisés par leurs résistances mécaniques et thermiques très élevées. Les céramiques sont en général, des matériaux très durs et elles sont largement utilisés comme abrasifs. Les céramiques ont généralement un comportement fragile ce qui réduit leurs emplois pour des applications où les chocs mécaniques et thermiques sont importants.

1.5.1. Propriétés thermiques

1.5.1.1. Coefficient de dilatation thermique

L'expansion ou la contraction thermique d'un matériau est donnée par le coefficient de dilatation thermique et la différence de température connue. En raison de la composition et de la structure variée dans un FGM, la dilatation thermique de différents composants affecte de manière significative la performance fonctionnelle et mécanique des FGM.

La recherche a été consacrée à l'étude de la dilatation thermique dans les FGM afin d'optimiser la composition graduelle à travers la relaxation des contraintes thermiques. Le coefficient de dilatation thermique (CTE) peut être mesuré à l'aide d'un dilatomètre. Une mesure détaillée en deux ou trois dimensions peut être faite en utilisant l'interférométrie laser ou corrélation d'images numériques [Miyamoto. 1999, Hopkinson. 2006].

1.5.2. Module d'élasticité

Pour déterminer le module d'Young globale d'un FGM, la courbe contrainte-déformation habituelle peut être mesurée par la fixation d'une jauge de contrainte à la surface de l'échantillon lors d'un essai de flexion à quatre points.

La dépendance du module d'Young de la composition d'un FGM peut être estimée par la mesure des fréquences de résonance en flexion d'un spécimen de barres rectangulaires en utilisant une technique de résonance forcée.

Alternativement, la distribution du module d'Young et le coefficient de Poisson peut être mesurée simultanément en utilisant LFB (line-focus-beam) microscope acoustique. L'intensité relative de l'onde de la surface-reflétée reçue est mesurée en fonction de la distance entre la lentille acoustique et l'échantillon [Miyamoto. 1999, Hopkinson. 2006].

1.5.3. La déformation et la résistance

La résistance et la déformation d'un FGM sont généralement évaluées par des essais de traction et des essais de flexion à trois ou quatre points. La contrainte résiduelle, provenant du refroidissement de la température de traitement, a une forte influence sur le comportement à la traction des FGM en changeant l'état de contrainte à la traction ou à la compression, et par écrouissage lorsque la limite élastique est dépassée [Miyamoto. 1999, Hopkinson. 2006].

I.6. Une revue sur les techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés

L'utilité des composites à gradient de propriétés avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théoriques par (SHEN 2009) et (KIEBACK 2003). Cependant, leurs travaux n'ont qu'un effet limité, probablement en raison d'un manque de méthodes de production appropriées pour FGM à ce moment-là. Cela a pris 15 ans supplémentaire jusqu'à ce que la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux à gradient de propriétés ait été effectuée dans le cadre d'un programme de recherche national sur FGM au Japon. Depuis lors, une partie de la recherche sur les FGM a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthode de production a été développée (MORTENSEN1995), (HIARI 1996).

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étape de la structure graduée à partir des matériaux précurseurs ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (slip casting), coulage en bande (tape casting), dépôt par électrophorèse, compaction sèche des poudres, projection plasma, frittage en infiltration, implantation ionique.

1.6.1. Coulage en bande (tape casting)

Le coulage en bande à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support

plan en couches minces et régulières. Les produits obtenus sont des feuillets avec des (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte. Les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le défoulant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lame multiple, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [MIST] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermocompression (BOCH 1986), (BOCH 1987).

1.6.2. Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise »
- Consolidation du tesson ou « raffermissement ».

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie classique de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion de la plate (coulage classique) (MOYA 1992) ;
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

1.6.3. Dépôt par électrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique (SARK 1996).

1.6.4. Compaction sèche des poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (BISH 1993).

1.6.5. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM l'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (STEF 1990)

1.6.6. Frittage en infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (TEKA 1990).

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

1.6.7. Implantation ionique

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement d'effectué par les faisceaux énergétiques d'ions eu via de gaz réactifs.

Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (ABDI 1997).

I.7. Les domaines d'application

- Domaine aérospatial : composants de moteur de fusée, corps des avions spatiaux.

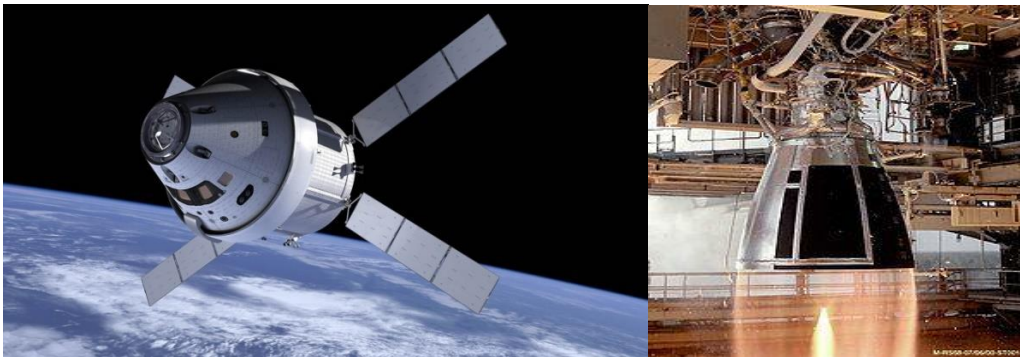


Figure I.9: Utilisation dans le domaine aérospatial

- Industrie automobile : les volants, quelques parties du corps de la voiture.



Figure I.10: Utilisation dans l'industrie automobile

- Industrie biomédical : Les os et les dents.



Figure I.11: Utilisation des FGM dans les implants dentaires

- Industrie d'énergie : Transformation des énergies.



Figure I.12: Utilisation dans l'industrie d'énergie

- Génie civil : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- Chimique : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- L'énergie nucléaire : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- Électronique : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.
- Optique : fibres optiques, lentilles.
- Conversion d'énergie : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoionique, pile à combustible.
- Matières biologiques : implants, peau artificielle,
- Produits en générale : Matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des généralités et introduction aux matériaux FGM d'où leur historique ainsi que leur naissance ainsi que leurs premiers pionniers, ensuite on s'est intéresser aux domaines de l'application de ces dernier et l'intérêt de leur utilisation, mais aussi les différentes méthodes d'élaboration de ces matériaux et La connaissance de leurs propriétés et de leurs constituants contribue à la compréhension du comportement de ce matériau composite lui-même, tel que la nature, la résistance.

Chapitre II

Les différents modèles des structures composites

II.1. Introduction

Le plus souvent, les structures réelles qu'on se propose d'étudier sont complexes de par la diversité de leurs géométries ; toutefois, ces structures peuvent être rapportées à des formes plus simples tels que des poutres, plaques et coques minces ou épaisses. Pour chacun de ces constituants, on dispose des formulations théoriques propres à chaque forme (théorie des poutres, plaques et coques) issues de la théorie de l'élasticité/plasticité.

Les structures FGM sont pour la plupart réalisées sous formes de plaques, c'est pourquoi nous nous sommes intéressés uniquement dans ce travail, à l'analyse linéaire (élastique) des structures de type « plaque ».

Les plaques sont des structures en état plan de contraintes. Ce sont donc des structures minces et planes. Les plaques sont l'équivalent des poutres en 2D : Elles admettent des déplacements verticaux suivant l'axe z.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses.

Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche

II.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité

Le terme « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine) (figure II.1). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes. Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

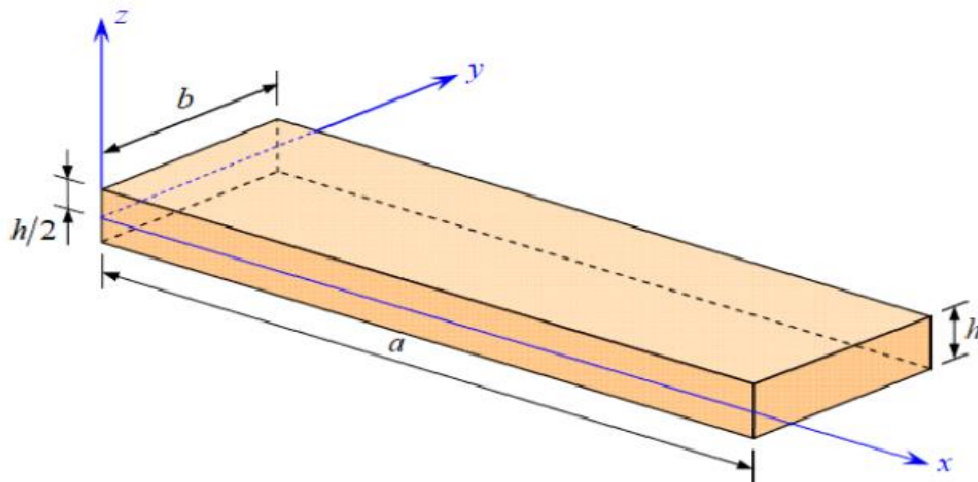


Figure II.1: Schéma d'un élément de poutre

II.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, qui est la plus adoptée par les chercheurs, la plaque multicouche hétérogène est traitée comme une seule couche homogène équivalente via la technique d'homogénéisation. Les variables de cette approche sont introduites pour toute la plaque. Cela va conduire à un nombre de degrés de liberté indépendant par rapport au nombre de couches (figure II.2). Selon Reddy, les théories du modèle ESL fournissent une description suffisamment précise de la réponse globale de stratifié (i.e. la flèche transversale, la fréquence fondamentale de vibration, la charge critique du flambement et le moment résultant). Les principaux avantages des modèles ESL sont leur simplicité inhérente et leur faible coût de calcul, dû au petit nombre des variables dépendantes.

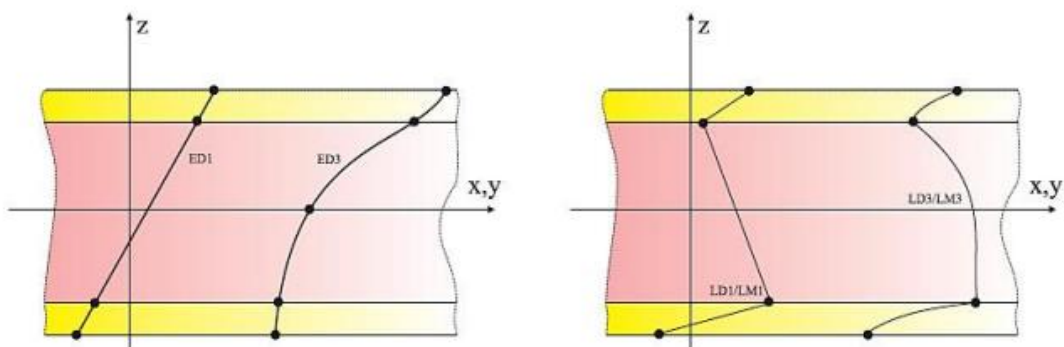


Figure II.2 : Description du déplacement du modèle: monocouche équivalente (à gauche) et par couche (à droite). Cas linéaire et non-linéaire

Dans cette approche, on peut distinguer trois théories bien connues, à savoir:

- ✓ Théorie classique des plaques (CLPT)

- ✓ Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)
- ✓ Théories d'ordres supérieurs (HSDT)

II.2.1.1. Théorie classique des plaques

La théorie classique de plaque est la plus simple et la plus ancienne parmi les autres théories. Elle est initiée par Kirchhoff en 1850, puis elle a été poursuivie par Love au début du XXe siècle. Cette théorie est applicable uniquement pour les plaques/coques, minces. Cependant, elle a donné des résultats erronés quand elle a été utilisée dans l'analyse des plaques épaisses. L'hypothèse principale de la théorie (CLPT) est que les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (*Figure II.3*).

