

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET**

---



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : STUCTURE

Présenté par :

- BOULLABBES Yamna
- GUELLOULA Manel

Sujet du mémoire :

**Etude de la flexion et la vibration des poutres P- FGM sur  
fondation élastique.**

*Soutenu publiquement le 24/06/2023.devant le jury composé de :*

Mr, TLIDJI .Y

Président

Mme, KHELIFA .Z

Rapporteur

Mr, DRAICHE .K

Examineur

Mme, Ouazir .K

Examinatrice

Promotion 2022/2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# Remerciements

*Tout d'abord, nous tenons à remercier Allah, le clément et le bienveillant de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.*

*Nous voudrions exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur madame zoubida khelifa. Pour les orientations et les conseils qu'elle a su nous montrer durant l'évolution de notre projet.*

*Nous remercions les honorables membres du jury qui nous ont fait l'immense honneur de président d'examiner ce travail. .*

*Nous voudrions aussi remercier tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.*

*Nos remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin nous ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.*

# *Dédicace*

*Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de finir ce travail.*

*À cet agréable moment je dédie ce modeste travail à mon cher père **laid Guelloula** qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis et à ma chère mère **Khadîdja** qui a été à mon côté durant toute ma vie, à mes sœurs mes frères, qui m'ont soutenu moralement.*

*Je dédie aussi ce mémoire :*

*À toute ma famille*

*À tous mes amis particulièrement :*

***Boutouiga Sonya, Abbes Nawel***

*À ma belle-sœur et binôme Yamna  
À toutes la promotion de 2<sup>ème</sup> année master GC.*

***Manel Guelloula***

## **DEDICACE**

*Je dédie ce projet :*

*A mon grand-père Aissa*

*A mon cher père Maned*

*A ma chère mère Djemea*

*A mes tantes Saadia et Fadila*

*Sans oublier ma grande mère Khamala ALLAH yerhamha*

*Qui ne sont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.*

*A mes frères, mes sœurs,*

*À tous mes amis particulièrement :*

*Dahmoun Loubna et Saad Fatima.*

*À ma belle-sœur et binôme Manel*

*Pour leurs soutiens moraux et leurs conseils précieux tout au long de mes études, puisse Allah vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite. À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de mon cursus.*

***Boulabbes yamna***

## Résumé

L'intérêt de ce mémoire est de présenter une théorie de déformation par cisaillement hyperbolique efficace et originale pour analyser le comportement statique et dynamique des poutres en matériaux à gradient de propriétés type P-FGM reposant sur une fondation élastique deux paramètres Winkler - Pasternak.

La présente théorie prend en compte la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement qui sont nuls aux bords supérieur et inférieur, sans avoir besoin d'un facteur de correction

En se basant sur cette théorie, les équations de mouvement sont obtenues par l'application du principe d'Hamilton et la méthode de Navier est proposée pour résoudre les équations de mouvement pour la flexion et la vibration des poutres P-FGM reposant sur fondation Winkler-Pasternak.

L'efficacité de la présente théorie est vérifiée en le comparant avec d'autres théories d'ordre élevé existante dans la littérature, on peut conclure que la présente théorie est non seulement précise mais aussi simple pour prévoir le comportement de la flexion et de la vibration des poutres P-FGM.

**Mots-clés :** Flexion ; Vibration libre ; Matériaux à gradient de propriétés ; fondation élastique Winkler-Pasternak ; Principe d'Hamilton.

## Abstract

The interest of this thesis is to present an effective and original theory of deformation by hyperbolic shear to analyze the static and dynamic behavior of beams made of materials with gradient properties of the P-FGM type resting on an elastic foundation with two Winkler - Pasternak parameters.

The present theory takes in to account the hyperbolic distribution of shear stresses which are zero at the upper and lower edges, without the need for a correction factor. Based on this theory, the equations of motion are obtained by applying Hamilton's principle and Navier's method is proposed to solve the equations of motion for bending and vibration of P-FGM beam resting on Winkler foundation. -Pasternak.

The effectiveness of the present theory is verified by comparing it with other existing high-order theories in the literature, it can be concluded that the present theory is not only accurate but also simple to predict the behavior of bending and vibration of the P-FGM beams.

**Keywords:** Bending; Vibration free; Materials with property FGM; Winkler-Pasternak elastic foundation; Hamilton principle.

## ملخص

تكمن أهمية هذه الرسالة في تقديم نظرية فعالة للتشوه بواسطة القص الزائد لتحليل السلوك الثابت والديناميكي للحزم المصنوعة من المواد ذات الخصائص المتدرجة وظيفياً المستندة على أساس مرن وينكلر-باسترنالك. تأخذ النظرية الحالية في الاعتبار التوزيع الزائد لضغوط القص التي تكون صفيرية عند الحواف العلوية والسفلية، دون الحاجة إلى عامل تصحيح بناءً على هذه النظرية، يتم الحصول على معادلات الحركة من خلال تطبيق مبدأ هاملتون وطريقة نافبي مقترحة لحل معادلات الحركة للانحناء والاهتزاز لحزم المواد المتدرجة وظيفياً لمستندة على أساس وينكلر-باسترنالك. يتم التحقق من فعالية النظرية الحالية من خلال مقارنتها مع نظريات أخرى عالية المستوى موجودة في الأدبيات، ويمكن استنتاج أن النظرية الحالية ليست دقيقة فحسب، بل إنها بسيطة أيضاً للتنبؤ بسلوك الانحناء والاهتزاز في المواد المتدرجة وظيفياً.

**الكلمات المفتاحية:** الانحناء؛ الاهتزاز الحر للمواد ذات التدرج الخاص؛ أساس وينكلر-باسترنالك؛ مبدأ هاملتون.

## Table de matière

Remerciement .....	
Dédicace .....	
Dédicace .....	
Résumé .....	I
Abstract .....	II
ملخص.....	III
Table de matière.....	IV
Liste des figures .....	IV
Liste des tableaux .....	IX
Liste des symboles .....	X
Introduction générale.....	1
<b>Chapitre 1. Généralités sur les matériaux FGM .....</b>	<b>3</b>
I.1 Introduction : .....	4
I.2 Définition : .....	4
I.3 Historique et concept des FGM: .....	5
I.4 Processus et technique de fabrication des FGM.....	7
I.5 Types de FGM.....	7
I.6 Comparaison des matériaux types FGM et les composites traditionnels.....	8
I.7 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués.....	10
I.8 Pour des utilisations structurelles (intégration du caractère réfractaire) .....	12
I.9 Les avantages et les inconvénients des FGM.....	13
I.9.1 Les avantage.....	13
I.9.2 Les inconvénients.....	14
I.10 Propriétés des FGM.....	14
I.10.1 Propriétés d'Aluminium .....	15
I.10.1.1Propriétés physiques.....	15
I.10.1.2Propriétés mécaniques .....	15
I.10.1.2Propriétés physiques et mécaniques de la céramique .....	16
I.10.1.2.1 Propriétés physiques .....	16
I.10.1.2.2-Propriétés de la céramique.....	16
I.11 Propriétés matérielles des poutres FGM : .....	17

I.11.1	Fonction de puissance (P-FGM) :	18
I.11.2	Fonction sigmoïde(S-FGM) :	19
I.11.3	Fonction exponentielle (E-FGM) :	20
I.12	Conclusion	21
<b>Chapitre 2. Théories des poutres</b>		<b>22</b>
II.1	Introduction :	23
II.2	Historique des théories des poutres.	23
II.2.1	L'intéresser à la théorie des poutres.	23
II.2.2	La Théorie des poutres	23
II.3	Le rôle de la poutre	23
II.4	Les types des poutres.	23
II.5	Modèle de la poutre.	25
II.6	Le comportement des poutres FGM.	27
II.7	Définition d'élasticité.	28
II.8	Problème d'élasticité.	28
II.9	Théories des poutres.	29
II.10	Les modèles analytiques de l'interaction sol-structure.	32
II.10	Conclusion.	37
<b>Chapitre 3. Vibration des poutres P.FGM sur fondation élastique.</b>		<b>39</b>
III.1	Introduction	40
III.2	Formulation théorique	40
III.3	Hypothèses de base	40
III.4	Cinématique et équations constitutives :	41
III.5	Équations constitutives :	42
III.6.	Équations de mouvement :	42
III.7	Solution analytique:	44
III.8	Conclusion.	45
<b>Chapitre 4. Résultats et discussions.</b>		<b>46</b>
IV.1	Introduction	47
IV.2	Caractéristiques des paramètres étudiées.	47
IV.3	Analyse des résultats et discussion.	49

IV.4	Conclusion.....	59.
	Conclusion générales.....	60
	Références bibliographiques.....	62

# Liste des figures

<b>Figure (I.1)</b>	Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	5
<b>Figure (I.2)</b>	Le nombre annuel de publications sur le sujet des FGM fournies.....	6
<b>Figure (I.3 a)</b>	Variation continue des propriétés.....	6
<b>Figure (I.3 b)</b>	Variation discrète des propriétés .....	6
<b>Figure (I.4)</b>	variation continue de la microstructure .....	8
<b>Figure (I.5)</b>	Utilisation des FGM dans les implants dentaires.....	9
<b>Figure (I.6.a)</b>	le FGM mince .....	10
<b>Figure (I.6 b)</b>	le FGM massive.....	10
<b>Figure (I.7)</b>	Différentes types des matériaux.....	11
<b>Figure (I.8)</b>	Comparaisons des matériaux FGM avec les matériaux composites.....	17
<b>Figure (I.9)</b>	La Géométrie d'une poutre FGM.....	18
<b>Figure (I.10)</b>	Variation du module de Young d'un matériau P-FGM.....	19
<b>Figure (I.11)</b>	Variation du module de Young d'un matériau S-FGM.....	20
<b>Figure (I.12)</b>	Variation du module de Young d'un matériau E-FGM.....	21
<b>Figure (II.1)</b>	Quelque poutre classique .....	25
<b>Figure (II.2)</b>	Poutres de courbe moyenne $G_0G_E$ , de section droite $S$ , et fibre neutre de Section $ds$ .....	26
<b>Figure (II.3)</b>	La modélisation consiste à définir des paramètres de forme ( $L, I_G, I_{Gy}, I_{Gz}$ ) à partir de la forme de la pièce réelle.....	26
<b>Figure (II.4)</b>	Cinématique de la poutre de Timoshenko et cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli.....	31
<b>Figure (II.5)</b>	Modèle de Winkler.....	32
<b>Figure (II.6)</b>	Tassement du sol causé par la charge concentrée du modèle de continuum élastique.....	33
<b>Figure (II.7)</b>	Modèle du Filonenko-Borodich.....	34
<b>Figure (II.8)</b>	Fondation de Hetenyi.....	34
<b>Figure (II.9)</b>	Modèle de Pasternak.....	35
<b>Figure (II.10)</b>	Équilibre de la couche de cisaillement.....	36
<b>Figure (II.11)</b>	Modèle de Kerr.....	37
<b>Figure(III.1)</b>	Poutre FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres.....	40
<b>Figure(IV.1)</b>	Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM.....	48

<b>Figure (IV.2)</b>	Déplacement axial adimensionnel dans l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont : $\xi_w = 0.1$ et $\xi_p = 0$ .....	49
<b>Figure (IV.3)</b>	Déplacement axial adimensionnel dans l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont : $\xi_w = 0.1$ et $\xi_p = 0.1$ .....	53
<b>Figure (IV.4)</b>	Contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont : $\xi_w = 0.1$ et $\xi_p = 0$ .....	54
<b>Figure (IV.5)</b>	Contrainte axiale adimensionnelle dans l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont : $\xi_w = 0.1$ et $\xi_p = 0.1$ .....	54
<b>Figure (IV.6)</b>	Contrainte de cisaillement transverse adimensionnelle dans l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont : $\xi_w = 0.1$ et $\xi_p = 0$ .....	55
<b>Figure (IV.7)</b>	Contrainte de cisaillement transverse adimensionnelle dans l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont : $\xi_w = 0.1$ et $\xi_p = 0.1$ .....	55

## Liste des tableaux

<b>Tableau (I.1)</b>	Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM.....	16
<b>Tableau(IV.1)</b>	Propriétés matérielles utilisées dans la présente étude.....	48
<b>Tableau(IV.2)</b>	Paramètres adimensionnels utilisés et leurs expressions correspondantes.....	49
<b>Tableau (IV.3)</b>	Déplacements et contraintes adimensionnels d'une poutre FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres et soumise à une charge sinusoïdale.....	50
<b>Tableau (IV.4)</b>	Fréquences naturelles adimensionnelles d'une poutre graduée fonctionnellement simplement appuyer .....	56
<b>Tableau (IV.5)</b>	Fréquences naturelles de flexion a dimensionnelles des poutres fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique.....	57

# Liste des symboles

$V(z)$	Fraction volumique
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
$E_m$	Module Young (Métal)
$E_c$	Module Young(Céramique)
$k$	Indice de puissance, Paramètre de puissance
$\rho_z$	Masse volumique en fonction de l'épaisseur
$\rho_m$	Masse volumique(Métal)
$\rho_c$	La masse volumique (Céramique)
$\{\}$	Vecteur colonne
$\square$	Matrice
$\{\sigma_{ij}\}$	Tenseur de contrainte
$\{\varepsilon_{ij}\}$	Tenseur de déformation
$E_{ij}$	Module de Young
$\nu$	Coefficient de poisson
$G_{xz}$	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
$U$	Déplacement suivant X
$W$	Déplacement suivant You bien la flèche
$\sigma_x$	Contrainte normal.



$\tau_{xz}$	Contrainte de cisaillement
$\gamma_{xz}$	Déformation angulaire
$H$	Hauteur de la poutre
$L$	Longueur de la poutre
$\delta$	Variation opérationnelle
$\delta U$	Variation de l'énergie de déformation interne de la poutre
$\delta V$	Variation de l'énergie de déformation due au chargement extérieur.
$\delta T$	Variation de l'énergie de déformation cinétique de la poutre
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$	Coefficient de rigidités
$M$	Moment de flexion
$Q_{11}, Q_{55}$	Constantes de rigidité
$\varepsilon_0$	Déformation normale
$U_m, W_m, Q_x$	Paramètres arbitraires
$T$	Temps
$\omega$	Fréquence propre de la poutre
$I(x)$	Moment d'inertie de masse
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

## Introduction générale

Les matériaux à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants en général (métal et céramique) à travers l'épaisseur, induisant des changements, en conséquence des propriétés thermo mécaniques globales de l'élément structural qu'ils constituent. Ils ont été conçus pour pallier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères.

Le comportement statique et dynamique des structures en FGM ont été étudié par l'utilisation des diverses théories allant de la théorie classique des poutres jusque d'ordre élevés de déformation en cisaillement.

Les chercheurs disposent de diverses lois de distribution décrivant la variation de propriétés matérielles des structures en FGM.

Les propriétés mécaniques varient graduellement et continuellement d'une surface à l'autre à travers toute l'épaisseur. Le FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM), ou la fonction sigmoïde (S-FGM) pour décrire les fractions de volume.

L'objectif du présent travail est d'utiliser la distribution en loi de puissance (P-FGM) d'une poutre en matériaux à gradient de propriétés reposant sur une fondation élastique pour l'étude de la flexion et de la vibration libre.

Le présent mémoire s'articule autour deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir les aspects :

- Théorique
- Analytique

**L'aspect théorique** : comprend deux chapitres :

Dans le premier chapitre des généralités sur les matériaux FGM sont exposées, après un bref historique sur le développement des structures FGM est donné, ainsi que les domaines d'application. Pour finir les avantages et les inconvénients des FGM sont exposés.

Dans le deuxième chapitre un bref exposé sur les différentes théories des poutres comme les modèles classiques des poutres de Bernoulli (CBT) et les poutres de Timoshenko sont présentées ainsi que les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Ensuite nous allons passer en revue les modèle d'interaction sol-structure et quelques modèle

analytique tel que le modèle de Winkler, continuum élastique, Filonenko-borodich, hetenyi, Pasternak et Kerr [ Pasternak, P et al 1954], [Kerr, A.D 1964].

**L'aspect analytique** : contient aussi deux chapitres :

Chapitre trois est réservé au formulation mathématique du problème de vibration libre et de la flexion des poutres FGM en utilisant une théorie raffinée d'ordre élevée qui a été développée.

Quant au quatrième chapitre, nous avons présenté les résultats obtenus sous forme de graphes et tableaux et leurs discussions.

# **Chapitre 1. Généralités sur les matériaux FGM.**

## I.1 Introduction

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations des contraintes.

La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ").

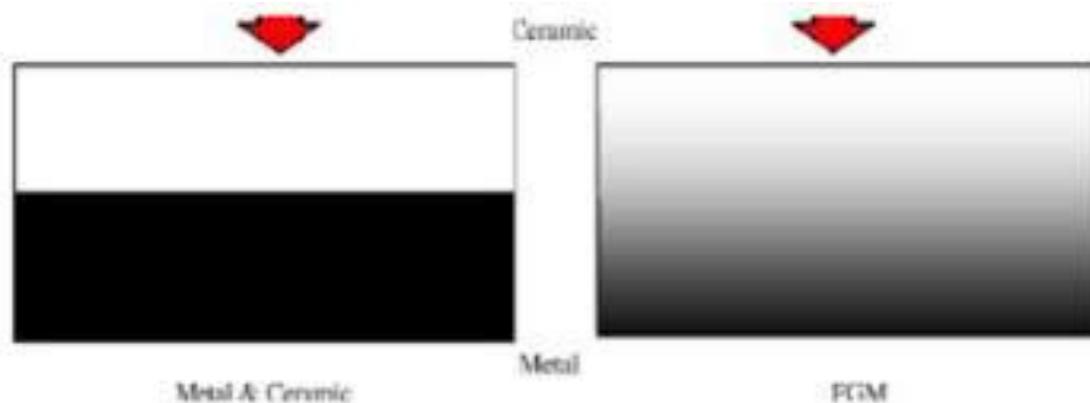
Les matériaux FGM sont des matériaux fonctionnellement gradués, microscopiquement non-homogènes.

