



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

Mlle AISSI HANA

Mlle BENSAHNOUN REBIA

Sujet du mémoire

**Analyse du comportement mécanique des poutres
épaisses isotropes**

Soutenu publiquement le 25/06/2023 devant le jury composé de :

Mr. TLIDJI Youcef	Président
Mr. DRAICHE Kada	Rapporteur
Mlle. OUAZIR Khatima	Examinatrice
Mme. KHELIFA Zoubida	Examinatrice

PROMOTION : 2022/2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

R emerciement

Au terme de ce travail Nous remercions ALLAH tout puissant pour nous avoir donné la patience et la force d'accomplir ce modeste travail, je voudrais dans un premier temps à remercier mes parents et ma famille qui sont les premiers qui m'aider et m'encourager Nous tenons à remercier Monsieur Mr. DRAICHE KADA. Qui nous a fait profiter de ses larges connaissances et ses précieux conseils au cours de notre projet de fin d'étude et pour ses aides, et pour tous les éclaircissements qu'il nous a fournis et sa disponibilité tout au long de notre travail.

*Toutefois, il faut souligner que ce travail n'aurait pu voir le jour sans l'inestimable connaissance et savoir-faire acquis dans notre honorable Université ibn Khaldoun Tiaret
Faculté des sciences appliquées
«Département génie civil».*

C'est donc avec une immense fierté, que nous adressons nos remerciements les plus distingués à tous nos professeurs. Ainsi que toute personne qui a contribué à l'achèvement de ce projet, directement ou indirectement.

Résumé

Dans la présente étude, une nouvelle théorie de déformation en cisaillement parabolique (PSDBT) est développée pour analyser le comportement mécanique des poutres isotropes épaisses, en tenant compte des effets de déformation en cisaillement transverse. Le nombre de variables dans la présente théorie est identique à celui de la théorie élémentaire bien connue des poutres (ETB). La fonction polynomiale est utilisée dans le champ de déplacement en termes de coordonnée d'épaisseur pour représenter les effets de déformation de cisaillement. La caractéristique remarquable de cette théorie est que les contraintes de cisaillement transversales peuvent être obtenues directement à partir de l'utilisation de relations constitutives avec une excellente précision, satisfaisant les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la poutre. Par conséquent, la théorie évite le besoin d'un facteur de correction de cisaillement. Les équations différentielles sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton et résolues via des solutions de type Navier. Les poutres isotropes épaisses sont considérées pour les études numériques afin de démontrer l'efficacité de la présente théorie. Il a été constaté que la théorie est capable de prédire le comportement mécanique des poutres isotropes soumises aux différentes conditions de chargement.

Mots-clés: PSDBT ; Comportement mécanique ; Poutres isotropes ; Principe d'Hamilton.

Abstract

In the present study, a new parabolic shear deformation theory (PSDBT) is developed to analyze the mechanical behavior of thick isotropic beams, taking into account the transverse shear deformation effects. The number of variables in the present theory is identical to that of the well-known elementary beam theory (ETB). The polynomial function is used in the displacement field in terms of the thickness coordinate to represent shear deformation effects. The remarkable feature of this theory is that transverse shear stresses can be obtained directly from the use of constitutive relations with excellent accuracy, satisfying the boundary conditions on the top and bottom faces of the beam. Consequently, the theory avoids the need for a shear correction factor. The differential equations are obtained using Hamilton's principle and solved using Navier-type solutions. Thick isotropic beams are considered for numerical studies to demonstrate the effectiveness of the present theory. It was found that the theory is capable of predicting the mechanical behavior of isotropic beams subjected to different loading conditions.

Keywords: PSDBT; Mechanical behavior; Isotropic beams; Hamilton's principle.

ملخص

في هذه الدراسة، تم تطوير نظرية جديدة لتشوه القص القطع المكافئ (PSDBT) لتحليل السلوك الميكانيكي للعوارض السميكة أحادية الخواص، مع الأخذ في الاعتبار آثار تشوه القص العرضي. عدد المتغيرات في النظرية الحالية هو نفسه الموجود في نظرية العوارض الأولية المعروفة (ETB). تُستخدم الدالة كثيرة الحدود في مجال الإزاحة من حيث إحدائيات السُمك لتمثيل تأثيرات تشوه القص. الميزة الرائعة لهذه النظرية هي أنه يمكن الحصول على إجهادات القص المستعرضة مباشرة من استخدام العلاقات التأسيسية بدقة ممتازة، مما يلبي شروط الحدود على الوجوه العلوية والسفلية للحزمة. لذلك، تتجنب النظرية الحاجة إلى عامل تصحيح القص. يتم الحصول على المعادلات التفاضلية باستخدام مبدأ هاملتون ويتم حلها عبر حلول Navier. تأخذ في هذه الحالة العارضة السميكة أحادية الخواص للدراسات العددية لإثبات فعالية النظرية. وأثبت أن النظرية قادرة على التنبؤ بالسلوك الميكانيكي للعوارض أحادية الخواص الخاضعة لظروف التحميل المختلفة.

كلمات مفتاحية: PSDBT؛ السلوك الميكانيكي؛ العارضة أحادية الخواص؛ مبدأ هاملتون.

Table des matières

Remerciement

Résumé

Sommaire

Abstract

ملخص

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des notations

Introduction Générale..... 14

Chapitre I Généralité sur les matériaux composites

I.1 Introduction 17

I.2 Définition d'un matériau composite 17

I.3 Intérêt des matériaux composites 18

I.4 Différents types des matériaux composites..... 18

- Grande diffusion..... 18

- Hautes performances 18

I.5 Constituants des matériaux composites 18

I.5.1 Matrice 19

- a. La matrice organique..... 20

- I.5.1.1 Les résines thermodurcissables 21

I.5.1.2 Les résines thermoplastiques	23
I.5.1.3 Les résines thermostables	24
b. La matrice naturelle.....	24
I.5.2 Renfort	25
I.5.2.1 Les différents types de fibre.....	26
a) Fibre de verre	26
b) Fibre d'aramide	26
c) Fibre de bore.....	27
d) Fibre de silice (ou de quartz).....	27
e) Fibre de polyéthylène de haut module	27
f) Fibres de polyéthylène de haut module.....	28
I.5.2.2 Caractéristiques moyennes des fibres et renforts	28
I.5.2.3 L'interface.....	29
I.6 L'anisotropie et l'isotropie.....	29
I.6.1 Matériaux anisotropes	29
I.6.1.1 Matériau monoclinique	30
I.6.1.2 Matériau orthotrope	30
I.6.1.3 Matériau unidirectionnel	31
I.6.2 Matériaux isotropes.....	31
I.7 Conclusion	33

Chapitre II Les différentes Théories des poutres

II.1 Introduction	34
-------------------------	----

II.2 Définitions d'une poutre	36
II.3 Les modèles monocouche équivalente (ESL).....	36
II.3.1 Théorie classique des poutres (CBT).....	36
II.3.2 FSDBT : Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre de poutre(FSDBT)	38
II.3.3 HSDT :Théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé(HSDBT)	40
II.3.4 Théorie raffinée de déformation de cisaillement de poutre(RSDBT)	43
II.3.5 Théories de déformation de poutre HSDBT quasi-3D	45
II.4 Différents modèles de la théorie d'ordre élevé	46
II.5 Conclusion	46

Chapitre III Analyse du comportement mécanique des poutres isotropes épaisses

III.1 Introduction	48
III.2 Formulation théorique	49
III.2.1 Modèle d'une poutre isotrope	49
III.2.2 Hypothèses formulées dans la formulation théorique	49
III.2.3 Relations cinématiques et constitutives.....	50
III.2.4 Equations de mouvement	52
III.3 Solution analytique pour les poutres isotropes.....	54
III.3.1 Analyse de flexion	54
III.3.2 Analyse de flambage	56
III.3.3 Analyse des vibrations libres.....	57
III.4 Conclusion.....	58

Chapitre IV Résultats et discussions

IV.1 Introduction	59
IV.2 Résultats numériques et analyse comparative.....	59
IV.2.1 Analyse de flexion des poutres isotropes	60
IV.2.2 Analyse du flambage des poutres isotropes	68
IV.2.3 Analyse des vibrations libres des poutres isotropes.....	70
IV.3 Conclusion	71
Conclusion générale.....	71

Liste des figures

CHAPITRE I

Figure I.1 : Matériau composite.....	19
Figure I.2 : différents types de matrice	20
Figure I.3 : différents types de renforts.....	25
Figure I.4 : Distribution des contraintes sur un élément de volume	29
Figure I.5 : Matériau composite unidirectionnel.....	31

CHAPITRE II

Figure II.1 : Schéma d'un élément de poutre	36
Figure II.2 : Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli	38
Figure II.3 : Cinématique de la poutre de Timoshenko	40
Figure II.4 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé d'une poutre	41

CHAPITRE III

Figure III.1 : Système de coordonnées et géométrie d'une poutre isotrope.....	49
Figure III.2 : Poutres isotropes simplement soutenue, soumise à une charge mécanique axiale et/ou transversale.....	55

CHAPITRE IV

Figure IV.1 : Variations du déplacement axial à travers l'épaisseur \bar{u} d'une poutre isotrope simplement soutenue et soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 4$)	62
Figure IV.2 : Variations de la contrainte axiale à travers l'épaisseur $\bar{\sigma}_x$ d'une poutre isotrope simplement soutenue et soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 4$)	63

Figure IV.3 : Variations à travers l'épaisseur d'une contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ d'une poutre isotrope simplement soutenue et soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 4$) 63

Figure IV.4 : Variations du déplacement axial à travers l'épaisseur \bar{u} d'une poutre isotrope simplement soutenue et soumise à une charge uniformément répartie ($L/h = 4$) 65

Figure IV.5 : Variations de la contrainte axiale à travers l'épaisseur $\bar{\sigma}_x$ d'une poutre isotrope simplement soutenue et soumise à une charge uniformément répartie ($L/h = 4$) 65

Figure IV.6 : Variations à travers l'épaisseur d'une contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ d'une poutre isotrope simplement soutenue et soumise à une charge uniformément répartie ($L/h = 4$) 65

Figure IV.7 : Variations du déplacement axial à travers l'épaisseur \bar{u} d'une poutre isotrope simplement soutenue et soumise à une charge variant linéairement ($L/h = 4$) 67

Figure IV.8 : Variations de la contrainte axiale à travers l'épaisseur $\bar{\sigma}_x$ d'une poutre isotrope simplement soutenue soumise à une charge variant linéairement ($L/h = 4$) 67

Figure IV.9 : Variations à travers l'épaisseur d'une contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ d'une poutre isotrope simplement soutenue et soumise à une charge variant linéairement ($L/h = 4$) 68

Figure IV.10 : Variation de la charge critique de flambage non dimensionnelle \bar{N}_{cr} d'une poutre isotrope simplement soutenue en fonction du rapport entre les côtés et l'épaisseur ($L/h = 4$) 69

Figure IV.11 : Variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une poutre isotrope simplement soutenue en fonction du rapport entre les côtés et l'épaisseur ($L/h = 4$) 70

Liste des Tableaux

CHAPITRE I

Tableau I.1 : Principales différences entre les thermodurcissables et les thermoplastiques...21
Tableau I.2 : Caractéristiques principales des matrices thermodurcissables (TD).....22
Tableau I.3 : Caractéristiques principales des matrices thermoplastiques (TP)23
Tableau I.4 : Caractéristiques moyennes des fibres et renforts28
Tableau I.5 : résume les propriétés approximatives de plusieurs matériaux courant32