Cette hypothèse implique la négligence des déformations dues au cisaillement transverse

($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$) Et les déformations/contraintes normales ($\varepsilon_z = \sigma_z = 0$)

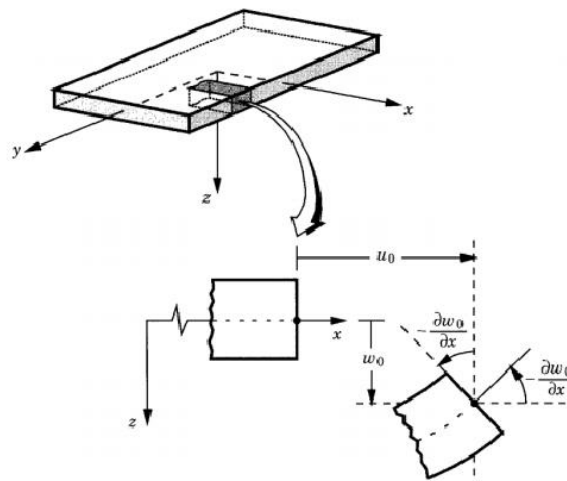


Figure II.3 : Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff [Reddy 1997]

La cinématique de cette théorie peut s'écrire d'une manière linéaire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 U(x,y,z) &= u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 x(x,y,z) &= w_0(x,y)
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Où u_0 , v_0 et w_0 sont les composantes des déplacements dans le plan moyen. W , x et w , y sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement) dans les deux directions. Cependant, cette théorie n'est pas adéquate pour l'analyse des composites multicouches et notamment les structures sandwichs (inadaptée pour la modélisation du cœur), à cause de l'effet du cisaillement transverse. Cet effet joue un rôle très important sur le comportement de ces structures, puisque les rapports entre les modules de Young et les modules de cisaillement sont compris entre 20 et 50 dans les matériaux composites modernes et entre 2,5 et 3,0 dans les matériaux isotropes. En plus, l'effet du cisaillement est la cause de différents modes de rupture comme le délaminage au niveau des interfaces, fissure transverse, etc.,

Alors que, une prédiction précise des contraintes de cisaillement inter laminaires est nécessaire dans l'analyse des défaillances des composites sandwichs. Étant donné l'importance de la question, Batdorf, Yang et al. Whitney, ont étendu la théorie de Reissner, Mindlin, dans le cas de plaques isotropes épaisses, pour introduire l'effet de cisaillement dans les plaques sandwichs et les plaques stratifiées anisotropes.

Cela est devenu ce qu'on appelle "théorie de déformation en cisaillement du premier ordre" (FSDT) ou la théorie de la plaque de déformation en cisaillement uniforme (USDPT).

Ce champ se décompose en:

- Déplacement de la membrane $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$
- Déplacement dû à la flexion $z \frac{\partial w_0}{\partial x}$, $z \frac{\partial w_0}{\partial y}$
- Déplacement transversal $w_0(x,y)$

Sous ces considérations, les sections droites de la plaque ne subissent aucun glissement, en effet:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.2a})$$

Qui en résulte une contrainte nulle de cisaillement :

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad (\text{II.2b})$$

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.2.1.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre FSDT

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.4). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses.

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit $f(z) = z$.

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDT).

Le champ de déplacements de Timoshenko s'écrit alors,

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \theta_y(x,y) \\ x(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) et (θ_x, θ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement.

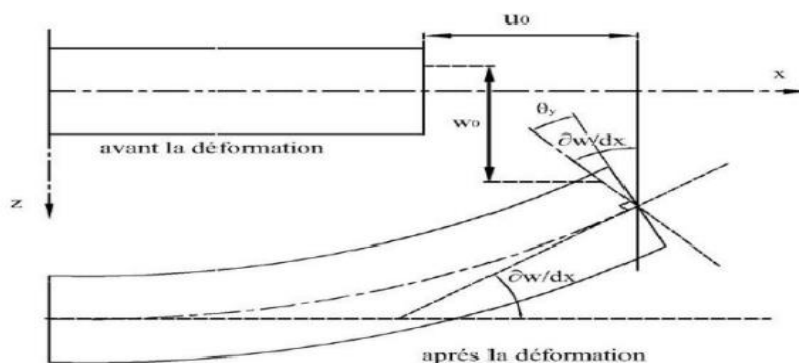


Figure II.4 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

Ce champ se décompose en:

- ✓ Déplacement de la membrane $u_0(x,y), v_0(x,y)$
- ✓ Déplacement dû à la flexion $z \frac{\partial w_0}{\partial x}, z \frac{\partial w_0}{\partial y}$
- ✓ Déplacement transversal $z\theta_x(x,y), z\theta_y(x,y)$

Si on veut calculer la contrainte de cisaillement :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \theta_x ; \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \rightarrow \tau_{xz} = G \cdot \theta_x \tag{II.4}$$

Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui ne représente pas la réalité ; ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction pour régler ce problème

II.2.1.3. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puis qu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de « gauchissement ». Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.5).

La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ représente le cisaillement.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + f(z)\theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + f(z)\theta_y(x,y) \\ x(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{II.5}$$

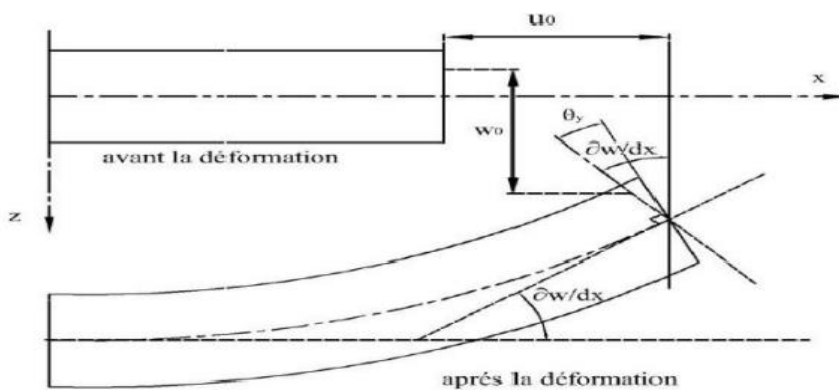


Figure II.5: Illustration de la cinématique de la plaque d'ordre élevé.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + f'(z)\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = f'(z)\theta_x ; \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \rightarrow \tau_{xz} = G \cdot f'(z)\theta_x \rightarrow f'(\frac{z}{h/2}) \quad (II.6)$$

Quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM:

Tableau II.1 : Différentes fonctions de gauchissement utilisées dans les théories des poutres

Théorie	Fonction de gauchissement f(z)
Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT)	$f(z) = 0$
Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT)	$f(z) = z$
Le modèle de puissance avec l'approche de(PSDBT)[Le vinson 1980],[Murthy 1981],[Reddy 1984]	$f(z) = z(1 - \frac{4z^2}{3h^2})$
Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) [karama et al, 2003]	$f(z) = ze^{-2(\frac{z}{h})^2}$
Le modèle trigonométrique [Touratier 1991]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$
Le modèle de mechab (2009), utilisé aussi [par Ait Atmane et ai,2010,et El Meiche et al,2011]	$f(z) = \frac{1}{\cosh(\pi) - 1} \left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{h}{2} \sinh\left(\frac{\pi z}{2}\right) \right]$
Le modèle de panc (1975), utilisé aussi par [Kaczkowski(1968),Reissner (1975),Voyiadjis et Shi et Voyiadjis (2011)]	$f(z) = \frac{5}{4}z(1 - \frac{4z^2}{3h^2})$

II.2.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les Equations (II.3) et (II.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure

une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zig où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. II.6 et II.7).

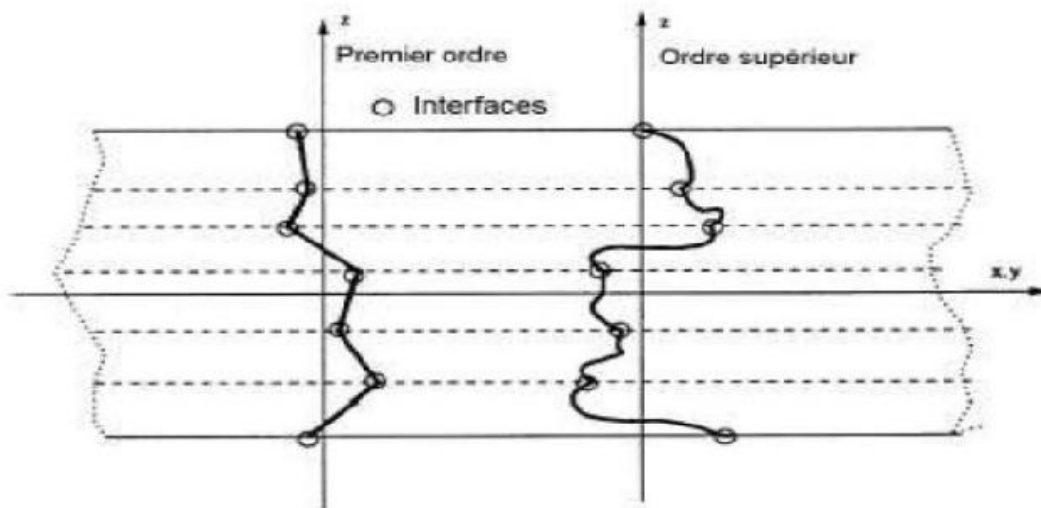


Figure II.6 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.

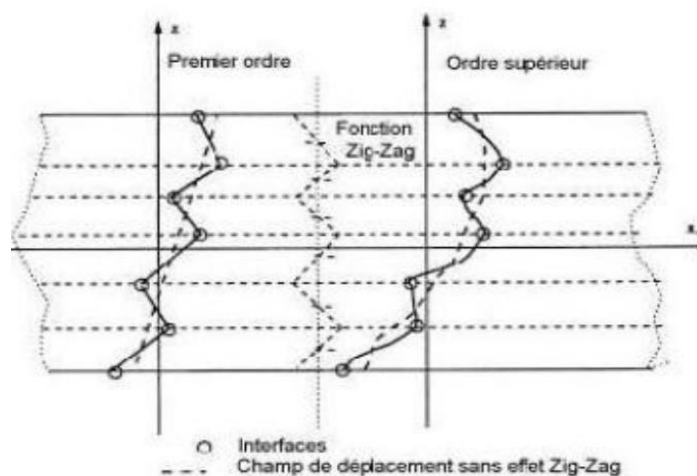


Figure II.7 : Champ de déplacements des modèles zig-zig, approche cinématique.

