



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Filière : Génie civil

Spécialité : Structures

Présenté par :

ZEGGAI Habib

BELGHITAR Ahmed

*Sujet du mémoire*

***Comportement mécaniques des plaques FGM poreux sous  
chargement thermomécanique reposant sur une fondation  
élastique : effet de la forme de distribution***

*Soutenu publiquement le 25/06/2023 devant le jury composé de :*

Mr, DJEBLI Benyagoub

Président

Mr, RABAHI Abderezak

Rapporteur

Mr, KRIM Abdellah

Examineur

Mr, KERROUM Nadir

Examineur

## *Remerciement*

# *Dédicaces*

## Sommaire

Liste des tableaux .....	IV
Liste des figures.....	V
Résumé .....	VII
Abstract.....	VIII
Introduction générale.....	IX
I.1.Introduction .....	1
I.2. Définition et aperçu historique sur les matériaux FGM.....	1
I.3. La différence entre les matériaux composites classiques et les FGM.....	3
I.4. Modélisation des propriétés matérielles effectives .....	5
I.4.1. La loi des mélanges.....	6
I.4.1.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM .....	7
I.4.1.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	8
I.4.1.3. Propriétés matérielles de plaque E-FGM.....	9
I.4.2.Le modèle du Mori-Tanaka .....	10
I.4.3.Le modèle auto-cohérent.....	11
I.5. Caractérisation des propriétés .....	12
I.5.1. Propriétés thermiques.....	13
I.5.1.1. Coefficient de dilatation thermique .....	13
I.5.2. Module d'élasticité .....	13
I.5.3. La déformation et la résistance .....	13
I.6. Une revue sur les techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés....	13
I.6.1. Procédé de poudre sèche.....	14
I.6.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) .....	15
I.6.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting).....	15
I.6.4. Le coulage en bande (Tape Casting).....	16

I.6.5. Pressage à chaud .....	17
I.6.6. Processus de frittage .....	17
I.6.7. Processus d'infiltration .....	18
I.6.8. Projection thermique : .....	18
I.7. Application .....	18
I.7.1. Dans l'aérospatiale et l'automobile.....	19
I.7.2. Dans la médecine .....	19
I.7.3. Dans la défense .....	20
I.7.4. Dans l'industrie .....	20
I.7.5. Articles de sports.....	20
I.8. Conclusion.....	20
II.1. Introduction.....	17
II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles .....	17
II.2.1. Approche monocouche équivalente.....	17
II.2.1.1. Théorie classique des plaques.....	19
II.2.1.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre FSDT.....	20
II.2.1.3. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT .....	22
II.2.2. Approche par couche .....	23
II.2.2.1. Les modèles zig-zig .....	25
II.3. Une revue de littérature des études sur les structures FGM .....	26
II.3.1. Les études sur les contraintes résiduelles dans les structures FGM .....	26
II.3.2. Les études sur l'analyse thermo élastique des structures FGM.....	28
II.3.3. Les études sur l'analyse du flambement des structures FGM .....	29
II.3.4. Les études sur l'analyse statique et dynamique des structures FGM .....	31
II.4. Conclusion .....	32
III.1. Introduction .....	36

III.2. Fondation élastique.....	36
III.2.1. Modèles de fondations .....	37
III.2.1.1. Model de Winkler.....	37
III.2.1.2 Model de Pasternak .....	38
III.3. Les plaques fonctionnellement graduées en présence de la porosité.....	38
III.3.1 Modèles de porosité .....	39
III.3.1.1 Plaque FG avec porosité uniforme .....	40
III.4. Conclusion .....	40
IV.1. Introduction .....	54
IV.2. Formulation du problème .....	55
IV.2.1. Champs de déplacement et déformations.....	55
IV.2.2.Relations constitutives .....	56
IV.2.3. Équations gouvernantes .....	57
IV.2.4. Solution exacte pour une plaque FGM en appui simple .....	59
IV.3. Résultats numériques et discussions.....	60
IV.3.1. Validation du modèle .....	61
IV.3.2. Effet de la température T .....	62
IV.4. Conclusion.....	64
Conclusion générale .....	62
Référence bibliographique	

## Liste des tableaux

<b>Tableau I.1</b> : Comparaison entre les propriétés de céramique et du métal (Nguyen, 2008)	3
<b>Tableau IV.1</b> : validation du présent model d'une plaque FGM poreuse ( $\alpha = 0$ ) sans/avec fondation élastique sous chargement thermomécanique $T = 0$ .	61
<b>Tableau IV.2</b> : Comparaison de flèche d'une plaque FGM poreuse ( $\alpha = 0$ ) sans/avec fondation élastique sous chargement thermomécanique $T = 0$ .	62

## Liste des figures

<b>Figure I.1 :</b> FGM avec les fractions de volume des phases constitutives graduées dans une seule direction .....	2
<b>Figure I.2 :</b> La variation des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée. ....	3
<b>Figure I.3 :</b> Une vue microscopique d'un FGM .....	4
<b>Figure I.4 :</b> La microstructure d'un FGM .....	5
<b>Figure I.5 :</b> Microphotographie d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique.....	5
<b>Figure I.6 :</b> Une plaque à gradient de propriété.....	6
<b>Figure I.7 :</b> La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM ..	8
<b>Figure I.8 :</b> La variation du module d' Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM...	9
<b>Figure I.9 :</b> La variation du module d' Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.	10
<b>Figure I.10 :</b> Matériaux à deux phases (a) des particules en microstructure (b) Squelette en microstructure.....	11
<b>Figure I.11 :</b> Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM .....	15
<b>Figure I.12 :</b> Le coulage centrifuge des poudres mixtes .....	16
Figure I.13 : Principe de la méthode coulage en bande.....	17
<b>Figure II.1 :</b> Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff .....	19
<b>Figure II.2 :</b> Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	21
<b>Figure II.3 :</b> La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSĐT.....	22
<b>Figure II.4:</b> Illustration de la cinématique de la plaque d'ordre élevé .....	22
<b>Figure II.5 :</b> La distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSĐT.....	23
<b>Figure II.6 :</b> Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. ....	24



---

<b>Figure II.7 :</b> Champ de déplacements des modèles zig-zig, approche cinématique. ....	25
<b>Figure II.8 :</b> Champ de déplacements des modèles zig-zig du premier ordre.....	25
Figure II.9: Champ de déplacements des modèles zig-zig d'ordre supérieur.....	26
<b>Figure III.1.</b> Modèle de Winkler (Younesian et al., 2019).....	38
<b>Figure IV.1 :</b> Géométrie d'une plaque rectangulaire composée de FGM.....	55
<b>Figure IV.2 :</b> Effet de la température T d'une plaque FGM avec l'indice de porosité $a = 0$ . .....	63
<b>Figure IV.2 :</b> Effet de la température T d'une plaque FGM avec l'indice de porosité $a = 0$ . .....	63

## Résumé

L'objectif de ce travail est d'effectuer une analyse statique du comportement mécanique des structures fonctionnellement graduées (plaques FGM), tout en assumant que les propriétés matérielles varient selon une loi de puissance suivant la direction transversale de la structure.

Nous utilisons la théorie d'ordre élevé de cisaillement transverse pour la réponse statique des plaques fonctionnellement graduées. La théorie proposée est basée sur l'hypothèse que des porosités peuvent être présentes dans une plaque fonctionnellement graduée, ce qui peut entraîner une diminution de la résistance des matériaux.

Une nouvelle répartition de la porosité en fonction de l'épaisseur de la plaque FGM est supposée. Les équations gouvernantes de la présente théorie sont dérivées en employant le principe du travail virtuel, et les solutions ont été obtenues en utilisant la solution de Navier. Des résultats numériques pour les déformations et les contraintes sous chargement thermomécanique en introduisant la porosité uniforme. L'exactitude de la présente étude est confirmée en comparant les résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature.

**Mots clés :** Fonctionnellement gradué; Plaque FGM; travail virtuelle, charge thermomécanique.

## Abstract

The objective of this work is to perform a static analysis of the mechanical behavior of functionally graded structures (FGM plates), while assuming that the material properties vary according to a power law along the transverse direction of the structure.

We use the high order theory of transverse shear for the static response of functionally graded plates. The proposed theory is based on the assumption that porosities can be present in a functionally graded plate, which can lead to a decrease in the strength of materials.

A new distribution of porosity as a function of FGM plate thickness is assumed. The governing equations of the present theory are derived using the principle of virtual work, and the solutions have been obtained using Navier's solution. Numerical results for strains and stresses under thermomechanical loading by introducing uniform porosity. The accuracy of the present study is confirmed by comparing the results obtained with those available in the literature.

**Keywords:** Functionally graduated; FGM plate; virtual work, thermomechanical load.

## Introduction générale

Les matériaux à gradient de fonction (FGM) sont des matériaux dont la composition chimique et les caractéristiques mécaniques et microstructures varient graduellement au cours de la fabrication d'une pièce. L'intérêt est d'associer et de concentrer les avantages de plusieurs matériaux dans une seule pièce pour résister à la température, la corrosion, l'usure ou la fatigue. Le grand intérêt de l'emploi des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) est la possibilité de contrôler les constituants et donc d'obtenir des composants présentant les caractéristiques locales souhaitées, en ce qui concerne les caractéristiques mécaniques, thermiques et autres.

Pour diminuer la consommation de l'énergie et les émissions de CO<sub>2</sub>, les ingénieurs font des efforts constants pour concevoir des matériaux ayant une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Ils désirent que, dans un grand nombre de situations, le rapport performance sur masse soit le plus élevé possible.

Les matériaux composites répondent bien à ces exigences. Ils sont largement utilisés aussi bien dans le domaine du transport (aéronautique, aérospatiale, automobile, maritime, ferroviaire...) que dans le domaine des loisirs et du sport, car ils permettent d'atteindre des performances que les matériaux classiques ne peuvent fournir.

Des nombreux travaux de recherches ont été étudiés le comportement des structures en matériau FGM, et ont définis la fraction volumétrique en utilisant plusieurs lois de mélange; tel que la loi de puissance P-FGM, la loi exponentielle E-FGM et la loi de sigmoïde S-FGM pour assurer une répartition harmonieuse des contraintes à travers les interfaces.

Les plaques FGM ont été largement adoptées par nombreuses études pour modéliser divers problèmes d'ingénierie au cours des dernières décennies. Ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles. La théorie classique des plaques (CPT) qui néglige l'effet de cisaillement transverse est valable pour l'étude des plaques minces. Cependant, la CPT sous-estime les flèches et surestime les fréquences pour les plaques modérément épaisses. Plusieurs théories de déformation de cisaillement ont été développées pour surmonter les insuffisances du CPT. Les théories de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) proposées par Reissner-Mindlin ont été intensivement utilisées dans l'analyse de la flexion des plaques et des coques. Mais l'application de la théorie du premier ordre (FSDT) sur les plaques composites et FGM présentent une difficulté pour évaluer exactement le facteur de correction présentant l'imperfection des théories du premier ordre

(FSDT). Pour franchir les limites de la CPT et de la FSDT, de nombreuses théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été proposées pour l'analyse des plaques.

Pour cela, notre travail s'articule autour de cinq chapitres :

**Le premier chapitre :** Nous décrivons une introduction aux matériaux à gradient de propriétés.

**Le deuxième chapitre :** Définit une revue de littérature des théories et des études sur les plaques FGM.

**Le troisième chapitre :** Sera consacré à une revue littéraire sur l'étude des plaques FGM reposant sur une fondation élastique.

**Le quatrième chapitre :** Comportement statique d'une plaque FGM poreuse sous chargement thermomécanique reposante sur une fondation élastique.

Enfin, nous concluons notre travail par une conclusion générale basée sur les résultats obtenus par notre méthode, et soulignons son efficacité dans la conception et les calculs liés aux structures FGM.

# ***CHAPITRE I :***

## ***Introduction aux matériaux à gradient de propriétés***

## I.1.Introduction

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la Nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentent ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Grade Materials « FGM »). Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont considérés comme des matériaux composites, produits par un changement non interrompu de leurs fractions volumiques dans la direction de leur épaisseur. Ce type de matériau à récemment suscité un grand intérêt de la communauté scientifique, en raison des avantages qu'il offre, par la diminution de la disparité dans les propriétés réduisant ainsi les contraintes thermiques [Zhong, 2007]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également leurs applications dans le domaine de la biomédicale [Baron, 2008].

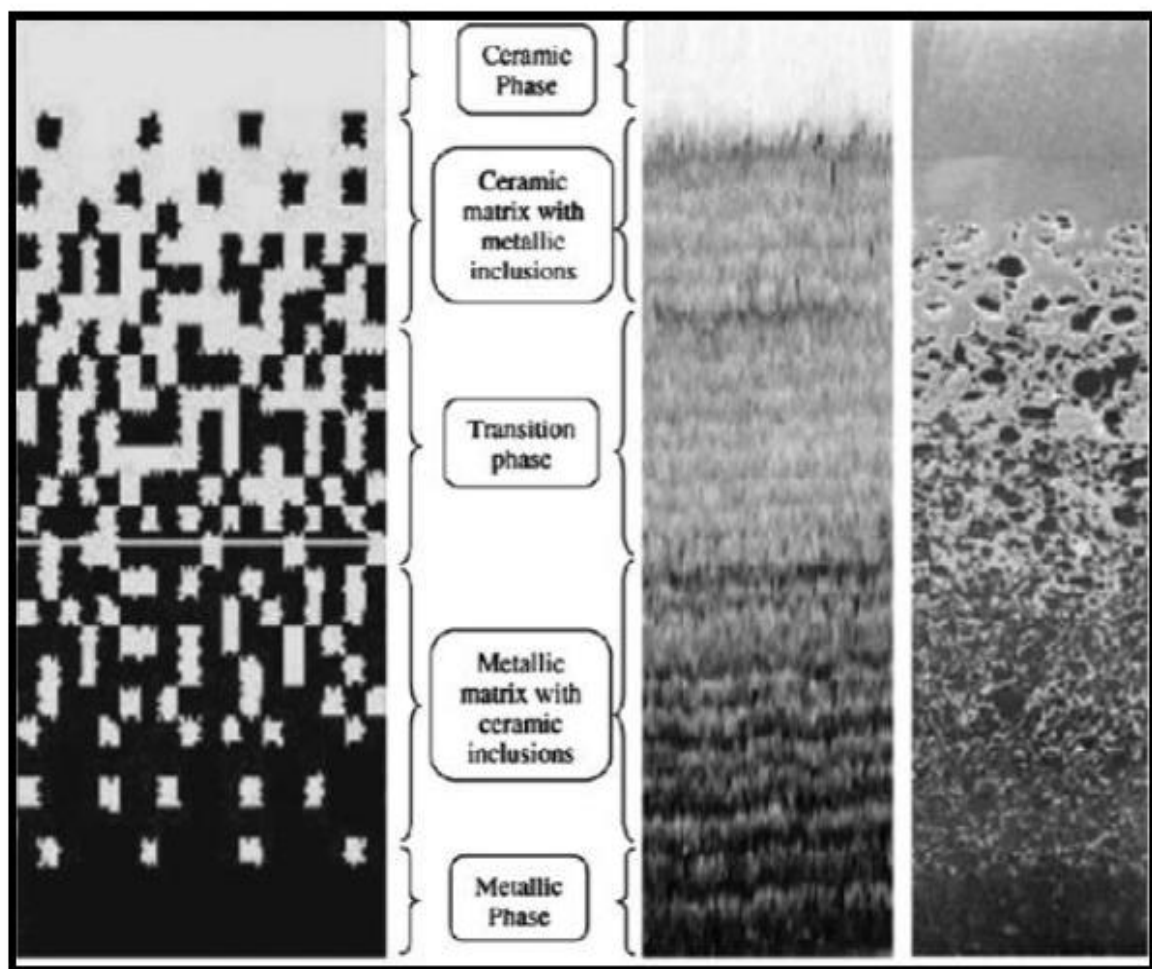
## I.2. Définition et aperçu historique sur les matériaux FGM

Le concept de Matériaux à Gradient de propriétés a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisées pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, canapés minces optiques, etc.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau (I.1). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques microscopiquement hétérogènes (figure I.1). Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites

conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

En conséquence, les FGM possèdent un certain nombre d'avantages excédant que les composés stratifiés, y compris une réduction potentielle de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur, tendance d'efforts, absente ou sévèrement réduite de décollement, un effort résiduel amélioré, propriétés thermiques augmentées, une dureté plus élevée de rupture, et réduit facteurs d'intensité d'effort. Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de FGM ont été édités (par exemple, Suresh et Mortensen 1998 ;[ Miyamoto et autres 1999 ; Birman et Byrd 2007].



*Figure 1.1 : FGM avec les fractions de volume des phases constitutives graduées dans une seule direction [Talha.M, 2015 ]*



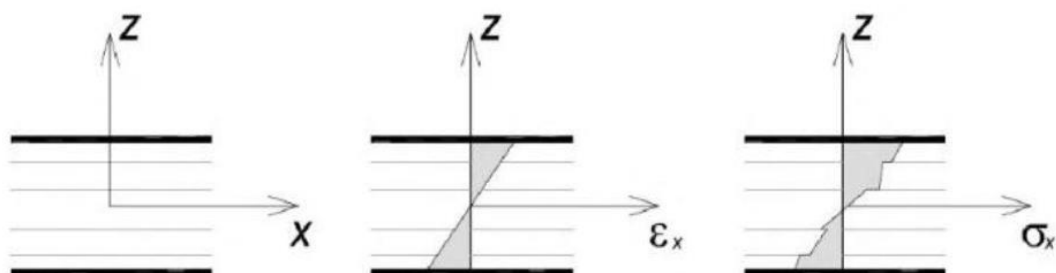
**Tableau I.1** : Comparaison entre les propriétés de céramique et du métal (Nguyen, 2008)

<b>Face à haute température</b>	<b>Céramique</b>	-Bonne résistance thermique -Bonne résistance à l'oxydation -Faible conductivité thermique
<b>Les couches intermédiaires</b> (Continuité du matériau d'un point à l'autre)	<b>Céramique-métal</b>	-Elimination des problèmes d'interface -Relaxer les contraintes thermiques
<b>Face à basse température</b>	<b>métal</b>	-Bonne résistance mécanique -Haute conductivité thermique -Très bonne ténacité

### I.3. La différence entre les matériaux composites classiques et les FGM

Les propriétés supérieures de matériaux composites avancés, telles que la résistance spécifique et la rigidité élevée, ont conduit à leur utilisation généralisée dans les avions à haute performance, astronefs, des pièces automobiles et des structures spatiales. Dans les structures classiques de composites stratifiés, lames élastiques homogènes sont liés ensemble pour obtenir des propriétés mécaniques et matérielles améliorées. Les matériaux composites sont fabriqués par l'homme et, par conséquent, les constituants des matériaux composites peuvent être sélectionnés et combinés de manière à produire un matériau utile qui a les propriétés souhaitées, tels que la haute résistance, une rigidité élevée, une plus grande résistance à la corrosion, une plus grande résistance à la fatigue, un faible poids et ainsi de suite.