CHAPITRE II

Tableau II.1 : Différentes fonctions de gauchissement utilisées dans les théories des poutres isotropes46
--

CHAPITRE IV

Tableau IV.1 : Comparaison des déplacements adimensionnels d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale.....61
Tableau IV.2 : Comparaison des contraintes adimensionnelles d'une poutre isotrope simplement appuyée. Soumise à une charge sinusoïdale62
Tableau IV.3 : Comparaison des déplacements adimensionnels d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie.....64
Tableau IV.4 : Comparaison des contraintes adimensionnelles d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie.....64
Tableau IV.5 : Comparaison des déplacements adimensionnels d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge variant linéairement66
Tableau IV.6 : Comparaison des contraintes adimensionnelles d'une poutre isotrope simplement appuyée. Soumise à une charge variant linéairement.....66
Tableau IV.7 : Comparaison de la charge critique de flambement.....69

Tableau IV.8 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles d'une poutre isotrope simplement appuyée. 70

Liste des notations

E Module de Young

G Module de cisaillement

ν coefficient de Poisson

ρ Densité de masse

L La longueur de la poutre

b La largeur de la poutre

h L'épaisseur de la poutre

A Surface de la section transversale de la poutre uniforme

$u_0(x,t)$ composante de déplacement du plan médian

$w_0(x,t)$ déplacement transversal

$f(z)$ Fonction de cisaillement

$g(z)$ Dérivée de la fonction de cisaillement transverse

q et N_x^0 charges de compression transversale et axiale

τ_{xz} La contrainte de cisaillement

σ_x La contrainte normale

$u_0(x,t)$, $w_0(x,t)$ Déplacements inconnus du plan médian de la poutre

$\phi_x(x,t)$ La rotation d'une section transversale de la poutre au niveau de la couche neutre

$\delta U, \delta V$ Et δK représente les variations de l'énergie de déformation, de l'énergie potentielle due à la charge externe transversale

q_m coefficient de l'expansion de Fourier

INTRODUCTION GENERALE

Il va sans dire que les améliorations dans le domaine des matériaux sont nécessaires au progrès technologique. Tout le monde peut constater que même la conception la plus avant-gardiste d'une turbine ou d'un avion ne sert à rien s'il n'y pas suffisamment de matériaux disponibles pour supporter les charges de service et les circonstances. Quel que soit le secteur, les matériaux déterminent en fin de compte jusqu'où la technologie peut aller. Dans cette perspective, les matériaux composites ne sont qu'une avancée significative dans la quête permanente de l'optimisation des matériaux. Au sens strict, Le concept de matériaux composites n'est pas nouveau ou récent. La nature toujours pu bénéficier de la combinaison d'ingrédients chimiquement dissemblables. Les matériaux composites évoluent sans cesse pour produire des biens qui sont, d'une part, soit les moins chers, soit les plus performant, voire les deux, et d'autre part, ils doivent répondre à de nouvelles exigences, notamment celles relative à la protection de l'environnement.

Les poutres sont fréquemment utilisées dans la construction de structures telles que les bâtiments, les ponts, les machines et les véhicules. Dans la théorie de l'élasticité, les poutres épaisses sont considérées comme des problèmes bidimensionnels. L'objectif de l'analyse de ce sujet reste encore à réduire à un problème grossièrement unidimensionnel. Différentes théories, chacune avec son propre niveau de complexité et ses propres hypothèses simplificatrices, peuvent être utilisées pour modéliser le comportement des poutres sous des charges externes.

En génie civil et mécanique, la théorie classique des poutres (CBT) est la méthode la plus souvent utilisée. Cette théorie traite une poutre comme un élément unidimensionnel avec une section transversale constante et une longueur suffisamment grande par rapport à sa section transversale pour ignorer les effets de bord. Parce qu'elle suppose que les sections planes perpendiculaires à l'axe neutre avant la déformation restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre après la déformation, cette théorie est également appelée théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli. Pour les poutres minces, cette idée se vérifie souvent. Elle repose sur des simplifications abusives telles que l'absence de déformation en torsion et de cisaillement transversal. Cette théorie offre un moyen simple et rapide d'évaluer la performance d'une poutre soumise à des charges externes et est suffisamment précise pour la majorité des applications réelles.

INTRODUCTION GENERALE

La théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) a été créée pour surmonter les restrictions de la CBT. Les effets de cisaillement transversal dans les poutres minces sont pris en compte par la FSDT alors qu'ils sont négligés par la CBT. En outre, elle permet de modéliser des poutres asymétriques avec diverses propriétés longitudinales et transversales. La FSDT est utilisée dans la théorie des poutres de Timoshenko, par exemple. Stephen Timoshenko [1], un mathématicien ukrainien, l'a créée dans les années 1920. En supposant que les sections planes perpendiculaires à l'axe neutre avant déformation restent planes mais peuvent ne pas être perpendiculaires à l'axe neutre après déformation, cette théorie prend en considération les effets du cisaillement transversal. La variation linéaire du déplacement du plan médian est prise en compte par la FSDT. Selon cette théorie, la distribution des déformations de cisaillement transversal est supposée être constante sur toute l'épaisseur de la poutre, ce qui nécessite l'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement dépendant du problème pour représenter avec précision l'énergie de déformation de cisaillement. La théorie des poutres de Timoshenko est fréquemment utilisée pour analyser les poutres longues et minces telles que les poutres en acier utilisées dans la construction de bâtiments et les poutres en bois utilisées dans la construction de ponts. Pour les poutres étroites et asymétriques, elle offre des résultats plus précis que la CBT. Pour l'analyse statique et dynamique des poutres épaisses, plusieurs scientifiques ont proposé des idées. Pour l'analyse statique et dynamique des poutres épaisses, Levinson [2], Krishna Murty [3], Heyliger et Reddy [4] ont conçu une théorie de déformation parabolique en cisaillement. Cette approche permet également de simuler simultanément les effets de flexion et de torsion. Cette théorie a été développée par Ghugal en 2001 [5] pour prendre en compte les effets de cisaillement transversal dans les poutres de toute forme, y compris celles avec des sections transversales non uniformes et en forme de T.

Ghugal et Sharma [6] ont étendu la théorie de la déformation en cisaillement hyperbolique de Soldatos en 2010 [7] pour inclure l'analyse de la flexion des poutres isotropes avec une variété de conditions aux limites. Une théorie trigonométrique de déformation normale et de cisaillement pour l'analyse de flexion des poutres isotropes et stratifiées a été développée par Sayyad et Ghugal en 2014 [8]. Des comparaisons avec des résultats expérimentaux et d'autres méthodes d'analyse ont été utilisées pour valider cette théorie, démontrant son applicabilité et son efficacité. Pour l'analyse de la flexion, du flambement et des vibrations des poutres épaisses, Karama et ses collègues [9] ont créé une nouvelle théorie en 1999.

INTRODUCTION GENERALE

Une étude plus réaliste et plus précise des structures épaisses est possible grâce à la prise en compte plus exacte des effets du cisaillement transversal que dans les théories traditionnelles.

La théorie des poutres de Sayyad [10] inclut l'impact de la déformation en cisaillement transversal pour combiner la théorie trigonométrique de la déformation en cisaillement et la théorie de la déformation normale. En fonction des coordonnées de l'épaisseur, elle utilise une variété de fonctions mathématiques pour décrire la déformation, notamment des fonctions paraboliques, trigonométriques, hyperboliques et exponentielles. La théorie unifiée fournit, par rapport aux théories conventionnelles, une caractérisation plus précise de la flexion et des vibrations libres des poutres isotropes avec cette combinaison appropriée de fonctions.

La théorie de la déformation parabolique en cisaillement, qui comprend une inconnue pour la flexion et les vibrations des poutres isotropes, a été développée pour la première fois par Ghugal [11]. Des théories de déformation par cisaillement affinées pour l'analyse de la flexion des poutres isotropes ont été récemment fournies par Sayyad et al [12–14]. D'après la littérature susmentionnée, il y a au plus deux inconnues dans les théories d'ordre élevé qui ont été rapportées dans la littérature au cours des dernières décennies. Étant donné qu'une seule inconnue peut satisfaire les conditions aux limites sans contrainte en haut et en bas des poutres, une nouvelle classe de théories raffinées de déformation en cisaillement est présentée dans la présente étude. L'efficacité des théories proposées est démontrée par leur application à l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration libre de poutres solides homogènes et isotropes à section rectangulaire qui sont simplement appuyées.

Il est donc à noter que l'objet de ce travail est l'analyse du comportement mécanique des poutres épaisses isotropes et les recherches portent exclusivement sur les composites et les théories des poutres, incluent les études théoriques et numériques sur : la flexion, le flambement et les vibrations des poutres isotropes. Les principaux objectifs de ce travail peuvent être résumés comme suit :

- **Chapitre I :** Généralités sur les matériaux composites.
- **Chapitre II:** Les différentes Théories des poutres.
- **Chapitre III :** Analyse du comportement mécanique des poutres isotropes épaisses.
- **Chapitre IV:** Résultats et discussions.

I.1 INTRODUCTION

Les matériaux composites sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doué d'un potentiel illimité. Les matériaux composites se développent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de haute technologie. Ainsi, le développement de l'utilisation des matériaux composites dans les structures nécessite de mettre en place les outils nécessaires à la modélisation du comportement mécanique des matériaux composites et à l'analyse des structures [15].

On peut classer les matériaux en cinq grandes familles : les métaux, les plastique, les céramiques, les organiques et les composites. Les métaux sont en général tenaces (ils résistent à la propagation de fissures) et ductiles (ils présentent des déformations importantes avant de se rompre), mais de masse volumique élevée. Les matières plastiques sont légères mais présentent de faibles propriétés mécaniques. Les céramiques sont rigides et résistantes, mais fragiles. Donc il est difficiles de concevoir des structures tout employant le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition dans l'espace) [16].

Depuis que les matériaux ont gagné en popularité, il est désormais possible de mélanger différents types de matériaux avec des qualités distinctes pour aller vers un matériau composite qui répond au besoin (plus stable du point de vue thermodynamique et fiable du point de vue mécanique). A partir de là, Ce chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux Composites, en abordant la définition des matériaux composites et leurs types, et en donnant une vision assez large des principaux constituants, à savoir les résines, les renforts et leurs propriétés mécaniques, plus particulier les caractéristiques des matériaux isotopes et leurs utilisations dans le domaine de génie civil.

I.2 Définition d'un matériau composite

Dans un sens large, le mot "composite" signifie constitué de deux ou plusieurs parties différentes. En fait, l'appellation matériau composite ou composite est utilisée dans un sens beaucoup plus restrictif, qui sera précisé tout au long de ce chapitre. Nous en donnons pour l'instant la définition générale suivante. Un matériau composite est défini comme un système composé de deux ou plusieurs phases, dont les propriétés et les performances sont conçues de

manière à ce que le résultat soit supérieur à ceux des matériaux constitutifs agissant indépendamment [16, 17].

I.3 Intérêt des matériaux composites

L'un des principaux avantages des composites est que leurs propriétés peuvent être modifiées en fonction de considérations de conception, notamment le type, le taux, l'orientation et l'architecture des fibres, la disposition des plis et le type de matrice.