II.2.2.1. Les modèles zig-zig

Pour remédier au problème de temps de calcul élevé dans les théories de plaques à couche discrète, Di Sciuva, Murakami, Parmerter, Lu et Liu et d'autres auteurs, ont présenté des modèles raffinés de type Zig-Zag dont les déplacements plans ont une variation linéaire (Figure II.8, II.9) ou d'ordre supérieur (Figure II.10), par morceaux, dans la direction de l'épaisseur. L'avantage principal du champ de déplacements des modèles Zig-Zig réside dans l'introduction de la perturbation de l'interface sans augmenter le degré de l'ordre des équations fondamentales de la théorie de couche équivalente.

Dans ces modèles, les conditions de continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement transversal aux niveaux d'interfaces (entre les peaux et l'âme) sont respectées dans quelques travaux. Et le plus important, est que le nombre de variables cinématiques est indépendant du nombre de couches (comme dans l'approche ESL). L'idée fondamentale dans le développement de théories en Zig-Zag consiste à prendre un certain modèle de déplacement (ou de contraintes) dans chaque couche, puis d'utiliser les conditions de compatibilité et de l'équilibre d'interface pour réduire le nombre de variables inconnues.

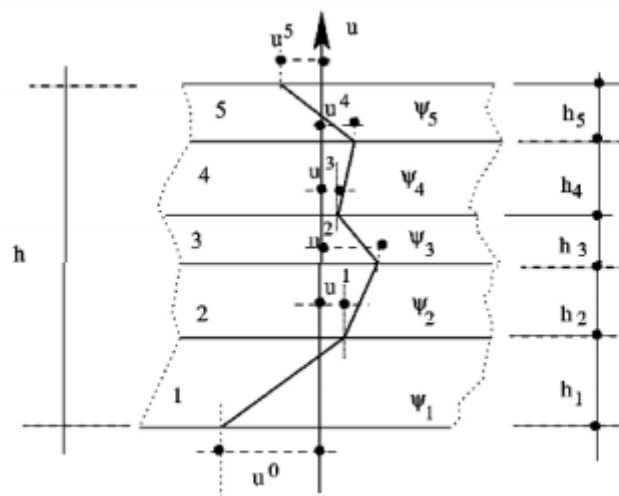


Figure II.8 : Géométrie et notations employées dans les théories en Zig-Zag

Historiquement, la plupart des contributions significatives concernant les théories de Zig-Zag sont originaires de l'école russe. En 2003, Carrera a présenté un aperçu historique détaillé sur les théories Zig-Zag pour l'analyse des plaques et des coques en matériaux multicouches, dans lequel les trois théories fondamentales ont été abordées, à savoir: la théorie multicouche de Lekhnitskii (LMT), la théorie multicouche d'Ambartsumian (AMT) et la théorie multicouche de Reissner (RMT). Les théories LMT et AMT décrivent l'effet Zig-Zag par

l'introduction de conditions de continuité des contraintes de cisailment transverses à travers les équations constitutives de chaque couche et les relations entre la déformation et le déplacement. Par contre, la RMT utilise les équations indépendantes dans la théorie.

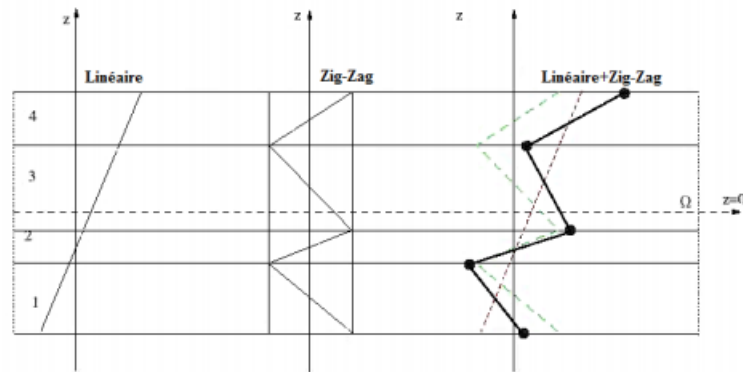


Figure II.9 : Champ de déplacements des modèles zig-zig du premier ordre.

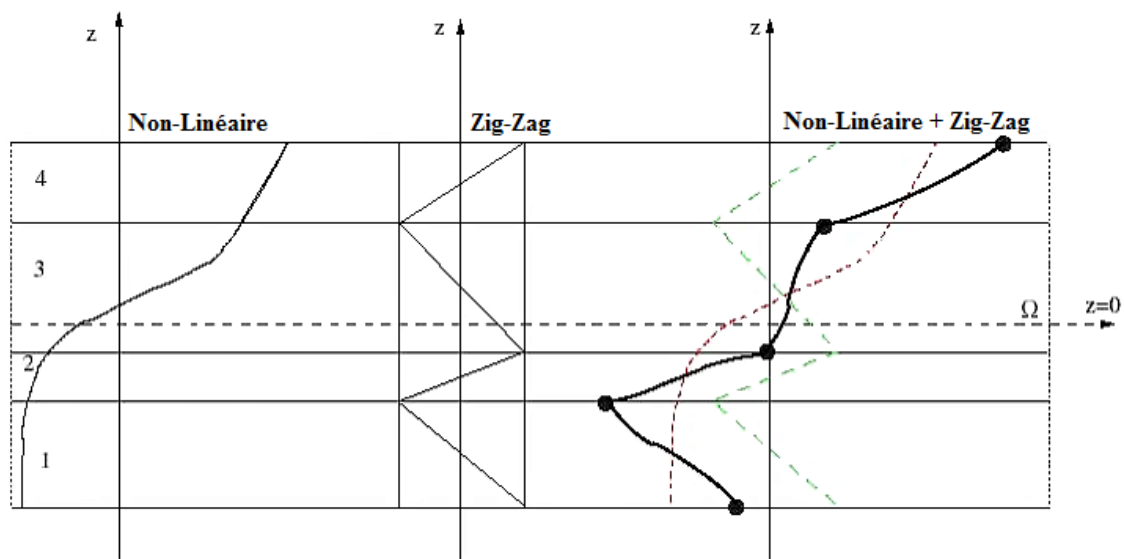


Figure II.10: Champ de déplacements des modèles zig-zig d'ordre supérieur.

II.3. Une revue de littérature des études sur les structures FGM

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique qui surviennent lorsque deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents sont collés.

Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures

en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macro mécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Aussi, les contraintes résiduelles ne seront pas étudiées dans ce travail. Elles doivent être prises en considération avant l'intégration du FGM dans un système de protection thermique assujetti à un environnement à haute-température. Très tôt, des investigations dans ce domaine ont été menées par Drak et al. (1993) et Williamson et al. (1993). Ils ont alors considéré un spécimen en FGM (Al₂O₃-Ni) dans trois configurations différentes, le but de l'étude étant de connaître l'effet des contraintes résiduelles sur les FGM lorsqu'ils sont refroidis. Giannakopoulos et al. (1995) ont examiné le comportement des poutres et des plaques FGM sous l'effet de charges thermiques cycliques.

Le FGM étudié est le même que celui considéré par Williamson et al.(1993) Les auteurs ont analysé des membres structuraux à trois couches dont la couche supérieure est en nickel, la couche inférieure en céramique et la zone médiane est une zone gradée constituée d'un mélange Al₂O₃-Ni. Des cycles de température ont été imposés induisant une déformation plastique dans les membres structuraux. Des équations analytiques ont été établies afin d'obtenir la distribution des contraintes.

Des modèles d'éléments finis ont été développés pour prédire les déformations plastiques cumulées sous l'effet des températures cycliques. Finot et al. (1996) complétèrent ce travail en conduisant des expérimentations sur différents spécimens FGM. En 1995, Ravichandran (1995) a étudié les contraintes résiduelles survenant lors de la fabrication d'un Système FGM sous haute température. Le but de l'étude étant de déterminer l'effet des contraintes résiduelles et de proposer un guide pour des conditions de fabrication optimales. Il a été constaté qu'un matériau avec une fraction volumique linéaire produit moins de contraintes résiduelles. Ainsi, dans un FGM discret, il est préférable d'avoir beaucoup de couches avec des fractions volumiques constantes plutôt que peu de couches avec des changements importants de la fraction volumique.

D'autres travaux ont suivi comme ceux de Hill et Lin (2002) qui ont mené une étude expérimentale et numérique pour étudier les contraintes résiduelles dans une plaque FGM borure titane-titane

II.4. Conclusion

Les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants.

Dans ce chapitre un examen des différentes recherches menées dans la littérature pour la contrainte, la vibration libre et des analyses des plaques FGM a été présenté. Un effort a été fait pour inclure toutes les contributions importantes dans le domaine d'intérêt courant mettant en évidence la littérature la plus pertinente disponible aux ingénieurs de recherche qui étudient les structures en plaques FGM.

Chapitre III

Les matériaux sandwichs et nid d'abeilles

III.1. Introduction

L'utilisation de matériaux composites se répand de plus en plus. Leurs principales caractéristiques sont : faible densité, haute résistance, grande rigidité et excellente dureté, qui sont des exigences dans les domaines tels que l'aérospatiale, l'automobile, la navigation, la construction, etc.

Les matériaux sandwich sont parmi les matériaux composites les plus largement utilisés. Ces matériaux sont généralement constitués de : deux semelles ou peaux, de faible épaisseur avec une résistance élevée et d'un noyau beaucoup plus épais avec une faible densité [C.Belkacemi et B.Bezzazi 2016].

Les propriétés d'intérêt pour les matériaux de base comprennent, par rapport aux autres, faible densité et bonnes caractéristiques d'isolation thermique et acoustique [Zenkert D 1997, Vinson TR 1999]. Les matériaux de base couramment utilisés sont les nids d'abeilles, mousses et bois de balsa, mais autres variantes de structures de noyau cellulaire sont proposées [Nadia Lakreb ,Boudjema Bezzazi a Helena pereira b 2015].

Le liège est un matériau cellulaire naturel possédant un ensemble de propriétés remplit largement les exigences pour les noyaux sandwich : il a une structure alvéolaire semblable à un nid d'abeilles, à cellules fermées, faible densité et excellentes propriétés isolantes [Pereira H. Cork 2007, Gibson LJ ,Easterling KE ,Ashby MF1981]. C'est également une matière première renouvelable issue d'un système de production durable, ce qui contribue à l'intention actuelle de renforcer le « caractère écologique » de la construction

Les agglomérés de liège sont des produits à base de liège commercialisés pour plusieurs applications, principalement pour le surfacage, les revêtements de sol et l'isolation fins. La performance du liège dépend principalement de la densité et de la taille du grain [Reis L , Silva A 2009].

III.2. Définition et présentation sur les matériaux sandwichs

III.2.1. Définition

Une structure sandwich est obtenue à partir de deux peaux ou revêtements, réalisées dans un matériau ayant de très bonnes caractéristiques, collées sur une âme réalisée avec un matériau très léger et ayant des faibles caractéristiques mécaniques.

En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble. Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive [Michel Dupeux 2004].

III.2.2. Présentation

Cette technique consiste à déposer une âme ou cœur (constituée d'un matériau léger possédant de bonnes caractéristiques en compression) entre deux feuilles ou peaux possédant de bonnes caractéristiques en traction.

Les âmes peuvent être pleines (bois, mousse....etc.) ou creuses (alliage métallique léger papier..... etc.). Les peaux sont des stratifiés ou des feuilles d'alliage légers.