La constitution d'anisotropie des structures composites stratifiées souvent se traduit par une concentration de contraintes dans les matériaux et des discontinuités géométriques, figure (I.2), qui peut conduire à des dommages sous la forme de délaminage, la fissure de la matrice et la séparation des assemblages. [Hashmi. 2014]

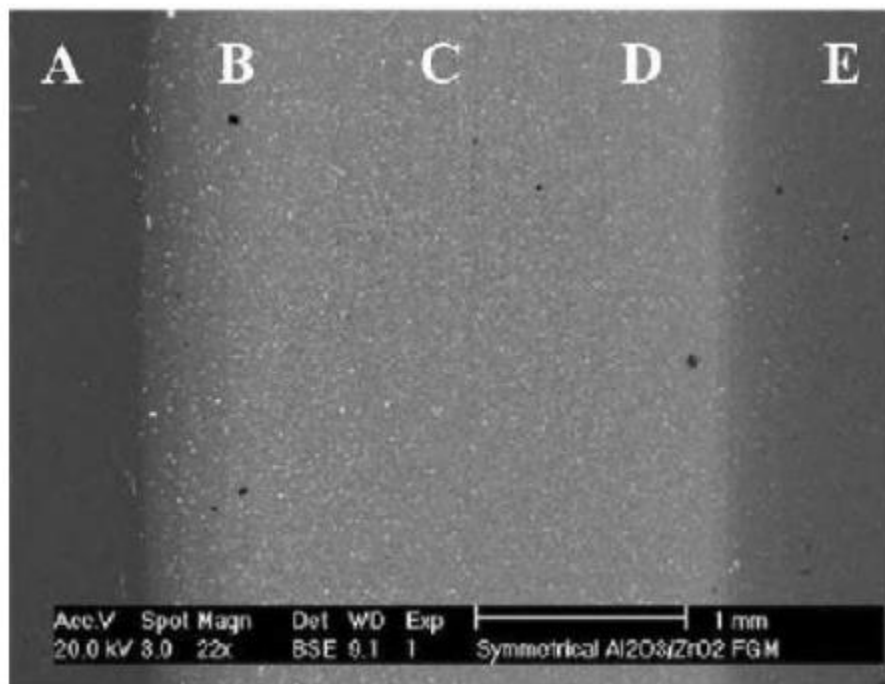


*Figure I.2* : La variation des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée.

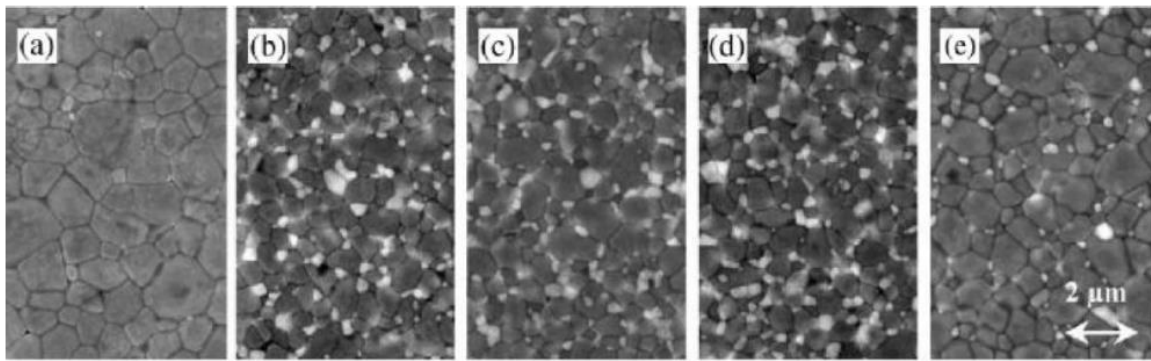
Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et alléger ainsi les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés.

La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte. La variation progressive dans un matériau est très efficace elle est adaptée pour répondre aux besoins de la structure. Les FGM sont généralement fabriqués à partir de composants d'isotropie tels que des métaux et des céramiques, puisqu'ils sont utilisés aussi comme structures de barrière thermique dans des environnements avec des gradients thermiques sévères (par exemple des dispositifs thermoélectriques pour la conversion de l'énergie, l'industrie des semi-conducteurs). Dans de telles applications, la céramique présente une résistance à la chaleur et à la corrosion; parallèlement le métal fournit la force et la ténacité.

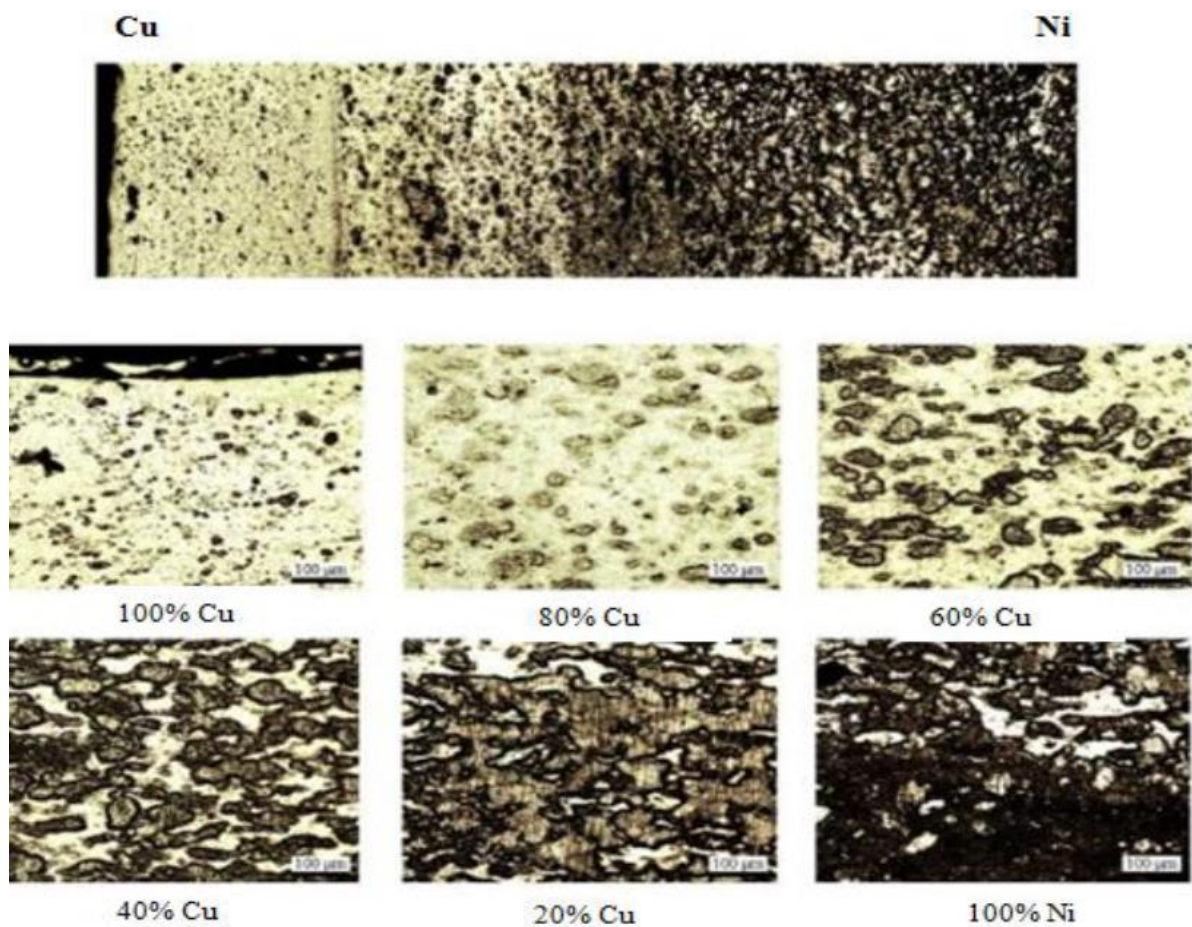
Les FGM sont donc des matériaux composites à caractère non homogène macroscopiquement. Les changements continus dans leur microstructure distinguent les FGM par rapport aux matériaux composites classiques, voir figure, I.3, I.4 et I.5. [Hashmi. 2014]



*Figure I.3 : Une vue microscopique d'un FGM [Hashmi. 2014]*



*Figure I.4 : La microstructure d'un FGM [Hashmi. 2014]*



*Figure I.5 : Microphotographie d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique [Hashmi.2014]*

#### **I.4. Modélisation des propriétés matérielles effectives**

La fabrication des FGM peut être considérée par le mélange de deux phases distinctes de matériaux, par exemple, un mélange distinct d'un métal et une céramique. Souvent, l'information précise de la forme et de la distribution des particules peut ne pas être disponible.

Ainsi, les propriétés effectives des matériaux FG, module d'élasticité, module de cisaillement, la densité, etc. sont en cours d'évaluation sur la base seulement de la distribution de la fraction volumique et la forme approximative de la phase dispersée.

Plusieurs modèles micromécaniques ont été développées au cours des années afin de déduire les propriétés effectives des matériaux composites macroscopiquement homogènes.

Les approches analytiques, les méthodes d'éléments finis et les modèles micromécaniques sont fréquemment utilisés pour la modélisation des FGM. Les sujets les plus importants de la modélisation des FGM sont : les déformations élastiques, les contraintes élastiques, déformation plastique et la déformation au fluage à température élevée, la propagation des fissures, etc. Les différentes approches analytiques disponibles dans la littérature pour la modélisation des FGM sont présentées dans les sections suivantes.[Reddy, (1984);

#### ***1.4.1. La loi des mélanges***

Selon la règle des mélanges, une propriété de matériau arbitraire, notée  $P$ , d'un FGM est supposée varier en douceur le long d'une direction, en fonction des fractions de volume et les propriétés des matériaux constitutifs. Considérant des plaques FGM, la direction variable est le sens de l'épaisseur



*Figure I.6 : Une plaque à gradient de propriété [Kanaun. 2008]*

Dans ce contexte,  $P$  peut représenter, par exemple, le module d'élasticité, la masse volumique et / ou le coefficient de Poisson. Cette propriété peut être exprimée comme une combinaison linéaire. [Markworth et Saunders. 1995]

$$P(z) = P_1V_1 + P_2V_2 \quad (\text{I.1})$$

Où  $z$  est la direction variable,  $P_1$ ,  $V_1$  et  $P_2$ ,  $V_2$  sont les propriétés du matériau et les fractions volumiques du matériau constitutif 1 et 2, respectivement. La somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs doivent être égal à 1 :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.2})$$

La fraction volumique  $V_1$  est supposée avoir une distribution de loi de puissance suivante [Markworth et Saunders. 1995] :

$$V_1 = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{I.3})$$

Et par conséquence :

$$V_2 = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{I.4})$$

Où  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Le paramètre  $n$  est l'indice de loi de puissance qui conte des valeurs réelles positives et donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur.

Les matériaux constitutifs 1 et 2 peuvent être, par exemple, en céramique et en métal, respectivement. Selon cette répartition, la surface inférieure,  $z = -x / 2$ , de la plaque à gradient de propriété est en métal pur et la surface supérieure,  $z = h / 2$ , est en céramique pure. Cette hypothèse loi de puissance reflète une simple loi de mélanges utilisée pour obtenir les propriétés réelles d'un FGM. La teneur en matières 2 dans la plaque augmente à mesure que la valeur de  $n$  augmente. La valeur de  $n = 0$  représente une plaque en matériau 1 homogène.

Le modèle (I.1) fournit des valeurs exactes de la masse volumique  $p$  et assez bonnes valeurs pour d'autres propriétés mécaniques. Une détermination plus précise des propriétés des matériaux macroscopiques nécessite une meilleure compréhension de la microstructure.

Afin de décrire les fractions de volume d'un matériau FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde. [Markworth et Saunders. 1995]

#### ***1.4.1.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM***

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h}\right)^p \quad (\text{I.5})$$

Où  $p$  est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local  $V(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = V(z)E_1 + (1 - V(z))E_2 \tag{I.6}$$

Où :  $E_1, E_2$  sont les modules d'Young des matériaux constituant la plaque P-FGM pour ( $z = h/2$ ), ( $z = -h/2$ ), respectivement. [Cheng, H., 1998]

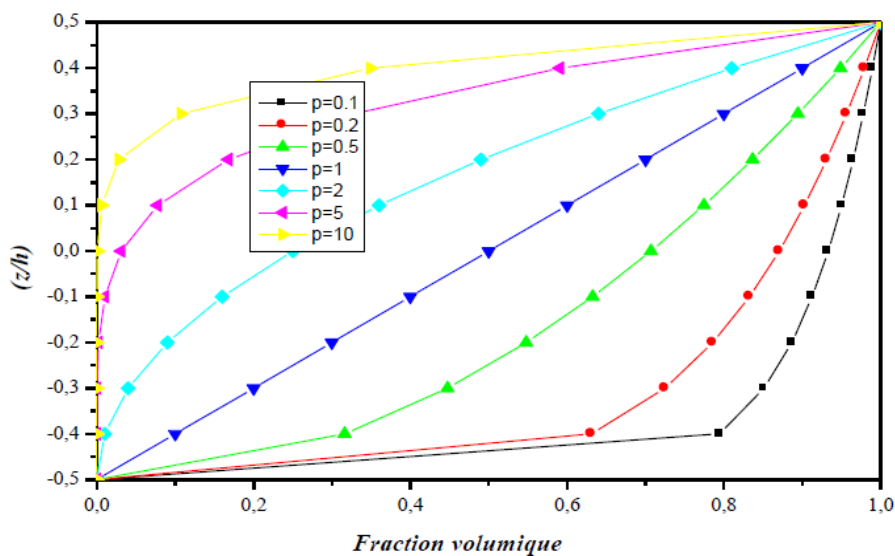


Figure I.7 : La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM [Bao. 1995].

**I.4.1.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM**

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par : [Yung., 1996]

$$\begin{aligned}
 V_1(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p && \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \\
 V_2(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p && \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0
 \end{aligned} \tag{I.7}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + (1 - V_1(z))E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + (1 - V_2(z))E_2 \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{I.8}$$

La figure I.8 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.7) et (I.8) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

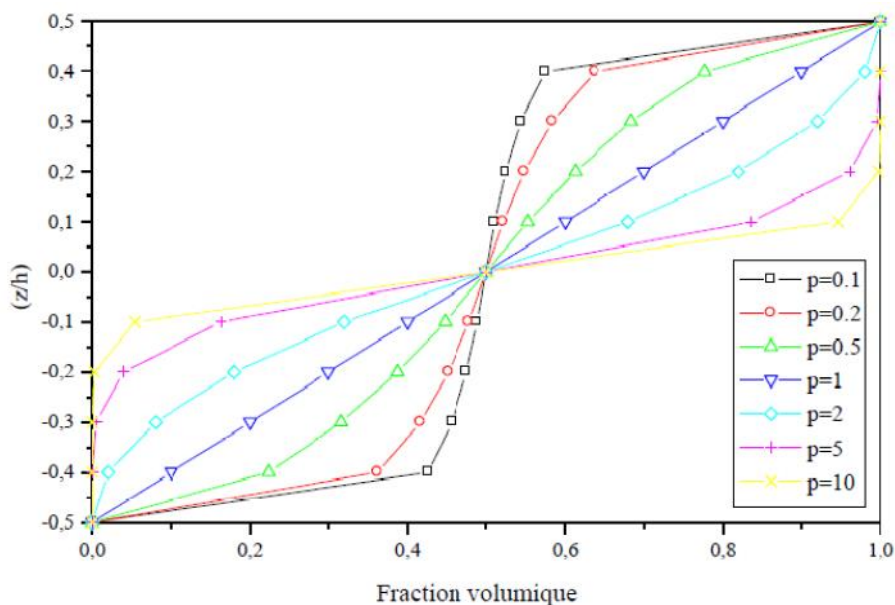


Figure I.8 : La variation du module d'Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM [Chi. 2003].

### I.4.1.3. Propriétés matérielles de plaque E-FGM

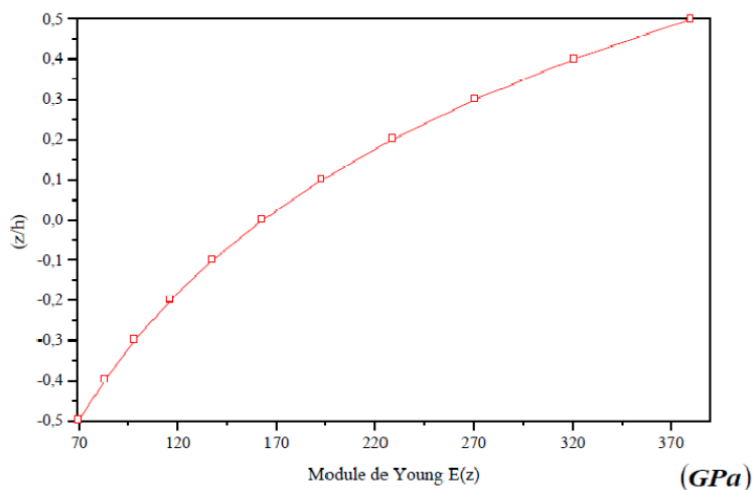
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme : [Dela., 1983]

$$E(z) = Ae^{B \cdot (z+h/2)} \tag{I.9}$$

Avec :

$$A = E_2 E_1 \quad B = \frac{1}{h} \cdot \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \tag{I.10}$$

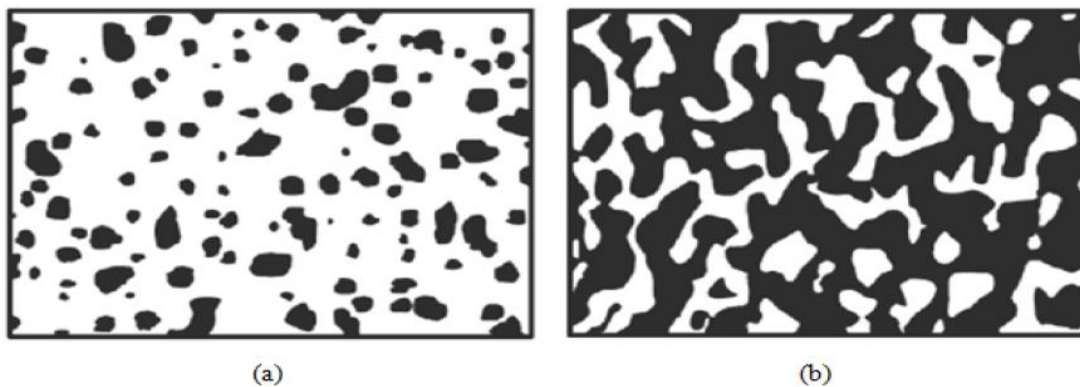
La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans (Figure I.9).