Ainsi, les propriétés mécaniques varient graduellement et continuellement d'une surface à l'autre à travers toute l'épaisseur. Le FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM), ou la fonction sigmoïde (S-FGM) pour décrire les fractions de volume.

## I.2 Définition des matériaux FGM

Les matériaux FGM sont construits à partir d'un mélange de céramique et de métal ou une combinaison de différents matériaux. La céramique dans une FGM offre une barrière des effets thermiques et protège le métal contre la corrosion et l'oxydation, et le FGM est dur et renforcé par la composition métallique. Actuellement les FGM sont développés pour une utilisation générale comme des éléments structurels dans les environnements à température extrêmement élevée et des applications différentes.

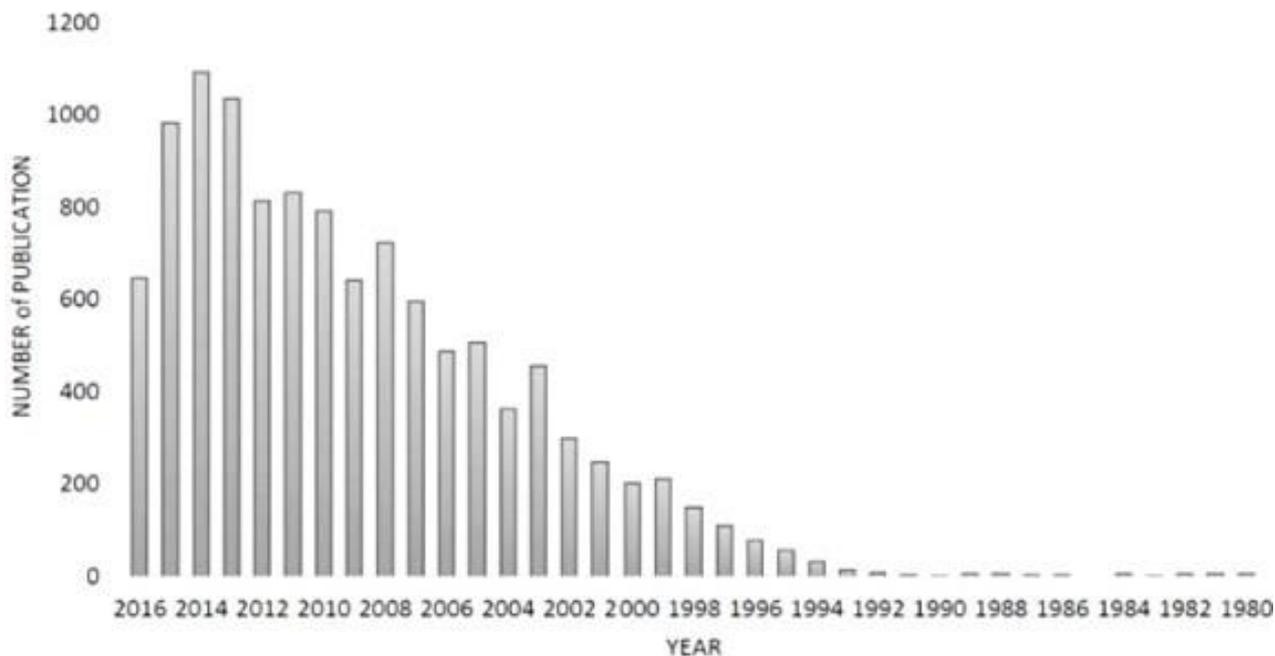
Généralement le FGM permet de combiner plusieurs caractéristiques telles que la légèreté, la bonne résistance mécanique et chimique, une maintenance réduite, une dureté plus élevée de rupture, et réduit les facteurs d'intensité d'effort.



**Figure (I.1) :** Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

### I.3 Historique et concept des FGM

La création des FGM est apparue au Japon au début des années 1980, lorsque les chercheurs ont été confrontés à un problème nécessitant un type de matériau composite capable de résister à une différence de température très élevée dans un projet aérospatial [Miyamoto YE. et al 1999]. Ils ont d'abord été conçus d'abord comme matériaux de barrière thermique pour les réacteurs de fusion [Mahmoudi A.2019]. Les FGM sont une nouvelle classe de matériaux composites, fabriqués d'une manière spéciale, qui garantissait un changement gradué, varier d'un matériau à l'autre soit en continue ou discontinue par étape des constituants à l'intérieur, souvent de la céramique aux métaux dans un seul corps (matériaux macroscopiquement inhomogènes) des FGM les plus connus, à travers la direction de l'épaisseur selon des fonctions mathématiques. Et par conséquent, une modification correspondante des propriétés mécaniques effectives et des caractéristiques du matériau apparaît, en font une solution non seulement au problème thermique (supporter des niveaux de température élevés) bien connus en premier lieu dans les industries aérospatiales, mais aussi à certains problèmes des matériaux composites classiques, tels que la discontinuité des matériaux qui génèrent des niveaux de concentration de contraintes élevés, et donc des problèmes d'interface (la rupture de délaminage) ainsi que des déformations. De plus, les FGM supportent également les charges mécaniques appliquées et offrent de bonnes performances dans des conditions d'utilisation dure et exigeante. En conséquence, les FGM ont attirés plusieurs industries à utiliser leurs composants structurels, et donc beaucoup de domaines de l'ingénierie les étudient de manière approfondie afin de prédire leurs comportements et leurs réponses.



**Figure (I.2)** : Le nombre annuel de publications sur le sujet des FGM fournies par le moteur de recherche de Scopus (Naebe et al 2016)

Les FGM sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue figure(I.3.a) ou discrète figure(I.3.b) à Travers l'épaisseur.



**Figure (I.3.a)** : Variation continue

**Figure (I.3.b)** : Variation discrète

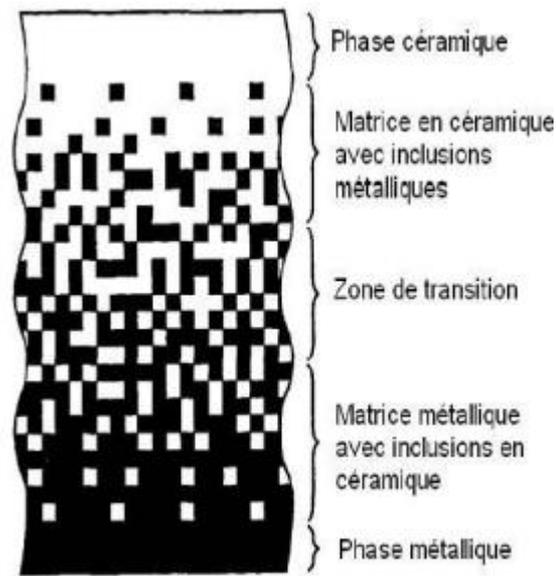
#### I.4 Processus et technique de fabrication des FGM

Une variété des méthodes de production des FGM ont été créées, basée souvent sur une variation des méthodes de traitement des différents processus d'élaboration conventionnelles bien établies, des procédés qui sont capables de s'adapter à une étape de gradation. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : [H.Okamura. 1991]

- ❖ Le système par le dépôt chimique en phase vapeur (chemical vapor deposition C.V.D)
- ❖ Le système par la technique de la compaction sèche des poudres,
- ❖ Le système par synthèse par auto-propagation à haute température
- ❖ Le système par projection plasma à double

#### I.5 Types de FGM

Au début du développement des matériaux à gradient de propriétés, le concept consistait à supprimer l'interface pointue qui existait dans le matériau composite traditionnel et à la remplacer par l'interface qui se modifiait progressivement, ce qui se traduisait par une modification de la composition chimique de ce composite. A cet effet deux critères différents sont utilisés pour classer les matériaux fonctionnels à gradient de propriétés. L'un est basé sur la structure du matériau et l'autre sur la taille des matériaux à gradient de propriétés de manière fonctionnelle. Les FGM peuvent être divisés en deux groupes principaux basés sur la structure des matériaux : FGM structurée en continue et structurée de manière discontinue. Dans les FGM continues, il existe un gradient continu d'un matériau à l'autre. Cependant, en cas de FGM discontinue, le gradient de matière est fourni en couches, La variation continue des propriétés figure (I.4) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.



**Figure (I.4)** : variation continue de la microstructure.

Il existe deux types de structures graduées qui peuvent être préparées dans le cas des FGM, à savoir la structure continue représentée sur la (figure I.3 a) et la structure par étapes (Couches) représentée sur la (figure I.3 b) [U dupa et al. 2014].

Dans le cas d'une structure à gradation continue. Le changement de composition et de Microstructure se produit continuellement avec la position. En revanche, dans le cas de Structure à gradation pas à pas, la caractéristique de la microstructure évolue progressivement donnant naissance à une structure multicouche avec une interface existant entre des couches discrètes.

L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné la mise au point de différents types de FGM, le type d'application envisagée détermine généralement le type de FGM à utiliser.

Les matériaux ayant une composition, une microstructure ou une porosité changeantes à Travers le volume du matériau sont appelés matériaux à gradient de propriétés fonctionnelle (FGM) [Mahamood et al 2017].

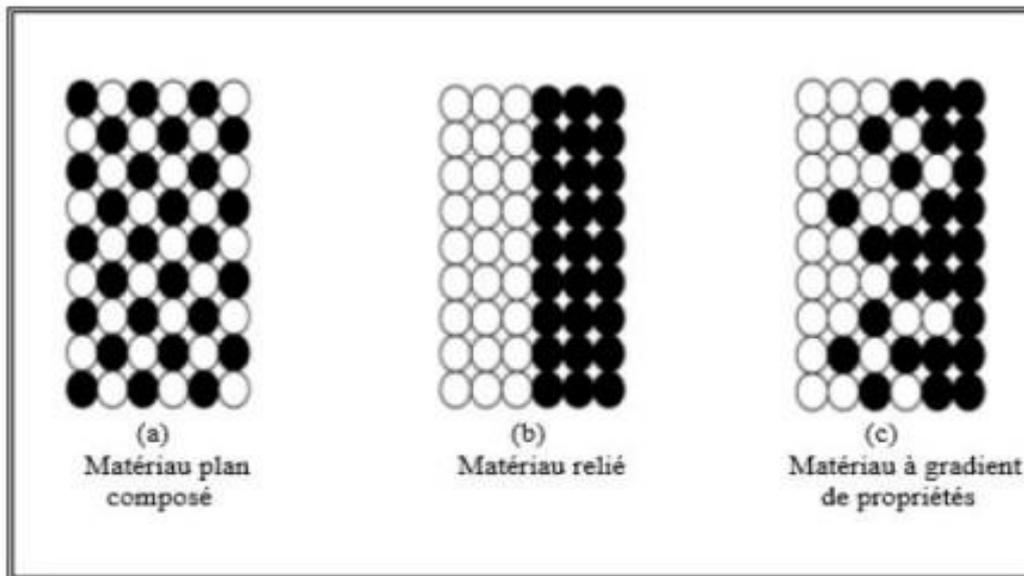
Les différents types de FGM comprennent les FGM à structure de gradient de porosité et de Taille des pores, les FGM à structure à gradient chimique (composition) et les FGM à Structure à gradient microstructural.

## **I.6 Comparaison des matériaux types FGM et les composites traditionnels**

Les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs matériaux combinés qui ont des propriétés qui ne peuvent être obtenues avec aucun des constituants. Les FGM sont des

matériaux contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. La différence avec les composites c'est que les FGM sont non-homogènes figure (I.5).

[Jones, R.M. et all.1999]



**Figure (I.5) :** Différentes types des matériaux

Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente établi un modèle simple illustrant différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels .Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composées et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistance aux hautes températures dans le côté en céramique. [Boch. P Chartier et all 1986, Yoshihisa Uchida et all 2004].

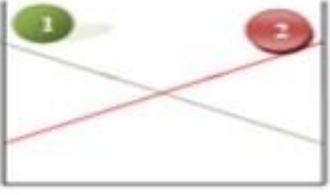
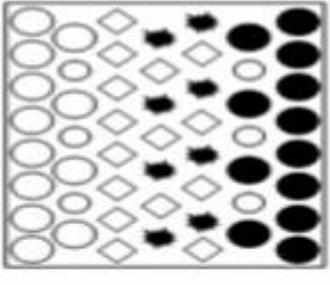
<b>Propriétés</b>	 Résistance mécanique  Conductivité thermique	
<b>Structure</b>	<b>Eléments constitutants:</b> Céramique  Métal  Microporosité  Fibre 	
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>

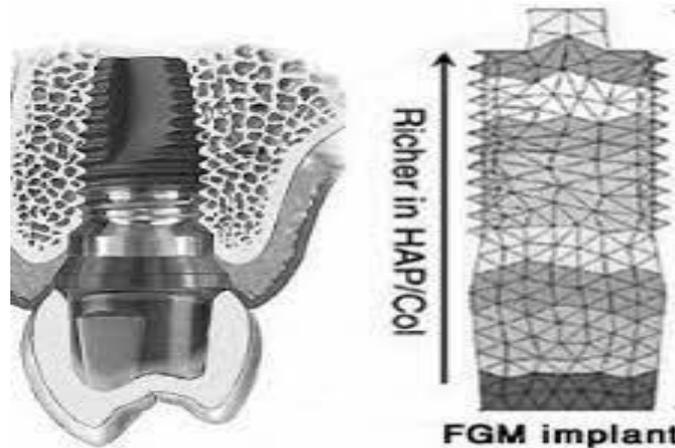
Figure (I.6) : Comparaisons des matériaux FGM avec les matériaux composites.

### I.7 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que [Mahmood et al 2017] :

#### Industrie médecine

Ces derniers sont les parties du corps humain les plus remplacées suite à l'endommagement de ces parties ou bien à cause du processus de vieillissement naturel. C'est pourquoi la majorité de matériaux FG utilisés dans l'industrie biomédicale sont des implants, tels que : Dans les implants pour remplacement squelettique permanent, la porosité graduée aide à minimiser la protection de stress. Les implants dentaires de titane poreux graduellement aident à améliorer les propriétés d'osseo-intégration de l'implant (Figure 1.5). Hydroxyapatite poreux gradué (HA) imite la structure bimodale de l'os humain, ce qui aide à promouvoir la nouvelle croissance tissulaire et leurs propriétés mécaniques.



**Figure (I.7) :** Utilisation des FGM dans les implants dentaires  
[Sadollah et al.2013]

#### **+ Défense :**

Dans la demande de défense, tels que des plaques de blindage et des gilets pare-balles, la pénétration des matériaux résistants est nécessaire. Une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient fonctionnel est la capacité à inhiber la propagation des fissures, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés pour les applications de défense.

#### **+ Aérospatial**

Etant le premier domaine d'application des matériaux FGM, ils étaient utilisés dans les composants d'engins pour fusée, la structure de botte de vaisseau spatial, les panneaux d'échange de chaleur, les réflecteurs, les panneaux solaires, le logement d'appareil photo, les roues de turbine, les revêtements de lame de turbine, les casquettes de nez, le bord d'attaque de missiles et navettes spatiales. Les matériels FGM sont aussi utilisés pour les murs structurels qui combinent des propriétés d'isolation thermiques et sonores.

#### **+ Industrie marine**

Les matériaux FG ont aussi des applications dans l'industrie marine notamment : Dans le puits de propulseur, les cylindres plongeants, les dômes de sonar, le système de tuyauterie de composé et dans la coque de pression cylindrique.

#### **+ Industrie d'énergie**

Les industries d'énergie ont constamment besoin de différents types de FGM, afin d'améliorer l'efficacité de leurs équipements. Certaines applications des matériaux FG dans l'industrie d'énergie

incluent le mur intérieur des réacteurs nucléaires, le convertisseur thermoélectrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et les équipements sous pression, les électrodes graduées pour la production de carburant solide d'oxyde, le piézoélectrique FGM pour le capteur ultrasonique, le diélectrique, la pile à combustible, les revêtements des lames de turbine ainsi que les revêtements des barrières thermiques.

### **Énergie nucléaire**

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

### **Industrie du sport**

Les matériaux FGM sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tel que les clubs de golf, des raquettes de tennis et des skis.

### **Autres industries**

#### **Produits :**

Matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

#### **Conversion d'énergie :**

générateur thermoélectrique, convertisseur thermoionique,

#### **Optiques :**

Fibres optiques, lentilles.

#### **Matières biologiques :**

implants, peau artificielle.

#### **Chimique :**

Échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.

## **I.8 Pour des utilisations structurelles (intégration du caractère réfractaire)**

Il existe deux causes principales derrière les défaillances dans les structures, il s'agit d'un changement de fonctionnalité (La sur-augmentation des charges d'exploitation) ou bien la détérioration des matériaux utilisés. Le vieillissement de ces matériaux (Acier, alliages ou autres

matériaux traditionnels), est un souci inquiétant pour les ingénieurs, ce qui confirme le besoin d'une avancée technologique dans le domaine du renforcement. Dans ce contexte, plusieurs méthodes ont été utilisées durant les années 1960, parmi lesquelles, la méthode de soudure des plaques d'acier à la structure a été largement utilisée pour le renforcement des structures endommagées, étant donné que cette méthode améliorait la rigidité, la résistance et réduit les fissures ainsi que leurs propagations (Vilnay, 1988 ; Roberts et al 1989 ; Robert, 1989 ; Liu & Zhu, 1994 ; Taljsten, 1997). Cette méthode avait des inconvénients, en effet, la tôle d'acier subissait la corrosion qui dégrade et fragilise la structure, c'est un grand problème susceptible d'annuler toute l'opération de renforcement.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la Couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [Abdizadeh H, 1997]
- Aussi, la mise en œuvre de cette technique s'est avérée difficile en raison du poids et de la taille des tôles d'acier. La technique du renforcement par composite en fibre durant les dernières décennies apparaît comme une solution de renforcement des méthodes traditionnelles. Elle consiste à coller des plaques en composite FRP (Les composites en fibres de carbone,...etc.) en utilisant les nouvelles colles époxy. Cette technique de renforcement, est une excellente alternative par rapport à l'ancienne méthode utilisant les plaques d'acier et ce, en raison de ses avantages dans le domaine du génie civil, dans le domaine aéronautique et dans l'aérospatial. (Baker, 1984) Cette technique a été commercialisée durant les années 1980 aux Etats-Unis, en Europe et au Japon. Des applications ayant pour but la prévention de la détérioration des structures lors des séismes et des catastrophes naturelles. Le séisme Hyogoken-Nanbu, qui a dévasté la ville de Kobe au Japon en 1995, a été un élément accélérateur de la recherche dans le domaine du renforcement des constructions par la nouvelle technique des composites FRP.