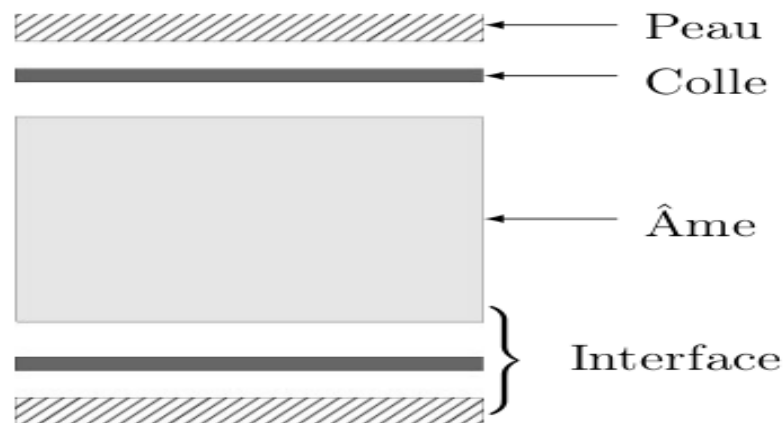


Figure III.1: Un sandwich typique [NOOR AK., et al 1996]

- Les peaux

Généralement sont de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature de la peau s'effectue principalement en fonction des performances mécaniques exigées. Mais, généralement, une rigidité élevée et une excellente résistance à la compression et à la tension sont les principales qualités recherchées. [NOOR AK., et al 1996]

Elles sont constituées le plus souvent :

- ✓ Pour les composites à moyennes et hautes performances, de stratifiés à matrice therm durcissable (polyesters insaturés, époxydes ou thermoplastique polypropylène...) et d'un renfort fibreux (mat et tissu) de verre et de carbone ou d'aramide ;
- ✓ Pour les structures portantes, de feuilles métalliques (aluminium, acier) ;
- ✓ Pour des structures de faibles à moyennes performances, de bois, laminé, stratifié, contre-plaqué.

Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression).

- Les âmes

Dans les matériaux sandwichs, l'âme doit être constituée d'un matériau ayant une faible masse volumique et de bonnes propriétés en cisaillement, pour transmettre les contraintes de traction et compression supportées par les peaux. Dans les faits, c'est le constituant de l'âme qui permet de classer les différentes structures sandwich. Les âmes creuses sont généralement utilisées pour les structures à hautes performances mécaniques, mais ont un coût de fabrication relativement élevé et se limite est généralement à des structures planes. Les âmes pleines, telles que les mousses ou le balsa, permettent la réalisation des structures.

Sandwichs planes ou courbées avec un rapport performance/prix relativement élevé. Parmi les âmes les plus utilisées, citons celles en mousse, nid d'abeilles et en bois de balsa [BENFADEL Karima 2015].

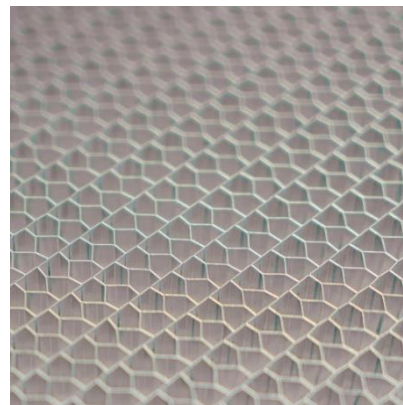


Figure III.2 : matériau d'âmes nid d'abeille [BENFADEL Karima 2015].

- **Nid d'abeilles**

Une autre famille d'âmes (creuses) regroupe des matériaux constitués de cellules. Généralement hexagonales régulièrement espacées faisant penser à un rayon de ruche, d'où l'appellation de « nids d'abeille » ou encore « nida » en abrégé.

Elle peut être réalisée en divers matériaux comme le papier et l'aluminium. Ses caractéristiques mécaniques dépendent du matériau et de la taille des cellules. Sa masse volumique varie de 15 à 100kg/m³ et son épaisseur de 3 à 50 mm. On peut le courber modérément, mais les cellules se déforment et alors les propriétés mécaniques changent selon l'orientation. Le collage peut aussi être un problème, car il se réalise sur la tranche de la structure. Leurs propriétés sont exceptionnelles, mais ils sont difficiles à former et leur prix est élevé. [BENFADEL Karima 2015].

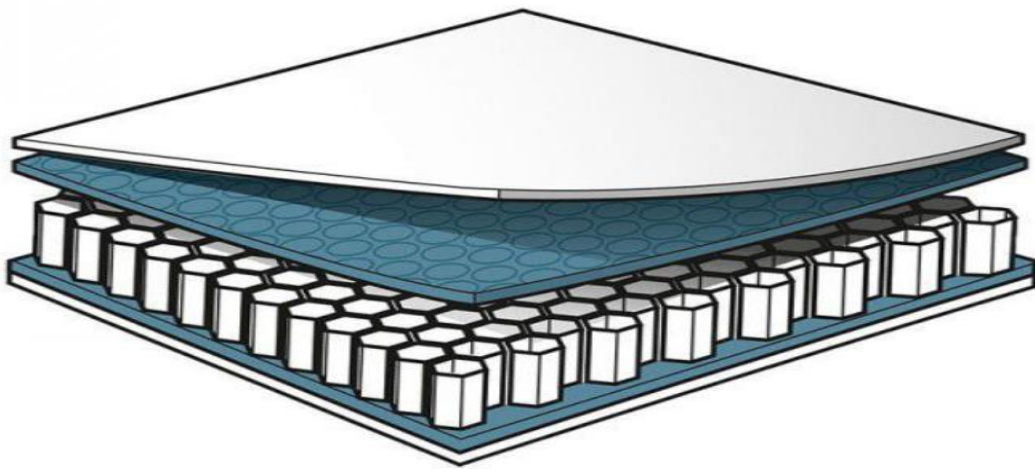


Figure III.3 : panneau sandwich en nid d'abeilles [BENFADEL Karima 2015].

III.3. Structures composites en nid d'abeilles

III.3.1. Définition une plaque sandwich en nid d'abeilles

Cette structure est réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupée tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida ' nid d'abeille ' par expansion.

III.3.2. Historique du nid d'abeilles

Dans cette section, nous allons présenter l'historique du nid d'abeilles diaprès Tom Bitzer [T. Bitzer.1997]. Le premier brevet d'âme en nid d'abeilles, couvrant un procédé de fabrication pour la production de papier kraft en nid d'abeilles, est probablement le celui de Ludwig délivré en 1905 en Allemagne. L'une des premières structures sandwichs artificielles était un pont tubulaire de chemin de fer au pays de Galles construit en 1845. Il se composait

d'un grand tube rectangulaire, dont le plancher soutient une voie ferrée, et à travers lequel circulent les trains.

En 1919, le premier panneau sandwich a été fabriqué en utilisant des parements minces en acajou liés à une âme de bois de balsa. Il a été utilisé comme structure primaire des pontons d'un hydravion. Plus tard, entre la première guerre mondiale et la seconde guerre mondiale, les peaux en contreplaqué collées à un noyau en bois de balsa ont été utilisées comme structure primaire des hydravions italiens.

La fabrication de nids d'abeilles structurelles modernes a probablement commencé à la fin des années 1930, lorsque J.D. Lincoln a fabriqué le papier Kraft en nid d'abeilles pour une utilisation dans le mobilier construit par Lincoln Industries à Marion (Virginie, Etats Unis d'Amérique). Les panneaux sandwichs se composaient de parements minces de bois liés à une tranche relativement épaisse de nid d'abeilles en papier.

Durant la seconde guerre mondiale, le papier en nid d'abeilles a été utilisé par la Société Martin pour l'emballage des antennes de radar; mais l'âme formée de papier absorbait de l'humidité. Plus tard, Martin a développé un nid d'abeilles en tissu de toile de coton et produit ensuite les âmes alvéolaires en tissu de coton, en tissu de verre et en papier d'aluminium.

Toujours à cette époque, la Société Havilland Air plane a conçu et construit le bombardier Mosquito, qui a utilisé des panneaux sandwichs dans certaines parties.

L'excellente performance affichée par cet avion a conduit à l'acceptation de nombreux concepteurs d'aéronefs, notamment en Angleterre, de la supériorité de base de la structure en sandwich comme un moyen de fabrication d'un avion performant plus efficace et plus avancé.

En conséquence, beaucoup de groupes de conception d'avions ont commencé à rechercher la meilleure façon de faire des structures sandwichs et les meilleurs matériaux pour faire les âmes et les parements.

Ce n'est qu'en 1945 que le premier panneau sandwich tout en aluminium a été produit. La véritable percée est venue avec le développement de meilleurs adhésifs pour la fixation des revêtements aux âmes. Certains adhésifs ont été mis au point pour avoir de bonnes propriétés rhéologiques pour l'utilisation sur les nids d'abeilles.[T. Bitzer.1997].

III.3.3. Fabrication du nid d'abeilles

L'âme en nid d'abeilles, également connu sous le nom "Nida", est un matériau structural souple constitué de mailles hexagonales. Pour tout panneau en nid d'abeilles, trois références directionnelles sont définies, comme la montre Figure (III.4)

- Le sens Ruban L (y) : sens parallèle aux joints nodaux (joints de liaison des feuilles entre elles)
- Le sens Expansion W (x) : sens d'étirement conduisant à la formation des cellules hexagonales.
- Le sens Hauteur h (z) : profondeur des cellules [Audrey GRÉDÉ 2009].

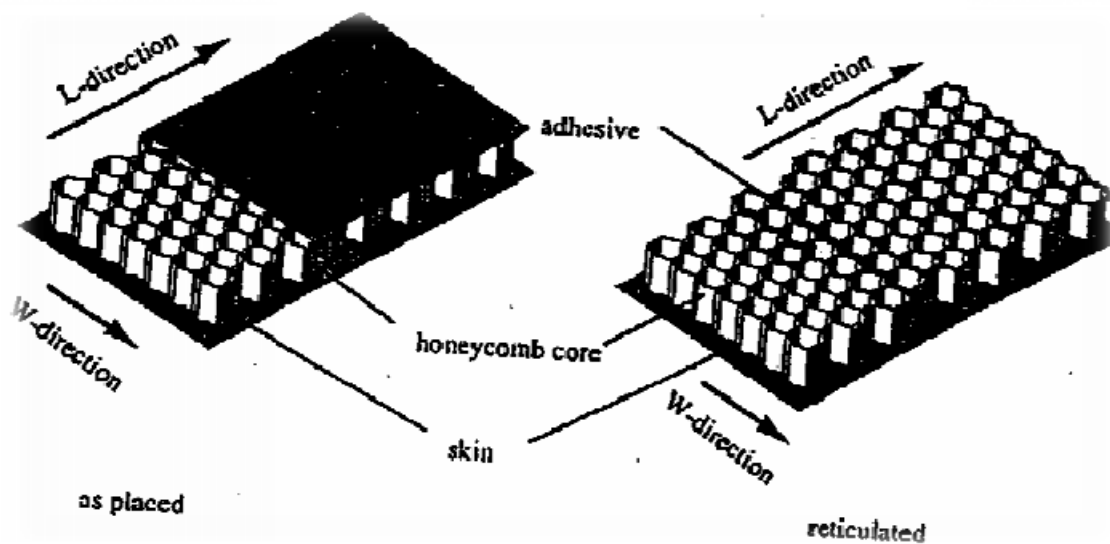


Figure III.4 : Références directionnelles du NIDA [Audrey GRÉDÉ 2009].