*Figure I.9 : La variation du module d' Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM [Delale. 1983].*

#### ***1.4.2. Le modèle du Mori-Tanaka***

Le modèle Mori-Tanaka [Tanaka. 1997] est utilisé pour estimer les propriétés effectives du matériau. Elle représente à peu près l'interaction entre les inclusions voisines et elle est généralement applicable à des régions de la microstructure graduée ayant une matrice continue bien définie et une phase particulière discontinue, telle que représentée sur la figure I.10 (a). Il est supposé que la phase de matrice, indiquée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques d'une phase particulière, désignée par l'indice 2. Dans cette notation,  $K_1$ ,  $\mu_1$  et  $V_1$  représentent la masse volumique, le module de cisaillement et la fraction volumique de la phase de matrice, respectivement.  $\mu_2$  et  $V_2$  représentent les propriétés du matériau correspondant et la fraction volumique de la phase particulière. Il est connu que la constante  $\lambda$  est reliée à la masse volumique et le modules de cisaillement par la relation suivante :





**Figure I.10 :** Matériaux à deux phases (a) des particules en microstructure (b) Squelette en microstructure [Kanaun. 2008]

$$\lambda = K - 2\mu/3 \quad (\text{I.11})$$

La densité de la masse effective est donnée exactement par la règle des mélanges, eq.

$$\rho = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \quad (\text{I.12})$$

Selon le procédé de Mori-Tanaka pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, le module de compressibilité  $K$  localement efficace et le module de cisaillement  $\mu$  sont donnés par:

$$K - K_1/K_2 - K_1 = \frac{V^2}{1 + (V_1 + V_2) \cdot K_2 - K_1 / 3K_1 - 4K\mu_1}$$

$$\mu - \mu_1/\mu_2 - \mu_1 = \frac{V^2}{1 + (V_1 + V_2) \cdot \mu_2 - \mu_1 / \mu_1 + f_1} \quad (\text{I.13})$$

Où :

$$f_1 = \mu_1 \cdot 9K_1 + 8\mu_1 / 6(K_1 + 2\mu_1) \quad (\text{I.14})$$

La variation à travers l'épaisseur de  $V_2$  est supposée être donnée par la fonction de puissance suivante:

$$V_2 = V_2^- + (V_2^+ - V_2^-) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (\text{I.15})$$

Où les exposants + et - signifient respectivement les valeurs de la quantité sur la partie supérieure et les surfaces inférieures de l'élément structurel et le paramètre  $N$  décrit la variation de la phase 2. Par exemple,  $N = 0$  et  $N = \infty$  correspondent à des distributions uniformes de phase 2 avec des fractions de volume  $V_2^+$  et  $V_2^-$  respectivement. Rappelant que le module de compressibilité  $K$  et le module de cisaillement  $\mu$  sont liés au module Young  $E$  et le coefficient de poisson par les formules suivantes [Kanaun. 2008] :

$$K = E/3(1-2\nu), \mu = E/2(1+\nu) \quad (\text{I.16})$$

Les valeurs effectives du module d'Young et le coefficient de Poisson sont données comme :

$$E = 9K\mu/3K + \mu, \nu = 3K - 2\mu/2(3K + \mu) \quad (\text{I.17})$$

### ***1.4.3. Le modèle auto-cohérent***

Le procédé auto-cohérent [Hill. 1965] suppose que chaque inclusion de renforcement est noyé dans un matériau continu, dont les propriétés efficaces sont celles du composite. Cette méthode ne permet pas de distinguer entre la matrice et les phases de renforcement et le même module d'ensemble sont prévus dans un autre composite, dans lequel les rôles respectifs des phases sont

remplacés. Cela le rend particulièrement approprié pour la détermination des modules effectifs dans les régions qui ont du squelette en microstructure interconnecté comme représenté sur la figure I.10 (b). Les modules élastiques locale,  $K$  et  $\mu$  par la méthode d'auto-cohérent sont donnés par :

$$\frac{\delta}{K} = \frac{V_1}{K-K_2} \frac{V_2}{K-K_1} \quad (\text{I.18})$$

$$\frac{\eta}{\mu} = \frac{V_1}{\mu-\mu_2} \frac{V_2}{\mu-\mu_1} \quad (\text{I.19})$$

$$\delta = 3 - 5 \eta = \frac{K}{K-3\mu/3} \quad (\text{I.20})$$

Ces expressions sont implicites pour les inconnues  $K$  et  $\mu$ . Après substitution pour  $\delta$  équation (I.20) peut être résolue pour  $K$  en termes de  $\mu$  sous la forme :

$$\frac{1}{K+4\mu/3} = \frac{V_1}{K_1+4\mu/3} + \frac{V_2}{K_2+4\mu/3} \quad (\text{I.21})$$

Ça donne :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{K_1+4\mu/3} + \frac{V_2}{K_2+4\mu/3}} - 4\mu/3 \quad (\text{I.22})$$

Le paramètre  $\mu$  est obtenu en résolvant de l'équation suivante :

$$(1-\eta)\mu^2 + [\eta(\mu_1 + \mu_2) - (V_1\mu_1 + V_2\mu_2)]\mu - \eta\mu_1\mu_2 = 0 \quad (\text{I.23})$$

Où le paramètre  $\eta$  peut être trouvé à partir de l'équation. (I.21). Etant donné que l'équation (I.23) doit être résolue pour trouver le module de cisaillement  $\mu$ , en général, il est plus facile d'utiliser la méthode Mori-Tanaka que le modèle d'auto-cohérent. Il convient de noter que les différences dans la distribution de propriétés matérielles entre le Mori-Tanaka et le modèle d'auto-cohérent sont négligeables.

## I.5. Caractérisation des propriétés

La méthode la plus simple pour estimer la composition transitoire d'un FGM est d'appliquer la règle des mélanges. En utilisant un procédé similaire à calculer un problème classique de la conduction thermique dans un corps constitué de couches multiples, la conductivité thermique et le gradient de température d'un FGM unidimensionnel peut alors être déterminé [Hopkinson, 2006].

### ***1.5.1. Propriétés thermiques***

#### ***1.5.1.1. Coefficient de dilatation thermique***

L'expansion ou la contraction thermique d'un matériau est donnée par le coefficient de dilatation thermique et la différence de température connue. En raison de la composition et de la structure variée dans un FGM, la dilatation thermique de différents composants affecte de manière significative la performance fonctionnelle et mécanique des FGM.

La recherche a été consacrée à l'étude de la dilatation thermique dans les FGM afin d'optimiser la composition graduelle à travers la relaxation des contraintes thermiques. Le coefficient de dilatation thermique (CTE) peut être mesuré à l'aide d'un dilatomètre. Une mesure détaillée en deux ou trois dimensions peut être faite en utilisant l'interférométrie laser ou corrélation d'images numériques [Miyamoto. 1999, Hopkinson. 2006].

#### ***1.5.2. Module d'élasticité***

Pour déterminer le module d'Young globale d'un FGM, la courbe contrainte-déformation habituelle peut être mesurée par la fixation d'une jauge de contrainte à la surface de l'échantillon lors d'un essai de flexion à quatre points.

La dépendance du module d'Young de la composition d'un FGM peut être estimée par la mesure des fréquences de résonance en flexion d'un spécimen de barres rectangulaires en utilisant une technique de résonance forcée.

Alternativement, la distribution du module d'Young et le coefficient de Poisson peut être mesurée simultanément en utilisant LFB (line-focus-beam) microscope acoustique. L'intensité relative de l'onde de la surface-reflétée reçue est mesurée en fonction de la distance entre la lentille acoustique et l'échantillon [Miyamoto. 1999, Hopkinson. 2006].

#### ***1.5.3. La déformation et la résistance***

La résistance et la déformation d'un FGM sont généralement évaluées par des essais de traction et des essais de flexion à trois ou quatre points. La contrainte résiduelle, provenant du refroidissement de la température de traitement, a une forte influence sur le comportement à la traction des FGM en changeant l'état de contrainte à la traction ou à la compression, et par écrouissage lorsque la limite élastique est dépassée [Miyamoto. 1999, Hopkinson. 2006].

## **I.6. Une revue sur les techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés**

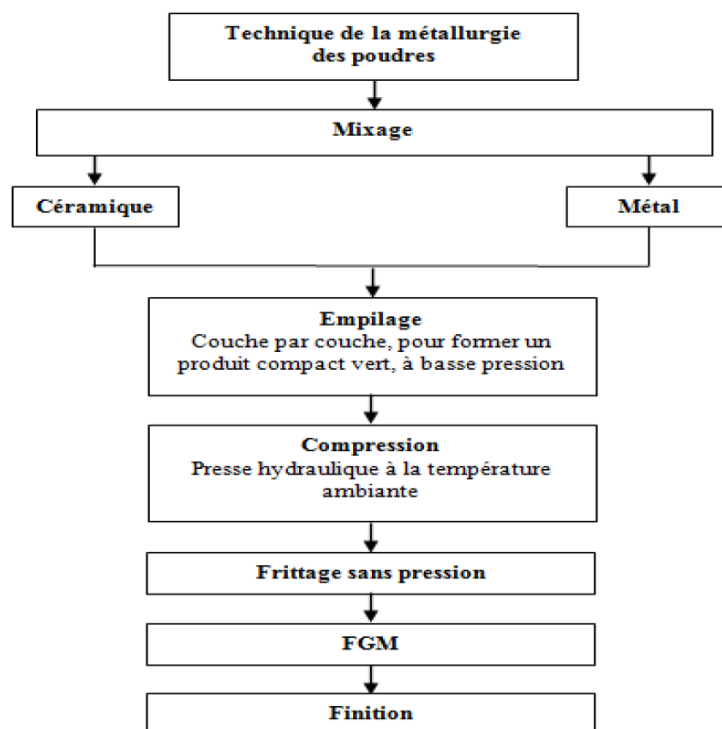
Afin de fabriquer avec succès les spécimens FGM, les chercheurs ont appliqué la combinaison optimale de plusieurs méthodes en fonction des propriétés des composants de matériaux [Kiebeck. 2003, Miyamoto. 1999, Li. 2003, Jamaludin. 2013]. Les techniques existantes et les plus à jour pour la fabrication des FGM seront examinés en ci-dessous [Jamaludin. 2013] :

### *1.6.1. Procédé de poudre sèche*

PM (powder metallurgy) est une technologie apparente pour la fabrication du FGM et elle est de plus en plus utilisée pour créer des gradients sur les matériaux. Cette méthode est appropriée pour la fabrication du FGM utilisant des matériaux solides.

Ici la technique est utilisée pour produire des matériaux à gradient de propriétés en trois étapes de base à savoir : le pesage et le mélange de poudre en fonction de la répartition spatiale de préconçue comme dictée par l'exigence fonctionnelle, d'empilage et de damage des poudres pré-mélangées, et enfin, le frittage comme illustré à la figure I.11.

La méthode de métallurgie des poudres est l'une des techniques les plus couramment utilisées en raison de son contrôle de la grande plage de la composition, la microstructure et la capacité de mettre des formes [Ramachandran. 2015, Wazery. 2012, Saiyathibrahim. 2015].



*Figure I.11 : Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM [Saiyathibrahim. 2015]*

### ***1.6.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)***

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

formation du tesson ou "prise";

consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:[Yang .2003].

du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique ; [Moya 1992]);

ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### ***1.6.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting)***

Le coulage centrifuge est l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter les FGM en raison de son large contrôle de la composition et de la microstructure. La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques. Les deux types de base des machines de coulée centrifuge sont : les types horizontaux, qui tournent autour de l'axe horizontal, et le type vertical, qui tourne autour d'un axe vertical. Les machines de coulée centrifuge horizontale sont généralement utilisées pour fabriquer des tuyaux, des tubes, des douilles, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple. La coulée centrifuge est un procédé dans lequel le métal fondu est canalisé dans un moule tournant (habituellement de 700 à 1300 tr / min). La rotation de la matrice crée une force centrifuge qui pousse le métal vers la paroi du moule. La distribution graduelle dans les FGM fabriquées par la méthode centrifuge est fortement influencée par de nombreux paramètres tel que la densité entre les particules et le métal fondu, la taille des particules, la viscosité du métal fondu, la fraction volumique moyenne des particules, l'épaisseur du noyau et le temps de solidification .La méthode centrifuge de

poudres mixtes montrée dans La figure I.12 est une autre méthode introduite en tant que solution à la limitation de la méthode de coulée centrifuge dans la fabrication de FGM contenant des particules de taille nano.[Moya (1992);

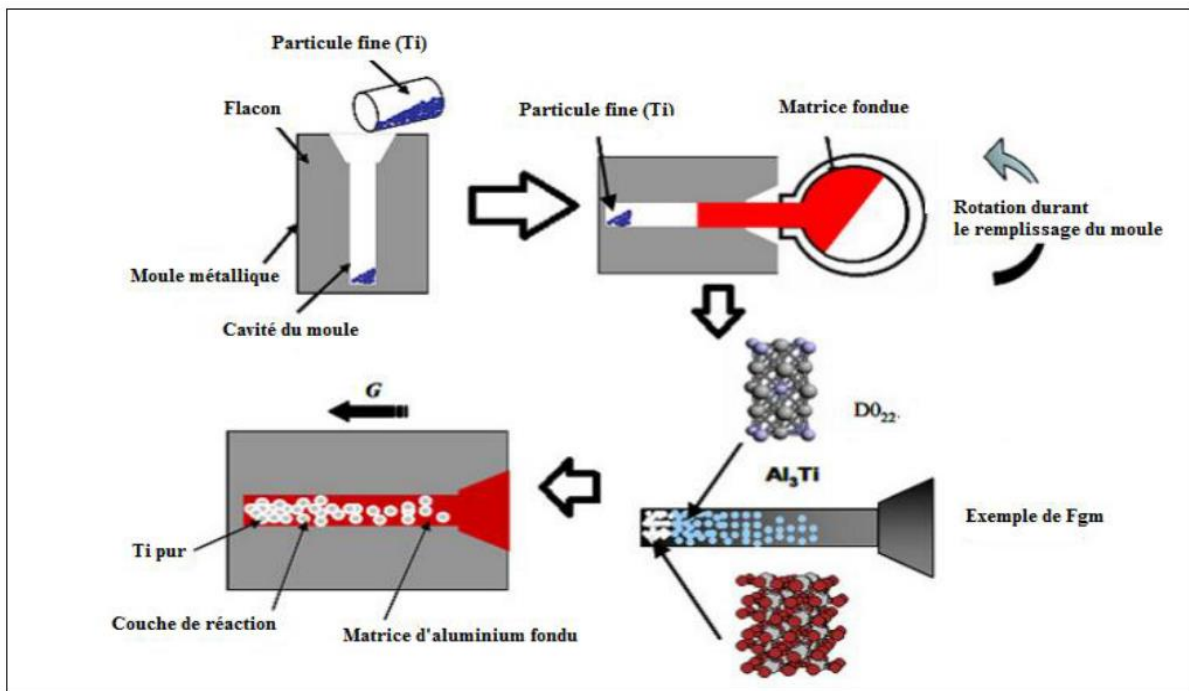


Figure I.12 : Le coulage centrifuge des poudres mixtes ;[Na et Kim(2004).]

#### I.6.4. Le coulage en bande (Tape Casting)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (Figure I.13), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande ;Lostec (1997).Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermisssement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés. [Houari, M.S.A., 2011]

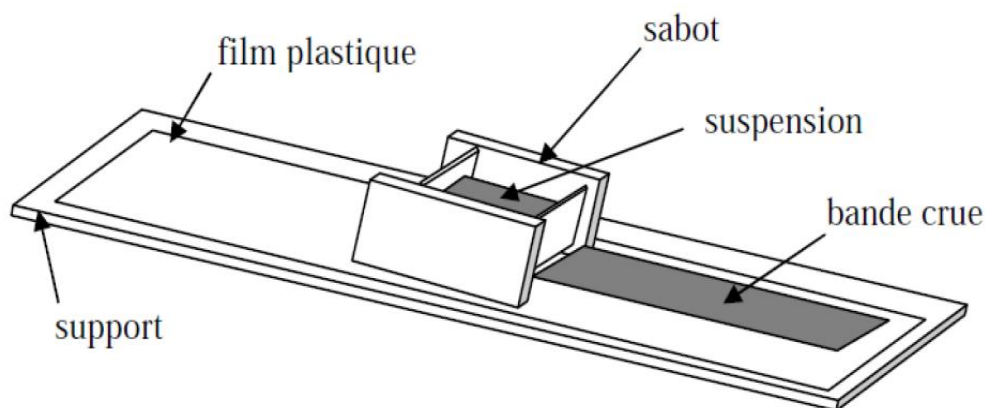


Figure I.13 : Principe de la méthode coulage en bande ;[Na et Kim(2004).]

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par ;

[Mistler(1973)] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression ;

#### ***1.6.5. Pressage à chaud***

La zircone stabilisée par l'yttria (YSZ) et le nickel 20 chrome (NiCr) sont les deux matériaux combinés en utilisant YSZ-NiCr FGM inter-couche via la méthode de pressage à chaud [Li. 2003]. À l'étape initiale du traitement, la poudre YSZ et NiCr ont été mélangés dans la boule fraiseuse pendant 12 h avant d'être empilés couche par couche en graphite filière revêtue de nitrure de bore. Cette étude applique le concept de dégradation progressive en disposant la composition de chaque couche pour être en pourcentage désiré.