Le matériau composite peut avoir les propriétés suivantes : isolation, conductivité électrique et/ou thermique, coefficient de dilatation thermique adapté à l'usage prévu et optimisation de l'absorption d'énergie (impact et acoustique).

Il peut intégrer de multiples usages (inserts, éléments décoratifs, protection, etc.) et des géométries complexes, de vastes dimensions, et/ou des tailles multiples.

I.4 Différents types des matériaux composites

On distingue deux types de composites :

- **Grande diffusion**

Les matériaux composites à grande diffusion offrent des avantages essentiels, qui sont : Optimisation des coûts par diminution des prix de revient, sa composition de polyester avec des fibres de verre longues ou courtes (sous forme de mat ou tissu) et la simplicité du principe des matériaux (moulage par contact, SMC et injection) [18].

- **Hautes performances**

Les matériaux composites à hautes performances sont utilisés dans le domaine d'aéronautique où le besoin d'une grande performance déduite des hautes valeurs ajoutées. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%. Ces composites sont élaborés par les procédures suivantes :

- Drapage autoclave, enroulement filamentaire, RTM ;
- Beaucoup de procédés encore manuels.

I.5 Constituants des matériaux composites

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Typiquement, l'une des phases est discontinue, plus rigide, et connue sous le nom « renfort » ; l'autre est plus faible, moins rigide et continue, et connue sous le nom de « matrice ». Entre la matrice et le renfort, il peut

parfois y avoir une phase supplémentaire appelée « interface » à la suite de réactions chimiques ou d'autres processus (figure I.1).

Il ne peut jamais y avoir de glissement ou de séparation de phase si le matériau composite n'est pas endommagé, car les renforts et la matrice sont parfaitement liés. Le matériau composite le plus connu et utilisé dans l'industrie de la construction est le béton armé, qui combine le béton et l'acier pour représenter respectivement la matrice et le renforcement. Le rôle essentiel des renforts est d'assurer la tenue mécanique du composite. La matrice garantit quant à elle la protection chimique et la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques.

Il est bien connu que les caractéristiques mécaniques des constituants (la matrice, les fibres et l'interface fibre-matrice) affectent directement le bon fonctionnement des composites fibreux. La rigidité d'un composite est apportée principalement par des fibres qui ont des caractéristiques mécaniques beaucoup plus supérieures à la matrice. Cette dernière révèle la forme géométrique de la structure. La zone située entre les fibres et la matrice est connue sous le nom d'interface, par rapport aux fibres et aux matrices, il possède diverses propriétés chimiques et mécaniques.

Bien qu'il existe de nombreuses fibres et matrices différentes disponibles, nous mettrons en évidence certains des matériaux les plus populaires.

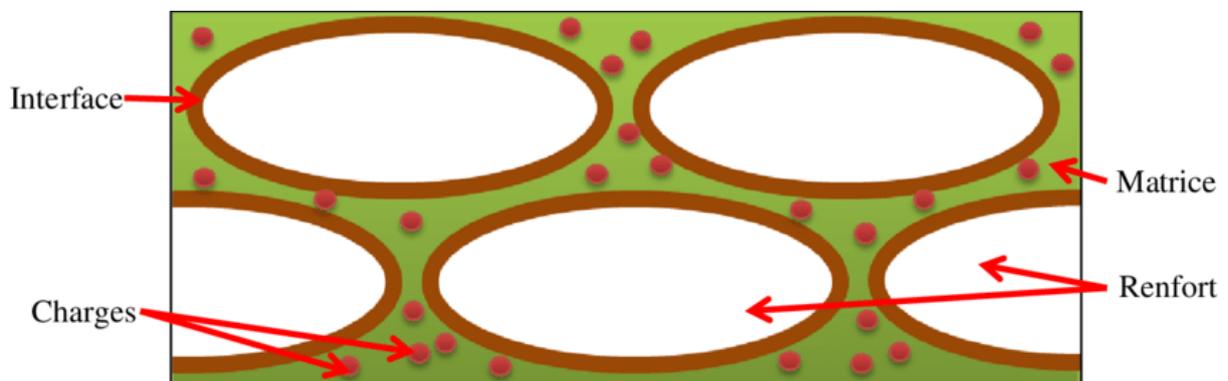


Figure I.1 : Constituants d'un matériau composite.

I.5.1 Matrice

Malgré leurs valeurs élevées de résistance et de module élastique, les fibres ne seraient pas aussi importantes si l'élément conçu n'avait pas une forme stable. La matrice, qui intègre les fibres et garantit la mise en forme de l'organe tout en protégeant les fibres de l'environnement extérieur, complète cette mission. Comme cela a déjà été mentionné, il existe trois types de

matrices : céramique, métal et plastique. Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2 200°C peuvent être atteintes [19]. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure I.2 :

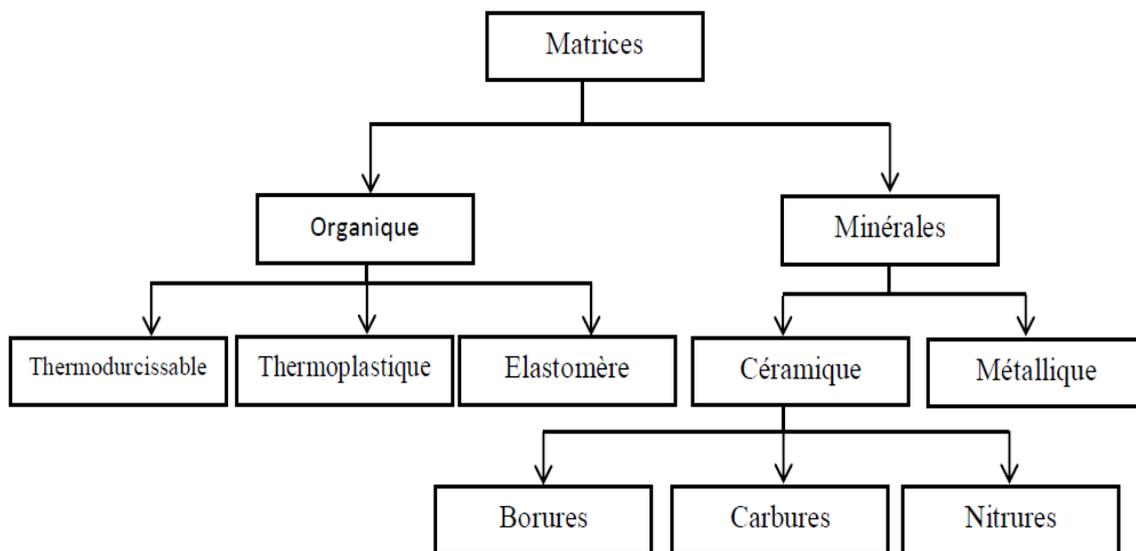


Figure I.2 : Les différents types de matrice.

I.5.1.1 La matrice organique

Un matériau composite à matrice organique est l'association d'au moins deux matériaux non miscibles. Généralement deux grandes catégories de polymères : les thermoplastiques (TP) et les thermodurcissables (TD). La plupart des composites à matrice organique sont fabriqués à partir de résines thermodurcissables sous toutes leurs formes, mais la forme liquide a été souvent choisie car elle favorise l'imprégnation des fibres à la température ambiante. On peut probablement expliquer de cette façon le choix initial de matières thermodurcissables plutôt que celui des matières thermoplastiques. Celles-ci possèdent pourtant les caractéristiques mécaniques nécessaires pour constituer des matrices intéressantes pour les composites, comme le montrent les études et les développements industriels actuels.

CHAPITRE 1 : GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

Aussi, il est important de bien situer les différences fondamentales de ces deux types de matrices afin de bien appréhender le comportement mécanique spécifique de chaque type de composite (Tableau. I.1) [20].

Tableau. I.1 : Principales différences entre les thermodurcissables et les thermoplastiques [21].

Matrices	Thermodurcissables	Thermoplastiques
Etat de base Liquide	Solide prêt à l'emploi	visqueux à polymériser
Stockage	Illimité	Réduit
Mouillabilité renforts	Difficile	Aisée
Moulage	Chauffage + refroidissement	Chauffage continu
Cycle	Court	Long
Tenue au choc	Assez bonne	Limitée
Tenue thermique	Réduite	Bonne
Chutes et déchets	Recyclables	Perdus ou recyclés en charges
Conditions de travail	Propreté	Emanation pour

I.5.1.2 Les résines thermodurcissables

Les résines thermodurcissables sont des polymères, qui, après un traitement thermique ou physico-chimique (catalyseur, durcisseur), se transforment en des produits essentiellement infusibles et insolubles. Ces résines ont donc la particularité de ne pouvoir être mises en forme qu'une seule fois [22]. Elles ont des propriétés mécaniques élevées. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. Les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, amioplastes, furaniques) et les résines époxy sont des résines thermodurcissables. Les exemples de résines thermodurcissables classiquement rencontrées sont 914, 5208, 70, LY556. Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont présentées dans le tableau I.2 [19].

Les résines thermodurcissables principalement utilisées actuellement sont [23] :

- Polyesters insaturés : C'est la résine la plus utilisée dans l'application des composites de grande distribution. Cette résine contenant un monomère est réticulée à température ambiante par addition d'un catalyseur de type peroxyde organique et d'un accélérateur. Elle passe successivement de l'état liquide visqueux initial à l'état de gel, puis à l'état de solide infusible.

CHAPITRE 1 : GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

- Vinylester : On peut la considérer comme une variante des polyesters produite à partir d'acides acryliques. Elles possèdent une bonne résistance à la fatigue et un excellent comportement à la corrosion, mais demeure combustible.
- Phénoliques : Elles sont issues de la polycondensation du phénol et du formol et se caractérisent par une bonne tenue au feu, sans fumée. Elles restent fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à colorer et à mettre en œuvre.
- Epoxydes : Elles résultent de la polyaddition de l'épichlorhydrine sur un polyalcool et constitue la résine type des composites hautes performances HP. On distingue deux classes de résines en fonction du durcissement à chaud ou à froid ou bien de la tenue en température (120-130 °C, ou 180-200 °C).
- Polyuréthanes et polyurées : Dans la fabrication de pièces composites, on utilise ce type surtout des formules élasto-mériques dont la faible viscosité permet un bon remplissage du moule.
- Polyimides : Ces résines sont utilisées dans les composites HP, lorsque l'on cherche une bonne stabilité sous hautes températures (> 250 °C). Elles restent toutefois très onéreuses et difficiles à mettre en œuvre.
- Bismaléimides Matrices : très peu utilisées en Europe. Elles offrent une bonne tenue à la fois au choc et en température, mais restent difficiles à mettre en œuvre.

Tableau. I.2 : Caractéristiques principales des matrices thermodurcissables (TD) [23].

Matrices Thermodurcissables	Masse volumique (kg/m ³)	Module de Young (MPa)	Module de cisaillement(MPa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (MPa)	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C-1
	Mv	E	G	K	Cr	A	A
Epoxyde	1200	4500	1600	0.4	130	2	11*10 ⁻⁵
Phénolique	1300	3000	1100	0.4	70	2.5	1*10 ⁻⁵
Polyester	1200	4000	1400	0.4	80	2.5	8*10 ⁻⁵
Polycarbonate	1200	2400		0.35	60		6*10 ⁻⁵
Vinylester	1150	3300			75	4	5*10 ⁻⁵
Silicone	1100	2200		0.5	35		
Uréthane	1100	700 à7000			30	100	
Polyamide	1400	4000à19000	1100	0.35	70	1	8*10 ⁻⁵

I.5.1.3 Les résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques sont des solides généralement solubles, formés de chaînes distinctes bien compactées, liées entre elles par des seules liaisons secondaires (force de van der Waals, liaisons d'hydrogène) et mis en forme par chauffage et refroidissement [20]. Ces résines ont des propriétés mécaniques faibles et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Les résines thermoplastiques classiquement rencontrées sont PEEK, K3B. De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants sont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau I.3 [19].