Quatre étapes automatisées et une cinquième plus manuelle :

- Une bobine aramide le « feillard » est déroulé sur un axe, nettoyé, dégraissé pour offrir une surface parfaitement lisse. Il passe dans différents bains de traitement de surface pour améliorer son affinité avec le collage, sa résistance à la corrosion et à la tenue du joint nodal.
- Le feillard est micro perforé puis reçoit une série de bande de colle. Il est ensuite découpé en feuilles.
- Les feuilles ainsi traitées sont empilées et pressées à chaud pour la polymérisation de la colle. Elles forment alors un bloc compact.

Les blocs sont ensuite sciés en tranche à épaisseur définie par les spécifications de l'application.

Chaque tranche peut subir un préformage mécanique : le dé-colmatage. Puis elle est étirée, les cellules s'ouvrent alors en hexagone. C'est l'expansion, une opération délicate où chaque cellule est contrôlée visuellement par un opérateur et mesurée pour les applications aéronautiques.

L'alvéolaire une fois expansé peut aussi subir un préformage sur moule à haute température.

Enfin, le nid d'abeille doit être surfacé pour atteindre ses caractéristiques mécaniques notamment en compression.

Les peaux métalliques, (Aluminium) permettent d'obtenir au final un panneau sandwich à âme en nid d'abeille [Mourad kamil 2011].

III.3.4. Domaine d'application :

Le nid d'abeille est léger, résistant à la compression et au cisaillement, ainsi qu'au feu et à la corrosion. Il ne pourrait pas et est recyclable.

Les applications du nid d'abeille en aluminium sont nombreuses et touchent à des domaines très différents : le secteur des moyens de transport (transport ferroviaire, nautique/naval), ou bien dans les secteurs des machines-outils, de la sérigraphie, de l'aérotechnique, du bâtiment, etc.

Il est aussi employé en tant que noyau pour des panneaux sandwich: planchers, plafonds, portes, cloisons, façades, surfaces pour machines automatiques et pour tous les produits qui nécessitent d'atteindre un rapport rigidité/poids optimal.

Le nid d'abeille en aluminium employé en tant que noyau des panneaux est la solution idéale pour remplir les besoins suivants :

- Légèreté
- Rigidité
- Résistance au feu
- Résistance à la compression, au cisaillement et à la corrosion
- Planéité

Utilisé seul, sans tôles, en tant que déflecteur, il canalise et lamine les flux d'air, tandis qu'utilisé en tant que tampon, en compression, il absorbe l'énergie cinétique (absorbeur d'impact).

L'épaisseur de la section d'aluminium peut varier de 3 à 300 mm, le diamètre des alvéoles de 3 à

19 mm et la densité du nid d'abeille (liée à l'épaisseur de la feuille et au diamètre des alvéoles) de 20 kg/m³ à 80 kg/m³. [Isabelle Rouadjia 2012]

III.3.5. Géométrie d'une cellule de nid d'abeilles

Les caractéristiques géométriques nécessaires aux modélisations :

- Les modules d'élasticité : E_x où X est la direction de traction.
- Les coefficients de Poisson: ν_{xy} où X est la direction de traction et Y la direction de contraction.
- Les modules de cisaillement : G_{xy} module de cisaillement dans le plan (X, Y)
- Les modules sont calculés dans le repère (X, Y, Z) [Gibson L. J, Ashby M. F, "Cellular Solids 1988], (Figure III.5)

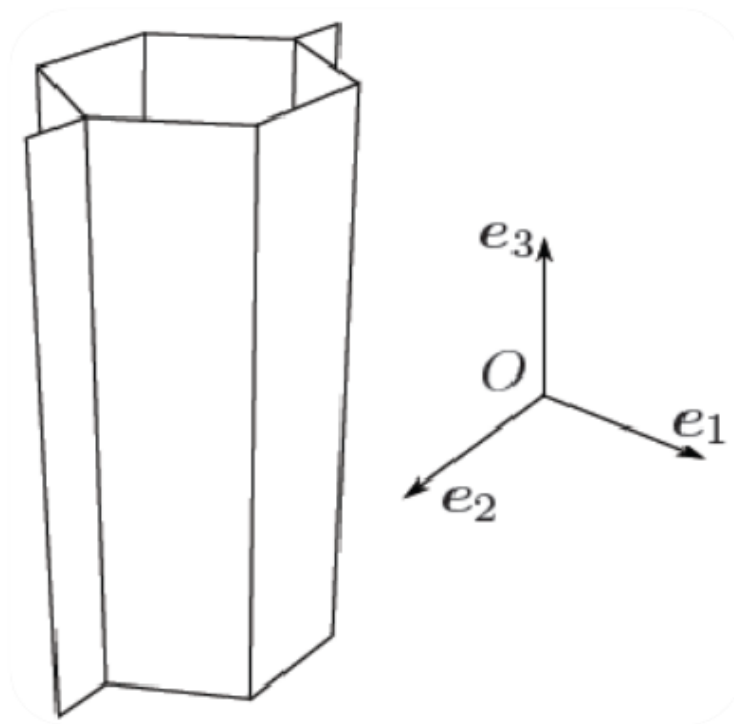


Figure III.5 : Repère d'étude [Gibson L. J, Ashby M. F, "Cellular Solids 1988]

Les Paramètres géométriques d'une cellule en nid d'abeille sont illustrés en (Figure III.6)

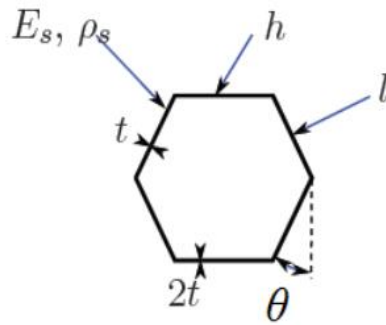


Figure III.6 : Géométrie d'un nid d'abeille [Gibson L. J, Ashby M. F, "Cellular Solids 1988]

Avec :

θ : Angle de la cellule

h : Longueur de la paroi centrale

t : Épaisseur de la paroi inclinée

h_c : Hauteur du nid d'abeilles

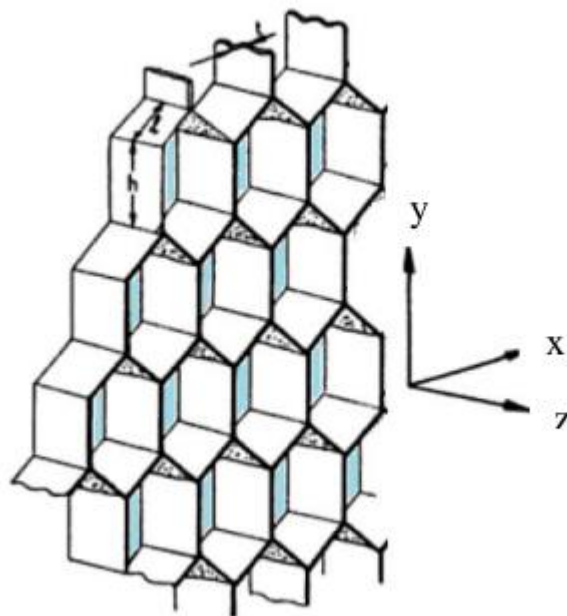


Figure III.7 : Structure en nid d'abeille régulière [Gibson L. J, Ashby M. F, "Cellular Solids 1988]

III.5. Théorie des plaques sandwichs

III.5.1. Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs

La théorie des matériaux sandwichs est basée sur les hypothèses suivantes (Hadji 2012):

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ($h_c \gg h_1, h_2$).
- Les déplacements du cœur u_c et v_c suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnée z .
- Les déplacements u et v suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse w est indépendant de la variable z : la déformation ε_{zz} est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} σ_{yz} : les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} , σ_{zz} et σ_{xy} sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz} et τ_{yz} sont négligées dans les peaux.
- Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformations.

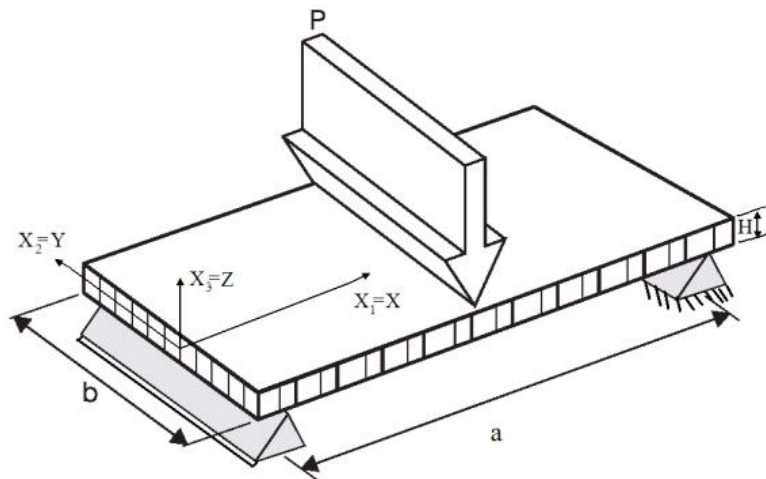


Figure III.11 : configuration de la flexion trois points (Hadji 2012):

III.6. Conclusion

Les sandwichs à âme en nid d'abeille sont de nouveaux matériaux particulièrement utilisés dans le domaine de l'aéronautique, bâtiments et de l'aérospatial. Leurs avantages résident principalement dans la forte rigidité en flexion, l'excellente résistance à la fatigue, l'isolation thermique et le faible poids. Ces derniers ont poussé d'autres industries telle que l'automobile et le ferroviaire à s'y intéresser. Le seul problème est leur mode de rupture ou de ruines qui reste imprévisible :

- Indentation du cœur.
- Cisaillement du cœur.
- Rupture des peaux.
- Dégradation de l'adhésive

Chapitre IV

*Comportement mécanique des
plaques FGM sandwich avec un
cœur en nid d'abeille reposant sur
une fondation élastique*

IV.1. Introduction

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) est un nouveau matériau hétérogène. Il est l'une des formes les plus fonctionnelles des structures composites développées par l'industrie des composites. Il a atteint une large acceptation dans l'aérospatiale et de nombreuses autres industries, et il est largement utilisé dans les avions et les véhicules spatiaux, des navires, des bateaux, des conteneurs et des constructions résidentielles. La technique de gradation de la céramique ainsi que des métaux initiés par le scientifique du matériel japonais à Sendai a marqué le début d'explorer la possibilité d'utiliser les FGM pour diverses applications structurelles [Reddy. 2000].

Les FGM sont considérés comme un matériau structurel potentiel pour les industries futures d'engins spatiaux à grande vitesse et de production d'énergie. Les FGM sont des nouveaux matériaux, non homogènes micro scopiquement, dans lesquels les propriétés mécaniques varient en douceur et de façon continue d'une surface à une autre. Dans un FGM, la composition et la structure changent progressivement, ce qui entraîne des changements correspondants dans les propriétés du matériau. En appliquant les nombreuses possibilités inhérentes à la conception d'un FGM, il est prévu que les matériaux seront améliorés et de nouvelles fonctions seront créées.