Le pré-compactage de chaque couche a été réalisé sous une pression inférieure avant de stocker la couche adjacente sous une pression supérieure (10 MPa) pour assurer la distribution de composition exacte dans les couches. La jonction de YSZ-NiCr qui a été effectuée à 1200 °C pour 1h présente une bonne stabilité thermique et une résistance à l'oxydation jusqu'à 1000 °C avant d'initier la fissure [Ramachandran. 2015, Wu. 2005, Jamaludin. 2013].

#### ***1.6.6. Processus de frittage***

La gradation qui a été effectuée dans la poudre compacte doit être préservée au cours du processus de frittage ou de consolidation. Certains des poudres métalliques légers, tels que le magnésium et l'aluminium aura tendance à réagir avec l'oxygène et de se disperser dans l'atmosphère qui doit être évitée afin d'obtenir des matériaux appropriés qui en résultent.

Le procédé de frittage est réalisé en même temps que le processus de compactage si le FGM est préparé au moyen du traitement de pressage à chaud. Cependant dans le processus de pressage à froid, le procédé de frittage est effectué seulement après que les poudres ont été compactés [Watari. 2003, Jamaludin. 2013].

#### ***1.6.7. Processus d'infiltration***

Infiltration ou le terme scientifique appelé l'hydrologie est le processus pour lequel le fluide sur la surface précipite dans le sol. Ce processus est dirigé soit par la gravité ou la forces d'action capillaire. Le taux d'infiltration est dépend des caractéristiques du sol tels que la capacité de stockage, le taux de transmission à travers le sol et la facilité d'entrée. Le taux et la capacité du processus d'infiltration peut être contrôlée en ajustant certains paramètres, y compris la texture du sol, les types de végétation et de la couverture, la teneur en eau dans le sol, la température du sol et de l'intensité des précipitations. Comme le processus commun pour la mise en forme du moule est le chauffage de la poudre à une température qui est supérieure à la phase liquide.

D'après la littérature, il existe un nombre limité de mise en oeuvre du processus d'infiltration. La méthode d'infiltration a été mise en place pour le traitement des FGM depuis de nombreuses années auparavant. Un gradient de composition Al-SiCp a été fabriqué avec succès en utilisant la méthode d'infiltration sans pression au début de la dernière décennie. Il a été indiqué que la conductivité thermique du FGM produit de plus en plus tendance non linéaire tandis que la fraction volumique de l'élément en céramique diminue [Cho. 2004, Jamaludin. 2013].

#### ***1.6.8. Projection thermique :***

La projection thermique est une technique pour laquelle une structure est revêtue de matériaux fondus à travers d'un processus de pulvérisation. Concernant le processus avec la préparation FGM, les matières fondus seront les matériaux à gradient variés qu'ont construit des couches de revêtement. Dans ce procédé, le précurseur de revêtement est chauffé électriquement ou chimiquement. Un des avantages de l'utilisation de cette technique est que ce revêtement peut fournir des revêtements épais (20  $\mu\text{m}$  to mm). En 2002, trois types de revêtements à gradient de propriétés de barrière thermique (TBCs) ainsi que des revêtements en double avec la même résistance thermique ont été conçus dans le but d'étudier le comportement thermique à la rupture des structures FGM [Jamaludin. 2013].

### **I.7. Application**



Les matériaux FGM sont largement utilisés pour des applications mécaniques soit en aérospatial ou aéronautique, électriques comme les diodes électroniques, les capteurs, les conducteurs de chaleur, et les dispositifs électroniques, et même dans les secteurs chimiques et biologiques. En raison du développement du concept de FGM dans les années 1990, leur utilisation pratique est encore très limitée. Grace à leurs propriétés mécaniques et thermique ces matériaux sont utilisés dans des différentes domaines tel que.[Saiyathibrahim. 2015].

### *1.7.1. Dans l'aérospatiale et l'automobile*

Le secteur de l'aérospatiale est l'un des secteurs qui montre plus d'intérêt au développement des FGM. NASA et la JAXA ont montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils soulèvent dans l'espace, la création de pièces avec des éléments de connexion moins est une solution. En outre, la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale. La protection de bouclier thermique des navettes spatiales pourrait être optimisée pour réduire le poids et augmenter la fiabilité en utilisant des plaques FGM.

Bhatt [Bhatt. 2000] a montré l'utilisation de céramiques à base de nitrure de silicium pour les aubes de distributeur de turbine. Le nitrure de silicium supporte des températures élevées, mais a un coût de traitement élevé et faible résistance aux chocs. En utilisant des technologies SFF, la métallurgie des poudres et la coulée de gel ont été étudiés comme des alternatives pour produire des pièces viables. Aboudi, Pindera et Arnold [Aboudi. 2000] ont présenté l'utilisation des FGM pour adapter la réponse des composants structurels par la théorie d'ordre élevé. L'objectif était d'analyser la performance du gradient par la modélisation de la microstructure en utilisant le modèle de l'élément fini (FEM). Des travaux ultérieurs présentés par Arnold [Arnold. 2001] appliquent le modèle théorique pour simuler la réponse du FGM pour le refroidissement des plaques de blindage thermique pour les navettes spatiales [Hopkinson. 2006, Saiyathibrahim. 2015].

### *1.7.2. Dans la médecine*

Les Tissus vivants tels que les os et les dents sont caractérisées en tant que matériau à gradient de propriétés naturel [W. Pompea et al., 2003], pour remplacer ces tissus, un matériau compatible est nécessaire qui serviront aux fins de la bio-tissu original. Le FGM set la substance idéale pour cette application. Le matériau FGM a trouvé une large gamme d'applications en

chirurgie dentaire [S. Matsuo et al., 2001] et des applications orthopédiques pour les dents et le remplacement osseux [F. Watari et al., 2004]

### *1.7.3. Dans la défense*

L'une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient de propriété est la capacité à inhiber la propagation de fissure. Cette propriété rend utile dans le secteur de la défense, comme des matériaux résistants aux pénétrations utilisés pour plaques de blindage et des gilets pare-balles [L. Lu et al., 2011].

### *1.7.4. Dans l'industrie*

Un rouleau en céramique adapté pour diverses applications dans les industries hybrides constitué de nitrure de silicium comme matériau de base. Ce matériau possède d'excellentes propriétés mécaniques, idéal pour les applications de support de charge. Dans de nombreux cas, les composants entiers sont réalisés en carbure de tungstène, pour une application nécessitant des propriétés de résistance à l'usure. Avec un gradient, l'utilisation de carbures coûteux peut être réduite au minimum; réduisant ainsi le coût total du composant. Les composites à gradient de propriétés à matrice métallique (FGMMCs), particulièrement gradient à matrice d'aluminium, ont été utilisés dans des applications importantes dans l'industrie tels que l'emballage électronique, les ensembles de frein de rotor dans l'industrie automobile et les matériaux de blindage [Saiyathibrahim. 2015].

### *1.7.5. Articles de sports*

Divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités [JAXA and JST. 2004]. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance. Avec la même idée de réduction d'usure, des outils d'escalade sur glace tels que crampons et piolets pourraient être gradué avec le carbure de tungstène dans les arêtes vives qui capte la glace. Les outils de l'escalade de rocher auraient également le même avantage de réduire l'usure tels que sur les surfaces de came [Hopkinson. 2006, Saiyathibrahim. 2015].

## **I.8. Conclusion**

Les matériaux FGM sont des excellents matériaux de pointe qui vont révolutionner le monde de la fabrication, ils ont été développés en combinant des matériaux d'ingénierie avancée sous forme de particules, de fibres, ou de plaquettes.

Le changement continu de leurs propriétés a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter une structure du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles et améliorer des propriétés spécifiques dans la direction préférée, les rendant ainsi meilleurs que les matériaux homogènes constitués de composants similaires.

Ce chapitre présente un aperçu sur ces matériaux et l'historique de leur origine, les différentes méthodes de fabrication ont été mis en évidence, Leurs domaines d'application sont également présentés, ces derniers qui peuvent être améliorés et élargies en abaissant les coûts de fabrication et en améliorant les méthodes d'élaboration.

## ***CHAPITRE II***

***Une revue de littérature des  
théories et des études sur les  
plaques FGM***

## **II.1. Introduction**

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [Noor 1989, Kapania 1989, Kant 2000, Carrera 2000] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses.

## **II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles**

### *II.2.1. Approche monocouche équivalente*

Les théories des couches équivalentes (ESL) sont dérivées de la théorie de l'élasticité 3-D en faisant des hypothèses appropriées concernant la cinématique de déformation ou de l'état de contrainte à travers l'épaisseur du stratifié, Nous présentons ici une revue des théories monocouches équivalentes.

Les théories monocouches équivalentes en stratifié sont celles dans lesquelles une plaque stratifiée hétérogène est traitée comme un équivalent statique, la couche unique ayant un comportement constitutif isotrope, ce qui réduit le problème continu 3-D à un problème 2-D.

Les théories ESL sont développées en supposant par la forme du champ de déplacement ou de champ de contrainte comme une combinaison linéaire de fonctions inconnues et les coordonnées d'épaisseur.

La théorie stratifiée ESL la plus simple est la théorie classique de la plaque laminée (CLPT), qui est une extension de la théorie de la plaque de Kirchhoff (classique) des plaques composites stratifiées. L'hypothèse Kirchhoff implique que les lignes droites perpendiculaires au plan médian de la plaque avant déformation restent droites et normales à la surface moyenne après la déformation, et par conséquent, à la fois l'effet du cisaillement transverse et l'effet transverse normal sont négligés. Dans la plupart des cas, ces hypothèses tiennent. Cependant, pour les

stratifiés épais et les stratifiés avec un haut degré d'anisotropie, les effets de déformation transversales peuvent être importants. La prochaine théorie dans la hiérarchie des théories de stratifié ESL est le premier ordre.

Les théories de déformation de cisaillement (FSDT), qui prolongent la cinématique du CLPT en incluant une déformation de cisaillement transversal brut dans ses hypothèses cinématiques, à savoir, la déformation de cisaillement transversal est supposée être constante par rapport aux coordonnées de l'épaisseur. L'inclusion de cette forme rudimentaire de déformation de cisaillement permet la restriction de la normalité de la théorie classique des stratifiés pour être détendu. La théorie du premier ordre de déformation de cisaillement nécessite des facteurs de correction de cisaillement, qui sont difficiles à déterminer pour les structures composites stratifiées arbitrairement. Les facteurs de correction de cisaillement dépendent non seulement des paramètres de laminage et géométriques, mais aussi de la charge et les conditions aux limites [Carlos. 1999].

Les théories de la plaque laminée ESL de deuxième et d'ordre supérieur utilisent des polynômes d'ordre supérieur dans l'expansion des composantes de déplacement à travers l'épaisseur du stratifié. Les théories d'ordre supérieur introduisent des inconnues supplémentaires qui sont difficiles à interpréter en termes physiques.

En plus de leur simplicité inhérente et le faible coût de calcul, les modèles d'ESL fournissent souvent une description suffisamment précise de la réponse globale mince à modérément épaisse stratifiés, par exemple, les flèches brutes, les charges du flambement critique, les fréquences fondamentales de vibration et les formes de mode associés. Parmi les théories de l'ESL, la théorie FSDT avec l'extensibilité transversale semble fournir une solution précise, économique et simple. Cependant, les modèles d'ESL ont des limitations qui les empêchent d'être utilisé pour résoudre l'ensemble du spectre des problèmes de stratifiés composites. Tout d'abord, la précision de la réponse globale prédite par les modèles d'ESL se détériore lorsque le stratifié devient plus épais. Deuxièmement, les modèles d'ESL sont souvent incapables de décrire avec précision l'état de contrainte et de déformation au niveau du pli près de géométriques et matérielles discontinus ou régions proches de chargement intense - les zones où les contraintes précises sont le plus nécessaires. Dans de tels cas, les théories 3D ou des modèles d'approches multiples sont requis [Carlos. 1999].

**II.2.1.1. Théorie classique des plaques**

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $l/h$ ).

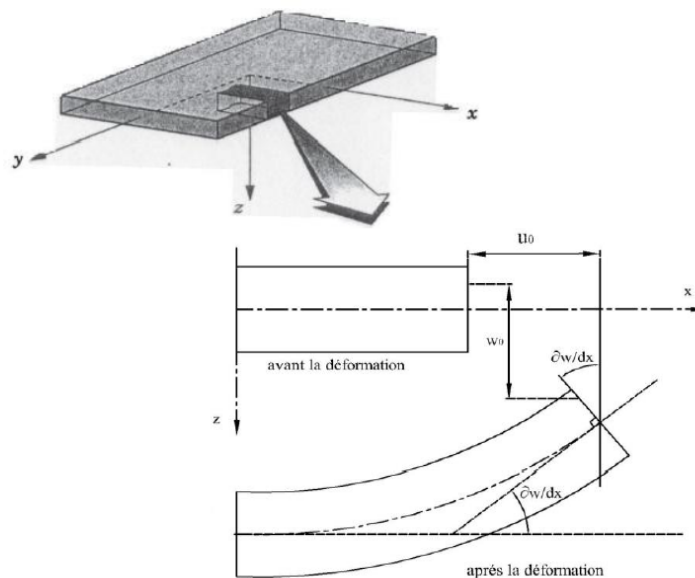
La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-

Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (Figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959], [Reddy, 1997], [Reddy, 1999]. En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$\begin{aligned}
 v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x,y,z) &= w_0(x,y)
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Avec ( $u_0, v_0, w_0$ ) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z=0$ ).



*Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff [Reddy, 1997].*

Ce champ se décompose en:

- Déplacement de la membrane  $u_0(x,y), v_0(x,y)$

- Déplacement dû à la flexion  $Z \frac{\partial w_0}{\partial x}$ ,  $Z \frac{\partial w_0}{\partial y}$
- Déplacement transversal  $w_0(x, z)$

Sous ces considérations, les sections droites de la plaque ne subissent aucun glissement, en effet:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.2a})$$

Qui en résulte une contrainte nulle de cisaillement :

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad (\text{II.2b})$$

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

### II.2.1.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre FSDT

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Cette théorie est basée sur l'hypothèse que la section droite initiale reste plane mais non perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans [Reissner, 1945], [Mindlin 1951] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Timoshenko, 1959], [Reddy, 1997], [Reddy, 1999].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \theta_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\theta_x, \theta_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement.



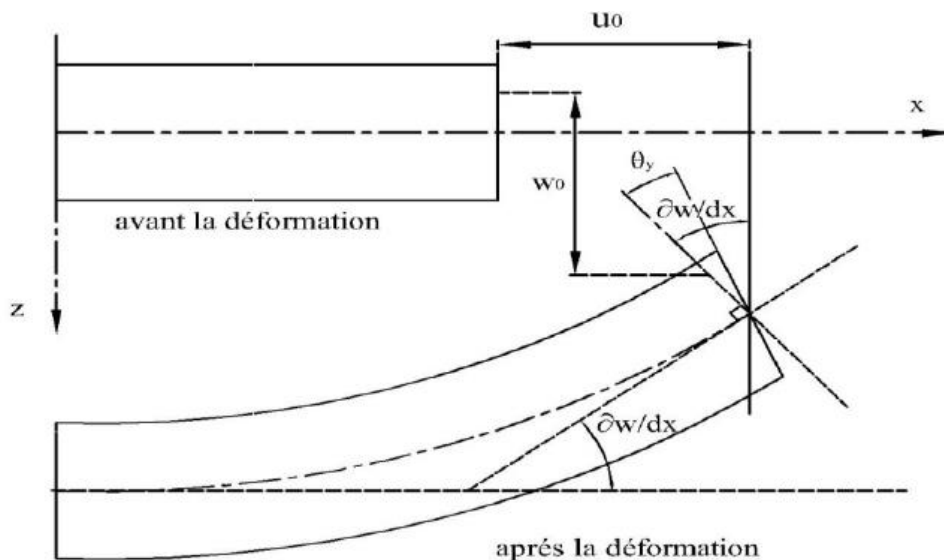


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997]

Ce champ se décompose en:

- Déplacement de la membrane  $u_0(x,y), v_0(x,y)$
- Déplacement dû à la flexion  $z \frac{\partial w_0}{\partial x}, z \frac{\partial w_0}{\partial y}$
- Déplacement transversal  $z \theta_x(x,y), z \theta_y(x,y)$

Si on veut calculer la contrainte de cisaillement :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \theta_x$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot \theta_x \tag{II.4}$$

Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui ne représente pas la réalité ; ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction pour régler ce problème.



Figure II.3 : La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT [Reddy, 1997]

II.2.1.3. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT

À la différence de la théorie classique et de celle de Reissner-Mindlin avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand et al., 1949 ; Naghdi, 1957 ; Reissner, 1975 ; Reddy, 1984 ; Kant et Swaminathan, 2002].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + f(z)\theta_x(x,y) \\
 v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + f(z)\theta_y(x,y) \\
 x(x,y,z) &= w_0(x,y)
 \end{aligned}
 \tag{II.5}$$

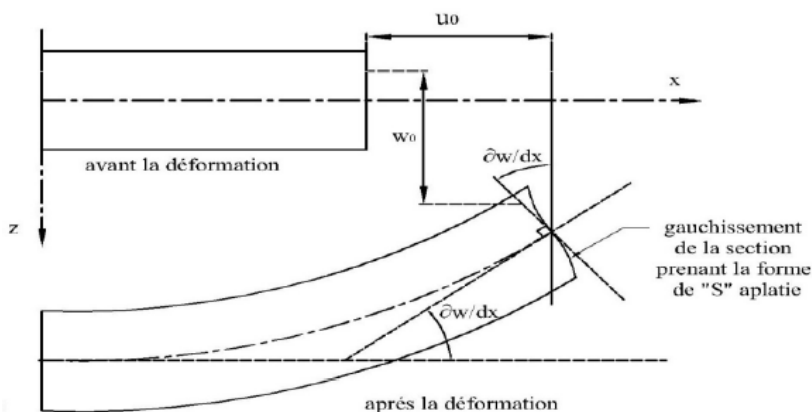


Figure II.4: Illustration de la cinématique de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].