## **I.9 Les avantages et les inconvénients des FGM**

### **I.9.1 Les avantage**

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles s peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les

interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM [Zhu H.X et al 2000]

La réduction des contraintes thermiques :

- ✓ réduction des contraintes thermiques aux endroits critiques ;
- ✓ diminution des transitions de contrainte brusques à l'interface ;
- ✓ réduction du facteur d'intensité de contrainte (force motrice pour la propagation de fissure)
- ✓ augmentation de la force de liaison interrassiale.

### 1.9.2-Les inconvénients

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type m2est un mélange d'un métal avec la température de fusion ( $T_1$ ) et une céramique avec une température de fusion ( $T_2$ ). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ( $T_1 \ll T_2$ ). Puis, si la température de fabrication est d'environ ( $T_1$ ), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable. D'autre part, travailler autour de ( $T_2$ ) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses. [Narottam P et al 2011]

## I.10 Propriétés des FGM

Les FGM peuvent incorporer des fonctions incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques avec la ténacité élevée, la résistance élevée, l'usinabilité et la capacité de liaison des métaux sans contrainte thermique interne sévère, souvent constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal [Miyamoto Y.1999]

### I.10.1 Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

#### I.10.1.1 Propriétés d'Aluminium (Métal)

##### a) Définition

L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

### **I.10.1.1.1 Propriétés physiques :**

L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

### **I.10.1.1.2 Propriétés mécaniques**

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mise en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

Propriétés des alliages d'aluminium : L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de

la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

### I.10.1.2 Propriétés physiques et mécaniques de la céramique

#### b) Définition

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

#### I.10.1.2.1 Propriétés physiques

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

#### I.10.1.2.2 Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

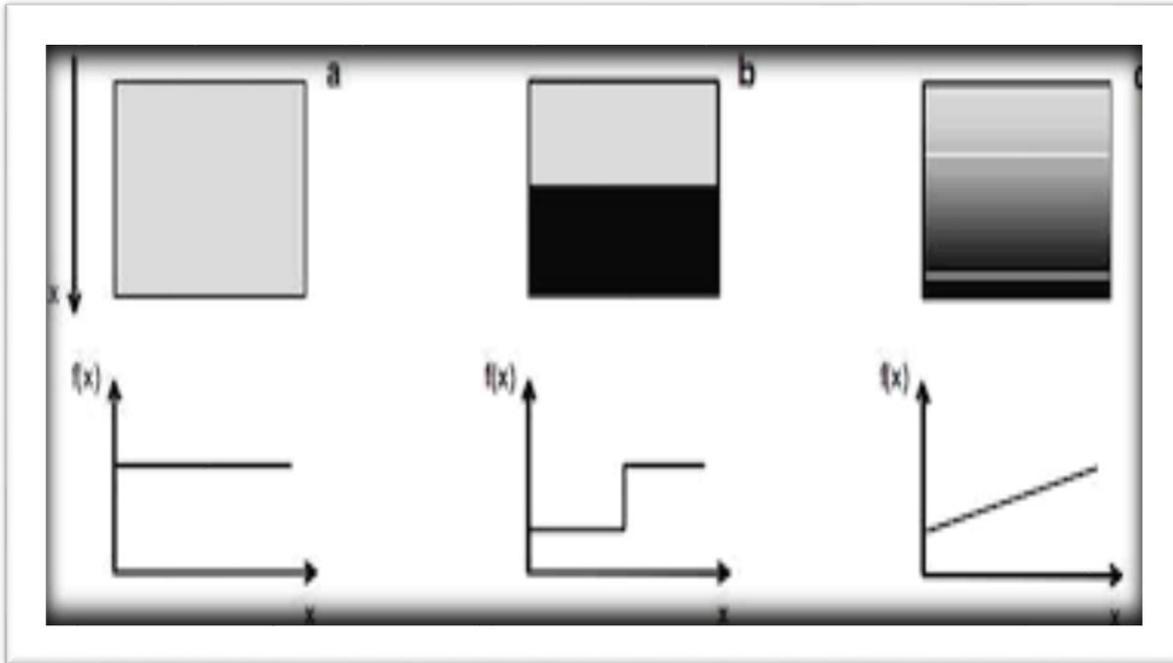
- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

**Tableau (I.1) :** Caractéristiques des différentes couches des matériaux FGM [Houari MSA2011]

Couches	Matériaux	Les propriétés Mécaniques
La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation - Faible conductivité thermique
« Couches intermédiaires » Continuité du matériau d'un point à l'autre	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface -Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité

Les propriétés de tels matériaux peuvent être décrites par la fonction  $f(x)$ . Dans les matériaux homogènes, cette fonction est constante comme dans Figure (I.8 a).

Dans le cas d'une jonction de deux fonctions matérielles différentes,  $f(x)$  a une forme de déformation Figure (I.8 b) dans les FGM, cette fonction matérielle doit être continue ou quasi continue.



**Figure (I.8)** : représentation schématique de la fonction matérielle dans les différentes structures ; (a) matériau homogène, (b) composite, (c) FGM.

### I.11 Propriétés matérielles des poutres FGM

Les matériaux FGM sont une combinaison de deux ou plusieurs matériaux dont les caractéristiques et les propriétés diffèrent, où la transition entre les deux matériaux est idéalement continue et graduelle. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges.

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La majorité des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Selon l'étude de [Jin et al 1999]. Le coefficient de Poisson peut être supposé constant étant donné que son effet sur la déformation est négligeable par rapport à celui du module de Young.

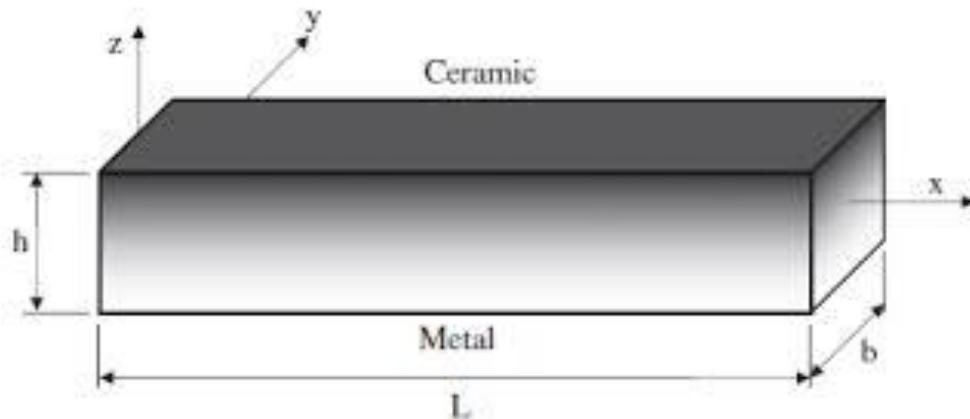


Figure (I.9) : la Géométrie d'une poutre FGM

### I.11.1 Fonction de puissance (P-FGM)

La première fonction les propriétés matérielles obéit à une fonction en loi de puissance (P-FGM) comme suit [Kolahchi et al. 2015, Bennai et al. 2015] :

$$g(z) = \left( \frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (1.1)$$

$p$  est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local  $g(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^n \quad (1.2)$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure 1.11, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour  $p > 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p < 1$ . Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives  $E$  de la couche de FGM, comme le module de Young  $E$ , et la densité et le coefficient de poisson  $\nu$  peut alors être exprimé comme suit :

$$E = \sum_{i=1} E_j g_j \quad (1.3)$$

Là où l'E<sub>j</sub> et le g<sub>j</sub> sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche j<sub>j</sub> (Figure. 1.9), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

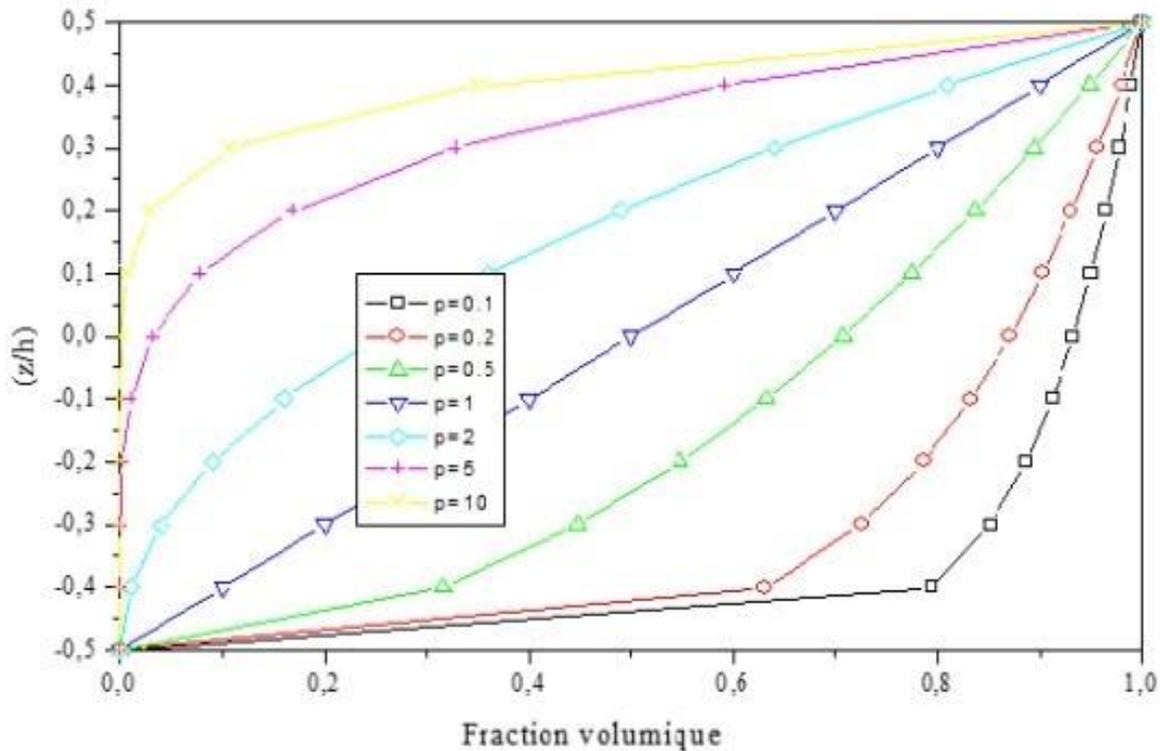


Figure (I.10) : Variation du module de Young d'un matériau P-FGM

**I.11.2 Fonction sigmoïde(S-FGM)**

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ pour: } 0 \leq z \leq h/2 \tag{1.4}$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \text{ pour: } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{1.5}$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$S(z) = g_1(z)S_1 + [1 - g_1(z)]S_2 \text{ pour: } 0 \leq z \leq h/2 \tag{1.6}$$

$$S(z) = g_2(z)S_1 + [1 - g_2(z)]S_2 \text{ pour: } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{1.7}$$

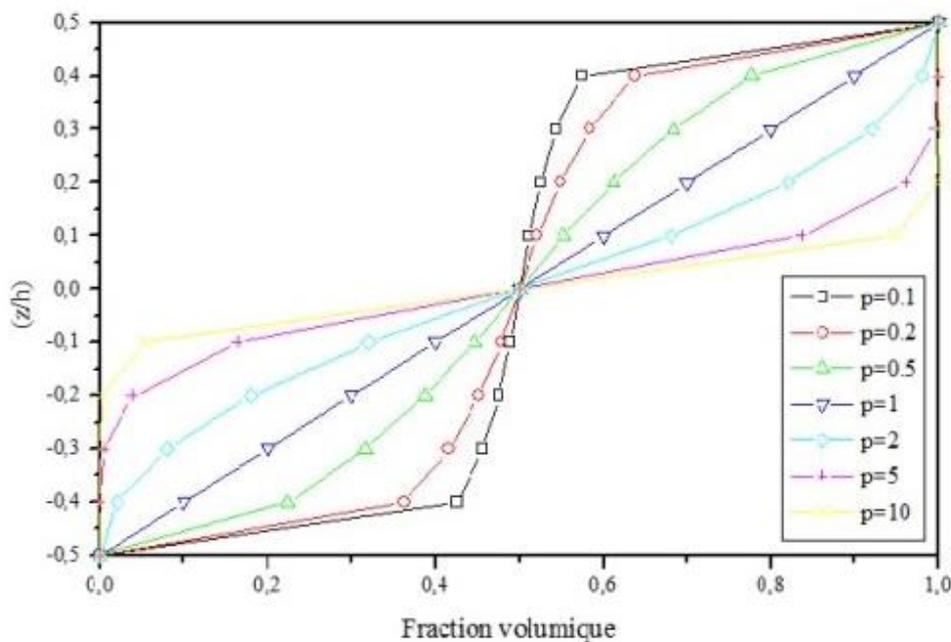


Figure (I.11) : Variation du module de Young d'un matériau S-FGM

### I.11.3 Fonction exponentielle E-FGM

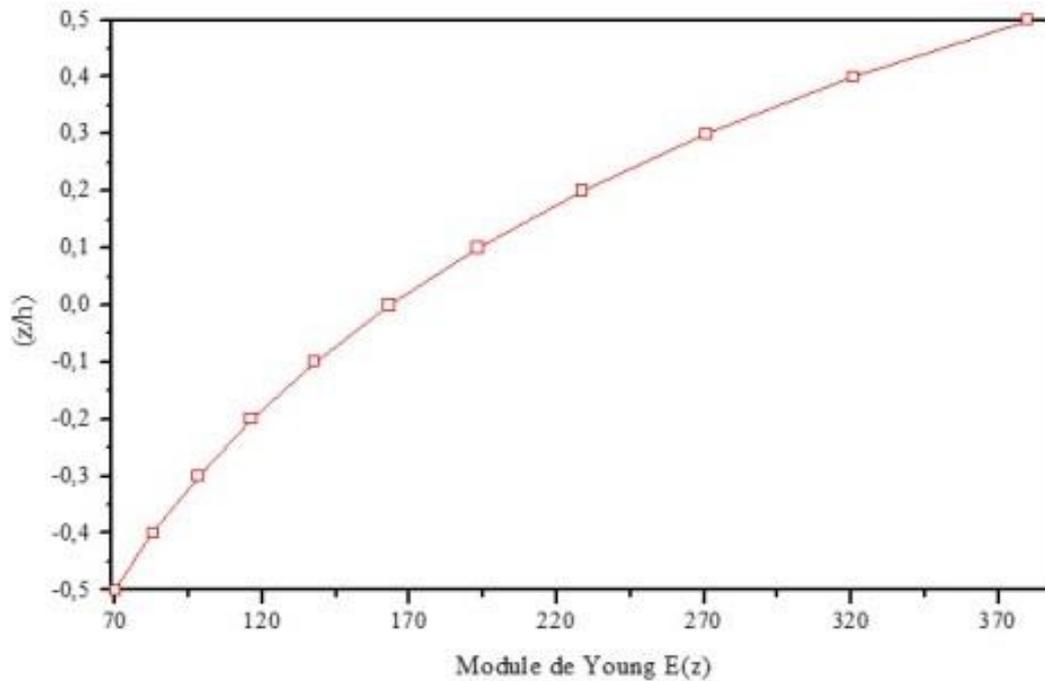
Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale 1983]

$$E(z) = Ae^{\beta(z+\frac{h}{2})} \tag{1.8}$$

Avec ;

$$A = E_2 \text{ et: } \beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2}$$

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure (1.12).



**Figure (I.12) :** Variation du module de Young d'un matériau E-FGM

## I.12 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés (FGM), leurs Propriétés, leurs domaines d'application, l'histoire de leur développement. Après nous avons cités les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM.

Enfin nous avons terminé par la présentation des différentes lois qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l'épaisseur de la poutre. Ces lois pouvaient être sigmoïdes, exponentielles et même loi de puissance.

## **Chapitre 2. Théorie des poutres.**

## II.1 Introduction

La poutre est une structure porteuse horizontale métallique, en bois ou en béton armé, destiné à supporter des charges entre et au-delà des points d'appui. Il reçoit en général des charges verticales qu'il transmet sur ses appuis [Avec la contribution de M. Philippe Massalia].

## II.2 Historique des théories des poutres

### II.2.1 L'intéresser à la théorie des poutres

La théorie des poutres est utile pour déterminer des solutions analytiques de modèles mécaniques simples. L'avantage des solutions analytiques sur les prévisions obtenues par des méthodes numériques est de permettre de visualiser l'influence de différents paramètres (de forme, de taille, de comportement du matériau, d'hétérogénéité). Ceci permet de mieux comprendre un système mécanique ou de mieux optimiser son architecture, dans le cadre d'une première approche d'un problème de conception ou de compréhension. [David Ryckelynck 2015]

### II.2.2 La Théorie des poutres

Il est une simplification de théorie de l'élasticité dans un domaine linéaire pour l'analyse du comportement mécanique de poutres. En particulier, il est une simplification de Dr Saint Venant du problème, grâce hypothèse fondamentale de la conservation des sections plates, selon lequel les sections ne sont pas contraintes de ingobbarsi hors de leur plan, et par conséquent, l'angle connu de rotation section par rapport à l'axe du faisceau, il est possible de connaître le mouvement de chaque point de la section connue des déplacements de la ligne médiane.

La théorie des poutres est à la base des méthodes de calcul de poutres et cadres, structures d'ensembles de composés poutres, et représente l'un des modèles les plus importants de la science du bâtiment.