Au cours des dernières années, il y a eu des rapports de recherche considérables sur le comportement mécanique, flambage, vibration libre, etc., sur les éléments structuraux des FGM. Plusieurs études ont été réalisées pour analyser le comportement des plaques et coques à gradient de propriétés. Bourada et al. [Bourada. 2015] donnent une nouvelle théorie simple de déformations de cisaillement pour les poutres à gradient de propriétés. Carrera et al. [Carrera. 2010] étudient le problème de la réponse statique des plaques et coques multicouches en matériaux à gradient de propriétés (FGM). Kiani et al. [Kiani. 2011] ont analysé le comportement statique et dynamique d'un panneau en FGM doublement incurvée reposant sur une fondation élastique de type Pasternak. Al-Basyouni et al. [Al-Basyouni. 2015] ont analysé la flexion et la vibration des micro-poutres à gradient de propriétés basées sur la théorie de contrainte doublée modifiée et la position de la surface neutre.

Dans cette étude, une nouvelle théorie raffinée est proposée pour l'analyse à la flexion et à la vibration libre des plaques sandwichs FGM avec un cœur en nid d'abeille simplement appuyées.

Les plaques sont fabriquées d'un matériau isotrope ayant des propriétés matérielles différentes dans seulement la direction d'épaisseur. Les équations sont obtenues à partir du principe des travaux virtuels et le principe Hamilton. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente théorie ainsi que l'influence du paramètre du matériau, le rapport d'épaisseur sur le comportement mécanique des plaques sandwichs en FGM avec un cœur en nid d'abeille.

IV.2. Formulation du problème

Considérons une plaque d'épaisseur totale h et composée d'un matériau à gradient fonctionnel à travers l'épaisseur (Figure IV.1). Il est supposé que le matériau est isotrope et que la gradation n'a lieu que dans l'épaisseur uniquement dans l'épaisseur. Le plan xy est considéré comme le plan médian non déformé de la plaque, l'axe z étant positif vers le haut à partir du plan médian.

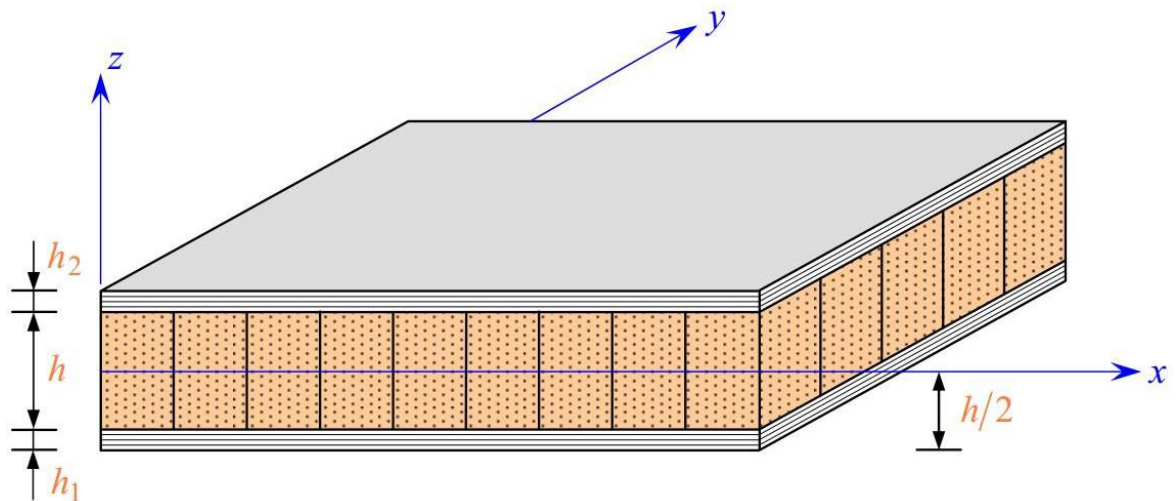


Figure IV.1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire composée de FGM.

IV.2.1. Champs de déplacement et déformations

Le champ de déplacement supposé est le suivant :

$$U(x,y,z)=u_0(x,y)-z\frac{\partial w_b}{\partial x}-f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x},$$

$$V(x,y,z)=v_0(x,y)-z\frac{\partial w_b}{\partial y}-f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \tag{IV.1}$$

$$W(x,y,z)=w_b(x,y)+w_s(x,y),$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements du plan médian de la plaque dans les directions x et y , respectivement ; w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement, tandis que $f(z)$ représente les fonctions de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversales le long de l'épaisseur et est donnée comme suit :

$$F(z) = z \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) \quad (IV.2)$$

Il convient de noter que, contrairement à la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre, cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction du cisaillement. Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s, \end{aligned} \quad (IV.3)$$

$$\gamma_{yz} = g(z) \gamma_{yz}^s,$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s,$$

$$\varepsilon_z = 0,$$

Où

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (IV.4)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y},$$

$$\gamma_{yz}^0 = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz}.$$

IV.2.2. Relations constitutives

Dans la MGF, la gradation des propriétés du matériau est considérée à travers l'épaisseur et l'expression donnée ci-dessous représente le profil de la fraction volumique :

$$p(z) = p_t - p_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + p_b \quad (IV.5)$$

Où P désigne une propriété générique du matériau comme le module p_t et p_b , désignent la propriété des faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement, et k est un paramètre qui détermine le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur. Ici, on suppose que les modules E et G varient selon l'équation (IV.5) et ν est supposé être une constante. Les relations constitutives linéaires sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (IV.6)$$

Où

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12} = \nu Q_{11}, Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (IV.7)$$

IV.2.3. Équations gouvernantes

Les équations gouvernantes de l'équilibre peuvent être dérivées en utilisant le principe des déplacements virtuels. Dans le cas présent, le principe du travail virtuel donne :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (IV.8)$$

Où est la surface supérieure et q est la charge transversale appliquée. En substituant les équations (IV.3) et (IV.6) à l'équation (IV.8) et en intégrant l'épaisseur de la plaque, on obtient l'équation (IV.8) Plaque peut être réécrite comme suit :

$$\int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (IV.9)$$

$$\begin{pmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{pmatrix} dz \quad (\text{IV.10a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{IV.10b})$$

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées de l'équation (IV.9) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en fixant les coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$, et δw_z séparément. On peut ainsi obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation par cisaillement.

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{IV.11})$$

$$\delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0$$

$$\delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z^s}{\partial x} + \frac{\partial^2 M_z^s}{\partial y} + q = 0$$

En utilisant l'équation (IV.6) dans l'équation (IV.10), les résultantes des contraintes d'une plaque sandwich composée de trois couches peuvent être liées aux déformations totales par :

$$\begin{pmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ K^b \\ K^s \end{pmatrix}, S = A^s \gamma \quad (\text{IV.12})$$

Ou:

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (\text{IV.13a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, K^b = \{K_x^b, K_y^b, K_{xy}^b\}^t, M^s = \{K_x^s, K_y^s, K_{xy}^s\}^t, \quad (\text{IV.13b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.13c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{21}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{21}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{21}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13d})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, A = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.13e})$$

Où, A_{ij}, B_{ij} etc., sont la rigidité de la plaque, définie par :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} (1, z, z^2, f(z), zf(z)) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{1-v}{2} \end{pmatrix} dz, \quad (\text{IV.14a})$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{IV.14b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{44} [g(z)]^2 dz \quad (\text{IV.14c})$$

En substituant l'équation (IV.12) à l'équation (IV.11), on obtient l'équation suivante :

$$A_{11}d_{111}u_0 + A_{66}d_{222}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b -$$

$$B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s = 0, \quad (\text{IV.15a})$$

$$A_{22}d_{222}v_0 + A_{66}d_{111}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b -$$

$$(B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = 0, \quad (\text{IV.15b})$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{111}w_b -$$

$$2(D_{12} + 2D_{66})d_{112}w_b - D_{22}d_{222}w_b - D_{11}^s d_{111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{112}w_s - D_{22}^s d_{222}w_s = 0 \quad (\text{IV.15c})$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s d_{1111} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} v_0 + B_{22}^s d_{222} v_0 - D_{11}^s d_{1111} w_b - \\
 & 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_b - D_{22}^s d_{2222} w_b - H_{11}^s d_{1111} w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{1122} w_s - \\
 & H_{22}^s d_{2222} w_s + A_{55}^s d_{11} w_s + A_{44}^s d_{22} w_s = q, \tag{IV.15d}
 \end{aligned}$$

Où $d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$ sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2). \tag{IV.16}$$

IV.2.4. Solution exacte pour une plaque FGM

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous nous intéressons ici à la solution exacte des équations (15a-d) pour une plaque

FG simplement supportée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords latéraux :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ sur } x = -a/2, a/2, \tag{IV.17a}$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ sur } x = -b/2, b/2, \tag{IV.17b}$$

Pour résoudre ce problème, Navier a supposé que les charges mécaniques transversales et de température, q sous la forme d'une double série trigonométrique comme

$$q = q_0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y), \tag{IV.18}$$

Où $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$, et q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

En suivant la procédure de solution de Navier, nous supposons la forme de solution suivante pour u_0, v_0, w_b et w_s qui satisfait les conditions aux limites,

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_b \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_s \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \end{pmatrix}, \tag{IV.19}$$

Où est la fréquence naturelle et U, V, W_b, W_s sont des paramètres arbitraires à déterminer sous réserve que la solution de l'équation (IV.19) satisfasse les équations directrices (IV.15).

$$\text{Où } \{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t; [C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

Dans laquelle :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2, \\ a_{12} &= \lambda\mu(A_{12} + A_{66}), \\ a_{13} &= -\lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2], \\ a_{14} &= -\lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{66}^s + 2B_{66}^s)\mu^2], \\ a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2, \\ a_{23} &= -\mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2], \\ a_{24} &= -\mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2], \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4, \\ a_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4, \\ a_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

IV.3. Résultats numériques et discussions

L'étude s'est concentrée sur le comportement dynamique des plaques sandwich à gradient fonctionnel avec un cœur en nid d'abeille basée sur le nouveau modèle de déformation en

cisaillement d'ordre supérieur. Quelques résultats représentatifs de la solution de Navier obtenue pour une plaque rectangulaire simplement supportée sont présentés ici.

Les plaques sandwichs sont soumises à une double charge transversale trigonométrique distribuée donnée par :

$$q=q_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (\text{IV.22})$$

Où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque. On considère un matériau à gradient fonctionnel constitué d'aluminium et d'alumine. Les propriétés suivantes des matériaux sont utilisées pour le calcul des valeurs numériques [Bouazza.2011]: Métal (Aluminium, Al): $E_m = 70$ GPa ; rapport de Poisson $\nu = 0,3$; Céramique (Alumine, Al₂O₃) : $E_c = 380$ GPa ; rapport de Poisson $\nu = 0,3$, et le nid d'abeille (carton) : $E_{\text{nid}} = 3.45$ GPa.