Tableau. I.3 : Caractéristiques principales des matrices thermoplastiques (TP) [23].

Matrices thermoplastiques	Masse volumique (kg / m ³)	Module de Young (MPa)	Coefficient de poisson	Contrainte à la rupture (MPa)	Allongement à rupture%	Coefficient de dilatation thermique °C ⁻¹
	Mv	E	K	Cr	A	α
PP	900	1200	0.4	30	20 à 400	9*10 ⁻⁵
PPS	1300	4000		65	100	5*10 ⁻⁵
PA	1100	2000	0.35	70	200	8*10 ⁻⁵
PES	1350	3000		85	60	6*10 ⁻⁵
PEI	1150	3300		105	60	6*10 ⁻⁵
PEEK	1300	4000		90	50	5*10 ⁻⁵

Les principales matrices thermoplastiques utilisées (possédant tous une tenue en température supérieure à 100 °C) sont les suivantes [23] :

- Polypropylène (PP) : peu onéreux et assez stable en température, mais combustible, utilisé pour les polymères grands diffusion, la tenue thermomécanique se situe entre 60 et 90°C sans renfort.

- Polysulfure de phénylène (PPS) : résistance à l'hydrolyse.
- Polysulfures (PSU et PPS) : bonne stabilité chimique et à l'hydrolyse, peu de fluage, tenue au chaud.
- Polyamide (PA) : tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures.
- Polyéther-sulfone(PES).
- Polyéther-imide(PEI).
- Polyéther-éther-cétone (PEEK).

I.5.1.4 Les résines thermostables

Les résines thermostables se distinguent des autres résines, précédemment considérées, essentiellement par leurs performances thermiques qui conservent leurs propriétés mécaniques pour des températures plus élevées que 200°C. Ce Polymère présentant des caractéristiques mécaniques stables sous des pressions et des températures élevées appliquées de façon continue. Cette propriété est mesurée en déterminant la température que peut supporter la résine durant 2000 Heures sans perdre la moitié de ses caractéristiques mécaniques [18]. Dans la pratique nous retrouvons pour ces résines les deux grandes familles des résines thermoplastiques et thermodurcissables. Parmi les résines thermostables, les résines bismaléimides et polyimides sont les plus utilisées [15].

- Les résines bismaléimides : sont des résines dont le réseau est élaboré à des températures de 180 à 200°C. Les procédés de moulage sont identiques à ceux des composites à matrice thermodurcissable de type polyester ou époxyde.
- Les résines polyimides : sont apparues sur le marché vers 1970. Ce sont des résines à haute résistance thermique, mais de prix très élevé. Ces résines permettent d'obtenir des composites de résistance supérieure, à 250 °C, à la résistance de l'aluminium [15].

I.5.1.5 La matrice naturelle

Ce sont des matériaux synthétisés par les êtres vivants, animaux et micro-organismes. La famille la plus importante est celle des polysaccharides comme l'amidon, la cellulose la lignine.

Matrices métalliques : L'utilisation des matrices métalliques est encore actuellement en grande partie à un stade préindustriel. Plusieurs matériaux composites tels que ; l'Aluminium et ses alliages, Nickel, Titane, présentent une bonne conductibilité électrique et thermique, une bonne tenue à des températures élevées et de plus ils possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques transverses Leur fabrication conduit à des coûts très élevés [18].

Matrices céramiques : Les matériaux utilisés sont les carbures de silicium et de carbone. Ils sont utilisés pour la fabrication des pièces qui subissent des contraintes d'origine thermique et leur coût est très élevé [18].

I.5.2. Renfort

Le renfort représente l'armature du matériau composite, en assurant sa tenue mécanique (résistance et rigidité). Ce dernier est en général de nature fibreuse donnant ainsi au matériau un caractère directionnel. Outre sa forme (fibres longues ou courtes ou particules), le renfort se définit aussi par sa nature (organique ou minérale) et son architecture. Le verre, le carbone et l'aramide sont les renforts les plus utilisés. Les fibres longues sont généralement constituées d'un assemblage de milliers de filaments de très faible diamètre (quelques dizaines de micromètres). Ces fibres sont regroupées en paquets appelés torons. L'agencement spatial des torons permet d'obtenir différentes architectures de renforts fibreux [24]. Les rôles des renforts consistent à résister à la force appliquée. Et donner au composite sa rigidité élastique et sa résistance à la rupture, éventuellement à des températures élevées. Pour assurer une adhésion adéquate et stable dans le temps de l'interface renfort-matrice, ils doivent également être chimiquement compatibles avec la matrice du composé. La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I.3.

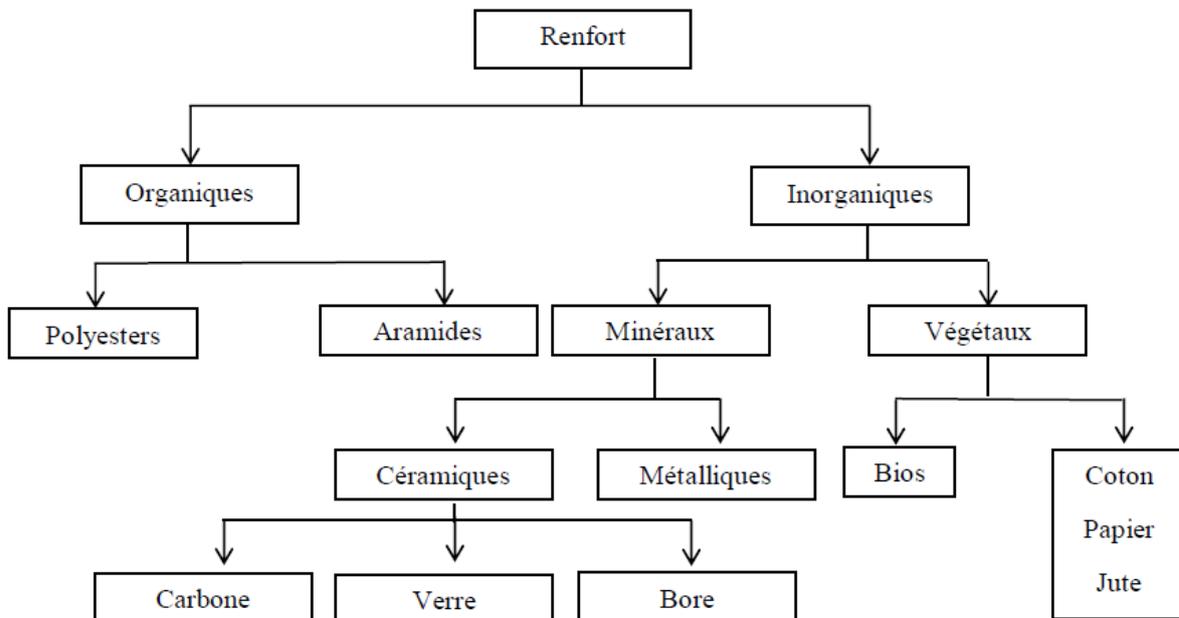


Figure I.3 : Les différents types de renforts.

Les fibres constituent les renforts du matériau composite. Elles introduisent un caractère unique au matériau avec leurs excellentes propriétés mécaniques. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme continues (fibres longues), soit sous forme discontinues (fibres courtes).

I.5.2.1 Les différents types de fibre

a) Fibre de verre

Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). On distingue trois types de fibres :

- E : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;
- R : pour les composites hautes performances ;
- D : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques) [23].

Ces fibres ont le plus grand tonnage et sont les plus anciennes (1940) et les plus abordables (environ 1 euro/kg). Elles sont obtenues en extrudant le verre à travers les trous d'une chaîne de percussion de 1 à 2 mm de diamètre, en l'étirant jusqu'à ce qu'il atteigne un diamètre de 5 à 15 mm, en l'enrobant et en le lovant.

La fibre de verre est utilisée dès 1930 en application industrielle de grande échelle comme isolant haute température de conducteurs électriques. La fibre de verre E est la plus utilisée, que ce soit dans l'industrie textile ou pour les composites, et se retrouve dans 90 % des renforts. Fibre de qualité, elle se distingue par sa résistance aux hautes températures et ses excellentes propriétés d'isolation électrique. Elle est imputrescible, résiste aux principaux agents chimiques et reste dimensionnellement stable, même en cas de fortes variations d'humidité et de température [25].

b) Fibre de carbone

C'est la fibre la plus utilisées dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile). Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres : fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C ; fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C [23]. Les cristallites de graphite qui composent ces objets présentent une anisotropie très importante qui leur confère leurs caractéristiques. Ils sont créés à partir de fibres polymères préalablement tissées (comme le polyacrylonitrile), qui sont ensuite carbonisées

sous tension au cours d'une série de processus avant d'être soumises à l'oxydation (entre 100 et 200 C°) et à la pyrolyse (1500 et 2500 C°).

c) **Fibre d'aramide**

La fibre d'aramide est apparue dans les années soixante. Elle se compose de filaments jaunes d'une dizaine de microns de diamètre assemblés en fils. L'aramide est une contraction du terme aromatic polyamide aussi connu sous son nom chimique para-phenyleneterephthalamide ou PPD-T. Il existe trois familles principales de polyamides :

Les para-aramides : ils sont utilisés dans de nombreux domaines d'applications de haute technologie. Principalement connus sous la marque Kevlar® par Dupont, ils sont appréciés pour leurs propriétés mécaniques.

Les copolymères de para-aramide : ces dérivés des para-aramides ont aussi d'excellentes propriétés mécaniques.

Les méta-aramides : ils sont connus pour leurs excellentes caractéristiques thermiques et chimiques et commercialisés sous la marque Nomex® par Dupont. Ils s'utilisent principalement dans les domaines du textile technique et du vêtement de protection [25].

d) **Fibre de bore**

En 1969, la fibre de bore a été la toute première fibre de haute performance à être utilisée pour une application de production.

A cette époque, la fibre de carbone n'était pas encore disponible en fibres continues et la fibre de verre ne présentait pas de module suffisant. Les filaments de bore sont synthétisés selon un procédé de dépôt chimique en phase vapeur (CVD). Ils sont élaborés en partant d'une âme qui est le plus souvent en tungstène, mais qui peut aussi être en verre ou en graphite. Ils sont Très résistants et à haut module élastique et de faible densité [26].

e) **Fibre de silice (ou de quartz)**

Ils sont constitués de filaments continus, homogènes et non poreux. La silice est non seulement l'un des matériaux haute température les plus performants, mais aussi parmi les plus fiables et les plus écologiques du marché.

La fibre de silice pure peut résister à une température continue de 1 050 °C sans subir de grandes variations dimensionnelles même en cas de choc thermique. Elle se démarque aussi

CHAPITRE 1 : GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

par une conductivité thermique très basse, une bonne résistance chimique et des propriétés diélectriques remarquables.