## II.3 Le rôle de la poutre

La poutre sert à soutenir des charges au-dessus du vide et à relier les piliers, les colonnes Ou encore les murs sur lesquels elle s'appuie.

## II.4 Les types des poutres

Il existe différents types de poutres de construction en fonction du choix du matériau de construction. Les matériaux courants sont le béton armé, le bois, l'acier et les matériaux polymères renforcés de fibres. [la-construction/beams]

### II.4.1 Les poutres en béton armé

Sont fabriquées lorsque des barres d'acier sont encastrées le long d'un élément structurel afin d'augmenter la résistance à la traction de la structure. Ce sont les types de poutres les plus courants.

- Poutres de section rectangulaire
- Poutres en retombée rectangulaire de section variable (en fonction de la norme sélectionnée).
- Poutres en « L » et en « T ».
- Poutres treillis.
- Poutres précontraintes.
- Appui sur mur (poutre avec rigidité infini).
- Chainage non structurel ou limite (poutre avec rigidité nulle).

[produit/poutres-en-beton-arme]

#### II.4.2 Les poutres en bois

Les poutres sont des morceaux de bois de grandes dimensions, capables de résister à d'importantes contraintes. Elles peuvent être faites de bois massif ou de bois d'ingénierie.

- Les poutres en bois massif.
- Les poutres en bois massif abouté (BMA).
- Les poutres en contreplaqué laminé LVL (Laminated veneer lumber).
- Les poutres en bois lamellé-collé (BLC).
- Les poutres en bois massif reconstitué (BMR).

#### II.4.3 Les poutres en acier

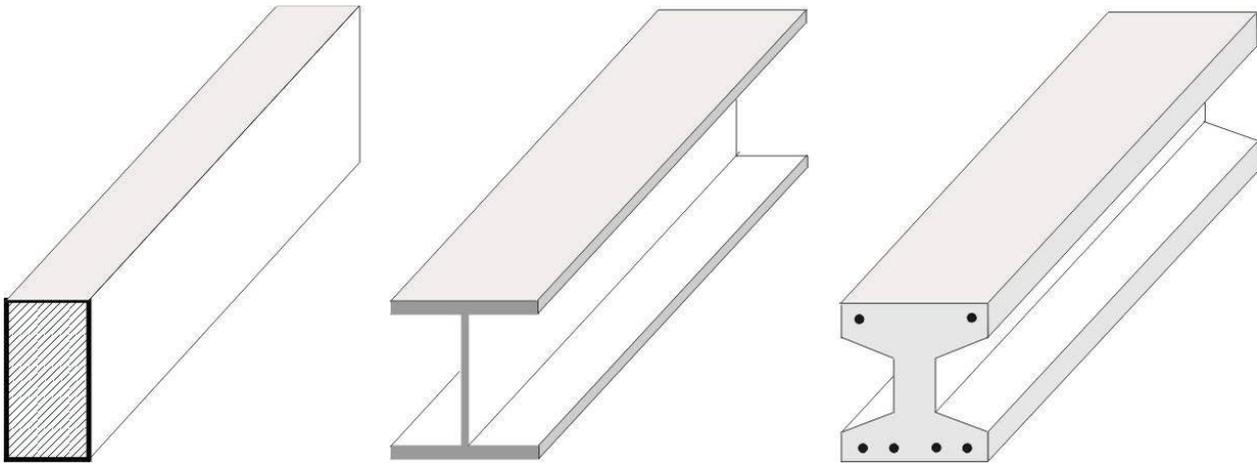
Les poutres et poutrelles en acier sont un recours précieux aussi bien en construction neuve qu'en extension et en rénovation. La poutre en acier offre une excellente résistance tout en étant de mise en œuvre rapide et facile.

Les poutres en acier les plus couramment utilisées sont les IPE, IPN, HE, UAP, UPN, SFB, IFB

- **IPN ou IPE** : IPN pour poutrelle en I à profil normal (IPN) ou poutrelle en I à profil européen (IPE). La différence vient du raccordement entre les semelles (ailes) et l'âme ; alors qu'une IPE dispose d'une épaisseur constante des semelles, dans l'IPN, l'épaisseur des semelles augmente vers la liaison avec l'âme.
- **UAP et UPN** : c'est une autre distinction que pour les poutres à profil en I puisque dans les poutres à profil en U, les ailes sont à bords parallèles et d'épaisseur constante mais réduite pour les UPE. La hauteur maximale de l'aile (exprimée en mm) différencie les UAP (de 80 mm jusqu'à 300 mm) des UPE (de 80 mm à 400 mm).
- **IFB et SFB** : il s'agit de poutres et poutrelles à semelles asymétriques dont l'une est particulièrement large dans le but de réaliser des planchers-dalles. Les poutres IFB (Integrated Floor Beam) sont confectionnées ainsi au laminage alors que sur les poutres SFB (Slim Floor Beam) consistent en une tôle soudée sous une semelle qui en élargit la cote.

- **HEA, HEB, HEM** : les poutres et poutrelles à profil en H (ailes plus larges et âme moins haute que sur les poutres en I) répondent également à des appellations différentes en fonction de la hauteur de l'âme et de la largeur des semelles ou ailes

### II.5 Modèle de la poutre :



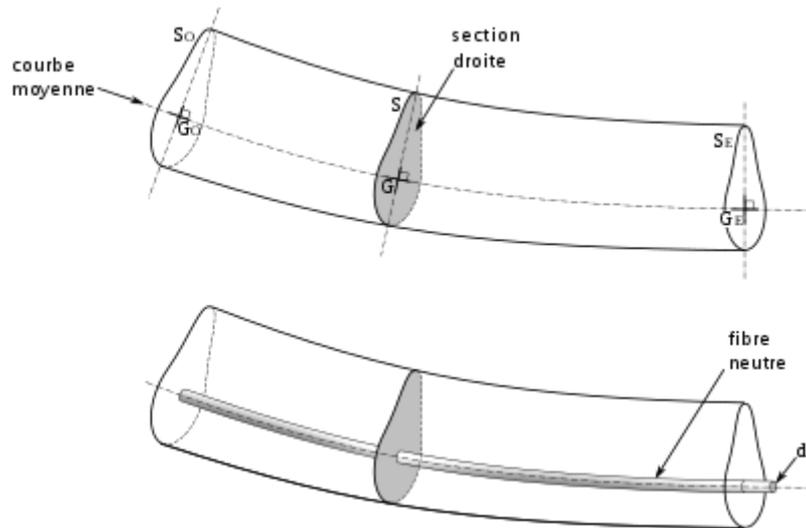
**Figure(II.1)** : Quelques poutres classiques. On appelle « poutre » un solide genré par des surfaces finies, appelées « sections droites »

Telles que :

- l'ensemble des centres de gravité des sections droites est une courbe continue et différentiable, appelée « courbe moyenne » ; son rayon de courbure est grand devant sa longueur.
- les sections droites sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles « varient de manière continue et lente » ;
- la racine carrée de la surface des sections droites est petite devant la longueur de la courbe moyenne.
- le matériau est homogène et isotrope.

Si le rayon de courbure est faible ou que la section varie brutalement, il faudra considérer les concentrations de contrainte.

Dans les cas les plus simples, notamment celui des poutres au sens « élément de structure », la courbe moyenne est droite et les sections droites sont identiques. Mais on peut modéliser d'autres types de pièces. Par exemple, un arbre de transmission, un axe, un levier, un tuyau, un réservoir, ou même la coque d'un navire peuvent être modélisés par une poutre ; un ressort hélicoïdal (ressort à boudin) peut être considéré comme une poutre dont la courbe moyenne est hélicoïdale, et dont les sections droites sont des disques de même rayon.



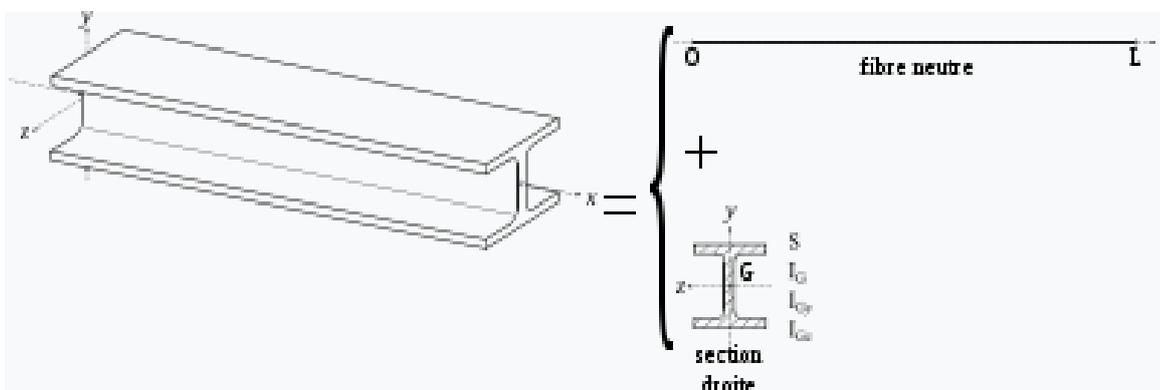
**Figure (II.2) :** Poutres de courbe moyenne  $G_0G_E$ , de section droite  $S$  Et fibre neutre de section  $ds$ .

On appelle « fibre » un volume généré par une petite portion  $d^2S$  de la section droite suivant une courbe parallèle à la courbe moyenne. On appelle « fibre neutre » la fibre générée par la courbe moyenne elle-même.

Pour simplifier, sauf indication contraire, nous dessinerons des poutres dont la courbe moyenne est une droite avant déformation.

**L'étape de modélisation consiste à :**

- considérer la fibre neutre seule, caractérisée par sa longueur  $L$  (et si la poutre n'est pas droite, par une fonction  $y(x)$ ) ;
- considérer les sections droites, caractérisées par leur aire  $S$  (pour la traction-compression) et leurs moments quadratiques  $I_G$  (pour la torsion),  $I_{Gy}$  et  $I_{Gz}$  (pour la flexion).



**Figure (II. 3) :** La modélisation consiste à définir des paramètres de Forme ( $L, I_G, I_{Gy}, I_{Gz}$ ) à partir de la forme de la pièce réelle.

## II.6 Le comportement des poutres FGM :

Plusieurs travaux sur le comportement des poutres non-homogènes de type FGM ont été effectués, nous citons : [Sankar 2001] a développé une solution d'élasticité pour la flexion des poutres FGM soumises à des charges transversales, en se basant sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli.

Le module de Young de la poutre a été supposé varier à travers l'épaisseur selon la loi de distribution exponentielle tandis que le coefficient de Poisson a été supposé constant. Une simple théorie des poutres de type Euler-Bernoulli a aussi été développée sur la base de la supposition que les sections planes restent planes et normales à l'axe de la poutre. Les contraintes et les déplacements ont été trouvés dépendants d'un paramètre sans dimensions pour une variation du module de Young selon la direction fonctionnellement graduée.

Les résultats ont montré que la théorie des poutres est valide pour les poutres longues et minces avec des chargements transverses à variation lente. Les concentrations des contraintes prennent place dans les poutres courtes ou épaisses. Les concentrations de contraintes sont moins que celles dans les poutres homogènes lorsque le côté doux des poutres fonctionnellement graduées est soumis à une charge. Le contraire est vrai lorsque le côté plus rigide est soumis à une charge.

[Zhong et al 2006] ont étudié le problème d'une poutre fonctionnellement graduée cantilever soumise à des charges différentes (Une force normale concentrée et une force concentrée à l'extrémité libre, une force concentrée de cisaillement à l'extrémité libre, une pression uniforme à la face supérieure). Les auteurs ont présenté une solution bidimensionnelle générale pour une poutre cantilever fonctionnellement graduée, en supposant que le module d'élasticité du matériel a les mêmes variations le long de la direction d'épaisseur de la poutre.[ Aydogdu et al 2007] ont effectué une analyse des vibrations libres des poutres fonctionnellement graduées simplement appuyées. Les équations régissant ont été trouvées en appliquant le principe de Hamilton, tandis que les fréquences ont été obtenus en utilisant la méthode de solution de type Navier.

Les auteurs ont utilisé dans l'analyse, différentes théories de la déformation de cisaillement d'ordre élevé et des théories classiques des poutres. [Merajah et al], ont présenté une méthode pour la détermination des contraintes normales et de cisaillement dans un joint adhésif entre une plaque de renfort et une poutre fonctionnellement graduée (FGM) soumise à un chargement mécanique. La poutre FGM était supposée être isotrope avec un coefficient de Poisson constant et un module d'élasticité à variation exponentielle à travers l'épaisseur de la poutre. [Meradjah, M. et al, 2010]

## II.7 Définition d'élasticité

L'élasticité est la propriété physique d'un corps de reprendre sa forme initiale après suppression de la sollicitation. Le corps est parfaitement élastique s'il retrouve complètement sa forme originale après suppression de la charge.

Il est partiellement élastique si la déformation produite par les forces externes ne disparaît pas complètement lorsque celles-ci sont annulées.

L'expérience montre que, si l'on ne dépasse pas une limite de déformation et donc une contrainte donnée (appelée limite élastique), les matériaux tels que l'acier et les alliages métalliques en général peuvent être considérés comme parfaitement élastiques.

### II.7.1 L'élasticité bidimensionnelle

Système d'équations en deux dimensions On considère que le solide dans le plan  $(0, x_1, x_2)$ , dans ce cas, tous les inconnus qui dépendent de  $(x_3)$  sont négligeables.

## II.8 Problème d'élasticité

### II.8.1 La méthode des contraintes

La théorie des contraintes (TOC) est une méthodologie d'amélioration des processus qui se concentre sur l'identification et la correction des contraintes ou des causes profondes des goulets d'étranglement. En s'attaquant à ces contraintes.

L'objectif de la théorie des contraintes est d'aider les entreprises à augmenter leur rendement et de guider les organisations vers la réalisation de leurs objectifs en tenant compte des contraintes par l'amélioration de leurs processus et l'optimisation de l'utilisation de leurs ressources.

### II.8.2 La méthode des champs de déplacements

- a) **La corrélation d'images numériques** : est une méthode optique 2D ou 3D qui permet de mesurer les déplacements entre deux images.

Parmi les procédés de mesure basés sur l'optique, la corrélation d'images s'impose aujourd'hui comme un outil de mesure de champ de déplacement utilisable en milieux académiques et industriels en raison de sa grande flexibilité, de sa facilité d'emploi et de la grande richesse des informations fournies lors d'un essai mécanique. Historiquement, la corrélation d'images a d'abord été utilisée avec une seule caméra ne permettant d'étudier que des surfaces planes [M.A. Sutton et al 1983], sujettes à des champs de déplacements 2D.

D'autre part, les procédés optiques de numérisation 3D se sont fortement développés durant cette dernière décennie, faisant apparaître la technique d'ingénierie inverse permettant de réaliser rapidement la définition numérique d'un objet existant (par exemple à partir d'un modèle physique ou d'un prototype). Ces techniques sont également reconnues dans l'industrie comme moyen de contrôle dimensionnel rapide, même si un travail d'amélioration et de standardisation reste à faire [J.P. Chambard 2007 ; R. Kokku et al 2005].

#### II.8.2.1 Démentions [3D]

La technique de stéréovision permet de mesurer l'évolution de la forme 3D d'un objet en enregistrant plusieurs paires stéréoscopiques relatives à différents états de déformation de cet objet. Néanmoins, le but généralement poursuivi en mécanique expérimentale est la mesure des

déformations de surface, qui peut être obtenue en suivant au cours du temps le déplacement de certains points répartis sur la surface de l'objet (on parlera de champ de déplacements).

### II.8.2.2 Démentions [2D]

Les méthodes de mesure de champs 2D possèdent l'avantage d'être sans contact et non destructives, les mesures se font donc sans perturber la surface. Grâce aux techniques de mesure de champs, plusieurs aspects peuvent être mesurés : température, déplacements, déformations, etc. Deux grandes familles peuvent être distinguées : les techniques issues des lois de l'optique et les techniques d'analyse d'images. {Permette des mesures 2D des hétérogénéités locales à une échelle beaucoup plus petite (inférieur au mm<sup>2</sup>).

## II.9 Théories des poutres

La zone métallique est utilisée pour supporter les charges mécaniques, tandis que la partie céramique sert de protection thermique. En raison de la croissance des applications FGM dans les structures d'ingénierie, différentes théories de poutre ont été développées pour prédire la réponse mécanique des poutres fonctionnellement graduées.

Les théories les plus classiques et les plus anciennes pour des milieux poutres sont :

- La théorie d'Euler-Bernoulli.
- La théorie de Timoshenko.
- La théorie d'Ordre Elevé.

### II.9.1 Modèle d'Euler Bernoulli (class cal Beam Theory - CBT)

La théorie des poutres classique (CBT Classical Beam Theory), connue sous le nom de théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (EBBT Euler Bernoulli BeamTheory) (Euler, 1744). C'est la plus simple des théories et elle s'applique uniquement aux poutres minces (élancées). Pour les poutres modérément épaisses, la CBT sous-estime la flèche et la contrainte de cisaillement, en ignorant l'effet de déformation de cisaillement transversale [Yang 2008, Simsek 2009, Alshorbagy 2011]. Pour cette raison elle ne s'applique pas aux poutres épaisses.

Pour le cas de la théorie classique des poutres CBT (théorie des poutres d'Euler-Bernoulli EBBT) :  $f(z) = 0$  (cisaillement négligé).

Le champ de déplacement de n'importe point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0 - zu_0, x(x) \\ w(x, z) = w_0 \end{cases} \quad (1)$$

Avec :

$(x, z)$ : C'est le déplacement suivant  $X$  et  $(x, z)$  est le déplacement dans la direction de  $Z$  ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe  $Y$ , provoquée par la flexion est tel que :

$$w_0(x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2)$$

$u_0(x)$  et  $w_0(x)$  sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes  $X$  et  $Z$

### II.9.2 Théorie des poutres de Timochenko Beam Theory (TBT)

La deuxième théorie des poutres est la théorie des poutres à déformation de cisaillement transversal du premier ordre (FSDBT First Shear Déformation Beam Theory). Elle est connue sous l'appellation de théorie des poutres de Timochenko Beam Theory (TBT Timochenko Beam Theory) [Timochenko, 1921, 1922]. Elle a été proposée pour surmonter les limitations de la CBT en tenant en compte de l'effet de déformation de cisaillement transversal. Puisque la FSDBT viole les conditions de contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour justifier la divergence entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte supposé constant [Chakraborty et al. 2003, Signa, 2009, Wei, 2012].