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{100 h^3 E_c}{a^4 q_0} u\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right); \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{a q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right); \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{h}{a q_0} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right); \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h}{a q_0} \tau_{xy}(0, 0, z); \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

IV.3.1. Validation du modèle

Le tableau (IV.1) montre la comparaison de la flèche d'un sandwich en FGM avec un cœur en nid d'abeille carré en alumine / aluminium. Dans ce cas, on a deux modèles du sandwich FGM, un est simplement appuyée et l'autre un sandwich reposant sur une fondation élastique sous une charge sinusoïdale. Les résultats obtenus par la théorie actuelle sont comparés avec ceux donnés par la théorie des plaques de Kirchhoff ou de la théorie classique de la plaque (CPT) et la théorie d'ordre élevé HSDPT de Touratier [Touratier. 1991].

En utilisant une solution analytique qui donne des résultats identiques pour les flèches avec le rapport d'épaisseur égal ($a/h = 10$) et ($a/h = 100$) avec :

1-1-1 : On a la même épaisseur pour les couches supérieur, inférieur et le cœur en nid d'abeille.

1-2-1 : On a un cœur en nid d'abeille épais par rapport aux autres couches.

Tableau (IV.1) : Comparaisons du paramètre de flèche d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwichs (1-1-1).

Indice de puissance P	Le model	Sans fondation élastique $k_0 = k_1 = 0$		Avec fondation élastique $k_0 = k_1 = 1000$	
		a/h = 100	a/h = 10	a/h = 100	a/h = 10
0	CPT	0,133557	0,000144	0,017910	0,000018
	HSDPT	0,133514	0,000139	0,017910	0,000018
	Présent model	0,133770	0,000165	0,017912	0,000018
2	CPT	0,294339	0,000316	0,019123	0,000019
	HSDPT	0,294246	0,000307	0,019122	0,000019
	Présent model	0,294790	0,000361	0,019124	0,000019
5	CPT	0,416717	0,000448	0,019430	0,000019
	HSDPT	0,416581	0,000434	0,019430	0,000019
	Présent model	0,417312	0,000507	0,019431	0,000020
10	CPT	0,513966	0,000553	0,019572	0,000020
	HSDPT	0,000665	0,000048	0,001203	0,000002
	Présent model	0,514755	0,000619	0,019573	0,000020

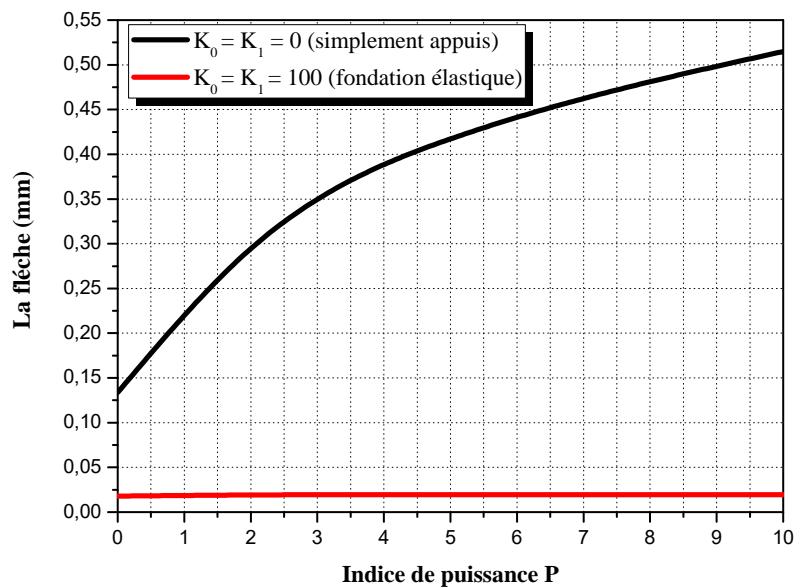


Figure IV.2 : Comparaisons du paramètre de flèche d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwichs (1-1-1).

La capacité de la présente solution est également testée pour la comparaison du paramètre de contraintes de plaques sandwich FGM à loi de puissance d'un sandwich FGM avec un

cœur en nid d'abeille en alumine /aluminium en variant le rapport d'épaisseur a/h (100) sans/avec fondation élastique pour les différents cas de sandwiches (1-1-1) et (1-2-1).

Le tableau (IV.2) et la figure (IV.3) représente les différents types de contraintes (σ_{xx} ; σ_{yy} ; τ_{xy}) en fonction de l'indice de puissance P sans/avec fondation élastique pour un sandwich (1-1-1). On remarque que les contraintes diminuent lorsque l'indice de puissance P augmente surtout dans le cas d'existence de la fondation élastique.

Tableau (IV.2) : Comparaisons du paramètre de contraintes (σ_{xx} ; σ_{yy} ; τ_{xy}) d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwiches (1-1-1).

$a/h = 100$	P	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}
$K_0 = K_1 = 0$	0	3,905900	2,193000	0,242400
	2	4,601400	2,240500	0,260900
	5	6,317200	1,667400	0,238700
	10	7,571000	1,327900	0,201500
$K_0 = K_1 = 100$	0	0,523010	0,293648	0,032458
	2	0,298503	0,145346	0,016925
	5	0,294140	0,061829	0,011114
	10	0,287879	0,050492	0,007662

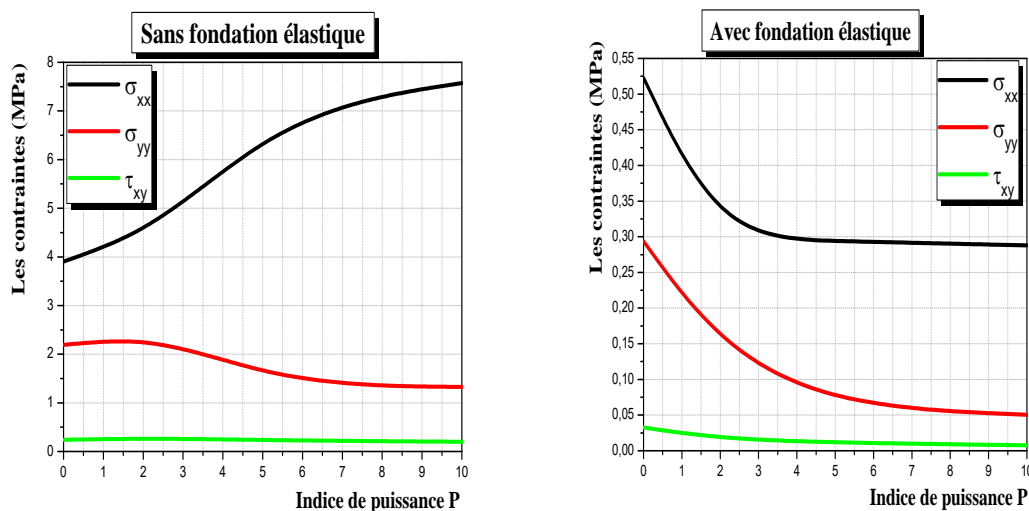


Figure IV.3 : Comparaisons du paramètre de flèche d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwiches (1-1-1).

Le tableau (IV.3) et la figure (IV.4) représente les différents types de contraintes (σ_{xx} ; σ_{yy} ; τ_{xy}) en fonction de l'indice de puissance P sans/avec fondation élastique pour un sandwich (1-2-1). On remarque que les contraintes diminuent lorsque l'indice de puissance P augmente surtout dans le cas d'existence de la fondation élastique.

Tableau (IV.3) : Comparaisons du paramètre de contraintes (σ_{xx} ; σ_{yy} ; τ_{xy}) d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwichs (1-2-1).

a/h = 100	P	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}
$K_0 = K_1 = 0$	0	4,1222	2,1431	1,0243
	2	4,9417	2,1629	0,8925
	5	6,8876	1,3432	0,8607
	10	8,1826	1,008	0,8799
$K_0 = K_1 = 100$	0	0,5520	0,2870	0,1372
	2	0,3206	0,1403	0,0579
	5	0,3207	0,0625	0,0401
	10	0,3111	0,0383	0,0335

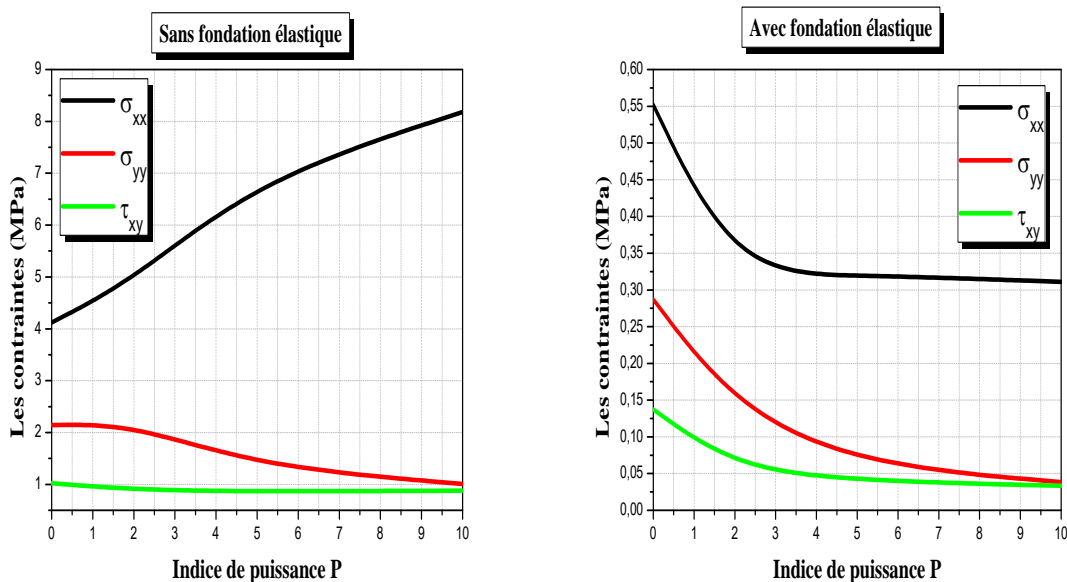


Figure IV.4 : Comparaisons du paramètre de flèche d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille avec d'autres théories pour cas de sandwichs (1-2-1).

IV.4. Conclusion

En conclusion, on peut dire que la théorie proposée d'ordre élevé est précise et simple pour résoudre le comportement statique des plaques sandwich FGM. L'extension de la présente théorie est également envisagée pour les conditions générales aux limites.

Toutes les études comparatives démontrent que la présente solution est très efficace pour l'analyse statique des plaques sandwichs FGM avec un cœur en nid d'abeille sous fondation élastique.

La théorie d'ordre élevé à quatre variables est développée pour l'étude analytique du sandwich FGM avec un cœur en nid d'abeille. Il est donc nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Les équations qui régissent ont une forte similitude avec le CPT dans de nombreux aspects.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse statique des plaques en matériaux composites à propriétés spécifiques "Cas d'un FGM typique céramique/métal" dans des environnements thermiques, en utilisant la théorie raffinée de déformation de cisaillement hyperbolique (HSDPT). La présente théorie à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Les gradients dans les propriétés matérielles jouent un rôle important dans la détermination de la réponse des plaques en FGM. Toutes les études comparatives ont montré que les flèches et les contraintes obtenues en utilisant la présente théorie raffinée (avec quatre inconnus) et d'autres théories de déformation de cisaillement à ordre élevé (cinq inconnus) sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est non seulement précise mais également simple pour étudier et analyser la réponse thermomécanique en flexion des plaques épaisses en FGM. Les matériaux composites à gradients de propriétés fabriqués à partir d'un mélange céramique/métal" sont capables de résister à des températures extrêmes. Le mélange de la céramique et de métal avec variation continue de la fraction volumique peut éliminer les problèmes d'interface des plaques épaisses ou sandwiches et les distributions des contraintes sont ainsi lisses.