Le quartz est l'une des sources les plus pures de silice, qui est naturellement présente dans de nombreux minéraux sous la forme **SiO**. Après concassage et purification, la matière première est chauffée jusqu'à son point de fusion pour créer des barrettes de silice. Ces dernières sont étirées pour former une fibre qui sera ensuite travaillée en fonction de son application [25].

f) Fibres de polyéthylène de haut module

Elles présentent une très bonne résistance à la traction mais une mauvaise mouillabilité. Pour des structures peu sollicitées, on peut encore utiliser des fibres synthétiques courantes de polyamide ou polyester [23].

I.5.2.2 Caractéristiques moyennes des fibres et renforts

Les caractères recherchés des renforts sont :

- des caractéristiques mécaniques élevées,
- une masse volumique faible,
- une bonne compatibilité avec les résines,
- une facilité de mise en œuvre pour un faible cout.

Tableau. I.4 : Caractéristiques moyennes des fibres et renforts [23].

Renforts	Diamètre du filament (µm)	Masse volumique (kg./m ³)	Module de Young (Mpa)	Module de cisaillement (Mpa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (Mpa)	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C ⁻¹
Symbole	D	ρ	E	G	N	Sr	A	A
Verre E	16	2600	74000	30000	0.25	2500	3.5	0.5*10 ⁻⁵
Verre R	10	2500	86000	—	0.2	3200	4	0.3*10 ⁻⁵
Carbone HM	6.5	1800	390000	20000	0.35	2500	0.6	0.08*10 ⁻⁵
Carbone HR	7	1750	230000	50000	0.3	3200	1.3	0.02*10 ⁻⁵
Kevlar 49	12	1450	130000	12000	0.4	2900	2.3	-0.2*10 ⁻⁵
Bore	100	2600	400000	—	—	3400	0.8	0.4*10 ⁻⁵
Silicate d'alumine	10	2600	200000	—	—	3000	1.5	—
Polyéthylène	—	960	100000	—	—	3000	—	—

I.5.2.3 L'interface

L'utilisation d'une couche interface permet d'assurer la compatibilité entre le renfort et la matrice. Qui se forme spontanément lorsque deux phases sont mises en présence l'un de l'autre au moment de l'élaboration du matériau et qui se maintient entre ces deux phases pendant toute la vie du matériau, l'interface n'est pas simplement une simple discontinuité entre les deux phases du matériau hétérogène ou leur juxtaposition [27].

I.6 L'anisotropie et l'isotropie

I.6.1 Matériaux anisotropes

Les relations linéaires contrainte-déformation contiennent les constantes des propriétés des matériaux, qui ne peuvent être évaluées que par des expériences en laboratoire ou sur le terrain. Les propriétés mécaniques des matériaux les plus courants, tels que l'acier, sont bien connues et sont définies en termes de trois nombres : le module d'élasticité E , le coefficient de Poisson ν et le coefficient de dilatation thermique α . En outre, le poids unitaire w et la masse unitaire ρ sont considérés comme des propriétés matérielles fondamentales. Il est donc raisonnable de commencer par une définition des matériaux anisotropes, qui peuvent être différents dans chaque élément d'une structure. La définition positive des contraintes, en référence à un système 1-2-3 orthogonal, est illustrée à la figure 1.4 [28].

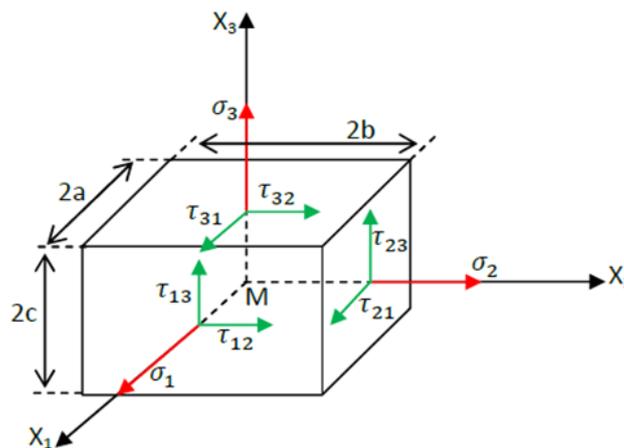


Figure I.4 : Distribution des contraintes sur un élément de volume.

Les matériaux sont dits anisotropes si leurs caractéristiques physiques changent en fonction de la direction dans laquelle la mesure est effectuée, ce qui implique que leur résistance, leur rigidité, leur densité et d'autres caractéristiques physiques peuvent changer en fonction de la direction dans laquelle ils sont utilisés.

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries : par exemple, les monocristaux, les structures fibreuses, les matériaux composites à fibres ou tissus, etc. Les propriétés de symétries géométriques réduisent alors le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau. Cette réduction est fonction des symétries présentées par le matériau considéré [15].

I.6.1.1 Matériau monoclinique

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13 [15]. La disposition et la forme des cellules unitaires des matériaux monocliniques, qui déterminent la structure cristalline de la substance, sont à l'origine de leurs propriétés physiques anisotropes.

I.6.1.2 Matériau orthotrope

Le type de matériau anisotrope le plus courant est celui dans lequel les contraintes de cisaillement, agissant dans les trois plans de référence, ne provoquent aucune déformation normale. Pour ce cas particulier, le matériau est défini comme orthotrope. Ce type de propriété matérielle est très courant. Par exemple, les roches, le béton, le bois et de nombreux matériaux renforcés de fibres présentent un comportement orthotrope. Matériaux renforcés par des fibres présentent un comportement orthotrope [28].

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9 [15].

I.6.1.3 Matériau unidirectionnel

Sont des matériaux composites renforcés par des fibres, qui ont une direction préférentielle d'orientation des fibres. La résistance unidirectionnelle est généralement assurée par les fibres, qui sont orientées dans une direction spécifique, tandis que la liaison est assurée par la matrice qui les entoure. Ces matériaux sont fréquemment utilisés dans des applications qui requièrent une forte résistance dans une direction particulière.

La cellule élémentaire d'un matériau composite unidirectionnel peut être considérée comme constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (figure I.5). Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou de souplesse). Les propriétés du matériau unidirectionnel sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes [15].

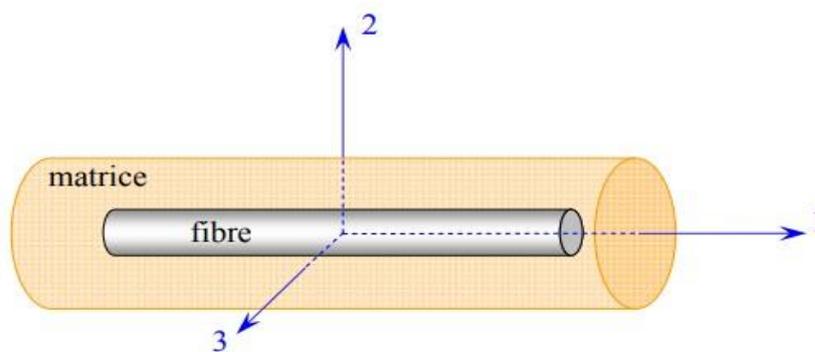


Figure I.5 : Matériau composite unidirectionnel.

I.6.2 Matériaux isotropes

Un matériau est dit isotrope si ses propriétés mécaniques et thermiques sont identiques dans toutes les directions. Les matériaux isotropes peuvent avoir des structures microscopiques homogènes ou non-homogènes. Par exemple, l'acier a un comportement isotrope mais sa structure microscopique n'est pas homogène [29].

CHAPITRE 1 : GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

Un matériau isotrope a des propriétés égales dans toutes les directions et constitue l'approximation la plus couramment utilisée pour prédire le comportement des matériaux élastiques linéaires. Approximation la plus couramment utilisée pour prédire le comportement des matériaux élastiques linéaires. Par conséquent, pour les matériaux isotropes, seuls le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν doivent être définis.

On peut noter que :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.1)$$

Tableau. I.5 : Propriétés approximatives de plusieurs matériaux courants [28].

Matériaux	Module de Young	Coefficient de poisson	Module de cisaillement	Module d'élasticité isostatique	Coefficient de dilatation thermique	Masse volumique
Acier	29	0.30	11.154	16.730	6.5	0.283
Aluminium	10	0.33	3.750	7.300	13	0.100
Béton	4	0.20	1.667	1.100	6	0.087
Mercure	0	0.50	0	3.300	-	0.540
L'eau	0	0.50	0	300	-	0.036
L'eau*	0.9	0.4995	0.3	300	-	0.036

Parce qu'ils sont solides et stables dans toutes les directions, les matériaux isotropes sont fréquemment utilisés en génie civil. Voici quelques propriétés des matériaux isotropes et quelques applications en génie civil :

- **Résistance uniforme** : Les matériaux isotropes conviennent aux bâtiments où l'uniformité de la résistance est cruciale, car ils ont la même résistance dans toutes les directions. Les poutres en acier, par exemple, sont fréquemment utilisées dans la construction de ponts en raison de leur résistance uniforme.
- **Comportement prévisible** : Comme les matériaux isotropes se comportent de manière prévisible sous des charges uniformes, ils sont parfaits pour les applications de génie civil où la prévisibilité est cruciale. Le béton est fréquemment utilisé dans les fondations de bâtiments, par exemple, en raison de sa prévisibilité.

- **Propriétés élastiques uniformes:** En raison de leurs caractéristiques élastiques homogènes, les matériaux isotropes se déforment uniformément lorsqu'ils sont soumis à des charges homogènes. L'aluminium, par exemple, est fréquemment utilisé dans les structures des avions en raison de ses caractéristiques élastiques homogènes.
- **Stabilité dimensionnelle :** Parce qu'ils présentent une stabilité dimensionnelle constante, les matériaux isotropes conviennent aux situations où la stabilité dimensionnelle est cruciale. La stabilité dimensionnelle du verre, par exemple, en fait un matériau populaire pour les fenêtres de bâtiment.

I.7 Conclusion

Pour beaucoup d'applications structurales, les matériaux composites apparaissent comme de sérieux concurrents des métaux du fait principalement de leur légèreté qui permet un gain de poids, de leur insensibilité à la corrosion saline, la résistance à l'oxydation et enfin l'isolation thermique et électrique. Du fait de leur importance, dans ce premier chapitre, on a fait appel aux définitions et des notations liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques mécaniques. Nous avons aussi discuté sur la différence entre les matériaux composites anisotropes et isotropes et leurs avantages principaux qu'offrent ces matériaux pour le renforcement des structures à hautes performances.

II.1 INTRODUCTION

Dans la conception et la construction de nombreux types de structures et d'infrastructures, les poutres jouent un rôle structurel crucial. Elles sont utilisées en génie civil pour supporter les charges horizontales et verticales dans les bâtiments, les ponts et d'autres structures. Elles sont construites pour résister aux forces de flexion, de compression, de cisaillement et de torsion générées par les charges qu'elles supportent. En fonction des besoins de charge et de l'emplacement, elles peuvent être fabriquées dans différents matériaux tels que le bois, l'acier et le béton. Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements [30].

Les poutres sont conçues pour résister aux contraintes et aux pressions qui leur sont imposées, notamment le poids des charges, la pression du vent, les vibrations et les mouvements sismiques, entre autres. En fonction des besoins de la construction, les poutres peuvent également être créées dans une variété de tailles et de formes, et elles peuvent être renforcées à l'aide de méthodes telles que la précontrainte et la post-contrainte pour augmenter leur résistance à la charge et prolonger leur durée de vie utile. Pour garantir la sécurité et la durabilité des poutres, les ingénieurs civils simulent le comportement des éléments structurels à l'aide de logiciels de modélisation en 3D.