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit comme suit :

$$(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - w_0(x) + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT). Le champ de déplacements de Timoshenko s'écrit alors.

Avec :

$\gamma_{xz}^0$ , c'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

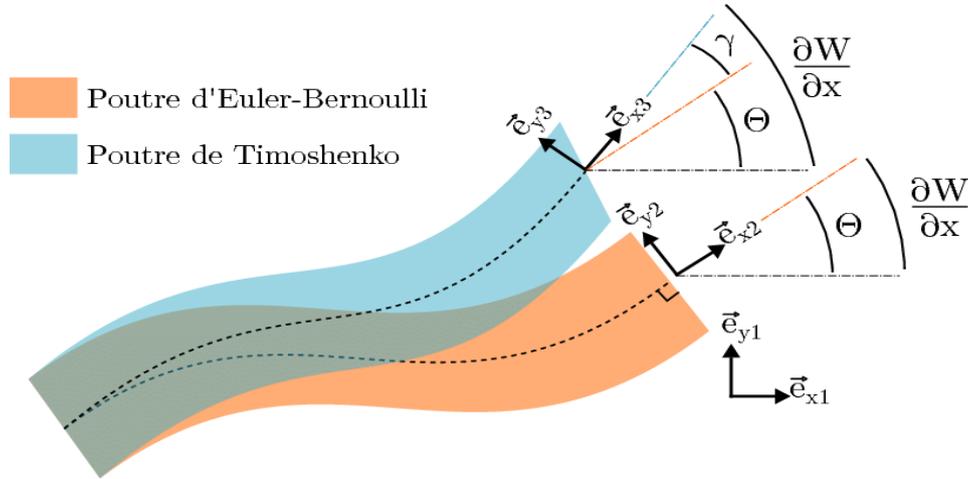
Tel que :

$$\gamma_{xz}^0 = w_x^0(x) - \varphi^0(x) \quad (4)$$

$\varphi^0(x)$ : Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre. La contrainte de cisaillement est :

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz}^0 \quad (5)$$

$G_{xz}$  : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.



**Figure (II.4) :** Cinématique de la poutre de Timoshenko et cinématique de la poutre d’Euler Bernoulli.

**II.9.3 Modèle d’ordre élevé (High shear deformation beam theory HSDBT)**

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon

L’épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu’elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de « gauchissement ».

Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité.

La fonction représente le gauchissement et sa dérivée représente le cisaillement.

Le champ de déplacement devient :

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - zw_{0,x}(x) + \varphi(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w^x(x) + \varphi'(z)\gamma_{xz}^0 + w_{0,x}(x) \tag{7}$$

$$\gamma_{xz(x)} = \varphi'(z)\gamma_{xz}^0(x) \tag{8}$$

Cette condition qui nous permet d’avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l’épaisseur de la poutre d’une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition.

## II.10 Les modèles analytiques de l'interaction sol-structure

Lorsque nous parlons de modèles analytiques d'interaction sol-structure (ISS), nous devons distinguer deux parties, le sol et la structure. Dans diverses études sur l'ISS, la structure est toujours modélisée par un ou plusieurs faisceaux (Euler-Bernoulli, Timoshenko et HSDT), tandis que le sol est modélisé par différents modèles, dont le plus simple est le modèle de Winkler.

### II.10.1 Modèle de Winkler

La représentation la plus simple du modèle de comportement du sol proposé par [Winkler 1867] consiste à discrétiser le sol support a en utilisant plusieurs des ressorts linéaires indépendants. La principale difficulté est d'évaluer de manière réaliste la rigidité des ressorts. En fait, nous trouvons de nombreuses façons dans la littérature de déterminer leurs valeurs numériques. Sous un chargement uniformément réparti, le déplacement est supposé constant sous la partie chargée et nulle hors cette zone (Figure II.5).

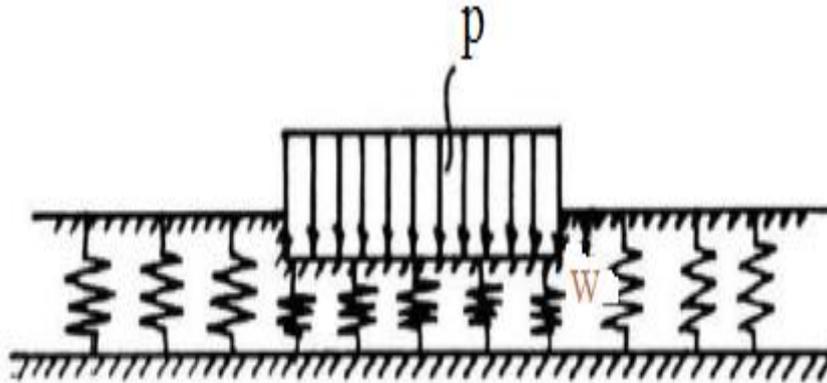


Figure (II.5) : Modèle de Winkler.

La force de réaction de la fondation  $R$  et la flèche de la surface de la fondation sont parallèles à l'axe  $z$  est lié par la relation suivante :

$$R = kw \quad (9)$$

$$f_e = K_w w \quad (9a)$$

$p$  : la pression appliquée en un point,

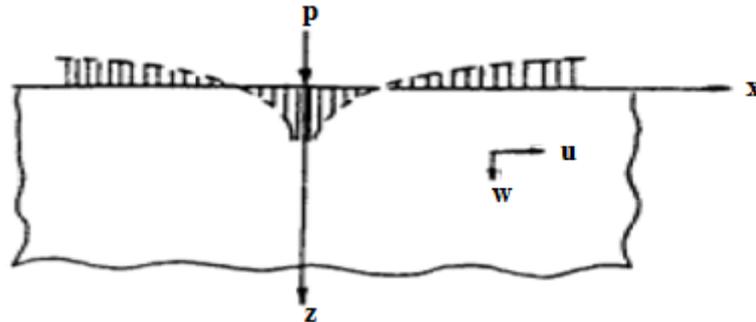
$w$  : le déplacement vertical en ce point.

$K_w$  : le module de la fondation, Constante du ressort.

### II.10.2 Modèle de continuum élastique

La modélisation du sol comme milieu semi-infini, élastique et continu, caractérisé par deux paramètres : le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ , permet de prendre en compte la continuité des tassements. Les premiers travaux dans ce domaine sont les travaux de [Boussinesq 1885] qui a étudié le problème d'un milieu élastique linéaire isotrope homogène semi-infini soumis à une charge verticale concentrée  $P$  (Figure. II.6). En général, l'application de la théorie du

continuum élastique pour résoudre le problème d'interaction sol-fondation conduit à des problèmes mathématiques complexes. Des solutions à ces problèmes ont été proposées dans les travaux [d'Harr et al 1966], [Popov et al (1972) ].



**Figure(II.6) :** Tassement du sol causé par la charge concentrée du modèle de continuum élastique

Le défaut inhérent du modèle de Winkler à décrire le comportement continu d'un sol réel et la complexité mathématique du modèle continu élastique ont conduit à l'introduction d'hypothèses simplificatrices pour le développement d'autres modèles.

**II.10.3 Modèle de Filonenko-Borodich**

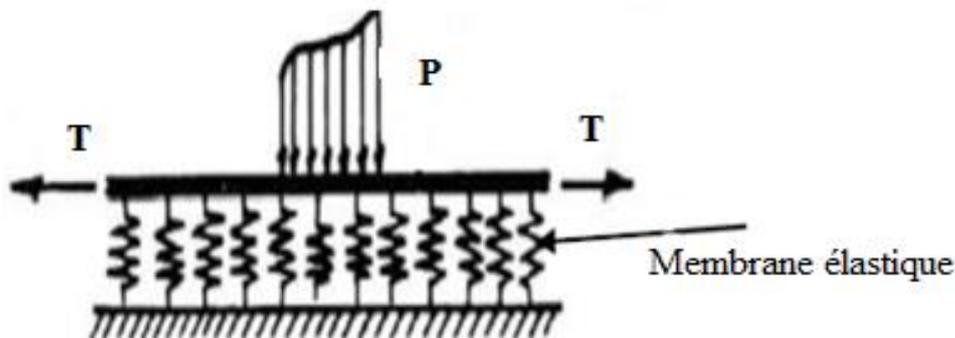
Le modèle proposé par Filonenko-Borodich[Filonenko-Borodich et al 1940] assure la continuité entre les ressorts du modèle de Winkler en les reliant à une fine membrane élastique sous contrainte constante T (Figure II.7). Le tassement  $W$  à la surface du sol sous la pression  $P$  qu'elle reçoit est de :

$$q(x, y) = k_s w(x, y) - T \nabla^2(x, y) \tag{10}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{11}$$

Et  $k_s$  est le coefficient de réaction du sol.

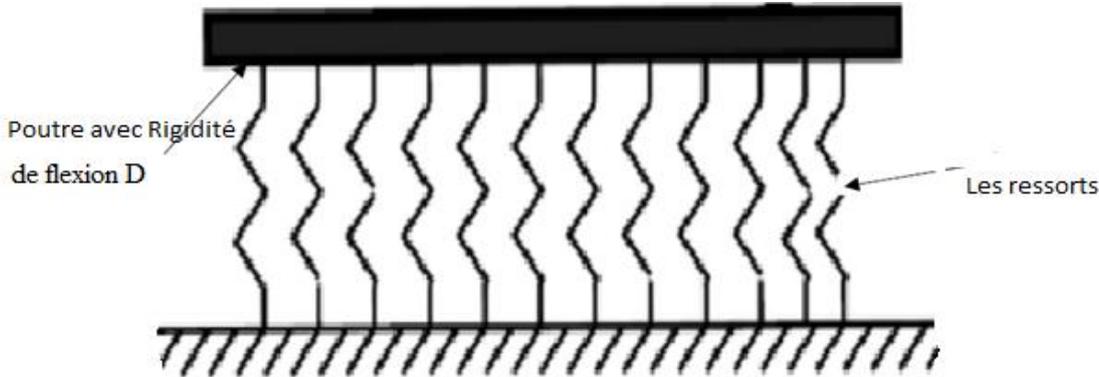
Les deux constantes élastiques du modèle sont le coefficient de réaction  $k_s$  et la tension T



**Figure(II.7)** Modèle du Filonenko-Borodich[ Filonenko-Borodich et al 1940].

**II.10.4 Modèle Hetenyi**

Dans le modèle proposé par Hetenyi [Hetenyi, M 1946], l'interaction entre les ressorts indépendants du modèle de Winkler est complétée par la poutre élastique dans le cas bidimensionnel ou la plaque élastique dans le cas tridimensionnel (Figure 24). Les deux constants élastiques du modèle sont le coefficient de réaction  $k_s$  et la rigidité en flexion de la poutre  $D$ .



**Figure (II.8)** Fondation de Hetenyi [Winkler, 1867 ; Hetényi, M 1946].

L'expression reliant le tassement  $w$  à la pression  $q$  est :

$$q(x, y) = k_s w(x, y) - D \nabla^4 w(x, y) \quad (12)$$

$$D = \frac{E_p h_p^3}{12(1 - \nu_p^2)} \quad (13)$$

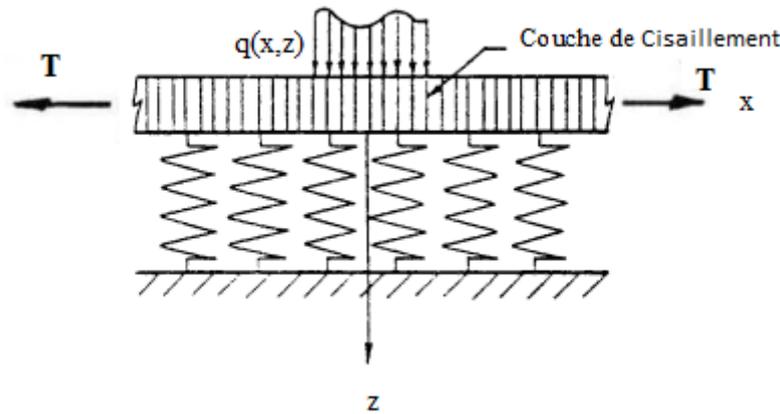
$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{x^4} + \frac{\partial^4}{y^4} \quad (14)$$

En supposant que la couche de cisaillement est isotrope dans le plan  $(x, y)$ , et le module de cisaillement  $e G_x = G_y = G_p$ , on peut obtenir :

$$q(x, y) = k_s w(x, y) - \nabla^2 w(x, y) \quad (15)$$

### II.10.5 Modèle de Pasternak

Contrairement au modèle de Winkler basé sur une représentation du sol par des ressorts identiques indépendants et linéaires, le modèle de Pasternak [Pasternak, P et al 1954] propose une modélisation à deux paramètres. Le modèle est représenté par un système de ressort relié à une couche d'éléments verticaux pour transmettre les forces de cisaillement proportionnelles à des éléments verticaux, ce qui va pallier à l'inconvénient du modèle Winkler où les charges sont limitées aux zones de chargement. Pour représenter la forme parabolique des déplacements les ressorts sont reliés à leurs extrémités à une poutre ou une plaque constituée d'éléments horizontaux incompressibles, qui se déforment qu'en cisaillement transversal comme montré dans la figure (II.9)



**Figure(II.9).** Modèle de Pasternak

Kerr (1964) [ Kerr, A.D 1964] a expliqué la dérivation de la relation entre la charge et la flèche selon l'hypothèse de Pasternak. Supposons l'équilibre vertical des éléments de la "couche de cisaillement" délimité par les surfaces (x, x + dx), (y, y + dy), comme le montre la figure (II.9). En supposant que ce matériau de fondation est homogène et isotrope dans les plans x et y,  $G_x = G_y = G$ .

$$\begin{cases} \tau_{xz} = G_x \gamma_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x} \\ \tau_{yz} = G_y \gamma_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (16)$$

L'unité de force de cisaillement par unité de longueur est donnée par.

$$\begin{cases} N_x = \int_0^1 \tau_{xz} dz = G \frac{\partial w}{\partial x} \\ N_y = \int_0^1 \tau_{yz} dz = G \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (17)$$

L'équation d'équilibre est donnée par la formule suivante :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p - q_s = 0 \quad (18)$$

En substituant l'équation (17) dans l'équation (18) et en considérant que  $q_s = kw$ , on Obtient :

$$f_e = kw - G \nabla^2 w \quad (19.a)$$

$$f_e = K_w w - K_p \nabla^2 w \quad (19.b)$$

$K_w$  : Constante du ressort couche de ressort.

$K_p$  : Constante de la couche de cisaillement.

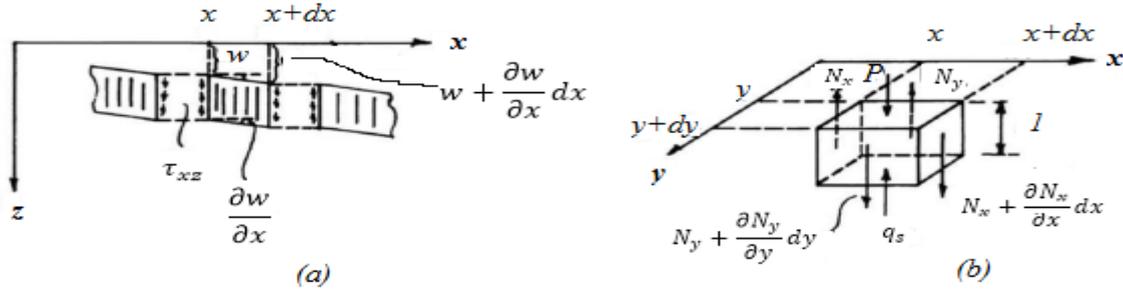


Figure (II.10) : Équilibre de la couche de cisaillement.

II.10.6 Modèle de Kerr

Le modèle de comportement du sol proposé par Kerr [ Kerr, A.D.1964] est un modèle élastique à trois paramètres représenté par une couche de cisaillement introduite dans la fondation Winkler et il a supposé que les couches supérieures et inférieures modélisées par des ressorts distribués (Figure II.11), sont supposées être différentes selon cette formulation (Kerr, 1964,1965,1967). Pour la dérivation de la relation entre la déflexion et la réaction de la fondation, il a considéré que la déflexion de la structure w est composée de deux paramètres.

$$w(x, z) = w_1(x, z) + w_2(x, z) \tag{20}$$

w<sub>1</sub> est la déflexion provoquée par la contraction ou l'étirement de la couche supérieure du ressort.

w<sub>2</sub> Est la déflexion due au reste de la fondation.

$$p(x, y) = k_u + w_1 \tag{21}$$

Et

$$p(x, y) = k_1 w_1 - k_p \nabla^2 w_2 \tag{22}$$

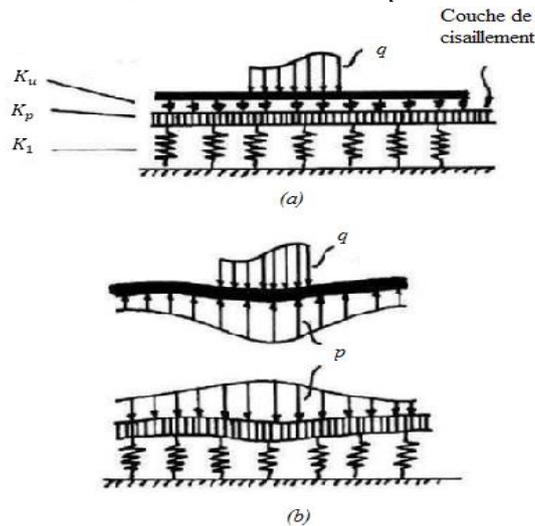


Figure (II.11) Modèle de Kerr[ Kerr, A.D 1964]

Où Ku : Constante de ressort de la couche de ressort supérieure.