De gros efforts sont constamment fournis pour concevoir des matériaux avec une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté.

Les matériaux composites répondent bien à ces exigences. Parmi les matériaux composites les plus utilisés, les panneaux sandwichs à âme creuse sont un bon compromis entre la résistance et la légèreté ; en particulier, les panneaux de sandwich en nid d'abeilles.

Référence bibliographique

- [A.GUERMITE2018], ‘‘Etude expérimentale des structures sandwiches à base des bio-sources,Mémoire de master Université Mohamed Kheider-Biskra 2018.
- [ABDI9 97] ABDIZADEH H. élaboration et caractérisation de composites duplex «composites laminaires tri couches a base d’alumine», these docteur d’état, institut national des sciences appliquées de Lyon et l’université Claude Bernard Lyon 1997.
- [Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2010)], ‘‘Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory’’, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 6(2), 113-12
- [Audrey GRÉDÉ2009], "Modélisation des chocs d’origine pyrotechnique dans les structures d’Ariane", Thèse de Doctorat, ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES «ÉCOLE CENTRALE PARIS ».2009.
- [Bao. 1995]Bao, G. Wang, L. Multiple cracking in functionally gradedceramic/metalcoatings. *Int. J. Solids Structures*, 32 (19), 2853– 2871, 1995
- [bich 87]BOCH .P.tape casting of layered composites ,inprocessing of advanced ceramics .edited by moya and azasociedad Espanola de ceramica y vidrio 1987
- [bish93]BISHOP,A, LIN, C.Y. NAVARATNAM, M.RAWLINGS.R.D mc SHANEh.b.a functionally gradient material produced by a powdermetallurgicalprocess, *journal of materials science letters* 1993.
- [C. Belkacemi* and B. Bezzazi 2016] Sandwich panels from cork and polyester in presence of epoxy resin as interfacial adhesive. C. Belkacemi* and B. Bezzazi. *International Journal of Physical Sciences*. Received 25 July, 2016; Accepted 11 November 2016.
- [Carrera, E.,(2002)], Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, Composite plates and shells, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9 (2) 87-140.
- [Carrera, E.,(2003)], Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells,*Applied mechanics reviews*, 56 287-308
- [Chakrabarti, A. and A.H. Sheikh,(2005)], Analysis of laminated sandwich plates based on interlaminar shear stress continuous plate theory, *Journal of engineering mechanics*, 131 (4) 377-384
- [Chi. 2003]Chi. Shyang-ho,Chung Yen-Ling. Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 10, 1227–1243, 2003.
- [Cho, M. and R. Parmerter,(1993)], Efficient higher order composite plate theory for General lamination configurations, *AIAA journal*, 31 (7) 1299-1306
- [Cho, M. and R.R. Parmerter,(1992)], An efficient higher-order plate theory for Laminated composites, *Composite Structures*, 20 (2) 113-123
- [Cho, Y. and R. Averill,(2000)], First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite Element model for laminated composite and sandwich panels, *Composite Structures*, 50 (1) 1-15.
- [Delale. 1983]Delale, F. Erdogan, F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of AppliedMechanics*, 50, 609 –614, 1983.

[**Di Sciuva, M.(1986)**], Bending, vibration and buckling of simply supported thick Multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model, *Journal of Sound and Vibration*, 105 (3) 425-442

[**Di Sciuva, M.(1984)**], A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates, *Atti. Accad. Sci. Torino*, 118 279–295

[**Di Sciuva, M.,(1987)**], An Improved Shear-Deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells and Plates, *Journal of Applied Mechanics*, 54 (3) 589-596.

[**Duong, V.A.**], Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008, 196 pp.

[**Gibson L. J, Ashby M. F, 1988**] *Cellular Solids: Structure and Properties*”, Pergamon, Oxford 1988.

[**Gibson LJ, Easterling KE, Ashby MF 1981**]. The structure and mechanics of cork. *Proc Roy Soc London A* 1981;377:99–117

[**HADJI Lazreg.2012**], contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwichs en FGM, thèse de doctorat en sciences, 2012-2013, Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbès.

[**H. Yin, L. Sun, and G. Paulino.2004**], “Micromechanics-based elastic model for functionally graded material with particle interactions,” *Acta Materialia*, vol. 52, no. 12, pp. 3535–3543, Jul. 2004, doi: 10.1016/j.actamat.2004.04.007.

[**Hirai 1996**] T.Hirai, Chapter 20, "Functional Gradient Materials", *Mater. Sci. and Tech.* vol.17B, R.W.Chan, P.Hassen and E.J.Kramer(eds.), VCH, Weinheim, Germany(1996)293.

[**Hopkinson. 2006**] Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dickens, P.M. *Rapid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age*. John Wiley and Sons, Ltd, 2006

[**Isabelle Rouadjia2012**] Infos Mathériauthèque "composite 1 – nid d'abeille", Ecole nationale supérieure des arts décoratifs, Paris; 2012

[**Jean-Marie Berthelot**]. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 5^{ème} Edition, Lavoisier ,2012 Reissner, E. (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77

[**kieb2003**] B.KIEBACK, A.NEUBRAND, H.FIEDEL .Riedel«processing techniques for functionally gradedmaterials», *materials science and engineering A*362(2003) 81-105.

[**Kirchhoff, G.(1850)**], Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40 51-88

[**Kirchohoff.G 1876**] « Vorlesungen umber mathematics the physic », volume 1 B.G. teubner Leipzig, Germany (1876)

[**Koizumi M.1992**]. The concept of FGM. *Ceramic transaction, functionally gradedmaterials* 34, 3–10, 1992.

[**Liu, X. and D. Liu,(1992)**], An Interlaminar Shear Stress Continuity Theory for Both Thin and Thick Composite Laminates, *Journal of Applied Mechanics*, 59 (3) 502-509.

[**M. Koizumi.1997**] FGM activities in Japan. *Compos Part B-Eng.* 28(1–2) (1997) 1–4. Doi: 10.1016/S1359-8368(96)00016-9.

- [**M.J. Pindera, J. Aboudi, A.M. Glaeser, S.M. Arnold, 1997**] Use of Composites in Multi-Phased and Functionally Graded Materials. *Compos Part B-Eng.* 28(1997) 1–175.
- [**M.J. Pindera, S.M. Arnold, J. Aboudi, D. Hui, 1993**] Use of Composites in Functionally Graded Materials. Invited Paper, In: *Functionally Graded, Advanced Composites Materials Symposium*, University of Virginia, Charlottesville, U.S.A., 1993, *Composites Eng.* 4(1994) 1–145
- [**Markworth et Saunders. 1995**]Markworth, Alan. J. Saunders, James. H. A model of structure optimization for a functionallygradedmaterial. *MaterialsLetters*, 22 (1–2), 103-107, 1995.
- [**Melle : BENFADEL Karima 2014/2015**]. Élaboration et caractérisation de panneaux sandwichs à matrice cimentaire destinés à la construction. Mémoire de Magister.2014/2015.
- [**MINDLIN R.D.1951**], « Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates », *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, 1951, p. 31-38
- [**Miyamoto. 1999**]Miyamoto, Y. Kaysser, W.A. Rabin, B.H. Kawasaki, A. and ford,R.G. *functionally graded Material*, Kluwer Academic Publishers,Boston, 1999.
- [**Mori et Tanaka. 1973**]Mori, T. Tanaka, K. Average stress in matrix and averageelasticenergy of materials withmisfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 (5), 571-574, 1973.
- [**Mourad kamil2011**]," Modélisation par éléments finis de matériaux intelligents: application en controle actif de vibrations des structures aéronautiques", grade de maître ès Sciences (M.Sc.), UNIVERSITÉ LAVAL QUÉBEC, 2011
- [**Moya, 1992**]J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, *Functionally gradient ceramics by sequential slip casting*, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, (1992).
- [**Murakami, H.,(1986)**], *Laminated composite plate theory with improved in-plane Responses*, *Journal of applied mechanics*, 53 (3) 661-666
- [**Nadia Lakreb , Boudjema Bezzazi a 2015**], Helena Pereira b. *Mechanical behavior of multilayered sandwich panels of wood veneer and a core of cork agglomerates*. *Journal of Elsevier* .2015
- [**Nguyen, D.T.**], *Benchmark d'un modèle layer wise de multicouches et implémentation du modèle dans Abaqus*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Est., 2012, 160 pp
- [**Nguyen. 2004**] Nguyen, Viet.Tung. *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques*. Thèse de doctorat de l'École nationale des ponts et chaussées, 2004
- [**NOOR AK., et al 1996**]., « *Computational Models for Sandwich Panels and Shells*». *Appl Mech Rev*, vol. 49, pp. 155-199, 1996
- [**O.V.D. Biest, M. Gasik, J. Vleugels,2004**] *Functionally Graded Materials VIII: FGM2004*, Trans Tech Publications Ltd, Materials Science Forum, Uetikon-Zuerich, Vols. 492–493
- [**P. Boch, T. Chartier, M. Huttepain, (1986)**]. *Casting of AL2O3/ZrO2 laminated Composites*, *Journal of the American Ceramic Society* 69 (8), 191–192.
- [**Pereira H. Cork 2007**]: *biology, production and uses*. Amsterdam: Elsevier; 2007
- [**Reddy, J.N.(1993)**], *An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of Composite laminates*, *Composite structures*, 25 (1–4) 21-35

- [Reddy. J.N, 1997] Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton
- [Reis L, Silva A 2009]. Mechanical behavior of sandwich structures using natural cork agglomerates as core materials. J Sandwich Struct Mater 2009; 11(6):487–50
- [sark 96]sarkar ,p.nicholson .electro phoreticdepositionmechanisms, kinetics, and application to ceramics ,1996 volume 79N°8.
- [Sciuva, M.D,(1992)], Multilayered anisotropic plate models with continuous interlaminar stresses, Composite Structures, 22 (3) 149-167.
- [Shen, H. S., 2009]Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells, New York: CRC Press.
- [stef 90]STEFFENS.H.D.DVORAK.M.WEWEL. plasma sprayed functionally gradient materials-processing and application, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials –Sendai Japan 1990.
- [teka 90]TAKAHASHI .M.ITOH.Y KASHIWAYA fabrication and evaluation of w/cugradient material by sintering and infiltration technique in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials Japan 1990.
- [Timoshenko, S. P. (1921)], “On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars ”, Philosophical Magazine, Series 6, pp. 742–746
- [Touratier. 1991] Touratier, M. An efficient standard plate theory. Engng Sci, 29, 8, 901-916, 1991.
- [Vinson JR 1999]. The behaviour of sandwich structures of isotropic and composite materials. Lancaster: Technomic Publishing Co., Inc.; 1999
- [Zenkert D 1997]. The handbook of sandwich construction. North European engineering and science conference series. Cradley Heath: EMAS Publishing; 1997. p. 442