On trouve les mêmes parties : le déplacement de la membrane, le déplacement dû à la flexion et le déplacement dû au cisaillement. Mais cette fois, le déplacement axial dû au cisaillement n'est plus linéaire. Donc, on remplace le « z » pour la théorie précédente par une fonction  $f(z)$  qu'on l'appelle « fonction de gauchissement » ou « fonction de forme ». Cette dernière représente l'allure de la déformation de la section transversale, c'est ce qu'on appelle « le gauchissement », donc elle doit être impaire pour prendre la forme de « S » aplatie qui est remarquée lors de la déformation de la plaque. La fonction de gauchissement doit aussi

satisfaire les conditions aux limites de la nullité des contraintes tangentielles aux surfaces supérieur et inférieur de la plaque. [Reddy, 1997]

Donc :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + f'(z) \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = f'(z) \theta_x$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot f'(z) \theta_x \Rightarrow f'(\pm h/2) \quad (\text{II.6})$$

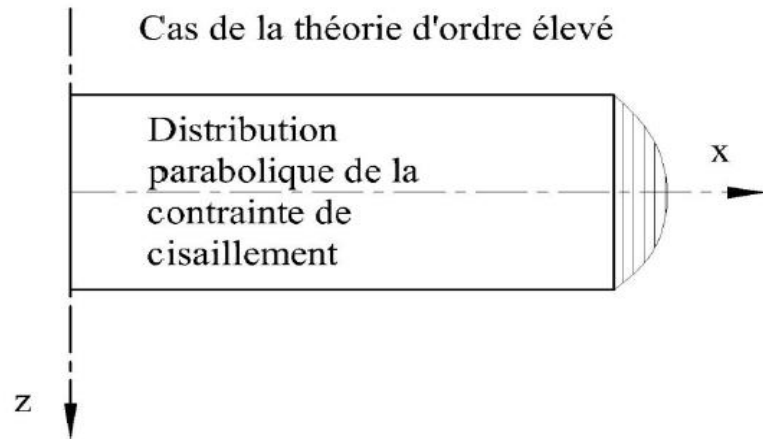


Figure II.5 : La distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT. [Reddy, 1997]

On représente ci-dessous quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement  $f(z)$  :

Murthy et Reddy :  $f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} \frac{z^2}{3} \right)$

Ambarsumyan :  $f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$

Reissner :  $f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - 4 \frac{z^2}{3h^2} \right)$

Touratier :  $f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$

Ferreira :  $f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$

Karrama :  $f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$

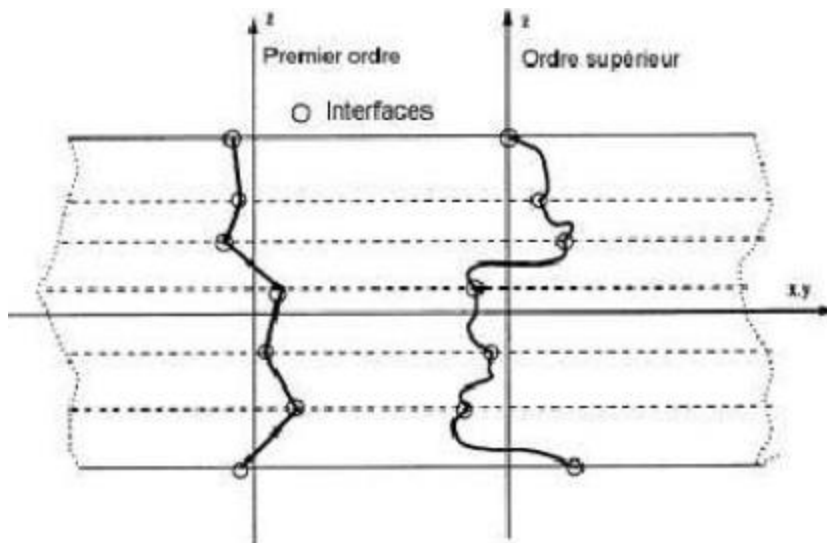
Soldatos :  $f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh(1/2)$

### II.2.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les Equations (II.3) et (II.4) montrent aussi que cette

approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [Chabot 1997, Carrera 2000, Afaq 2003, Reddy 1984, Di Sciuva, 1987]. Le multicouche est subdivisée en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zig où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. II.6 et II.7).[Nguyen 2004]



*Figure II.6 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Nguyen 2004]*

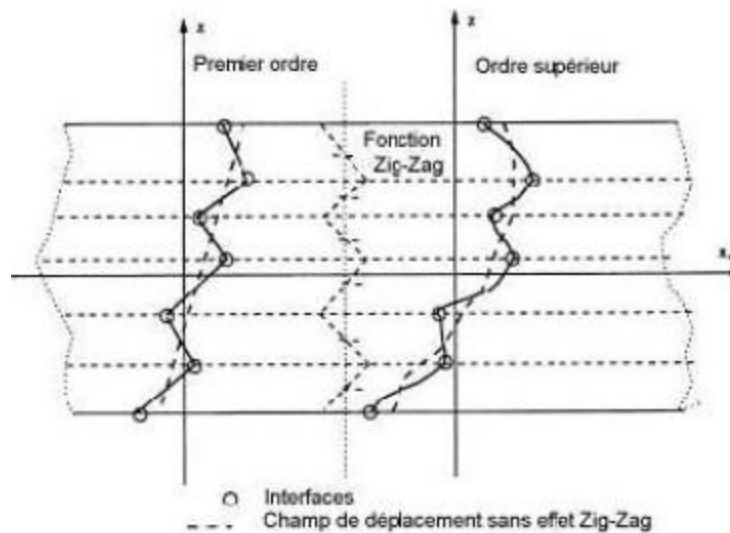


Figure II.7 : Champ de déplacements des modèles zig-zig, approche cinématique.[Nguyen 2004]

### II.2.2.1. Les modèles zig-zig

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zig du premier ordre [Di Sciuva 1987]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zig (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside).

La fonction zig-zig donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. IV.8). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.[Di Sciuva 1987].

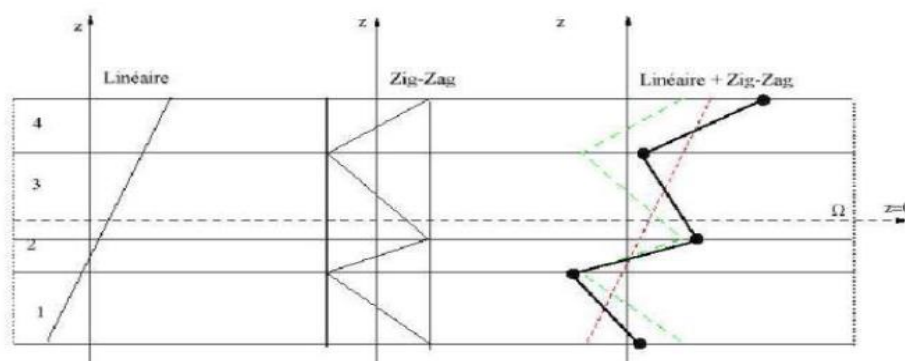


Figure II.8 : Champ de déplacements des modèles zig-zig du premier ordre [Nguyen 2004]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zig réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le En se basant sur le concept de, plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zig [Nguyen 2004]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zig (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.II.9). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.[Nguyen 2004]

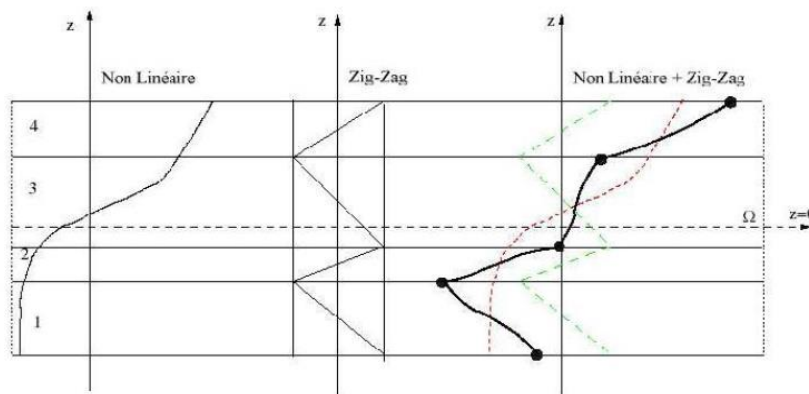


Figure II.9: Champ de déplacements des modèles zig-zig d'ordre supérieur. [Nguyen 2004]

Dans les travaux de [Karama 1998, Ossadzew 2001], la fonction sinus de [Touratier 1991] est combiné avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, Afaq et al. [Afaq 2003] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zig pour une cinématique plus riche. Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zig assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zig ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage.

## II.3. Une revue de littérature des études sur les structures FGM

### II.3.1. Les études sur les contraintes résiduelles dans les structures FGM

L'étude sur l'analyse des contraintes résiduelles pour les matériaux à gradients de propriétés, dites FGM est l'un des sujets les plus importants en génie et sciences des matériaux grâce à

leurs utilisations dans les plus importants secteurs d'industrie (réacteurs nucléaires, réacteurs de fusion, navettes spatiales et le génie civil).

Les contraintes résiduelles peuvent se produire lorsque deux matériaux ayant un coefficient de dilatation thermique différent sont liés ensemble en un composite à deux phases. Les contraintes résiduelles importantes dans une structure FGM peuvent potentiellement diminuer la capacité d'un FGM pour survivre à une charge d'impact ultérieure en service sur une plateforme d'aérospatiale.

Comme dans de nombreux problèmes d'assemblage et de composites, l'effet des contraintes résiduelles, résultant soit de traitement ou par des variations de température de service, prend un rôle important. La détermination de l'état thermique optimal de contrainte doit intégrer les propriétés thermiques et mécaniques des constituants ainsi que leur variation.

L'optimisation de ces contraintes est un objectif critique de la conception et une force motrice dans la recherche FGM. En effet, plusieurs études ont porté sur le plan théorique et expérimental [Delfosse.1992] l'évaluation de ces contraintes dans FGM. L'effet de la forme de composition sur les contraintes thermiques résiduelles a été étudié pour les deux cas élastique et élastique-plastique [Rabin. 1998; Giannakopoulos. 1995; Grujicic. 1998 ; Becker. 2000]. Abualnour *et al* [Abualnour. 2015] ont déterminé les contraintes résiduelles dues aux sollicitations mécaniques et thermiques des structures en matériaux à gradient de propriétés, en vue d'optimiser leur valeur en fonction des propriétés du matériau suivant la fonction de loi de puissance (P-FGM). Dans cette étude tous les problèmes ont été traités en élasticité linéaire sur un disque FGM et pour une température de traitement de 1373 K. Les calculs ont été effectués par considération de ces deux paramètres du matériau ( $E$ ,  $\alpha$ ) indépendant de la température ainsi que dépendante de la température. Ils ont conclu que la distribution et l'importance des contraintes résiduelles dans un disque FGM peuvent être adaptées en maîtrisant le gradient de la composition appelé le paramètre du matériau ( $p$ ) et en choisissant une combinaison appropriée à la géométrie dans le cas de la présence des régions monolithiques. Une gradation linéaire des constituants donne un affaiblissement accentué des contraintes résiduelles après un traitement à haute température.

Jamaludin *et al* [Jamaludin. 2013] ont analysé la contrainte thermique résiduelle pour la conception de la plaque à gradient de propriété en hydroxyapatite-titane comme une solution aux interfaces pointues. La méthode des éléments finis (MEF) a été mise en œuvre pour l'étude paramétrique pour voir la corrélation entre certains paramètres et la performance de la structure FGM. Les valeurs de contrainte thermique résiduelles calculées ont été vérifiées par la

comparaison avec les résultats établis précédemment. Ils ont conclu que la méthode des éléments finis est prouvée applicable pour la conception et l'évaluation de la contrainte thermique résiduelle élastique d'une structure FGM.

### *II.3.2. Les études sur l'analyse thermo élastique des structures FGM*

Comme l'utilisation des FGM augmente, de nouvelles méthodologies doivent être développées pour caractériser les FGM, et aussi pour analyser et concevoir des composants structurels en ces matériaux. Il y a eu quelques études traitant l'analyse thermo élastique dans les composants structurels des FGM. Noda [Noda. 1991] a présenté une revue approfondie qui couvre une large gamme de sujets, de thermo élastique aux problèmes de thermo élastique. Il a discuté de l'importance des propriétés dépendant de la température sur les contraintes et a suggéré que les propriétés de la matière doivent être prises en compte afin d'effectuer une analyse plus précise. En outre, Tanigawa [Tanigawa. 1995] a compilé une revue complète sur l'analyse thermo élastique des FGM.

Une enquête approfondie sur la littérature indique que dans la dernière décennie, les chercheurs se sont concentrés sur l'analyse thermo élastique du cylindre FGM avec une longueur infinie. Lorsque le rapport de la longueur par rapport au rayon du cylindre diminue, l'effet de conditions aux limites devient important. Dans ce cas, la répartition des déplacements et des contraintes le long de la direction longitudinale du cylindre est non uniforme et doit être considérée.

La réponse thermo élastique de structures FGM soumis à des charges thermiques et mécanique ont été étudié par des théories simplifiées avec des approches différentes. D'autre part, certaines tentatives ont été faites pour analyser la réponse thermoélastique dans des structures FGM en trois dimensions. L'intégration de la protection thermique (céramique) et de la structure portante mécanique (métal) en une seule construction est la caractéristique souhaitable des FGM. Un système en FGM candidat pour une application donnée doit démontrer sa capacité à résister à une charge thermique et mécanique simultanée. Les FGM étudiés dans ce travail ont été soumis à des environnements à température ambiante afin de simplifier la portée du projet, cependant, un candidat FGM pour une utilisation dans diverses applications doit être étudié avec des effets thermiques. La raison en est que les propriétés du matériau et de la géométrie inhérente de l'élément structurel peuvent changer avec les changements de température. Les changements importants et configuration elles peuvent affecter la capacité d'une FGM pour résister à des charges d'impact à partir d'objets étrangers.



En outre, la réponse quasi-statique de tout élément de structure sous charge sur une plateforme de l'aérospatiale doit être envisagée avant l'effet dynamique de vol de chargement sont adressées.

Les développements les plus anciens et les plus largement utilisés de comportement thermo élastique de plaques rectangulaires à gradient de propriétés qui comprenaient des effets non linéaires ont été examinés par Praveen *et al* [Praveen. 1998]. Ils ont essentiellement adapté la théorie des plaques de composites stratifiés et adaptés aux paramètres rigidité du matériau (à savoir le  $[A_{ij}]$ ,  $[B_{ij}]$ ,  $[D_{ij}]$  matrices et d'autres paramètres de matériau) de sommations sur des couches discrètes à des intégrales de la fonction continue définir la variation de matériau à travers l'épaisseur de la plaque et la coque [Larson. 2008].

Darabseh *et al* [Darabseh. 2013] ont étudié l'analyse thermo élastique du cylindre creux à paroi épaisse en matériau à gradient de propriétés en deux dimensions par la méthode des éléments finis. Le cylindre en FGM avec une longueur finie est simplement appuyé et soumis à une sollicitation thermique et mécanique [Hosseini Kordkheili. 2007].

Zhou *et al* [Zhou. 2011] ont étudié la réponse thermo élastique transitoire de plaques rectangulaires à gradient de propriétés. Ils ont développé une simulation numérique pour une température transitoire et des contraintes thermiques transitoires d'une plaque rectangulaire à gradient de propriétés avec des conditions aux limites. Il a été constaté que, pour le cas de choc thermique, la température, les déplacements et les contraintes changent rapidement à l'état transitoire, et la non-homogénéité des propriétés des matériaux à une influence significative sur l'ampleur et la répartition de ces quantités. Ainsi, la conception optimisée des structures FGM peut être réalisée par le choix de la forme de distribution des fractions de volume des constituants du matériau.

### ***II.3.3. Les études sur l'analyse du flambement des structures FGM***

Les FGM ont de nombreux avantages par rapport aux composites traditionnels. Les propriétés du matériau varient de façon continue d'une surface à une autre, en particulier à partir d'un métal à la céramique. De ce changement continu dans la composition, les FGM peuvent résister à des environnements à haute température tout en maintenant leur intégrité structurelle. Dans les applications pratiques des éléments de structure tels que des poutres, des plaques et des coquilles sont souvent soumises à une élévation de température uniforme. Lorsque les déplacements sont limités, des contraintes de compression peuvent exposer le système à des conditions instables potentielles. Le flambement des éléments structuraux minces représente en

effet un mode de défaillance dangereux et doit être évalué de manière adéquate dans la phase de conception.

Plusieurs auteurs ont étudié le comportement des structures FGM soumises à des charges thermiques et mécaniques, et des travaux complets sur le flambement des plaques rectangulaires et circulaires en FGM sont également rapportés dans la littérature. Shen [Shen.2002] a réalisé en 2002 l'une des premières études sur les problèmes de flambement des structures FGM. Shen a été préoccupé par l'analyse du post-flambement des panneaux FGM cylindriques chargés axialement qui en outre soutenu à des environnements thermiques. Les panneaux ont été gradués à travers l'épaisseur et une approche classique de règle de mélanges a été utilisée pour modéliser les propriétés du matériau dépendant de la température. Shen a utilisé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur de la coque pour décrire l'équation régissant sous un chargement thermomécanique. Shen vérifie ses équations développées par rapport aux résultats publiés pour les panneaux cylindriques isotropes, puis fournit des données de flambement pour différents systèmes de FGM [Larson. 2008].

Le comportement de flambement et post-flambement de poutres minces soumis à des charges axiales mécaniques reposant sur les fondations élastiques ont été étudiés par Timoshenko *et al* [Timoshenko. 1961], Den Hartog [Den Hartog. 1952], Hetenyi [Hetenyi. 1966]. Vaz *et al* [Vaz. 2016] ont proposé une solution analytique pour la réponse initiale thermomécanique du post-flambement d'une poutre épaisse reposant sur une fondation élastique linéaire et soumis à une élévation de température uniforme sur toute sa section transversale. La contrainte thermique est supposée suivre une loi linéaire avec l'augmentation de la température et les propriétés des matériaux sont considérés comme indépendantes de la température.