K<sub>1</sub> : Constante du ressort couche de ressort inférieure.

K<sub>p</sub> : Constante de la couche de cisaillement.

Les paramètres  $K_u$ ,  $K_1$  et  $K_p$  sont déterminés par les caractéristiques de sol de fondation.

En remplaçant le rapport  $\left(\frac{k_1}{k_u} - \frac{k_p}{k_u} \nabla^2\right)$  dans l'équation (21), puis on additionnant le résultat avec l'équation (22) et en considérant l'équation (22) ; on trouve la relation entre réaction et déflexion de la fondation comme suit :

$$\left(1 + \frac{k_1}{k_u} - \frac{k_p}{k_u} \nabla^2\right) p - \frac{k_p}{k_u} \nabla^2 p = k_1 w - k_p \nabla^2 w \quad (23)$$

Cette équation différentielle a été résolue par Kerr (1965, 1967) et Kneifati. [ Kneifati, M.C 1985].

Dans l'étude de la structure FGM une formule simple est utilisée pour la force de réaction de la fondation élastique, et les trois paramètres sont les suivants :

$$f_e = \left(\frac{k_1 k_u}{k_1 + k_u}\right) w - \left(\frac{k_1 k_u}{k_1 + k_u}\right) \nabla^2 w \quad (24)$$

### Conclusion :

Dans cette partie de la recherche ; nous avons présenté les différents types des théories des poutres telles que la théorie de Bernoulli (CBT), Timochenko (FSDBT) et la théorie d'ordre élevé (HSDBT) et les théories d'interaction sol-structure analytiques, tel le modèle de Winkler, continuum élastique, Filonenko-Borodich, Hetenyi, Pasternak et Kerr

On a aussi présenté les différents modèles des poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

**Chapitre 3.**  
**Flexion et Vibration des poutres**  
**P.FGM sur fondation élastique.**

### III.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons faire une modélisation analytique du comportement statique et dynamique des poutres en FGM. En utilisant les model d'ordre élevée et d'autre modelés trouvés dans littératures.

À l'aide de principe d'Hamilton et la solution de Navier on a pu arriver aux équations d'équilibre de la poutre en FGM.

### III.2 Formulation théorique

Les propriétés du FGM varient de façon continue en fonction de la fraction volumique des matériaux suivant la direction de l'épaisseur  $h$  d'une poutre de longueur  $L$ .

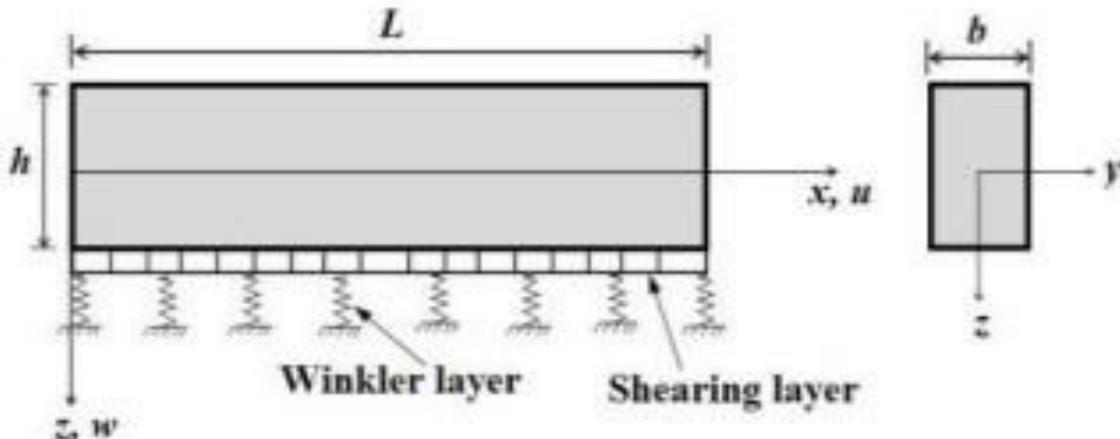


Figure (III.1) :Poutre FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres.

### III.3. Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :

- Les déplacements sont faibles par rapport à la hauteur de la poutre et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes de flexion  $w_b$  et de cisaillement  $w_s$ .

Ces composantes sont des fonctions de coordonnées  $x, t$  uniquement :

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (1)$$

- La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan  $\sigma_x$ .
- Le déplacement axial  $u$  dans la direction  $x$  comprend les composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad (2)$$

- La composante de flexion  $u_b$  est supposée similaire aux déplacements donnés par la théorie classique des poutres.

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (3)$$

La composante de cisaillement us donne lieu, conjointement avec  $w_s$ , à la variation hyperbolique de la contrainte de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et donc à la contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  à travers l'épaisseur de la poutre de telle sorte que la contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  est nulle sur les faces supérieure et inférieure de la poutre faisceau. Par conséquent, l'expression pour nous peut être donnée comme

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (4)$$

Ou

$$f(z) = z \left[ 1 + \frac{3\pi}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left( \frac{z}{h} \right) \quad (5)$$

### III.4 Cinématique et équations constitutives

Sur la base des hypothèses faites dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu à l'aide des équations. (1) - (5) comme :

$$U(x, z, t) = u_0(x, t) - z \left( \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial x} \right) - f(z) \left( \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \right) \quad (6a)$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (6b)$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'Eq. (6) sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \quad (7a)$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s \quad (7b)$$

Ou

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (8a)$$

$$g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (8b)$$

En supposant que le matériau de la poutre FGM obéit Loi de Hooke, les contraintes dans la poutre deviennent :

$$\sigma_x = Q_{11}(z)\varepsilon_x \text{ et } \tau_{xz} = Q_{55}(z)\gamma_{xz} \quad (9)$$

OU

$$Q_{11}(z) = E(z) \text{ et } Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (10)$$

### III.5. Équations constitutives

Dans ce travail, une poutre rectangulaire d'épaisseur uniforme  $h$ , de longueur  $L$  et de section rectangulaire  $b \times h$ , constituée de FGM et supportée par une fondation élastique est considérée. Comme illustré à la Figure 1

Les propriétés mécaniques des FGM telles que Young le module  $E$  et la densité de masse  $\rho$  peuvent être exprimés comme :

$$\begin{cases} E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{z}{h} \right) \right]^p \\ \rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{z}{h} \right) \right]^p \end{cases} \quad (11)$$

Où les indices  $m$  et  $c$  représentent respectivement les constituants métalliques et céramiques ; et  $p$  est l'exposant de la fraction volumique. La valeur de  $p$  égale à zéro représente un faisceau entièrement céramique, tandis que  $p$  infini indiquent un faisceau entièrement métallique. La variation du coefficient de Poisson  $\nu$  est généralement faible et elle est supposée être une constante par commodité.

### III.6. Équations de mouvement

Afin d'obtenir les équations du mouvement, la méthode énergétique est adoptée et l'énergie totale de la structure est requise. Cela inclura l'énergie de déformation du faisceau UP, UB, l'énergie de déformation de la fondation  $UF$ , l'énergie potentielle de la charge  $V$  et l'énergie cinétique du système de masse  $T$ .

L'énergie de déformation de la poutre peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx \\ &= \int_0^L (N_x \delta \varepsilon_x^0 - M_x^b \delta k_x^b - M_x^s \delta k_x^s + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^s) dx \end{aligned} \quad (12)$$

Où  $N_x$ ,  $M_x^b$ ,  $M_x^s$  et défini  $Q_{xz}$  sont les résultantes de contraintes comme :

$$(N_x, M_x^b, M_x^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f(z)) \sigma_x dz \quad (13a)$$

$$Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} g(z) dz \quad (13b)$$

L'énergie de déformation de la fondation peut être exprimée comme :

$$\delta U_{ef} = \int_0^L \left[ \begin{array}{c} K_w(w_b+w_s)\delta(w_b+w_s) \\ -k_p \frac{\partial^2(w_b+w_s)}{\partial x^2} \delta(w_b+w_s) \end{array} \right] dx \quad (14)$$

Où  $K_w$  et  $K_p$  sont respectivement les coefficients de rigidité transversale et de cisaillement de la fondation.

La variation du travail effectué par la charge transversale externe  $q$  peut être exprimée comme :

$$\delta V = - \int_0^L (q\delta w) dx \quad (15)$$

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{w}\delta\dot{w}] dz_{ns} dx \\ &= \int_0^L \left\{ I_0 [\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta\dot{w}_b + \delta\dot{w}_s)] - I_1 \left[ \dot{u}_0 \frac{d\dot{w}_b}{dx} \delta\dot{u}_0 \right] + I_2 \left[ \frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta\dot{w}_b}{dx} \right] - J_1 \left[ \dot{u}_0 \frac{d\delta\dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \delta\dot{u}_0 \right] + k_2 \left[ \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta\dot{w}_s}{dx} \right] + J_2 \left[ \frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta\dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta\dot{w}_b}{dx} \right] \right\} dx \end{aligned} \quad (16)$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable temporelle variable  $t$  ;  $\rho(z)$  est la masse volumique ; et  $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$  sont les inerties de m Où :

$$I_0 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \quad (17a)$$

$$I_1 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz \quad (17b)$$

$$J_1 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) f(z) dz \quad (17c)$$

$$I_2 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz \quad (17d)$$

$$J_2 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) f(z) z dz \quad (17e)$$

$$K_2 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) f(z)^2 dz \quad (17f)$$

### Le principe de Hamilton

Est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous une forme analytique comme :

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta U + \delta U_{ef} + \delta V - \delta T) dt = 0 \quad (18)$$

Remplacer les expressions par  $\delta U$ ,  $\delta U_{ef}$ ,  $\delta V$  et  $\delta T$  d'après les éqs. (12), (14), (15) et (17) dans l'équation. (18) et en intégrant les gradients de déplacement par parties et en mettant  $\delta u_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$  à zéro séparément, les équations de mouvement suivantes sont obtenues :

$$\delta_{u_0} : \frac{dN_x}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} + J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (19a)$$

$$\delta_{w_b} : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q + K_p \left( \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} \right) - k_w(w_b + w_s) \quad (19b)$$

$$\begin{aligned}
&= I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2\ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2\ddot{w}_s}{dx^2} \\
\delta w_s: &\frac{d^2 M_S}{dx^2} + \frac{dQ_{xz}}{dx} + q + K_P \left( \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} \right) - k_w(w_b + w_s) \\
&= I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2\ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2\ddot{w}_s}{dx^2} \quad (19c)
\end{aligned}$$

Présentation de l'éq. (13) en éq. (19), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $u_0$ ,  $w_b$ ,  $w_s$ ) ( $u_0$ ,  $w_b$ ,  $w_s$ ) et les équations appropriées prennent la forme:

$$\begin{aligned}
&A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{11}^5 \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \\
&= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} + J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (20a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11}^5 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + q + K_P \left( \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} \right) - k_w(w_b + w_s) \\
&= I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2\ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2\ddot{w}_s}{dx^2} \quad (20b)
\end{aligned}$$

$$B_{11}^5 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11}^5 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11}^5 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{11}^5 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + K_P \left( \frac{d^2(w_b + w_s)}{dx^2} \right) - k_w(w_b + w_s) \quad (20c)$$

$A_{11}, D_{11}$  etc., sont la rigidité de la poutre, définie par:

$$\begin{aligned}
&(A_{ij}, A_{ij}^5, B_{ij}, D_{ij} B_{ij}^5, D_{ij}^5 H_{ij}^5) \\
&= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(1, g^2(z), z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz \quad (21)
\end{aligned}$$

### III.7 Solution analytique

Des solutions analytiques de type Navier sont obtenues pour l'analyse en flexion et en vibration libre de poutres fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique à deux paramètres.

Selon la technique de résolution de type Navier, les variables de déplacement inconnues sont développées dans une série de Fourier comme indiqué ci-dessous

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\lambda x) e^{-I\omega t} \\ W_{bm} \sin(\lambda x) e^{-I\omega t} \\ W_{sm} \sin(\lambda x) e^{-I\omega t} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Où  $U_m$ ,  $W_{bm}$  et  $W_{sm}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée au même mode propre, et  $\alpha = m\pi/L$ .

La charge transversale  $q$  est également étendue en série de Fourier

$$Q(x) = \sum_{m=1,2,3}^{\infty} Q_m \sin(\alpha x) dx \quad (23)$$

Où  $Q_m$  est l'amplitude de charge calculée à partir de

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\alpha x) dx \quad (24)$$

Les coefficients  $Q_m$  sont donnés ci-dessous pour quelques charges typiques. Dans le cas d'une charge distribuée sinusoïdalement, on a

$$m=1 \text{ and } Q_1 = q_0 \quad (25a)$$

Et pour le cas d'une charge uniformément répartie, nous avons

$$Q_m = \frac{4q_0}{m\pi} (m=1, 3, 5...) \quad (25b)$$

Substitution d'équation (22) et (23) dans l'équation (20), les solutions analytiques peuvent être obtenues par les équations aux valeurs propres ci-dessous, pour toute valeur fixe de  $m$ .

Pour problème de vibration libre

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (26a)$$

Pour les problèmes statiques, on obtient l'équation d'opérateur suivante

$$[K] \{\Delta\} = \{F\} \quad (26b)$$

OU

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (27a)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (27b)$$

Et

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ w_{bm} \\ w_{xm} \end{Bmatrix}, \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_m \\ Q_m \end{Bmatrix} \quad (27c)$$

Avec

$$a_{11} = A_{11} \alpha^2, a_{12} = -B_{11} \alpha^3, a_{13} = -B_{11}^s \alpha^3, a_{22} = D_{11} \alpha^4 + K_W + K_P \alpha^2, a_{23} = H_{11}^s \alpha^4 + A_{55}^s \alpha^2 + k_w + k_p \alpha^2 \quad (28a)$$

$$m_{11} = I_0, m_{12} = -I_1 \alpha, m_{13} = -j_1 \alpha, m_{22} = I_0 + I_2 \alpha^2 \quad (28b)$$

### III.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une théorie de cisaillement hyperbolique pour l'analyse de la flexion et des vibrations libres de poutres fonctionnellement graduées sous des charges sinusoïdales reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la poutre FGM sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement. Le module de Young est supposé varier dans la direction de l'épaisseur de la poutre.

# **Chapitre 4**

## **Résultats et discussions**

### IV.1 Introduction :

Ce chapitre vise à mettre en évidence la théorie de déformation de cisaillement raffinée des poutres développé dans le chapitre précédent pour la flexion et la vibration des poutres en FGM reposant sur une fondation Winkler-Pasternak. La théorie proposée contient trois inconnues et trois équations gouvernantes, par ailleurs elle vérifie les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre FGM, sans tenir compte du facteur de correction de cisaillement. Dans ce contexte, l'étude de la réponse mécanique sera réalisée pour l'analyse de la flexion et la vibration libre des poutres en matériaux fonctionnellement gradués FGM reposant sur une fondation Winkler-Pasternak. Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de gradient et les paramètres de la fondation sur la flexion et la vibration libre des poutres sont tous discutés. Les solutions obtenues sont vérifiées en les comparant avec ceux rapportés dans la littérature.

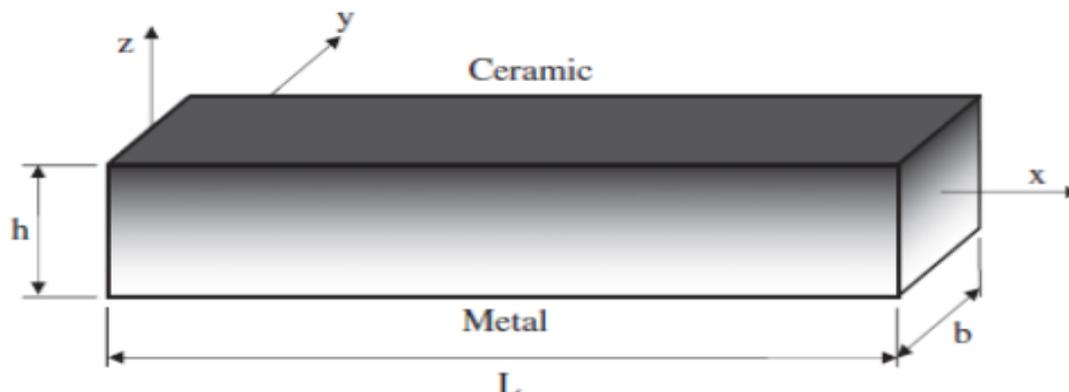
### IV.2 Caractéristiques des paramètres étudiées

Afin de mettre en évidence l'exactitude de la théorie raffinée exposée dans le chapitre précédent, pour l'analyse du comportement statique et dynamique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués simplement appuyées reposant sur une fondation de type Winkler-Pasternak une poutre rectangulaire en matériaux fonctionnellement gradués sera traitée.

#### IV.2.1 Caractéristiques de la poutre considérée

Considérons une poutre rectangulaire en matériau FGM qui repose sur une fondation élastique, de longueur  $L$  et d'épaisseur uniforme  $h$  et de section transversale rectangulaire  $b$  comme illustré dans la Figure (IV.1)

La poutre est réalisée en matériau isotrope avec les propriétés matérielles qui varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur.



**Figure (IV.1) :** Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM.

Les propriétés matérielles de la poutre en FGM sont supposés variables suivant l'épaisseur de la poutre selon une simple loi de puissance P-FGM. La partie inférieure de la poutre FGM est riche en Métal (Aluminium, Al), tandis que la surface supérieure est riche en céramique (Alumine,  $Al_2O_3$ ). Le tableau 1 montre les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude.