Les poutres épaisses, contrairement aux poutres classiques, sont conçues pour être extrêmement larges par rapport à leur hauteur, ce qui leur permet de supporter des poids extrêmement élevés tout en étant relativement légères. Grâce à leur forme unique, elles présentent une forte résistance à la flexion et à la torsion, ainsi qu'une plus grande capacité à supporter les contraintes. Bien qu'elles puissent être utilisées dans différents types de constructions à grande échelle, les poutres épaisses sont fréquemment utilisées dans la construction de ponts en raison de leur capacité à supporter d'énormes charges sur de longues portées. En fonction de la taille de la poutre et de l'application, son utilisation peut différer de ce qui est considéré comme la norme dans l'industrie. Les poutres épaisses et isotropes sont essentiellement des formes de problèmes 2D de la théorie de l'élasticité. Elles sont largement utilisées dans les structures soumises à un environnement thermique sévère qui produit une

Chapitre II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

contrainte thermique intense [31]. Les poutres isotropes sont des structures fonctionnant dans un environnement agressif dans divers projets d'ingénierie. De tels cas sont particulièrement observés dans l'aérospatiale et l'aéronautique. Ces structures sont généralement appelées structure à haute température, telle que la structure utilisée dans les avions et les engins spatiaux à grande vitesse, ainsi que la détermination des contraintes réalistes induites par les charges thermiques réalistes dans les chaussées en béton et les chaussées souples [31].

Par conséquent, les professionnels de l'ingénierie s'intéressent à des questions telles que la modélisation et l'analyse des poutres. Un certain nombre de théories sur les poutres ont été établies dans la littérature pour améliorer la modélisation et l'analyse des poutres isotropes tout en tenant compte de la façon dont le champ de déplacement change en fonction de l'épaisseur de la poutre. Dans la théorie de l'élasticité, les poutres épaisses isotropes ou anisotropes sont essentiellement des problèmes 2D. Les chercheurs ont traditionnellement cherché à analyser ces problèmes en les réduisant aux problèmes d'approximation unidimensionnels appropriés.

Dans ce chapitre on va présenter une revue générale sur les différentes théories des poutres développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur et pour la modélisation et l'analyse des poutres isotropes. En principe l'étude repose sur les modèles monocouches équivalentes (ESL : equivalent single-layer) comme les théories CBT, FSDBT, HSDBT, RBT et Quasi-3D :

1. CBT : Théorie classique des poutres,
2. FSDBT : Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre,
3. HSDBT : Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé,
4. RSDBT : Théories raffinées des poutres,
5. HSDBT Quasi-3D : Théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé avec l'effet d'étirement de l'épaisseur.

II.2 Définition d'une poutre

Le terme «poutre» désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine) (figure II.1). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes [30].

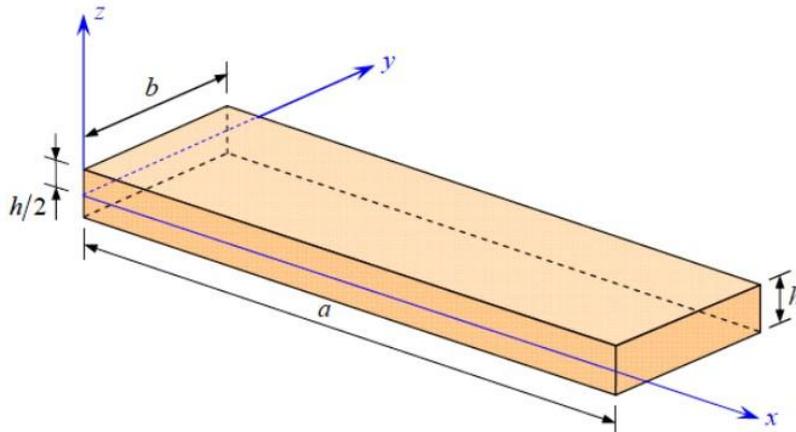


Figure II.1 : Schéma d'un élément de poutre [15].

II.3 Les modèles monocouche équivalente (ESL)

Dans les modèles monocouches équivalente, qui sont l'une des approches la plus adopté Par les chercheurs, la poutre multicouche hétérogène est considérée comme une seule couche homogène équivalente ayant le comportement de l'ensemble des couches. Les théories du modèle ESL fournissent une description suffisamment précise de la réponse (i.e. la flèche transversale, la fréquence fondamentale de vibration, la charge critique du flambement et le moment résultant) d'après [32].

L'avantage le plus important d'ESL réside dans son faible coût en termes de temps de calcul et sa simplicité ainsi que les variables sont introduites pour toute la poutre, cela va conduire à un nombre de degrés de libertés indépendant par rapport au nombre de couches [33].

II.3.1 Théorie classique des poutres (CBT)

Chapitre II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

La théorie la plus couramment utilisée pour l'analyse de la flexion des poutres est la théorie classique des poutres (CBT) développée par Bernoulli-Euler [34–39]. Il y a près de 300 ans. Le développement chronologique de cette théorie, depuis la première tentative de Galilée en 1638 jusqu'à 1856 par barre de Saint Venant, est donné par Love [40], Timoshenko [41] et Todhunter et Pearson [42]. Cette théorie néglige la déformation de cisaillement et les effets de l'inertie rotative ; par conséquent, elle est généralement précise pour les poutres minces et non plus pour les poutres plus épaisses. Rayleigh [43] a amélioré la théorie classique en tenant compte de l'effet de l'inertie rotative des sections transversales de la poutre. Boley [44] a étudié la précision du CBT pour les poutres de section variable. Les contraintes et les déviations de la poutre sont calculées sur la base de la théorie bidimensionnelle des contraintes planes. La déviation et les contraintes sont obtenues sous forme de séries en utilisant la fonction de contrainte d'Airy ; le premier terme de chaque série est identique à la solution de la résistance des matériaux et les autres représentent la correction nécessaire au CBT [45]. Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche [46].

Elle suppose que les lignes droites perpendiculaires au plan médian avant la flexion restent droites et perpendiculaires au plan médian après la flexion. En conséquence de cette hypothèse a pour conséquence de négliger les contraintes de cisaillement transversal. Bien que cette théorie soit utile pour les poutres minces, elle ne donne pas de solutions précises pour les poutres épaisses [47].

Le champ de déplacement de la théorie est le suivant [48] :

$$\begin{aligned}u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \\w(x, z, t) &= w_0(x, t)\end{aligned}\tag{II.1}$$

Où $u_0(x, t)$ est la composante de déplacement du plan médian et $w_0(x, t)$ est le déplacement transversal.

Lorsque la théorie élémentaire de la poutre (ETB) est utilisée pour l'analyse des poutres, les déflexions sont sous-estimées et les fréquences naturelles et les charges de flambement sont surestimées. C'est la conséquence de la négligence de la déformation de cisaillement transversal dans l'ETB. Des théories raffinées prenant en compte les effets de la déformation en cisaillement ont été développées par Rankine [49], Bresse [50], Lord Rayleigh [43],

Chapitre II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

Timoshenko [41], Vlasov et d'autres [51]. Ces théories raffinées ont été appliquées avec succès à des problèmes théoriques et pratiques de mécanique des solides. L'analyse des poutres épaisses isotropes et stratifiées est compliquée par la nature bidimensionnelle de l'état de contrainte et de déformation. L'utilisation de la théorie de l'élasticité est pratiquement irréalisable en raison des difficultés mathématiques et de la complexité des systèmes stratifiés. Cela a conduit au développement de théories raffinées de déformation par cisaillement pour poutres qui approchent les solutions bidimensionnelles avec une précision raisonnable [48]. Puisque ce modèle ne prend pas l'énergie de cisaillement en compte, il donne des résultats inexacts pour les poutres épaisses. Cependant, en raison de sa simplicité avec seulement trois degrés de liberté de déplacement, ce modèle classique reste une bonne approche en premier.

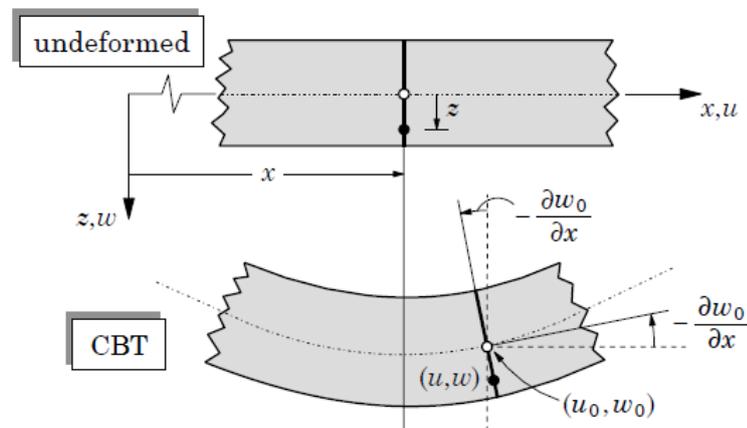


Figure II.2 : Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli [52].

Les limites de la théorie élémentaire de la flexion (ETB) des poutres et de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) pour les poutres ont forcé le développement de théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur [48].

II.3.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de poutre (FSDBT)

La théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre de poutre (FSDBT) est une amélioration de la théorie élémentaire de la poutre ou de la théorie classique, selon le cas. Elle repose sur l'hypothèse que la normale à la surface médiane avant déformation reste droite mais pas nécessairement normale au milieu de la surface après la déformation (figure I.2). Cette théorie est connue sous le nom de théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre, car le champ de déplacement axial est linéaire ou du premier ordre [31]. Cette solution permet de raffiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces

Chapitre II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement [46].

Rankine [49] et Bresse [50] ont été les premiers à inclure les effets d'inertie rotative et de flexibilité de cisaillement en tant qu'effets dynamiques raffinés dans la théorie des poutres. Cette théorie est cependant appelée théorie de la poutre de Timoshenko, comme mentionné dans la littérature par Rebello *et al* [53], et basée sur la cinématique, elle est connue sous le nom de théorie de la déformation de premier ordre (FSDT). La cinématique de la théorie est la suivante :

$$\begin{aligned}u(x, z, t) &= u_0(x, t) + z\phi_x(x, t) \\w(x, z, t) &= w_0(x, t)\end{aligned}\tag{II.2}$$

Où $u_0(x, t)$, $\phi_x(x, t)$ et $w_0(x, t)$ sont les variables inconnues. $\phi_x(x, t)$ est la rotation d'une section transversale de la poutre au niveau de la couche neutre. Rayleigh [43] a inclus l'effet d'inertie rotatoire, tandis que Timoshenko [41] a ajouté plus tard l'effet de rigidité de cisaillement. Timoshenko a montré que l'effet du cisaillement est beaucoup plus important que celui de l'inertie rotative pour vibration transversale des poutres prismatiques. Les premières conditions aux limites correctes pour la poutre de Timoshenko ont été dérivées par Kruszewski [54] et Dengler et Goland [55]. Cette théorie est bien discutée par Dym et Shames [56].