En outre, le modèle est approprié pour décrire le comportement des poutres courtes car il prend en compte les déformations de cisaillement transversales. Les résultats indiquent que la charge de compression diminue de manière plus significative pour des valeurs élevées de coefficient de cisaillement, en particulier pour des valeurs plus élevées de la raideur de la fondation. Les résultats montrent également que la température de déformation est plus élevée pour les modes de flambement supérieur, mais les déflexions sont plus petites. Woo *et al* [Woo. 2003] ont étudié le comportement de post-flambement des plaques et coques cylindriques en matériaux à gradient de propriétés sous des charges de compression de pointe et un champ de température. Les propriétés du matériau des coques à gradient de propriétés sont supposées varier de manière continue à travers l'épaisseur de la coque selon une distribution en loi de

puissance de la fraction volumique des constituants. Les équations fondamentales pour les coques minces rectangulaires FGM sont obtenues en utilisant la théorie de Von Karman pour une grande déflexion transversale, et la solution est obtenue en termes de séries de Fourier. Les résultats révèlent que les effets de couplage thermomécanique et les conditions aux limites jouent un rôle majeur dans la réponse des plaques et des coques FGM sous l'action des charges de compression de pointe.

#### ***II.3.4. Les études sur l'analyse statique et dynamique des structures FGM***

Plusieurs modèles théoriques ont été proposés afin de mieux comprendre le comportement statique et dynamique des structures FGM. Quand il y a une fissure ou un défaut dans un FGM, de nombreux chercheurs ont étudié la dépendance de facteurs d'intensité de contrainte avec les variations de gradient pour diverses charges statiques et dynamiques [Ozturk. 1996 ; Li. 2007]. Par contre, en l'absence de fissures, le comportement mécanique des structures FGM ont été largement étudiés. Par rapport aux plaques et coques à gradient de propriétés des études liées à des poutres FGM sont très peu nombreux. Par exemple, une solution d'élasticité exacte pour une poutre FGM simplement appuyée a été donnée par Sankar [Sankar. 2001], qui a traité un cas particulier où le module de Young obéit à une variation de gradient de propriétés de type exponentielle dans le sens de l'épaisseur et le coefficient de Poisson reste constant. Au lieu du type exponentiel du module d'Young, Zhu *et al* [Zhu. 2004] traitent un problème similaire avec le module de Young ayant une variation polynomiale dans la direction de l'épaisseur.

L'analyse des plaques et des coques cylindriques FGM simplement appuyée à la vibration a été étudiée en première fois en 1999 par Loy *et al.* [Loy. 1999]. Les coques FGM cylindriques sont d'un intérêt particulier dans les technologies des navires et dans la tuyauterie. Les auteurs supposent une variation de loi de puissance en fraction volumique des constituants de l'intérieur vers extérieure de la surface de la coque et les propriétés des matériaux variés à travers l'épaisseur de la coque en fonction de la loi classique des mélanges.

Une fois que les relations constitutives ont été formulées, les auteurs ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour résoudre les fréquences naturelles de la structure de la coque. Les auteurs ont comparé les résultats pour les différentes distributions de fraction de volume d'un système FGM en métal-céramique et ont constaté que les fréquences naturelles pour une coque en FGM s'allonge entre les fréquences naturelles calculées pour une coque en métal pure ou purement en céramique. Une étude qualitative a également été réalisée lorsque la géométrie de la coque a été autorisée à varier [Larson. 2008].

La réponse dynamique des plaques FGM rectangulaires a été initialement étudiée par Yang *et al* [Yang, 2001] en 2001. Une plaque rectangulaire, graduée à travers l'épaisseur avec une distribution en loi de puissance et les propriétés des matériaux régis par la loi classique de mélanges, était supposée être encadré sur tous les côtés ou sur les deux côtés encadré et simplement appuyée sur les deux autres côtés. La plaque a été laissée à reposer sur une fondation élastique et être soumis initiale dans le plan à des contraintes uni-axiales ou bi-axiales, bien que les deux ou aucune de ces caractéristiques doivent être incluses. Yang *et al* [Yang, 2001] ont développé une théorie très générale de la plaque où la réponse de la plaque pourrait être déterminée semi-analytiquement sous une charge générale et des conditions aux limites [Larson, 2008].

Une solution approchée pour l'analyse statique de trois dimensions, anisotropes, des plaques élastiques composées de matériaux à gradient de propriétés a été étudiée par Ramirez *et al.* [Ramirez, 2006]. La solution est obtenue en utilisant une théorie de la couche discrète en combinaison avec la méthode de Ritz, dans lequel la plaque est divisée en un nombre quelconque de couches homogènes et / ou du FGM. Deux types de matériau à gradient de propriétés ont été considéré: une variation exponentielle des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur de la plaque, et des propriétés mécaniques en fonction de l'orientation des fibres qui varie de façon quadratique à travers l'épaisseur du stratifié. La présente méthode peut être appliquée à des plaques de FGM en divisant le stratifié en couches homogènes discrètes ayant des propriétés mécaniques obtenues comme valeurs moyennes pour la couche correspondante. La précision des résultats dépend du nombre de couches utilisées dans l'analyse et la finesse de la gradation matériau.

## **II.4. Conclusion**

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème inévitable.

Il apparaît aussi que les théories d'ordre élevé sont intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

## *Chapitre III*

*Revue littéraire sur l'étude  
des plaques FGM reposant  
sur une fondation élastique*

### **III.1.Introduction**

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux structures fonctionnellement graduées pour leurs caractéristiques telles que l'élimination de la concentration de contrainte présente dans les structures composites conventionnelles.

### **III.2. Fondation élastique**

Natarajan et Manickam (2012) ont étudié la flexion et le comportement vibratoire libre des plaques et sandwich fonctionnellement gradués en utilisant la méthode des éléments finis basée sur la théorie d'ordre élevé. Bessaim et al. (2013) ont développé une nouvelle théorie d'ordre élevé comprenant la théorie du cisaillement transversal et de la déformation normale pour l'analyse de flexion et de vibration libre de plaques sandwich isotropes fonctionnellement gradué. Jha et al. (2013) ont analysé les contraintes et la vibration libres de plaques rectangulaires fonctionnellement graduées simplement supportées en utilisant une nouvelle théorie de plaque de cisaillement d'ordre élevé.

Thai et Kim (2013) ont étudié l'analyse de flexion et de vibration libre de plaques fonctionnellement graduées en utilisant une théorie raffinée de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Bousahla et al. (2013) ont développé une nouvelle théorie d'ordre élevé incluant l'effet d'étirement pour l'analyse statique de plaques composites avancées basées sur la position de la surface neutre. Fekrar et al. (2014) ont développé une théorie de cisaillement sinusoïdal et de déformation normale pour la flexion de plaques à gradation exponentielle, basée sur la position de la surface neutre.

Daouadji et al. (2013) ont étudié le comportement en flexion d'une plaque fonctionnellement graduée reposant sur une fondation élastique et soumise à une charge hygro-thermomécanique en utilisant une théorie de cisaillement élevée. Thai et al. (2016) ont présenté une théorie de cisaillement et de déformations normales à quatre inconnues pour les analyses statiques, dynamiques et de flambement de plaques fonctionnellement graduées soumises à des charges mécaniques.

Zenkour et Radwan (2018) ont étudié l'analyse des contraintes et des déplacements d'une plaque FGM reposant sur des fondations Winkler – Pasternak sous diverses conditions aux limites en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Nebab et al (2019) ont étudié la réponse à la flexion de plaques fonctionnellement graduée reposant sur des

fondations élastiques type Pasternak-Winkler soumises à des charges mécaniques en utilisant une théorie de déformation de cisaillement supérieur à quatre variables.

### **III.2.1. Modèles de fondations**

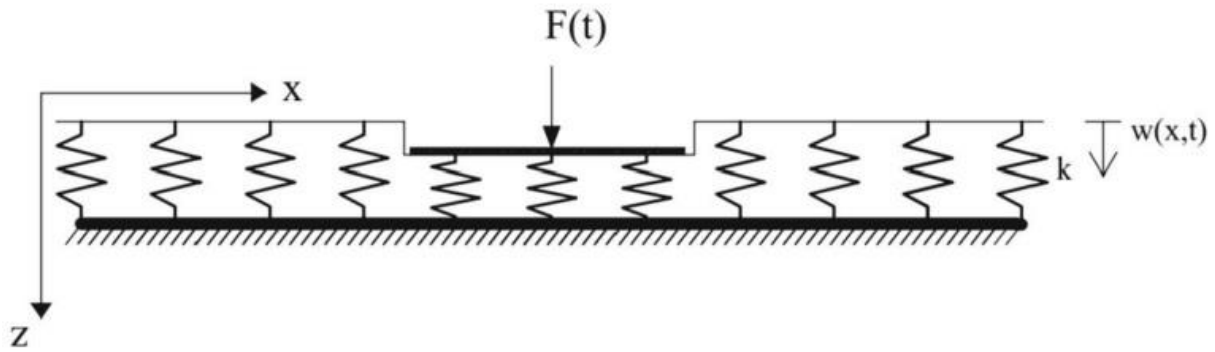
Pour décrire l'interaction des plaques FGM et la fondation, les chercheurs ont proposé différents types de modèles de fondation (Kerr, 1964). Le plus simple est le modèle Winkler, qui considère la fondation comme une série de ressorts indépendants sans effets de couplage entre eux, ce qui entraîne l'inconvénient de déflexions discontinues des surfaces en interaction avec la plaque. Zhemochkin et Sinitsyn (1947) ont introduit une fondation élastique combinée, qui est la fondation classique recouverte d'une couche de fondation Winkler. Filonenko-Borodich (1940) ont développé un modèle Winkler amélioré en reliant les extrémités supérieures des ressorts avec une membrane élastique sous une contrainte de traction constante. Hetényi (1946; 1950) a créé une interaction entre les ressorts en incorporant une plaque supplémentaire dans la fondation Winkler. Vlasov (1949) a également suggéré un modèle à deux paramètres plus raffinés. Gorbunov-Posadov (1949) a examiné les problèmes de flexion des plaques et des poutres reposant sur une fondation linéairement déformable. Pasternak (1954) a amélioré le modèle de Winkler en reliant les extrémités des ressorts à une plaque, ou «couche de cisaillement», constituée d'éléments verticaux incompressibles capables de se déformer uniquement en cisaillement latéral. Depuis, le modèle Pasternak a été largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structure – fondation (Filipich and Rosales, 2002; Huang et al., 2008; Matsunaga, 2000; OMURTAG, 1998; Shen, 1995; Zhou et al., 2004).

#### **III.2.1.1. Model de Winkler**

Pour calculer les contraintes s'exerçant sous une fondation reposante sur un milieu élastique, Winkler a supposé que la réaction du sol à chaque point sous la fondation est proportionnelle à la déflexion de la fondation à ce point (figure III.1). La déformation verticale caractéristique de la fondation est donc définie par l'utilisation de ressorts identiques, indépendants, étroitement espacés, discrets et linéairement élastiques. La constante de proportionnalité de ces ressorts est connue comme étant le coefficient de réaction du sol ( $k_w$ ).

$$p(x) = k_w w(x) \quad \text{(III.12)}$$

Avec  $p(x)$  : pression de réaction du sol et  $w(x)$  : déplacement vertical (tassement du sol).



*Figure III.1. Modèle de Winkler (Younesian et al., 2019).*

Malgré la simplicité du modèle Winkler, il a deux inconvénients majeurs. Premièrement, il ne prend pas en compte l'interaction entre les ressorts, ce qui revient à négliger le cisaillement vertical dans le sol. En conséquence, une discontinuité de déplacement se crée entre la zone chargée et la zone non chargée sous la fondation. Deuxièmement, il ne tient pas compte de la plasticité pouvant se produire dans le terrain. Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak (1954) qui a tenu compte des interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler en présentant un nouveau paramètre. Dès lors, le modèle de Pasternak était largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions (structures-bases).

#### **III.2.1.2 Model de Pasternak**

Le modèle de Pasternak consiste à introduire un certain degré d'interaction entre les ressorts adjacents du massif de Winkler. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle  $k_p$ , du sol en plus de la rigidité normale (ou de Winkler)  $k_w$  (Foroughi and Azhari, 2014). Deux différences essentielles sont observées entre le modèle de Winkler et celui de Pasternak : un tassement uniforme du terrain est observé sous le bâti et aucun déplacement en dehors de la zone de chargement dans le cas de Winkler, alors qu'une continuité de déplacement du terrain sous et hors du bâti est bien notée dans le cas du modèle de Pasternak.

### **III.3. Les plaques fonctionnellement graduées en présence de la porosité**

Les FGM sont des matériaux avancés composés de différents matériaux constitutifs tels que des métaux, des céramiques ou des polymères aux propriétés variables dans une direction spatiale spécifique. Au regard de la complexité des processus de fabrication des FGM (Sopyan et al., 2007), des micro-vides et des porosités se produisent souvent en raison de la grande différence de température de solidification des constituants du matériau FGM.



L'étude des matériaux fonctionnellement gradués poreux s'est imposée comme sujet de recherche d'intérêt, notamment en ce qui concerne la modélisation des distributions de porosité et les estimations correspondantes de leurs propriétés à la fois en situation réelle ou bien à travers les perspectives de modélisation du matériau.

Les matériaux fonctionnellement gradués poreux (FGP) combinent à la fois des caractéristiques de porosité et de gradient fonctionnel, où la porosité peut avoir une évolution graduelle à travers le volume, offrant des propriétés souhaitables pour certaines applications (comme dans les implants biomédicaux), et indésirables dans d'autres applications comme l'aéronautique, où les pores peuvent causer de graves problèmes (Zhang and Wang, 2017).

Dans une plaque FGM rectangulaire typique, il existe plusieurs configurations de gradient de porosité possibles. Indépendamment de la distribution spécifique, l'hétérogénéité et le gradient spatial des matériaux poreux joueront un rôle extrêmement important dans les propriétés mécaniques résultantes (Legrand et al., 2019).

Le module de Young et le module de cisaillement sont fortement influencés par plusieurs facteurs, du processus de fabrication, à la taille, la forme et la distribution des pores. Par conséquent, la prédiction analytique des propriétés des matériaux poreux n'est pas simple en raison du caractère aléatoire présent dans leurs structures et de la nécessité d'une connaissance de la microstructure la plus précise possible afin d'obtenir une prédiction numérique significative (Kováčik, 2006).

Concernant les distributions de porosité, Nguyen et al. (2018) ont étudié le comportement mécanique des FGP. Pour cela, ils ont pris en compte deux distributions de porosité différentes, variant à la fois dans le sens de l'épaisseur (à savoir, les distributions dites régulières et inégales). Zhang et Wang (2017) ont étudié huit structures de matériaux poreux différentes avec différentes distributions de gradient et de pores, et les ont soumis à des tests mécaniques afin d'évaluer les propriétés importantes des matériaux comme le module de Young.

### ***III.3.1 Modèles de porosité***

L'apparition des pores au cours du processus de fabrication est modélisée à l'aide de différentes fonctions mathématiques telles que la loi exponentielle, la loi de puissance et la règle du cosinus. La plupart du temps, pour l'analyse des structures FGM, de nombreux modèles de formulation de la distribution des micro-vides dans des structures fonctionnellement graduées ont été proposés. On peut citer les porosités uniformes, non uniformes, logarithmiques-non uniformes et masse volumique.

### **III.3.1.1 Plaque FG avec porosité uniforme**

Le premier modèle de distribution de la porosité a été développé par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) où la porosité est constante sur toute l'épaisseur de la plaque FGM. Les propriétés effectives des matériaux de la plaque FGM obtenues en introduisant la porosité uniforme sont données par l'équation :

$$E = (E_{11} - E_{22}) * \left(\frac{z}{h} + 0.5\right)^k + E_{22} - (E_{11} + E_{22}) * \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.13})$$

## **III.4. Conclusion**

Cette revue de la littérature nous a permis d'avoir une vision d'ensemble sur les travaux existants concernant les matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradués (FGM).

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synoptique sur les FGM. Nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel FGM, leurs domaines d'application et leurs différentes lois de mélange. Une revue sur les différents types de fondation élastique et le modèle de porosité uniforme.

# *Chapitre IV*

*Comportement statique  
d'une plaques FGM poreuse  
sous chargement  
thermomécanique reposante  
sur une fondation élastique*

## **IV.1. Introduction**

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) est un nouveau matériau hétérogène. Il est l'une des formes les plus fonctionnelles des structures composites développées par l'industrie des composites. Il a atteint une large acceptation dans l'aérospatiale et de nombreuses autres industries, et il est largement utilisé dans les avions et les véhicules spatiaux, des navires, des bateaux, des conteneurs et des constructions résidentielles. La technique de gradation de la céramique ainsi que des métaux initiés par le scientifique du matériel japonais à Sendai a marqué le début d'explorer la possibilité d'utiliser les FGM pour diverses applications structurelles [Reddy. 2000].

Les FGM sont considérés comme un matériau structurel potentiel pour les industries futures d'engins spatiaux à grande vitesse et de production d'énergie. Les FGM sont des nouveaux matériaux, non homogènes microscopiquement, dans lesquels les propriétés mécaniques varient en douceur et de façon continue d'une surface à une autre. Dans un FGM, la composition et la structure changent progressivement, ce qui entraîne des changements correspondants dans les propriétés du matériau. En appliquant les nombreuses possibilités inhérentes à la conception d'un FGM, il est prévu que les matériaux seront améliorés et de nouvelles fonctions seront créées.

Au cours des dernières années, il y a eu des rapports de recherche considérables sur le comportement mécanique, flambage, vibration libre, etc., sur les éléments structuraux des FGM. Plusieurs études ont été réalisées pour analyser le comportement des plaques et coques à gradient de propriétés. Bourada *et al.* [Bourada. 2015] donnent une nouvelle théorie simple de déformations de cisaillement pour les poutres à gradient de propriétés. Carrera *et al.* [Carrera. 2010] étudient le problème de la réponse statique des plaques et coques multicouches en matériaux à gradient de propriétés (FGM). Kiani *et al.* [Kiani. 2011] ont analysé le comportement statique et dynamique d'un panneau en FGM doublement incurvé reposant sur une fondation élastique de type Pasternak. Al-Basyouni *et al.* [Al-Basyouni. 2015] ont analysé la flexion et la vibration des micro-poutres à gradient de propriétés basées sur la théorie de contrainte doublée modifiée et la position de la surface neutre.