**Tableau (IV.1) :** Propriétés matérielles utilisées dans la présente étude

	Matériaux	Définition des propriétés	Symbole
1	Céramique (Alumine, $Al_2O_3$ )	Le module d'élasticité	$E_c = 380 \text{ GPa}$
		Coefficient de poisson	$\nu = 0.3$
		La masse volumique	$\rho_c = 3960 \text{ kg/m}^3$
2	Métal (Aluminium, Al)	Le module d'élasticité	$E_m = 70 \text{ GPa}$
		Coefficient de poisson	$\nu = 0.3$
		La masse volumique	$\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3$

Les résultats numériques sont présentés sous forme des grandeurs adimensionnelles comme suit :

**Tableau(IV.2) : Paramètres adimensionnels utilisés et leurs expressions correspondantes**

Paramètre adimensionnels	Notation	L'expression
<b>Pour l'analyse de flexion</b>		
La flèche adimensionnelle	$\bar{w}$	$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w \left( \frac{L}{2}, 0 \right);$
Le déplacement horizontal adimensionnel	$\bar{u}$	$\bar{u} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u \left( 0, -\frac{h}{2} \right);$
La contrainte normale adimensionnelle	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left( \frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right);$
La contrainte tangentielle adimensionnelle	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz} (0, 0);$
Les paramètres de la fondation élastiques	$\xi_w, \xi_p$	$\xi_w = \frac{K_w l^2}{E_m h}, \xi_p = \frac{K_p}{E_m h}$
<b>Pour l'analyse dynamique</b>		
La fréquence de vibration adimensionnelle	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}};$

### IV.3 Analyse des résultats et discussion

#### IV.3.1 Analyse de la flexion

Le tableau 4.1 présente les résultats des déplacements et les contraintes non dimensionnelles des poutres FGM pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$  et avec les paramètres de fondation. Deux valeurs du rapport longueur/épaisseur  $L/h$  sont considérées, 5 et 20. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats des théories des poutres existantes dans la littérature (celle développé par Sayyad et al [ Sayyad *et al.* (2018)], la théorie de cisaillement parabolique (PSDBT) de Reddy et all [ Reddy 1984]et la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) de Timochenko [ Timoshenko (1921) ].

D'après ces résultats on remarque que les déplacements et les contraintes obtenus par la présente théorie hyperbolique sont en excellent accord avec ceux obtenus à partir de Sayyad et al et de la théorie parabolique PSDBT de Reddy. La théorie FSDBT sous-estime les déplacements et les contraintes. De plus, on remarque à partir de ce tableau que les déplacements augmentent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance  $p$  alors que les contraintes sont identiques lorsque la

poutre est entièrement en céramique ou entièrement en métal. Cela est dû au fait qu'une augmentation de l'indice de loi de puissance  $p$  rend la poutre FGM plus flexible, c'est-à-dire réduit leur rigidité.

On remarque aussi du tableau 4.3 que les déplacements et les contraintes de la poutre FGM diminuent lorsqu'elle repose sur la fondation élastique à deux paramètres, à savoir la couche de Winkler et la couche de cisaillement Pasternak.

**Tableau (IV. 3):** Déplacements et contraintes adimensionnels d'une poutre à gradient fonctionnel reposant sur une fondation élastique à deux paramètres et soumise à une charge sinusoïdale

$P$	$\zeta_w$	$\zeta_p$	Théorie	L/h=5				L/h=20			
				$\bar{U}$	$\bar{W}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{u}$	$\bar{W}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	0.7253	2.5019	3.0922	0.4800	0.1784	2.2839	12.171	0.4806
			Reddy 1984	0.7251	2.5020	3.0916	0.4769	0.1784	2.2838	12.171	0.4774
			Timoshenko	0.7129	2.0523	3.0396	0.2653	0.1782	2.2839	12.158	0.2653
			Present	0.7258	2.5015	3.0948	0.4920	0.1784	2.2838	12.1723	0.4927
	0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	0.6826	2.3547	2.9102	0.4517	0.0932	1.1935	6.3608	0.2511
			Reddy 1984	0.6824	2.3547	2.9096	0.4488	0.0932	1.1935	6.3606	0.2495
			Timoshenko (1921)	0.6716	2.3205	2.8607	0.2499	0.0932	1.1929	6.3539	0.1387
			Present	0.6831	2.3543	2.9127	0.4630	0.0932	1.1935	6.3611	0.2574
	0.1	0.1	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	0.4317	1.4894	1.8407	0.2857	0.0163	0.2090	1.1136	0.0440
			Reddy 1984	0.4316	1.4894	1.8403	0.2839	0.0163	0.2090	1.1136	0.0437
			Timoshenko (1921)	0.4271	1.4756	1.8093	1.8093	0.0163	0.2089	1.1124	0.0243
			Present	0.4321	1.4892	1.8424	0.2929	0.0163	0.2089	1.1136	0.0450
1	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	1.7796	4.9441	4.7867	0.5248	0.4400	4.5774	18.814	0.5245
			Reddy 1984	1.7793	4.9458	4.7857	0.5243	0.4400	4.5773	18.813	0.5249
			Timoshenko (1921)	1.7588	4.8807	4.6979	0.5376	0.4397	4.5734	18.792	0.5376
			Present	1.7806	4.9450	1.8424	0.4920	0.4400	4.5773	18.8151	0.4927
	0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	1.5838	4.4015	4.2600	0.4657	0.1554	1.6169	6.6458	0.1851
			Reddy 1984	1.5835	4.4015	4.2591	0.4666	0.1554	1.6169	6.6456	0.1854
			Timoshenko	1.5675	4.3499	4.1871	0.4791	0.1554	1.6164	6.6418	0.1900

		(1921)								
		Present	1.5847	4.4009	4.2640	0.4378	0.1554	1.6169	6.6462	0.1740
0.1	0.1	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	0.7592	2.1100	2.0422	0.2232	0.0211	0.2190	0.9001	0.0251
		Reddy 1984	0.7591	2.1100	2.0417	0.2237	0.0211	0.2190	0.9001	0.0251
		Timoshenko (1921)	0.7560	2.0981	2.0195	0.2311	0.0211	0.2190	0.8998	0.0257
		Present	0.7597	2.1098	2.0442	0.2099	0.0210	0.2189	0.9001	0.0235

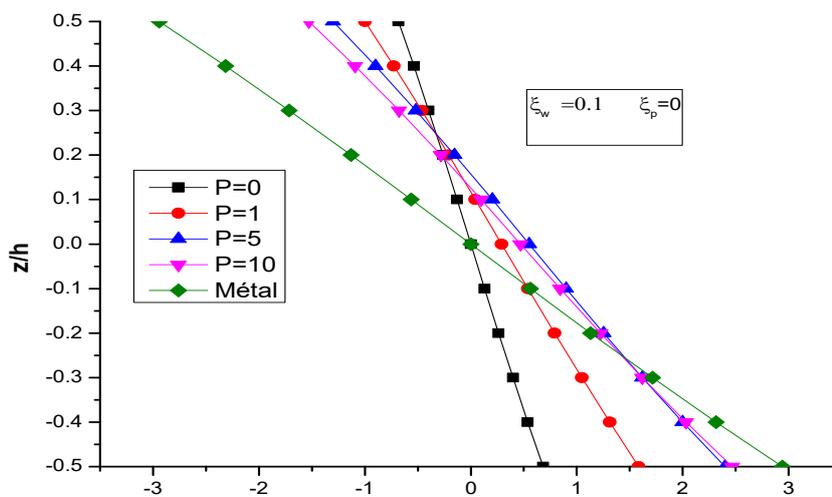
5	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	2.8649	7.7739	7.7739	0.5274	0.7069	6.9541	25.795	0.5313
			Reddy 1984	2.8644	7.7723	6.6057	0.5314	0.7069	6.9540	25.794	0.5323
			Timoshenko (1921)	2.8250	7.5056	6.4382	0.9942	0.7062	6.9373	25.752	0.9942
			Present	2.8671	7.7792	6.6172	0.4029	0.7068	6.9544	25.7975	0.4037
	0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	2.3987	6.5089	5.5327	0.4416	0.1869	1.8389	6.8212	0.1397
			Reddy 1984	2.3984	6.5078	5.5310	0.4450	0.1869	1.8389	6.8211	0.1408
			Timoshenko (1921)	2.3786	6.3198	5.4210	0.8371	0.1871	1.8377	6.8221	0.2634
			Present	2.4003	6.5126	5.5398	0.3373	0.1869	1.8389	6.8215	0.1067
	0.1	0.1	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	0.9205	2.4976	2.1231	0.1694	0.0226	0.2226	0.8258	0.0170
			Reddy 1984	0.9204	2.4975	2.1226	0.1708	0.0226	0.2226	0.8258	0.0170
			Timoshenko (1921)	0.9294	2.4693	2.1181	0.3271	0.0227	0.2226	0.8264	0.0319
			Present	0.9207	2.4982	2.1250	0.1293	0.0226	0.2226	0.8258	0.0129
10	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	2.9995	8.6539	7.9102	0.4237	0.7380	7.6422	30.923	0.4263
			Reddy 1984	2.9989	8.6530	7.9080	0.4226	0.7379	7.6421	30.999	0.4233
			Timoshenko (1921)	2.9488	8.3259	7.7189	1.2320	0.7372	7.6215	30.875	1.2320
			Present	3.0022	8.6560	7.9195	0.4391	0.7380	7.6423	30.9259	0.4400
	0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	2.4659	7.1147	6.5033	0.3484	0.1819	1.8838	7.6225	0.1051
			Reddy 1984	2.4655	7.1141	6.5016	0.3474	0.1819	1.8838	7.5606	0.1043
			Timoshenko (1921)	2.4408	6.8914	6.3891	1.0197	0.1821	1.8825	7.6262	0.3043
			Present	2.4681	7.1161	6.5105	0.3610	0.1819	1.8837	7.6229	0.1084
			Sayyad <i>et al.</i> (2018)	0.8950	2.5820	2.3601	0.1264	0.0216	0.2233	0.9035	0.0125
			Reddy 1984	0.8948	2.5819	2.3596	0.1261	0.0215	0.2233	0.8934	0.0124

	0.1	0.1	Timoshenko (1921)	0.9039	2.5520	2.3660	0.3776	0.0216	0.2233	0.9045	0.0361
			Present	0.8956	2.5822	2.3624	0.1310	0.0215	0.2232	0.9035	0.0128

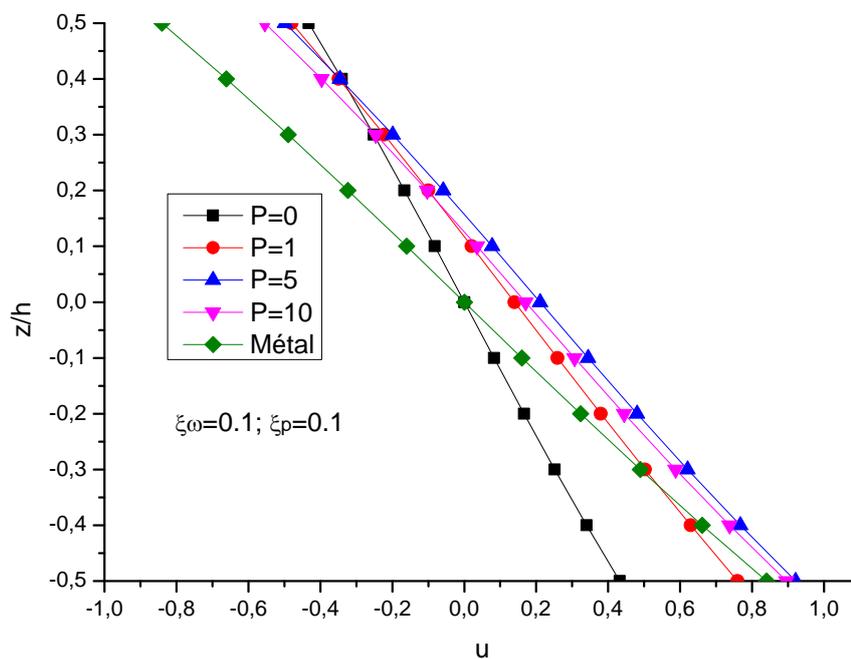
$\infty$	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	3.9371	13.582	3.0922	0.4800	0.9677	12.329	12.171	0.4806
			Reddy 1984	3.9363	13.582	3.0916	0.4769	0.9686	12.398	12.171	0.4774
			Timoshenko (1921)	3.8702	12.552	3.0396	0.3183	0.9676	12.398	12.158	0.3183
			Present	3.9405	13.5799	3.0948	0.4920	0.9686	12.3980	12.1723	0.4927
	0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	2.9391	10.139	2.3084	0.3583	0.1631	2.0785	2.0425	0.0806
			Reddy 1984	2.9385	10.139	2.3079	0.3560	0.1625	2.0805	2.0424	2.0424
			Timoshenko (1921)	2.8891	10.140	2.2691	0.2376	0.1624	2.0805	2.0403	0.0534
			Present	2.9417	10.1380	2.3104	0.3673	0.1625	2.0804	2.0426	0.0826
	0.1	0.1	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	0.8393	2.8955	0.6592	0.1023	0.0177	0.2258	0.2217	0.0088
			Reddy 1984	0.8392	2.8955	0.6591	0.1017	0.0176	0.2258	0.2217	0.0087
			Timoshenko (1921)	0.8250	2.8955	0.6479	0.0679	0.0176	0.2258	0.2214	0.2214
			Present	0.8401	2.8953	0.6598	0.1049	0.0176	0.2258	0.2216	0.0089

Les figures 2 et 3 montrent les effets de l'indice de loi de puissance  $p$  et les paramètres de la fondation sur le déplacement axial  $\bar{u}$  d'une poutre FGM soumise à une charge sinusoïdale en utilisant la présente théorie des poutres hyperboliques (HBT). Les Figures 4 et 5 montrent une variation non linéaire de la contrainte normale de flexion pour  $p = 1, 5$  et  $10$  et une variation linéaire pour  $p = 0$  et  $\infty$ . La contrainte axiale est de traction sur la surface supérieure et de compression sur la surface inférieure.

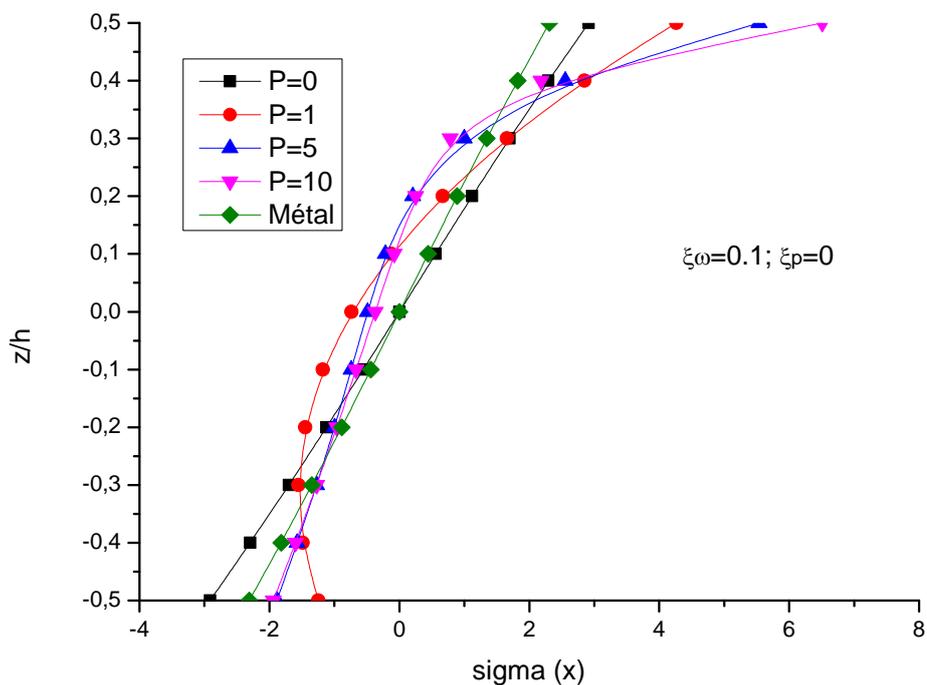
La variation des contraintes de cisaillement transversales suivant l'épaisseur de la poutre FGM sont présentées dans les figures 6 et 7 pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$  et des paramètres de la fondation. Les distributions des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur pour les poutres FGM ne sont pas paraboliques comme dans le cas des poutres entièrement métalliques ou céramiques.