Dans la théorie de la poutre de Timoshenko, la distribution des déformations de cisaillement transversal est constante dans l'épaisseur de la poutre et nécessite donc un facteur de correction de cisaillement pour corriger l'énergie de déformation. Mindlin et Deresiewicz [57] ont calculé ce facteur pour diverses sections transversales de poutres. Cowper [58,59] et Murty [60,61] ont donné de nouvelles expressions pour ce coefficient pour différentes sections transversales de la poutre. L'histoire du coefficient de cisaillement est donnée par Kaneko [62] et examinée de manière critique par Hutchinson et Zillmer [63] et Hutchinson [64]. Rychter [65] présente une discussion plus approfondie sur les coefficients de cisaillement dans la flexion des poutres.

Stephen et Levinson [66] ont introduit une théorie raffinée incorporant la courbure de cisaillement, la contrainte directe transversale et les effets d'inertie rotative. La courbure de cisaillement, la contrainte directe transversale et les effets d'inertie rotative. L'équation différentielle qui la régit est similaire à l'équation de la poutre de Timoshenko. Cependant, la théorie nécessite deux coefficients, l'un pour le gauchissement de la section transversale et le

Chapitre II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

second dépendant des contraintes directes transversales. Ces coefficients sont évalués pour différentes sections transversales sont évalués.

Rychter [67] a étudié une théorie de la flexion des poutres rectangulaires qui incorpore la déflexion moyenne habituelle et une rotation représentée en termes de déplacement axial relatif des surfaces supérieure et inférieure de la poutre.

Renton [68] a proposé une théorie généralisée de la poutre pour évaluer la rigidité en cisaillement de diverses sections transversales. Fan et Widera [69] et Kathnelson [70] ont développé une théorie d'ingénierie améliorée pour les poutres uniformes isotropes élastiques. Pour une poutre uniforme isotrope élastique en utilisant l'analyse asymptotique de l'équation variationnelle du principe de Hellinger-Reissner pour la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. La théorie donne des équations directrices de type Timoshenko. Zaslavsky [71] a étudié les limites de la formule classique des contraintes de cisaillement de la théorie de la résistance des matériaux en l'appliquant aux sections non homogènes pour déterminer les contraintes de cisaillement.

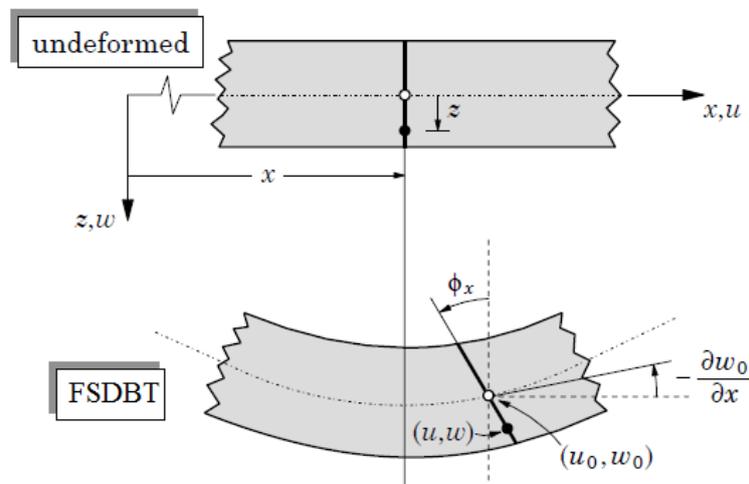


Figure II.3 : Cinématique de la poutre de Timoshenko [52].

II.3.3 Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDBT)

Cependant, le CBT et le TBT ne prennent pas en compte les influences non classiques telles que le gauchissement de la section transversale, les déformations hors plan et dans le plan. (La discussion détaillée sur ces influences est présentée par Goodier [71]). Par conséquent, les théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé sont nécessaires pour prendre en compte ces influences non classiques. Ces théories sont développées à l'aide de la

Chapitre II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

méthode des hypothèses, de la méthode d'expansion, de la méthode d'approximation successive et de la méthode mixte [45].

Des théories d'ordre élevé incluant un gauchissement de la section transversale ont ensuite été proposées. Ces théories sont plus réalistes, car elles vérifient les conditions de contraintes de cisaillement transversales nulles sur les limites supérieures et inférieures de la structure, contrairement à la théorie de Timoshenko. Dans ces théories, le déplacement le long des axes des structures est généralement supposé être cubique, ce qui donne lieu à un gauchissement de la section transversale ainsi qu'à des distributions paraboliques des déformations et des contraintes de cisaillement sur l'ensemble de l'épaisseur de la structure (figure I.3) [72].

Dans ces théories, la distribution des déplacements est représentée par une expansion en série de puissance dans la coordonnée d'épaisseur afin de prendre en compte les effets de déformation par cisaillement. Le champ de déplacement de la théorie générale du troisième ordre est le suivant :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) + z\phi_x(x, t) + z^2\psi_x(x, t) + z^3\zeta_x(x, t) \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) + z\phi_z(x, t) + z^2\psi_z(x, t) + z^3\zeta_z(x, t) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Où $u_0, \phi_x, \psi_x, \zeta_x, w_0, \phi_z, \psi_z, \zeta_z$ sont des fonctions inconnues. A partir de cette théorie générale du troisième ordre, diverses théories basées sur le déplacement peuvent être obtenues par différentes combinaisons de termes [48].

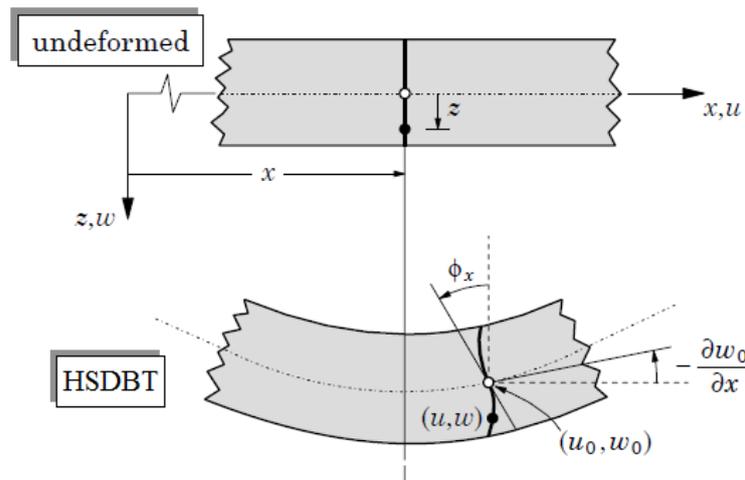


Figure II.4 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé de poutre [52].

Chapitre II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} + f(z) \gamma_{xz}(x, t) \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où $f(z)$ est la fonction de cisaillement caractérisant la théorie d'ordre élevé et γ_{xz} représente la composante de la déformation angulaire (distorsion) exprimée par :

$$\gamma_{xz}(x, t) = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} \quad (\text{II.5})$$

D'après les deux théories conventionnelles précédentes, nous observons que les déplacements de la théorie classique de poutre (CBT) sont obtenus en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDBT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$\left. \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right|_{z=\pm h/2} = 0 \quad (\text{II.6})$$

Pour un autre modèle d'ordre élevé, Soler [73] a développé une théorie de déformation en cisaillement pour étudier les poutres élastiques rectangulaires isotropes épaisses en utilisant des polynômes de Legendre. Tsai et Soler [74] l'ont étendue aux poutres orthotropes. Les effets de la déformation en cisaillement et de la contrainte normale transversale sont inclus. L'interrelation entre la théorie classique des poutres et les théories d'ordre élevé est explicitement mise en évidence. Essenburg [75] a étudié une poutre élastique de section rectangulaire, chargée de telle manière que le contact avec une surface rigide lisse est inclus. Le champ de déplacement de la théorie suppose que la composante normale transversale de la déformation est quadratique dans la coordonnée de l'épaisseur et inclut l'effet de la déformation transversale en cisaillement. Le déplacement dans le plan est supposé être une fonction linéaire de la coordonnée de l'épaisseur.

Levinson [76–79] a obtenu la théorie de poutre d'ordre élevé qui fournit la rigidité d'ordre quatre des équations différentielles. Satisfaisant deux conditions aux limites à chaque extrémité de la poutre. Aucun facteur de correction n'est nécessaire puisque la théorie satisfait les conditions de surface sans contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure

de la poutre. La variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur est parabolique. Cependant, le modèle cinématique de Levinson n'est pas cohérente du point de vue des variations. Le champ de déplacement de la théorie est le suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, z, t) &= u_0(x, t) + \left[\varphi_x - \frac{4z^2}{3h^2} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \right) \right] \\
 w(x, z, t) &= w_0(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.7}$$

Bhimaraddi et Chandrashekhara [80] ont présenté une théorie des poutres à déformation de cisaillement parabolique qui suppose une variation d'ordre élevé pour le déplacement axial. Outre la variation parabolique simple habituelle, six autres variations de déformation de cisaillement sont prises en compte : la variation sinusoïdale, les polynômes cubiques, quadratiques et d'ordre six, et satisfont aux contraintes de surface. Un cantilever, une poutre simplement supportée et une poutre bridée d'un matériau isotrope sont résolus par les différentes théories proposées.

II.3.4 Théorie raffinée de déformation de cisaillement de poutre (RSDBT)

La théorie raffinée de poutre peut être classé parmi les théories de déformation de cisaillement de troisième ordre. Le développement de la théorie raffinée de poutre est basé sur l'hypothèse que la théorie représente des variations paraboliques de contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. Elle n'exige aucun facteur de correction et satisfait la nullité des contraintes de cisaillement aux faces supérieure et inférieure de la poutre. En outre, la théorie peut fournir une grande précision dans l'étude du comportement de la poutre soumise à des sollicitations mécaniques ou thermiques. Contrairement aux autres théories d'ordre élevée, le nombre de variables inconnues impliqués dans la théorie raffinée de déformation de cisaillement (RSDBT) est seulement trois, ou a deux inconnues, contrairement au quatre variables pour les autres théories de déformation de cisaillement.

Le déplacement transversal $w(x, z, t)$ dans cette théorie est représenté par la somme de deux composantes ; de la flexion $w_b(x, t)$ et de cisaillement $w_s(x, t)$. Ce dernier peut être exprimé de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \\
 w(x, z, t) &= w_b(x, t) + w_s(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.8}$$

Chapitre II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

Il existe une autre classe de théories raffinées qui comprend des fonctions trigonométriques pour représenter les effets de déformation par cisaillement à travers l'épaisseur. Vlasov et Leontev [81], Stein [82] ont développé des théories raffinées de déformation de cisaillement pour les poutres épaisses, y compris une fonction sinusoïdale en termes de coordonnées d'épaisseur dans le champ de déplacement. Cependant, avec ces théories les conditions limites sans contrainte de cisaillement ne sont pas satisfaites aux surfaces supérieures et inférieures de la poutre [72].

Ghugal et Dahake [83] ont ensuite développé une théorie trigonométrique de la déformation par cisaillement pour la flexion des poutres épaisses ou profondes en prenant en compte de l'effet de déformation par cisaillement transversal. Le nombre de variables dans la présente théorie est le même que dans la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre. La fonction trigonométrique est utilisée dans le champ de déplacement en termes de coordonnée d'épaisseur pour représenter les effets de la déformation en cisaillement. Une étude de la littérature par Ghugal et Shimpi [84] indique que les travaux de recherche traitant de l'analyse de poutres épaisses en utilisant des déformations de cisaillement trigonométriques et hyperboliques de la déformation par cisaillement sont très rares et n'en sont encore qu'à leurs débuts [72].