Dans cette étude, une nouvelle théorie raffinée est proposée pour l'analyse d'une plaque FGM poreuse sous chargement thermomécanique reposante sur une fondation élastique.

## IV.2. Formulation du problème

Considérons une plaque d'épaisseur totale  $h$  et composée d'un matériau à gradient fonctionnel à travers l'épaisseur (Figure IV.1). Il est supposé que le matériau est isotrope et que la gradation n'a lieu que dans l'épaisseur uniquement dans l'épaisseur. Le plan  $xy$  est considéré comme le plan médian non déformé de la plaque, l'axe  $z$  étant positif vers le haut à partir du plan médian.

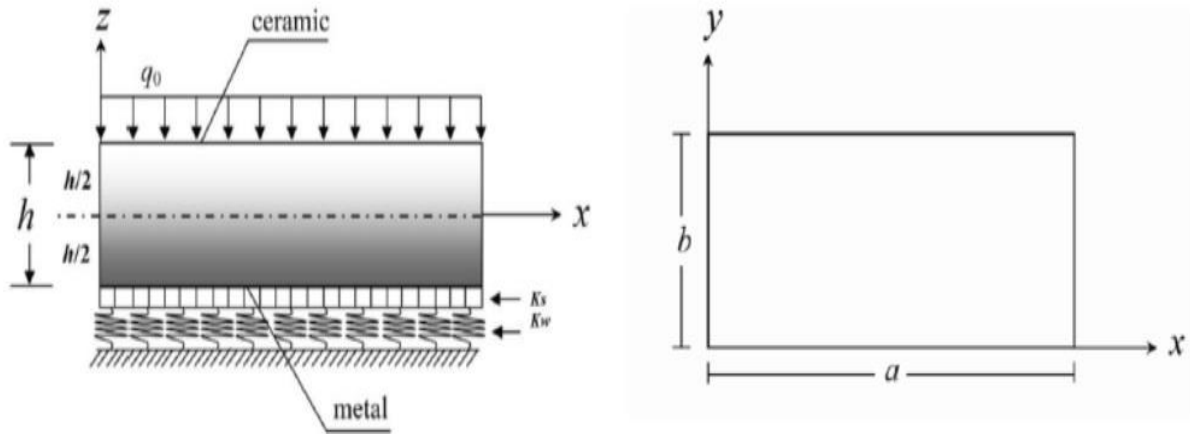


Figure IV.1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire composée de FGM.

### IV.2.1. Champs de déplacement et déformations

Le champ de déplacement supposé est le suivant :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \\ w(x,y,z) &= w_b(x,y) + w_s(x,y), \end{aligned} \quad (IV.1)$$

où  $u_0$  et  $v_0$  sont les déplacements du plan médian de la plaque dans les directions  $x$  et  $y$ , respectivement ;  $w_b$  et  $w_s$  sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement, tandis que  $f(z)$  représente les fonctions de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversales le long de l'épaisseur et est donnée comme suit :

$$f(z) = z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (IV.2)$$

Il convient de noter que, contrairement à la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre, cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction du cisaillement. Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s, \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s, \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s, \\
 \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s, \\
 \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s, \\
 \varepsilon_z &= 0,
 \end{aligned} \tag{IV.3}$$

Où

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \\
 \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz}.
 \end{aligned} \tag{IV.4}$$

#### IV.2.2. Relations constitutives

Dans la MGF, la gradation des propriétés du matériau est considérée à travers l'épaisseur et l'expression donnée ci-dessous représente le profil de la fraction volumique

$$E = (E_{11} - E_{22}) * \left(\frac{z}{h} + 0.5\right)^k + E_{22} - (E_{11} + E_{22}) * \frac{\alpha}{2} \tag{IV.5}$$

Où P désigne une propriété générique du matériau comme le module,  $p_t$  et  $p_b$  désignent la propriété des faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement, et k est un paramètre qui détermine le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur. Ici, on suppose que les modules E et G varient selon l'équation (IV.5) et  $\nu$  est supposé être une constante. Les relations constitutives linéaires sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{IV.6}$$

Où

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12} = \nu Q_{11}, Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}. \tag{IV.7}$$

### IV.2.3. Équations gouvernantes

Les équations gouvernantes de l'équilibre peuvent être dérivées en utilisant le principe des déplacements virtuels. Dans le cas présent, le principe du travail virtuel donne :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (IV.8)$$

Où est la surface supérieure et  $q$  est la charge transversale appliquée. En substituant les équations (IV.3) et (IV.6) à l'équation (IV.8) et en intégrant l'épaisseur de la plaque, on obtient l'équation (IV.8) Plaque peut être réécrite comme suit :

$$\int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0, \quad (IV.9)$$

Où

$$\begin{pmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{pmatrix} dz \quad (IV.10a)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz. \quad (IV.10b)$$

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées de l'équation (IV.9) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en fixant les coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$  et  $\delta w$  séparément. On peut ainsi obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation par cisaillement,

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0,$$

$$\delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0, \quad (IV.11)$$

$$\delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial^2 M_{yz}^s}{\partial y} + q = 0.$$

En utilisant l'équation (IV.6) dans l'équation (IV.10), les résultantes des contraintes d'une plaque sandwich composée de trois couches peuvent être liées aux déformations totales par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ K^b \\ K^s \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma \quad (IV.12)$$

Ou

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (IV.13a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, K^b = \{K_x^b, K_y^b, K_{xy}^b\}^t, K^s = \{K_x^s, K_y^s, K_{xy}^s\}^t, \quad (IV.13b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (IV.13c)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (IV.13d)$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, A^2 = \begin{bmatrix} B_{44}^s & 0 \\ 0 & B_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (IV.13e)$$

Où  $A_{ij}, B_{ij}$ , etc., sont la rigidité de la plaque, définie par

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (IV.14a)$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (IV.14b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{44}[g(z)]^2 dz \quad (IV.14c)$$

En substituant l'équation (IV.12) à l'équation (IV.11), on obtient l'équation suivante :

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s = 0, \quad (IV.15a)$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = 0 \quad (IV.15b)$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s = q, \quad (IV.15c)$$



$$B_{11}^S d_{111} u_0 + (B_{12}^S + 2B_{66}^S) d_{122} u_0 + (B_{12}^S + 2B_{66}^S) d_{112} v_0 + B_{22}^S d_{222} v_0 - D_{11}^S d_{1111} w_b - 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S) d_{1122} w_b - D_{22}^S d_{2222} w_b - H_{11}^S d_{1111} w_s - 2(H_{12}^S + 2H_{66}^S) d_{1122} w_s - H_{22}^S d_{2222} w_s + A_{55}^S d_{11} w_s + A_{44}^S d_{22} w_s = q, \quad (IV.15d)$$

Où  $d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2). \quad (IV.16)$$

#### IV.2.4. Solution exacte pour une plaque FGM en appui simple

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous nous intéressons ici à la solution exacte des équations (15a-d) pour une plaque FG simplement supportée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords latéraux :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ sur } x = -a/2, a/2, \quad (IV.17a)$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ sur } y = -b/2, b/2, \quad (IV.17b)$$

Pour résoudre ce problème, Navier a supposé que les charges mécaniques transversales et de température,  $q$  sous la forme d'une double série trigonométrique comme

$$q = q_0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y), \quad (IV.18)$$

Où  $\lambda = m\pi/a$ ,  $\mu = n\pi/b$ , et  $q_0$  représente l'intensité de la charge au centre de la plaque. En suivant la procédure de solution de Navier, nous supposons la forme de solution suivante pour  $u_0, v_0, w_b$  et  $w_s$  qui satisfait les conditions aux limites,

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_b \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_s \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \end{pmatrix}, \quad (IV.19)$$

où est la fréquence naturelle et  $U, V, W_b$ , et  $W_s$  sont des paramètres arbitraires à déterminer sous réserve que la solution de l'équation (IV.19) satisfasse les équations directrices (IV.15). L'équation (IV.19) réduit les équations de gouvernance à la forme suivante :

Et pour l'analyse des vibrations,

$$([C]-\omega[G])\{\Delta\} = \{0\}, \quad (IV.20)$$

$$\text{Où } \{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t, [C]= \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix}, \quad (IV.21)$$

Dans laquelle :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2, \\ a_{12} &= \lambda\mu(A_{12} + A_{66}), \\ a_{13} &= -\lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2], \\ a_{14} &= -\lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2], \\ a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2, \\ a_{23} &= -\mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2], \\ a_{24} &= -\mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2], \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4, \\ a_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4, \\ a_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \end{aligned} \quad (IV.22)$$

### IV.3. Résultats numériques et discussions

L'étude s'est concentrée sur le comportement dynamique des plaques sandwich à gradient fonctionnel avec un cœur en nid d'abeille basée sur le nouveau modèle de déformation en cisaillement d'ordre supérieur. Quelques résultats représentatifs de la solution de Navier obtenue pour une plaque rectangulaire simplement supportée sont présentés ici.

Les plaques FGM sont soumises à une double charge transversale trigonométrique distribuée donnée par :

$$q=q_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (IV.24)$$

Où  $q_0$  représente l'intensité de la charge au centre de la plaque. On considère un matériau à gradient fonctionnel constitué d'aluminium et d'alumine. Les propriétés suivantes des matériaux sont utilisées pour le calcul des valeurs numériques [Bouazza.2011]: Métal (Aluminium, Al) :  $E_m = 70$  GPa ; rapport de Poisson  $\nu = 0,3$  ; Céramique (Alumine, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) :  $E_c = 380$  GPa ; rapport de Poisson  $\nu = 0,3$ , et le nid d'abeille (carton) :  $E_{nid} = 3.4$  GPa.

Le paramètre de fréquence naturelle non dimensionnelle est défini comme :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{100 h^3 E_c}{a^4 q_0} u \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right); \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{a q_0} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right); \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{h}{a q_0} \sigma_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z} \right); \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h}{a q_0} \tau_{xy} \left( 0, 0, \bar{z} \right); \end{aligned} \tag{IV.25}$$

### IV.3.1. Validation du modèle

Le tableau (IV.1) montre la validation notre modèle avec celle de

Les résultats obtenus par la théorie actuelle sont comparés avec ceux donnés par la théorie des plaques de Kirchhoff ou de la théorie classique de la plaque (CPT) et la théorie d'ordre élevé HSDPT de Touratier [Touratier. 1991].

En utilisant une solution analytique qui donne des résultats identiques pour flèches et contraintes avec le rapport d'épaisseur égal ( $a/h = 0.1$ )

Tableau IV.1 : validation du présent model d'une plaque FGM poreuse ( $a = 0$ ) sans/avec fondation élastique sous chargement thermomécanique  $T = 0$ .

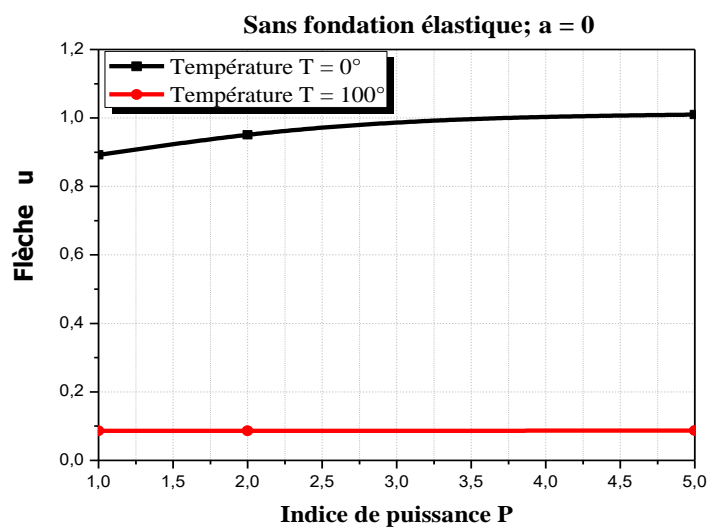
	Indice de puissance	La théorie	u	$\sigma_{xx}$	$\tau_{xy}$
Sans fondation élastique	2	HSDPT	0.079758	0.044595	-0.032215
		Présent	0.079756	0.043748	-0.03190
	5	HSDPT	0.080150	0.045736	-0.029922
		Présent	0.080149	0.044821	-0.02962
Avec fondation élastique	2	HSDPT	0.16819	-0.48398	0.35985
		Présent	0.16817	0.47455	0.3563
	5	HSDPT	0.16719	-0.48223	0.34986
		Présent	0.16719	-0.47156	0.3462

IV.3.2. Effet de la température  $T$

Effet de la température  $T$  sur la flèche d'une plaque FGM poreuse reposante sur fondation élastique est représenté sur le tableau (IV.2) et les figures (IV.2) (et (IV.3)). On peut observer que la flèche diminue lorsque la température augmente.

Tableau IV.2 : Comparaison de flèche d'une plaque FGM poreuse ( $a = 0$ ) sans/avec fondation élastique sous chargement thermomécanique  $T = 0$ .

		La flèche $u$				
		T = 0		T = 100		
La théorie	Porosité	k = 0	k = 100	k = 0	k = 100	
P = 1	HSDPT	1,00326	0,50081	0,08708	0,08011	
	Présent	a = 0	0,89229	0,47154	0,08615	0,07932
		a = 0,1	1,13150	0,53086	0,08795	0,07932
P = 2	HSDPT	1,10994	0,52605	0,08782	0,07976	
	Présent	a = 0	0,95076	0,48739	0,08667	0,08130
		a = 0,1	1,22980	0,55153	0,08850	0,08153
P = 5	HSDPT	1,18102	0,52084	0,08824	0,08108	
	Présent	a = 0	1,00970	0,50243	0,08713	0,08015
		a = 0,1	1,32500	0,56992	0,08896	0,08169



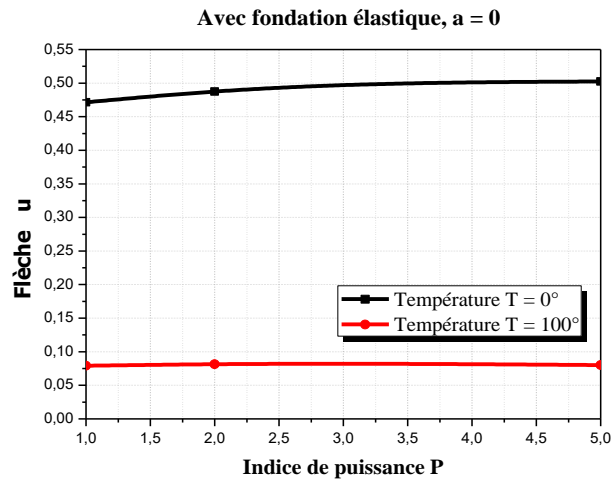


Figure IV.2 : Effet de la température  $T$  d'une plaque FGM avec l'indice de porosité  $a = 0$ .

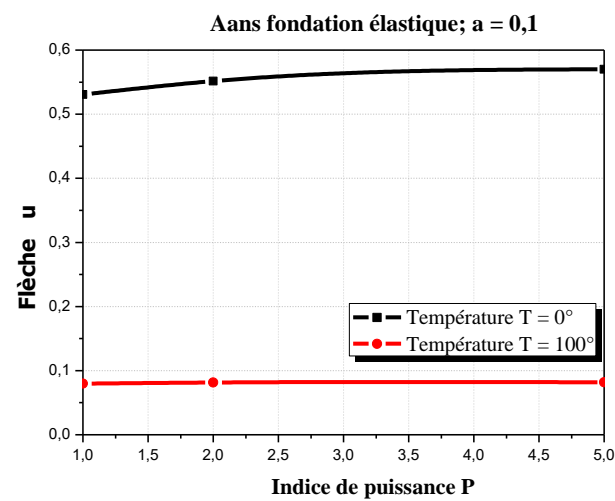
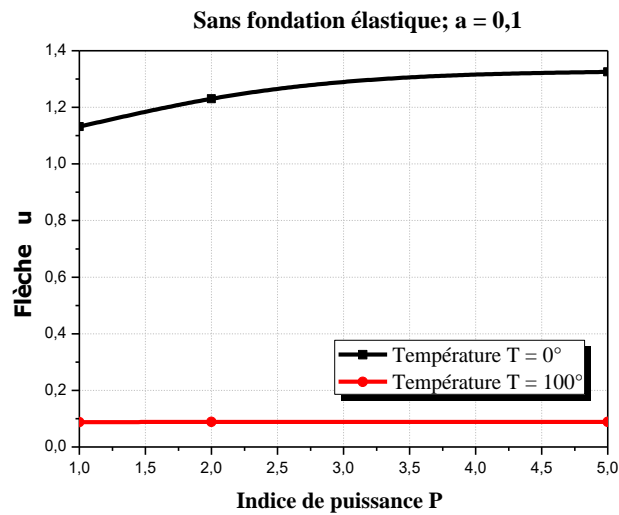


Figure IV.2 : Effet de la température  $T$  d'une plaque FGM avec l'indice de porosité  $a = 0$ .

#### **IV.4. Conclusion**

Ce chapitre présente une solution analytique pour la flexion thermomécanique des plaques FGM contenant des porosités et reposant sur une fondation élastique en utilisant une théorie raffinée de forme hyperbolique de plaque de déformation de cisaillement. La variation de porosité est décrite en utilisant des lois de mélanges modifiée.

Les équations gouvernantes sont résolues en utilisant les solutions de Navier. Les flèches centrales ainsi que les contraintes obtenues sont comparées avec d'autres et un très bon accord a été trouvé qui prouve la précision de la méthode. Conformément aux résultats numériques et graphiques, certaines conclusions peuvent être tirées comme suit :

- La variation de porosité a un effet significatif sur la flèche centrale et les contraintes de la plaque FGM soumise à un chargement thermomécanique.
- Les résultats montrent que la plaque FGM imparfaite subira de faibles flèches lorsque la plaque reposera sur la fondation élastique.
- L'augmentation de la charge thermique diminuée la flèche.

# *Conclusion générale*

## Conclusion générale

Les structures en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Dans le cadre de ce travail, nous avons étudié l'effet du taux de distribution de porosité sur le comportement thermomécanique des plaques FGM reposées sur une fondation élastique en utilisant une théorie raffinée de forme hyperbolique et qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse.