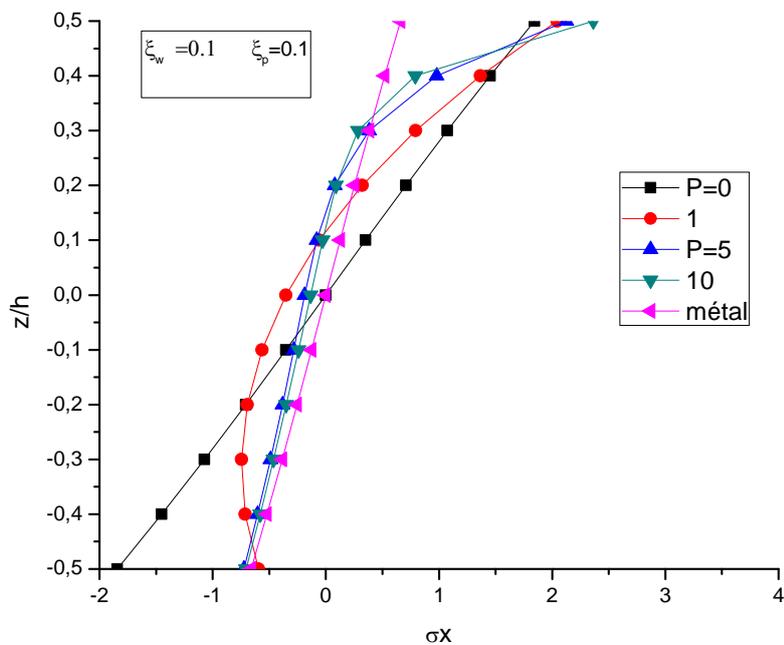
**Figur(IV.2) :**Déplacement axial adimensionnel dans l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont :  $\xi_w = 0.1$  et  $\xi_p = 0$



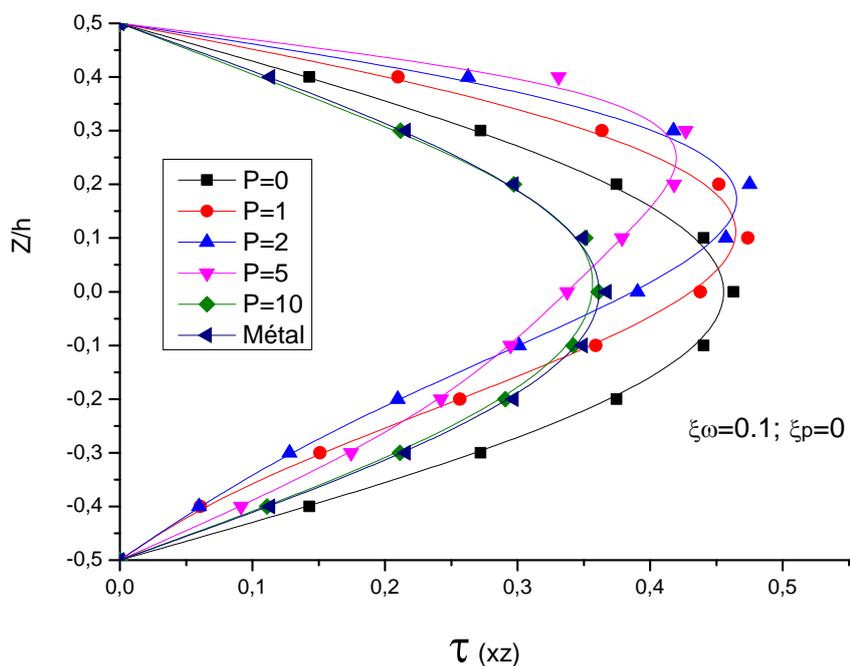
**Figure(IV.3):**Déplacement axial adimensionnel dans l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont :  $\xi_w = 0.1$  et  $\xi_p = 0.1$



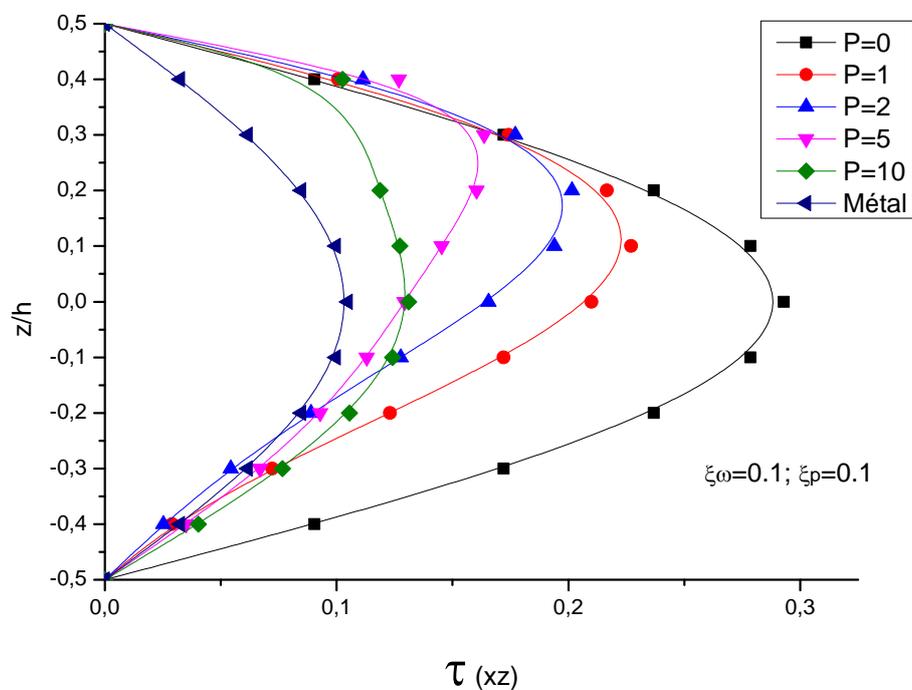
**Figure(IV.4) :** Contrainte axiale adimensionnelle à travers l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont :  $\xi_w=0.1$  et  $\xi_p=0$ )



**Figure(IV.4) :** Contrainte axiale adimensionnelle dans l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont :  $\xi_w=0.1$  et  $\xi_p=0.1$ )



**Figure(IV.5) :**Contrainte de cisaillement transverse adimensionnelle a travers l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont :  $\xi_w = 0.1$  et  $\xi_p = 0$ )



**Figure(IV.6) :** Contrainte de cisaillement transverse adimensionnelle a travers l'épaisseur ( $L/h = 5$ , les paramètres élastiques adimensionnels de la fondation sont :  $\xi_w = 0.1$  et  $\xi_p = 0.1$ )

#### IV.4 Analyse de la vibration :

Les fréquences naturelles non dimensionnelles d'une poutre en FGM simplement appuyée en utilisant la présente théorie hyperbolique (HSDBT) sont données dans le tableau 3 pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ . Les résultats de la présente théorie sont comparés à ceux présentés par [Sayyad et al 2018 ,Reddy 1984, Simsek 2010 , Timoshenko 1921 et Bernoulli-Euler 1744]. Un excellent accord entre les solutions de la présente théorie et les résultats existantes dans la littérature est obtenu.

Le tableau 4 présente aussi les résultats des premières fréquences non dimensionnelles des poutres FGM reposant sur deux paramètres de fondation élastique obtenus par la présente théorie des poutres hyperboliques (HSDBT) pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance  $p$  et de rapport  $L/h$ . Les présents résultats sont comparés à ceux présentés par Sayyad et al L'examen du même tableau prouve que les fréquences obtenues à l'aide de la présente théorie sont en excellent accord avec les résultats précédemment publiés. On observe qu'une augmentation de la valeur de l'indice  $p$  entraîne une diminution des fréquences fondamentales et une diminution de la valeur du module d'élasticité. Aussi, on observe que les fréquences propres sont augmentées lorsque la poutre repose sur une fondation élastique à deux paramètres.

**Tableaux (IV.4) :** Fréquences naturelles adimensionnelles d'une poutre graduée fonctionnellement simplement appuyer.

L/h	Théorie	0	1	2	5	10	Métal
5	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	5.1453	3.9826	3.6184	3.3917	3.2727	2.6734
	Reddy (1984)	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816	2.6773
	Simsek (2010)	5.1527	3.9904	3.6261	3.4012	3.2816	2.6773
	Timoshenko (1921)	5.1524	3.9902	3.6343	3.4311	3.3134	2.6771
	Bernoulli–Euler (1744)	5.3953	4.1484	3.7793	3.5949	3.4921	2.8033
	Present	5.1531	3.9906	3.6263	3.3997	3.2810	2.6775
20	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	5.4603	4.2050	4.2050	3.6485	3.5389	2.8371
	Reddy (1984)	5.4603	4.2050	3.8361	3.6485	3.5389	2.8371
	Simsek (2010)	5.4603	4.2050	3.8361	3.6485	3.5389	2.8371
	Timoshenko (1921)	5.4603	4.2050	3.8367	3.6508	3.5415	2.8371
	Bernoulli–Euler (1744)	5.4777	4.2163	3.8472	3.6628	3.5547	2.8461
	Present	5.4603	4.2050	3.8361	3.6483	3.5389	2.8371

**Tableaux(IV.5):** Fréquences naturelles de flexion a dimensionnelles des poutres fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique

L/h	Mode	$\xi_w$	$\xi_p$	Théorie	0	1	2	5	10	Métal
5	1	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	5.1453	3.9826	3.6184	3.3917	3.2727	2.6734
				Present	5.1531	3.9906	3.6263	3.3997	3.2810	2.6775
		0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	5.3038	4.2216	3.8961	3.7066	3.6094	3.0942
				Present	5.3118	4.2301	3.9045	3.7156	3.6186	3.0988
		0.1	0.1	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	6.6689	6.0973	5.9810	5.9830	5.9909	5.7903
				Present	6.6786	6.1089	5.9934	5.9975	6.0056	5.7979
	2	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	17.589	13.754	12.388	11.260	10.748	9.1392
				Present	17.8868	14.013	12.6410	11.5323	11.0215	9.2938
		0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	17.633	13.820	12.465	11.351	10.848	9.2623
				Present	17.9313	14.0803	12.7194	12.7194	11.1230	9.4186
		0.1	0.1	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	19.287	16.200	15.200	14.493	14.224	13.240
				Present	19.6072	16.4947	15.4959	14.8290	14.5669	13.4450
3	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	32.324	25.538	22.812	20.117	19.003	16.794	
			Present	34.2344	27.1151	24.3237	21.6943	20.5580	17.7879	
	0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	32.346	25.570	22.849	20.163	19.05399	16.855	
			Present	34.2572	27.1484	24.3632	21.7429	20.6119	17.8520	
	0.1	0.1	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	34.223	28.261	25.980	23.881	23.1.7	21.626	
			Present	36.2207	29.9557	27.6328	25.6792	24.9218	22.8215	
20	1	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	5.4603	4.2050	3.8361	3.6484	3.5389	2.8371
				Present	5.4603	4.2050	3.8361	3.6483	3.5389	2.8371
		0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	7.5533	7.0751	7.0184	7.0948	7.1279	6.9259
				Present	7.5533	7.0752	7.0185	7.0949	7.1280	6.9259
		0.1	0.1	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	18.052	19.224	19.752	20.390	20.703	21.022
				Present	18.0520	19.2248	19.7531	20.3904	20.7040	21.0226
	2	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	21.571	16.631	15.158	14.370	13.922	11.208
				Present	21.5736	16.6346	15.1617	14.3727	13.9255	11.2094
		0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	22.189	17.571	16.250	15.596	15.226	12.857
				Present	22.1924	17.5751	16.2538	15.5995	15.2300	12.8585
		0.1	0.1	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	39.513	39.730	40.223	41.157	41.624	41.615
				Present	39.5173	39.7372	40.2315	41.1672	41.6332	41.6195
	3	0	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	47.569	36.740	33.440	31.543	30.505	24.716
				Present	47.5949	36.7692	33.4681	31.5698	30.5336	24.7299
		0.1	0	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	47.851	37.171	33.943	32.114	31.116	25.499
				Present	47.8761	37.2000	33.9716	32.1410	31.1444	25.5130
		0.1	0.1	Sayyad <i>et al.</i> (2018)	68.353	64.871	64.523	65.245	65.633	64.358
				Present	47.8761	64.9190	64.5743	65.3046	65.6927	64.3873

#### IV.5 CONCLUSION :

Dans ce chapitre une nouvelle théorie de cisaillement hyperbolique de poutres est proposée pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre de poutres fonctionnellement graduées sous chargement sinusoïdales reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces (supérieure et inférieure) de la poutre FGM sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. On assume que les propriétés matérielles de la poutre varie selon la loi de puissance P-FGM. Les équations de mouvement pour la poutre FGM est obtenue par le principe de d'énergie d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les déplacements, les contraintes et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres

Les résultats montrent que la présente théorie de cisaillement proposée donne des solutions presque identiques à celles obtenues en utilisant d'autres théories de déformation par cisaillement.

# **Conclusion générale**

## Conclusion générale

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. L'utilisation des matériaux composites fonctionnellement gradués apparaît comme une voie prometteuse dans le domaine des nouveaux matériaux composites grâce à leurs propriétés structurales très particulières. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail a été une contribution à l'analyse de la flexion et de la vibration des poutres fonctionnellement graduées type FGM reposant sur fondation élastique de type Winkler-Pasternak

Toutes les études comparatives effectuées dans cette étude ont montré que les résultats obtenus pour l'analyse du comportement des poutres sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement. L'effet de plusieurs paramètres de la poutre est aussi présenté dans cette investigation sous forme numérique et graphique dans plusieurs combinaisons de matériaux FGM.

Les exemples numériques montrent que la présente théorie de cisaillement proposée donne des solutions presque identiques à celles obtenues en utilisant d'autres théories de déformation par cisaillement.

Les déplacements de la poutre augmentent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance  $p$  alors que les contraintes sont identiques lorsque la poutre est entièrement en céramique ou entièrement en métal.

Les déplacements et les contraintes de la poutre FGM diminuent lorsqu'elle repose sur la fondation élastique à deux paramètres, à savoir la couche de Winkler et la couche de cisaillement.

# Références bibliographiques

**Références bibliographiques**

- [Koizumi M 1999] The concept of FGM. Ceramic transaction, functionally graded materials 34, 3-10.
- [Miyamoto Y et al 1999] Functionally graded materials design, processing and applications, materials technology series. Springer science+ business media, llc.
- [Mahmoudi A 2019] Thèse de doctorat en sciences. Étude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM. Université Djilali Liabes. Sidi Bel Abbes. Faculté de Technologie. Département de Génie Civil et Travaux Publics.
- [Mahmoud M et al 2017] Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering. s.l.Springer.
- [Houari MSA 2011] Analyse des contraintes thermoélastique : lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie.
- [EL-Wazery et al 2015], "A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials". Mater. Environ. Sci. 6 (5) 1369-1376.
- [Abdizadeh H 1997], élaboration et caractérisation de composites « composites laminaires tricouches à base d'alumine » thèse de doctorat INSA de Lyon 212 p
- [Kieback B et al 2003], "Processing techniques for functionally graded materials". Materials Science and Engineering A362
- [Zhu H.X., Abbaschian R. 2000], "Microstructures and properties of in-situ NiAl–Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> functionally gradient composites", Compos. Part B 31 383–390.
- [Narottam P 2011]. "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions»; John Wiley Sons; page 110, 4août
- [H. Okamura 1991], State of the arte of material design projects for severe service applications, Mater. Sci. Eng.: A; 143 (1-2): 3-9,.
- [Boch. P 1986] Chartier. Huttepain. M Tapa casting of AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated composites.
- [Yoshihisa Uchida 2004] Proprieties of functionally graded materials, Manufactured by progressive lamination method for applications, 39-51-B, Vol. 39-B.
- [Jin, Z. Het al 1996]. Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock. Journal of Thermal Stresses, 19(4), pp. 317–339.
- [Bennai R 2015], "A new higher-ordershear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams", Steel Compos. Struct. 19(3), 521-546.
- [F. Delale, et al 1983] The crack problem for a non-homogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics 50, 609 –614, similaire aux plaques homogènes. Mémoire de magister en génie civil de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes 2009.

- [Shen et al 2009] Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *Int. J; Solids Structures*, 32(119):28532871.
- [(Avec la contribution de M. Philippe Massalia) Bati produits].
- [David 2015] Ryckelynck Centre des Matériaux, Mines Paris Tech David.Ryckelynckmines-paristech.fr
- [modeles structurels theorie-du-faisceau].
- [la-construction beams]
- [produit poutres-en-beton-arme]
- [différents-types-et-assemblage-poutres-de bois ]
- [Meradjah, M. et al., 2010] Interfacial Stresses in Plated Beams with Exponentially Varying Properties. *Journal of Adhesion Science and Technology*, Volume 24, pp. 1063–1081.
- [Thèse En vue d'obtention du diplôme de : Doctorat LMD en Génie mécanique Option : Réhabilitation et fiabilité des structures et équipements ANALYSE DE LA DÉGRADATION DES STRUCTURES FGM RENFORCÉES PAR FRP PRÉCONTRAINTS 2019] .
- [M.A. Sutton 1983] « Determination of Displacements Using an Improved Digital Correlation Method ». *Im. Vis. Comp.* 1(3), 133-139.
- [J.P. Chambard, S. Jaminion 2007] « Evaluation de l'incertitude de mesure d'un capteur optique de numérisation 3D. » Actes du 13e Congrès International de Métrologie, Lille (France).
- [R. Kokku, G. Brooksby 2005] «Improved 3D surface measurement accuracy on metallic surfaces. » *Proc. of "Optical Metrology 2005"* 5856, 618-624.
- Mesure-de-formes-et-de-champs.
- [Euler, L. 1744]. *Method us inveniend ilineascurvas maximiminim iveproprietategaudentes, Additamentum I, De curviselastics.* Lausanne, Genf: Bousquet&Socios.
- [Şimşek, M. 2009] Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method. *Int J Eng ApplSci*.
- [Yang J et al 2008] free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks. *Composite Structures*.
- [Alshorbagy A et al 2011] free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling* 35(1): 412-425.
- [Timoshenko, S. P 1921]. LXVI On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245): 744-746.
- [Timoshenko, S. P. 1922]. X On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(253): 125- 131.
- [Sina, S et al 2009] an analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. *Materials & Design*, 30(3): 741-747.
- [Chakraborty, et al 2003] A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences* 45(3): 519-539.
- [Wei, D et al 2012]. An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 331(7), 1686-1700
- [Sahouane et al 2019], "Numerical analysis for free vibration of functionally graded beams using an original HSDBT", *Earthq. Struct*, 17(1), 31-37.

- [Sayyad et al 2018 ] An inverse hyperbolic theory for FG beams resting on Winkler-Pasternak elastic foundation”, *Advan. Aircraft Spacecraft Sci.*, 5(6), 671-689.
- [Zaoui, F.Z et al 2019]. “New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations”, *Compos. Part B: Eng.*, 159(15), 231-247.
- Pasternak, P.L. (1954), “On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants”, *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturipo Stroitelstvu I Arkhitekture*, Moscow: USSR, 1, 1-56.
- [Harr, M.E et al 1969] Euler beams on a two parameter foundation model. *journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*.
- [Popov, G.Y 1972] Plates on a linearly elastic foundation (a survey). *Soviet Applied Mechanics*, 8(3): p. 231-242.
- [Filonenko-Borodich, M 1940] Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovkogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika*, Moscow.
- [Hetényi, M et al 1946 ] Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering. Vol. 16. University of Michigan press Ann Arbor, MI.
- [Pasternak, P 1954] On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstve i Arkhitekture*.
- [Kerr, A.D 1964] Elastic and viscoelastic foundation models.
- [Kneifati, M.C 1985 ]Analysis of plates on a Kerr foundation model. *Journal of Engineering Mechanics*.