La théorie a pris en considération la distribution parabolique de la déformation de cisaillement transverse et satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans d'utiliser le facteur de correction de cisaillement. Le nombre des inconnues dans la présente théorie est quatre tandis que cinq dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La loi du mélange modifiée couvrant les phases et le taux de distribution de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM imparfaites. L'équation d'équilibre pour les plaques FGM est obtenue par le principe des travaux virtuels. Les propriétés du matériau sont supposées varier selon la direction de l'épaisseur de la plaque et la règle du mélange qui a été reformulée afin d'évaluer les caractéristiques des matériaux avec les phases et le taux de distribution de porosité. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec des conditions aux limites simplement appuyées.

Les résultats qui ont été trouvés dans ce travail ont montrées que le taux de distribution de porosité influe sur la flèche et les contraintes à travers l'épaisseur de la plaque FGM. L'effet des paramètres de fondation sont aussi présentés dans cette investigation sous forme numérique et graphique dans plusieurs combinaisons de matériaux FGM



## Référence bibliographique

[Allen H. G.1969], “Analysis And Design of Structural Sandwich Panels”, Pergamon Press, Oxford. 1969.

[A. Abbadi.2009], Y. Koutsawa, A. Carmasol, S. Belouettar et Z. Azari, «Experimental and numerical characterization of honeycomb sandwich composite panels,» Simulation Modelling Practice and Theory, vol. 17, n° 110, pp. 1533-1547, 2009

[AEROSPATIALE.1986], Matériaux composites : dans la grande mutation des structures. Plaquette interne. 1986

[Afaq. K.S, 2003] Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier.

[Abolghasemi. 2014] Abolghasemi, S, Shaterzadeh, A.R. Rezaei, R. Thermomechanical buckling analysis of functionally graded plates with an elliptic cutout. Aerospace Science and Technology. Accepted date: 8 October 2014.

[Abualnour. 2015] Abualnour, M. Soltani, KH. Megueni, A. Analyse lineaire des contraintes residuelles d'un disque en materiau P-FGM. 12<sup>ème</sup> congrès de Mécanique, Casablanca (Maroc), 21-24 Avril 2015.

[Aghelinejad. 2011] Aghelinejad, M. Zare, K. Ebrahimi, F. Rastgoo, A. Nonlinear Thermomechanical Post-Buckling Analysis of Thin Functionally Graded Annular Plates Based on Von-Karman's Plate Theory. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 18,319–326, 2011.

[Arefi. 2016] Arefi, M. Abbasi, A. R. Vaziri, S. M. R. Two-dimensional thermoelastic analysis of FG cylindrical shell resting on the Pasternak foundation subjected to mechanical and thermal loads based on FSDT formulation. Journal of thermal stresses, 39, 5, 554–570. 2016.

[Alibeigloo. 2011a] Alibeigloo, A. Thermoelastic solution for static deformations of functionally graded cylindrical shell bonded to thin piezoelectric layers. Composite Structures, 93,961–972, 2011.

[Alibeigloo. 2011b] Alibeigloo, A. Exact solution of an FGM cylindrical panel integrated with sensor and actuator layers under thermomechanical load. *Smart Materials and Structures* 20, 035002, 2011.

[Becker. 2000] Becker, T. L. J. Cannon, R. M. Ritchie, R.O. An approximate method for residual stress calculation in functionally graded materials. *Mechanics of Materials*, 32, 85-97, 2000

[Bhatt. 2000] Bhatt, R.T. Feasibility of actively cooled silicon nitride airfoil for turbine applications demonstrated, in *Research and Technology 2000*, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 34, 2000.

[Bao. 1995] Bao, G. Wang, L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *Int. J. Solids Structures*, 32 (19), 2853– 2871, 1995

[Birman V 2007]., Byrd L.W., 2007, Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Applied Mechanics Reviews*, 60, 195-216.

[Baron, 2008] C. Baron., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Comptes Rendus Mécanique* ; 336 (9) :722–730, (2008).

[Bourouis Fairouz 2013], "Optimisation de la rupture et de l'endommagement de différents matériaux sandwichs", Thèse de Doctorat, UNIVERSITE CONSTANTINE 1, 2013.

[Bruno Castanié 2000], "Contribution à l'étude des structures sandwichs dissymétrique" Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace de Toulouse, France, 2000.

[Chi. 2003] Chi. Shyang-ho, Chung Yen-Ling. Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 10, 1227–1243, 2003.

[Cho. 2004] Cho, K-M. Choi, I-D. Park, I. Thermal properties and fracture behavior of compositionally graded Al-SiCp composites. *Designing, Processing and Properties of Advanced Engineering Materials. Mater. Sci. Forum*, 449:621-624, 2004.

[Carlos. 1999] Carlos, A. Mota, Soares, Cristóvão, M. Mota, Soares, Manuel, J.M. Freitas. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. Dordrecht; Boston, MA : Kluwer Academic Publishers, 1999.

[**Carpinteri. 2006**] Carpinteri, A, Nicola, P. Thermal loading in multi-layered and/or functionally graded materials: Residual stress field, delamination, fatigue and related size effects. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 828–841, 2006.

[**Carrera. E, 2000**] An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol.50, pages 183,198.

[**Cheng, H.1998**], Li,F., Su,G., Pan,H., et Dreseslhauss, M. S., *Applies Physics Letters*, volume 72, 1998, pages 3282 – 3284

[**Delfosse. 1992**] Delfosse, D. Kunzi, H.-U. Ilschner, B. Experimental determination of residual stresses with a one dimensional gradient of composition. *Acta Metall. Mater.* 40, 2219-2224, 1992.

[**Delale. 1983**] Delale, F. Erdogan, F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50, 609 –614, 1983.

[**Den Hartog. 1952**] Den Hartog, J. P. *Advanced Strength of Materials*. 1st ed., Dover, New York, 1952

[**Delale. 1983**] Delale, F. Erdogan, F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50, 609 –614, 1983.

[**Daniel.M.Isaac .2009**] and Emmanuel E. Gdoutos; *Failure Modes of Composite Sandwich Beams*; Springer .

[**D. Gay.2005**], *Matériaux composites*, 5e éd., Paris: Lavoisier, 2005.

[**El-Wazery. 2012**] El-Wazery, M. S. A. R, El-Desouky. O. A, Hamed. N. A, Mansour. and Ahmed. A. Hassan. Preparation and Mechanical Properties of Zirconia / Nickel Functionally Graded materials. *Arab Journal of Nuclear Sciences and Applications*, 45(2), 435-446, 2012

[**Grujicic. 1998**] Grujicic, M. Zhao, H. Optimization of stainless steel/alumina functionally graded material for reduction of damage induced by thermal residual stresses. *Mater. Sci. Eng.* A252, 117-132, 1998.

[**Giannakopoulos. 1995**] Giannakopoulos, A. E. Suresh, S. Finot, M. and Olsson, M. *Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients*. *Acta Metallurgica et Materialia*, 43(4),1335-1354, 1995.

[**Hosseini Kordkheili. 2007**] Hosseini Kordkheili, S. A. Naghdabadi. Geometrically non-linear thermoelastic analysis of functionally graded shells using finite element method.

International journal for numerical methods in engineering Int. J. Numer. Meth. Engng, 72, 964–986, 2007.

[**Hildebrand. 1949**] Hildebrand, F.B. Reissner, E and Thomas, G. B. Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells. NASA TN-1833. Washington, DC, 1949.

[**Hetenyi. 1966**] Hetenyi, M., Beams and Plates on Elastic Foundations and Related Problems, Appl. Mech. Rev, 19, 95–102, 1966.

[**HADJI LAZREG.2012**] «a theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plates», Materials Physics and Mechanics 14 (2012) 110-128

[**Hashmi. 2014**] Hashmi, Saleem. Gilmar, Ferreira, Batalha. Van Tyne, C. J. Yilbas, B. S . Comprehensive materials processing. Livre électronique, Oxford, Walltham, MA : Elsevier, 2014

[**Hill. 1965**] Hill, R. A self-consistent mechanics of composite materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 13 (4), 213-222, 1965.

[**Houari, M.S.A., 2011**] « Analyse des contraintes thermo-élastiques: lois des puissances». Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbès.

[**Hopkinson. 2006**] Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dickens, P.M. Rapid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age. John Wiley and Sons, Ltd, 2006

[**Jamaludin. 2013**] Jamaludin, S N S. Faizal, Mustapha. Dewan, Muhammad Nuruzzaman and Shah Nor Basri. A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites. Scientific Research and Essays, 8(21), 828-840, 4 June 2013.

[**J. Berthelot.2012**], Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 5e éd., Paris: Lavoisier, 2012.

[**Katayama.2011**] Katayama, T. Sohei, Sukenaga. Noritaka, Saito. Hajime, Kagata. And Kunihiro, Nakashima. Fabricated of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-W functionally graded materials by slip casting method, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 18, 2011.

[**Kanaun. 2008**] Kanaun, S. K . Levin, V. M. Self-consistent methods for composites. Solid mechanics and its applications, v. 148, 150, Dordrecht : Springer, 2008.

[**Kyung-Su. 2006**] Kyung-Su, Na. Ji-Hwan, Kim. Three-dimensional thermo mechanical buckling analysis for functionally graded composite plates. *Composite Structures*, 73, 413–422, 2006.

[**Karama. 1998**] Karama, M. Abou Harb, B. Mistou, S. & Caperaa, S. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, 29,3, 223-234, 1998.

[**Kant.T, K. Swaminathan, [2002]**] Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344.

[**Kant. T & K. Swaminathan, (2000)**]. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites a selective review and survey of current developments. *Composite structures*, vol. 49, pages 65, 75

[**HADJI Lazreg.2012**], contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwichs en FGM, thèse de doctorat en sciences, 2012-2013, Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbès.

[**L. Gibson .1999**] et M. Ashby, *Cellular Solids: Structure and Properties*, 2nd éd., Cambridge: Cambridge Solid State Science Series, 1999.

[**Li. 2007**] Li, X.-F. Fan, T.-Y. Dynamic analysis of a crack in a functionally graded material sandwiched between two elastic layers under anti-plane loading. *Compos. Struct*, 79, 211–219, 2007.

[**Loy. 1999**] Loy, C.T. Lam, K.Y. and Reddy, J.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *Int. J. Mech. Sic*, 41(3), 309-324, 1999.

[**Larson. 2008**] Larson, R.A. BSME. MSME. A Novel Method For Characterizing the Impact Response of Functionally Graded Plates. Graduate School of Engineering and Management Air Force Institute of Technology, September 2008.

[**Liu. 2011**] Liu, Y. A Refined Shear Deformation Plate Theory. *Int. J. for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 12, 141-149, 2011.

[**Lachguer 2014**]. A et Akyoud. M "Les matériaux sandwich et les risques d'instabilités géométriques locales", Etude bibliographique, ECOLE DES MINES DE DOUAI, France, 2014

[**M. Talha2015**], Ankit Gupta (2015) "Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures" , *Progress in Aerospace Sciences* 79, 1-14

[**Miyamoto, Y1999**], Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, R.G ebook 1999  
"Functionally Graded Materials Design, Processing and Applications"

[**Mertani Boubekeur Med Bilel**], "Modélisation numérique et expérimentale du comportement des panneaux sandwichs a âme en nids d'abeilles", memoire magister, UNIVERSITE FERHAT ABBAS – SETIF .UFAS (ALGERIE)

[**Markworth et Saunders. 1995**] Markworth, Alan. J. Saunders, James. H. A model of structure optimization for a functionally graded material. *Materials Letters*, 22 (1–2), 103-107, 1995.

[**Mori et Tanaka. 1973**] Mori, T. Tanaka, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 (5), 571-574, 1973.

[**MINDLIN R.D.1951**], « Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates », *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, 1951, p. 31-38

[**Miyamoto. 1999**] Miyamoto, Y. Kaysser, W.A. Rabin, B.H. Kawasaki, A. and ford, R.G. *functionally graded Material*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.

[**Moya, 1992**] J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, (1992).

[**Naghdi, 1957**], "On the theory of thin elastic shells". *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380 1957.

[**Noor, 1989**] Assessment of shear deformation theories for Multilayered composite plates. *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1, 12. Nelson. R.B & D.R.Lorch, (1974). A refined theory for laminated orthotropic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.41, pages 177-183

[**Nguyen. 2004**] Nguyen, Viet.Tung. Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.

[**Noda. 1991**] Noda, N. Thermal stress in materials with temperature- dependent roperties. *Applied Mechanics Reviews*, 44, 383–397, 1991

[**Na KS, Kim JH. 2004**] « Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials ». *Compos B Eng* ; 35(5):429–437

[**Nguyen.T.K2008**], Quelques méthodes pour l'estimation des propriétés effectives des plaques hétérogènes, Thèse de doctorat, Université Paris-Est ,2008

[**Ozturk. 1996**] Ozturk, M. Erdogan, F. Axisymmetric crack problem in bonded materials with a graded interfacial region. *Int. J. Solids Struct*, 33,193–219, 1996.

[**Pompea, 2003**], Schulte *Functionally graded materials for biomedical applications*, *Materials Science and Engineering*, vol. A362, pp. 40–60, (2003).

[**Praveen. 1998**] Praveen, G. N. and Reddy, J. N. Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33), 4457-4476, 1998

[**Qian. 2004**] Qian, L.F. Batra, R.C. and Chen, L.M. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless

[**Reddy. J.N, 1999**]. *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia.

[**Reddy. J.N, 1997**] *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton.

[**Reissner. E, 1975**] On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.

[**Reissner.E, 1945**] The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77

[**Ramirez. 2006**] Ramirez Fernando. Heyliger Paul R. Pan Ernian. Static analysis of functionally graded elastic anisotropic plates using a discrete layer approach. *Composites: Part B* 37, 10–20, 2006.

[**Reddy. 1984**] Reddy, J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech*, 51(4), 745-752, 1984.

[**Ravikiran. 2008**] Ravikiran, K. Kashif, A. and Ganesan, G. Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Model*, 32 (12), 2509-2525, 2008.

[**Rabin. 1998**] Rabin, B.H. Williamson, R.L. Bruck, H.A. Wang, X.-L. et al. Residual strains in Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> joint bonded with a composition interlayer: experimental measurements and FEM analysis. *J. Amer. Cer. Soc*, 81, 1541-1549, 1998.

[**Ramachandran. 2015**] Ramachandran, T. Kokula, Krishna. Hari, K. Thiruvengadam, B. Daniel, James. Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication, Engineering and Technology, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore, 2015.

[**René. PINZELLI**] “Fibres aramides pour matériaux composites ”,Techniques de l’Ingénieur, traité Plastiques et Composites, A3895

[**Saiyathibrahim. 2015**] Saiyathibrahim, A. Mohamed, Nazirudeen, S.S. Dhanapal, P. Processing techniques of functionally graded materials- Areview. International conference on systems, sciences, control, communication, engineering and technology, 2015.

[**Samsam Shariat, 2006**] Samsam Shariat, B. A. and Eslami, M. R. Thermomechanical Stability of Imperfect Functionally Graded Plates Based on the Third-Order Theory. AIAA journal Vol, 44, 12, December 2006.

[**Sankar. 2001**] Sankar, B.V. An elasticity solution for FGBs. Compos. Sci. Tech, 61, 689–696, 2001.

[**Shen. 2002**] Shen, H. S. Postbuckling Analysis of Axially-Loaded Functionally Graded Cylindrical Shells in Thermal Environments. Composite Science and Technology, 62,977-987, 2002.

[**Timoshenko. 1961**] Timoshenko, S. P. and Gere J. M. Theory of Elastic Stability. 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, New York, 1961.

[**Tanigawa. 1995**] Tanigawa, Y. Some basic thermoplastic problems for nonhomogeneous structural materials. Applied Mechanics Reviews, 48, 377–389, 1995.

[**T. Bitzer.1997**], Honeycomb Technology: Materials, Design, Manufacturing, Applications and Testing, Springer, 1997.

[**Timoshenko,, 1959**]. Theory of plates and Shells. McGraw-Hill, NewYork. Commun. Appl. Numer. Methods, vol. 3, pages 173,180, 1987.

[**T, K. Swaminathan, 2002**]. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite. Structure; 56 (4): 329-344.

[**Touratier. 1991**] Touratier, M. An efficient standard plate theory. Engng Sci, 29, 8, 901-916, 1991.



[Vaz. 2016] Vaz, M. A. and Bianchini, P. L. Thermomechanical initial post buckling of Timoshenko's beam on elastic foundations. *Journal of thermal stresses*, 39, 1, 44–56, 2016

[Woo. 2003] Woo, J. Meguid, S. A. and Liew, K. M. Thermomechanical postbuckling analysis of functionally graded plates and shallow cylindrical shells. *Acta Mechanica*, 165, 99–115, 2003

[Xian. 2010] Xian-Fang Li · Bao-Lin Wang · Jie-Cai Han. A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. *Arch Appl Mech*, 80, 1197–1212, 2010.

[Watari. 2003] Watari, F. Kondo, H. Matsuo, S. Miyao, R. Yokoyama, A. Omori, M. Hirai, T. Tamura, Y. Uoa, M. Ohara, N. Kawasaki, T. Development of functionally graded implant and dental post, for bio-medical application. *Mater. Sci. Forum*, 423-425:321-326, 2003.

[Yang. 2001] Yang, J. and Shen, H.S. Dynamic Response of Initially Stressed Functionally Graded Rectangular Thin Plates. *Composite Structures*, 54,497-508, 2001.

[Yang. 2006] Yang, J. Liew, K. M. and Kitipornchai, S. Imperfection Sensitivity of the Post-Buckling Behavior of Higher-Order Shear Deformable Functionally Graded Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 5247-5266, 2006.

[Zhong, 2007] Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, (2007).

[Zhu. 2001] Zhu, J. Lai, Z. Yin, Z. Jeon, J. and Lee, S. Fabrication of ZrO<sub>2</sub>-NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Mater. Chem. Phys*, 68(1-3), 130-135, 2001.

[Zhou. 2011] Zhou, Feng-xi, Li, Shi-rong, Lai, Yuan-ming. Three-dimensional analysis for transient coupled thermoelastic response of a functionally graded rectangular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 330, 3990–4001, 2011.

[Z. Chen.2012] et N. Yan, «Investigation of elastic moduli of Kraft paper honeycomb core sandwich panels,» *Composites: Part B*, vol. 43, p. 2107–2114, 2012.

[Zenkert D. 1995] “An introduction to sandwich construction”, EMAS ltd. UK.