Une théorie raffinée contenant les fonctions trigonométriques sinus, cosinus ou hyperboliques sinus et cosinus en coordonnées d'épaisseur, dans le champ de déplacement, est appelée ici théorie trigonométrique de la déformation en cisaillement (TSDT). Les fonctions trigonométriques impliquant la coordonnée d'épaisseur sont associées aux effets de déformation de cisaillement transversal et à la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre.

Il s'agit d'une autre classe de théories raffinées dans lesquelles le nombre de variables de déplacement dans la forme la plus simple peut être le même que celui de la FSDT. Théories raffinées de la poutre avec l'introduction d'une fonction trigonométrique en termes de d'épaisseur dans les hypothèses cinématiques sont introduites par Vlasov, Leont'ev [81] et Stein [82]. Le champ de déplacement de la théorie de Vlasov et Leont'ev est le suivant :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= zu_1(x) + u_2(x) \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) \\ w(x, z) &= w_1(x) + v_2(x) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \end{aligned} \tag{II.9}$$

II.3.5 Théorie de déformation de poutre HSDBT quasi-3D

En divisant le déplacement transversal en plusieurs composantes dont la flexion, et le cisaillement et en prenant en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur de la poutre, Mantari et Canales [85] ont utilisé un modèle unifié basé sur la théorie HSDBT quasi-3D avec quatre inconnues qui inclut l'effet d'étirement d'épaisseur pour analyser la réponse statique des poutres stratifiées à plis croisés. Dans cette analyse, les équations de mouvement généralisées sont résolues en utilisant la solution de type Navier pour plusieurs poutres composites simplement appuyées soumises à différents types de charges. Dans une recherche, Karamanli [86] a utilisé une théorie efficace de déformation en cisaillement quasi-3D pour étudier le comportement élastostatique de poutres sandwich en matériau à gradient fonctionnel bidirectionnelles soumises à une charge uniformément répartie pour différents conditions aux limites. Une théorie de poutre quasi-3D a été présentée par Ait Atmane *et al* [87] pour analyser la flexion, le flambement et les vibrations libres des poutres parfaites et imparfaites en FGM reposant sur des fondations élastiques, dans lesquelles la déformation en cisaillement a été incorporée avec un effet d'étirement de l'épaisseur par une variation parabolique de tous les déplacements à travers l'épaisseur de la poutre.

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \\ w(x, z, t) &= w_b(x, t) + w_s(x, t) + g(z) \varphi(x, t) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Où $w_b(x, t)$ et $w_s(x, t)$ représentent les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y , respectivement. Cependant, $\varphi(x, t)$ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet d'étirement et $g(z)$ est la dérivée de la fonction de cisaillement transverse définie comme suit :

$$g(z) = 1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{II.11})$$

Donnell [88] a fourni la solution en série dans la fonction de chargement, pour les déflexions et les contraintes dans les poutres à charge continue de section transversale rectangulaire en termes de chargement supérieur et inférieur. Donnell [89] a également étudié l'effet de la déformation de cisaillement transversal et des contraintes normales transversales sur la déflexion d'une poutre épaisse à charge simplement supportée par le centre. La flèche

Chapitre II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

transversale se compose donc de trois parties, à savoir la flexion, la déformation due aux contraintes normales transversales et la flexion due aux contraintes normales transversales.

II.4 Différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Nous regroupons dans le tableau II.1 ci-dessous les différentes fonctions de cisaillement transversal ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles [10]

Tableau II.1 : Les différentes fonctions de cisaillement transversal utilisées dans les théories des poutres d'ordre élevé [10].

Théorie	Modèle	Fonction de cisaillement $f(z)$	Distribution de contrainte τ_{xz}	Domaine de validité
Euler-Bernoulli []	CBT	$f(z) = 0$	-	Poutre élancée
Timoshenko []	FSDBT	$f(z) = z$	Constant	Poutre courte et élancée
Ambartsumian []	PSDBT	$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right)$	Parabolique	poutres minces et m/épaisses
Reissner []	PSDBT	$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right)$	Parabolique	poutres minces et épaisses
Reddy 1984 []	HSDBT	$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right)$	Parabolique	poutres épaisses
Touratier1991 []	SSDT	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right)$	Trigonométrique	poutres minces et épaisses
Karama 2003 []	ESDBT	$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{4}\right)^2}$	Exponentielle	Poutre courte et élancée
Aydogdu []	HSDBT	$f(z) = z 3^{-2\left(\frac{z/h}{\ln 3}\right)^2}$	Parabolique	poutres minces et épaisses
Zenkour 2015 []	TSDBT	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	Trigonométrique	poutres épaisses

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu général sur les différents modèles théoriques des poutres développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des poutres, à savoir la théorie classique (CBT), la théorie de déformation cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT, RSDBT et HSDBT Quasi.3D pour les poutres.

Chapitre II : LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

Ces dernières ont été développées afin de surpasser les limitations des théories existantes. En général, il est rare de trouver une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles et aux différents domaines et qui soit simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul. En effet, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

III.1 Introduction

Dans un grand nombre d'industries, y compris le bâtiment, le génie civil et l'aérospatiale, les poutres sont des composants structurels cruciaux. Elles sont fréquemment utilisées pour transmettre des forces via leur structure et supporter des charges. Il est donc essentiel d'analyser le comportement mécanique des poutres afin de garantir leur stabilité, leur sécurité et leurs meilleures performances.

Les poutres épaisses isotropes, qui se distinguent par leur rapport hauteur/longueur, font l'objet de ce chapitre. Les poutres épaisses, contrairement aux poutres minces, ont une forme spécifique qui affecte leur performance mécanique, où le rapport est généralement faible. Par conséquent, pour comprendre leurs qualités et leurs réponses dans diverses circonstances de chargement, leur étude nécessite une technique particulière.

Une compréhension complète de ce comportement est nécessaire pour la conception et l'évaluation de structures robustes et résistantes dans le domaine de l'ingénierie structurelle. Les poutres épaisses posent des problèmes complexes et intrigants en raison de leur géométrie particulière et de leurs caractéristiques mécaniques spéciales.

L'analyse du comportement mécanique des poutres épaisses isotropes repose sur un certain nombre d'idées fondamentales. Nous commençons par examiner la déformation de la poutre, qui peut être affectée par des éléments tels que la flexion, la torsion et le cisaillement. Pour que la poutre reste structurellement saine, ces différentes formes de déformation peuvent entraîner des contraintes et des déformations de cisaillement considérables.

D'une manière générale, ce chapitre est une occasion unique d'approfondir notre compréhension des poutres épaisses, de leurs propriétés particulières et des méthodes d'analyse les plus pointues pour les étudier. Grâce à cette exploration approfondie, nous serons en mesure d'aborder des problèmes difficiles et de proposer des solutions créatives pour des structures plus solides et plus résistantes.

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

III.2 Formulation théorique

III.2.1 Modèle d'une poutre isotrope

Considérons une poutre simplement appuyée ayant une section rectangulaire de longueur L , de largeur b et de profondeur h selon les directions x, y, z , respectivement. On suppose que la poutre est constituée d'un matériau homogène isotrope à élasticité linéaire. Dans le système de coordonnées cartésiennes x, y, z représenté à la figure III.1, la poutre considérée occupe la région $0 \leq x \leq L, -b/2 \leq y \leq b/2, -h/2 \leq z \leq h/2$.

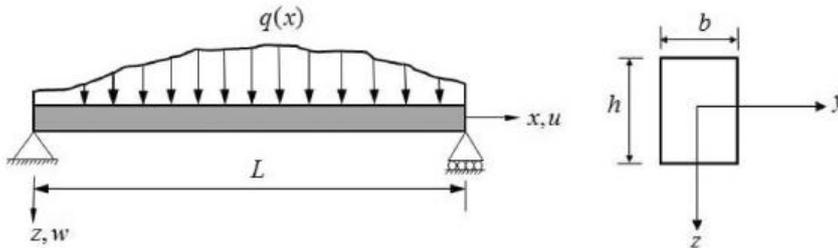


Figure III.1 : Système de coordonnées et géométrie d'une poutre isotrope.

III.2.2 Hypothèses de la présente formulation théorique

La formulation mathématique de la présente théorie de la déformation en cisaillement parabolique d'ordre élevé (PSDBT) repose sur les hypothèses cinématiques suivantes :

1. Le déplacement axial dans la direction x est exprimé en termes de flexion selon la théorie classique des poutres et de composantes de cisaillement intégral ;
2. Le déplacement transversal dans la direction z consiste uniquement en une composante transversale ;
3. La théorie dépend uniquement deux variables inconnues indépendantes ;
4. La théorie fournit la distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions aux limites sans avoir besoin du facteur de correction du cisaillement ;
5. L'effet de la déformation normale est négligeable ($\varepsilon_z \neq 0$).

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

III.2.3 Relations cinématiques et constitutives

Il ressort de la littérature que la théorie conventionnelle de la déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDBT) a été utilisée par plusieurs auteurs avec des formes identiques ou différentes de la fonction de forme pour l'analyse statique et l'analyse des vibrations libres des poutres isotropes et anisotropes, dans lesquelles l'effet de la déformation en cisaillement et de l'inertie rotative est inclus. Le champ de déplacement de la HSDBT conventionnelle implique trois variables inconnues et a été défini comme suit (Ghugal et Shimpi 2001) :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi(x, t) \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Où u et w désignent les composantes du déplacement axial et transversal le long des directions de coordonnées x et z , respectivement. u_0, w_0 Représentent les déplacements d'un point au plan médian de la poutre, et ϕ est l'angle de rotation de la section transversale autour de l'axe y par rapport à la position non déformée. Attendu que $f(z)$ désigne une fonction de forme qui décrit la distribution de la déformation de cisaillement dans la profondeur de la poutre et satisfait les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre.

Dans le présent document, une nouvelle théorie raffinée de déformation parabolique (PSDBT) récemment développée par Sellam *et al.* 2019 pour l'analyse statique et dynamique des plaques orthotropes a été étendue pour prédire la réponse mécanique des poutres isotropes soumises à différentes conditions de chargement, en particulier : charge sinusoïdale, uniforme, variable linéairement et une force de compression axiale. Selon la présente approche, le champ de déplacement en tout point matériel d'une poutre est défini mathématiquement comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, t) dx \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

Ce champ de déplacement ne dépend que de deux variables indépendantes et induit un coefficient qui dépend de la géométrie de la poutre. La présente théorie raffinée de la poutre de déformation en cisaillement d'ordre élevé est obtenue en définissant :

$$f(z) = \frac{9}{8}z - \frac{3z^3}{2h^2} \quad (\text{III.3})$$

Les déformations normales et de cisaillement sont calculés dans le cadre de la théorie linéaire de l'élasticité en utilisant les déplacements axiaux et transversaux obtenus par l'équation suivante (III.2) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z\varepsilon_x^1 + f(z)\varepsilon_x^2, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = g(z)\gamma_{xz}^0 \quad (\text{III.4})$$

Où ε_x^1 , ε_x^2 et γ_{xz}^0 sont liés aux variables inconnues comme suit :

$$\varepsilon_x^1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_x^2 = k_1\theta, \quad \gamma_{xz}^0 = k_1 \int \theta dx = k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.5})$$

Dans lequel A' et k_1 sont donnés en fonction du type de solution utilisé, dans ce cas via la méthode de Navier. Ainsi, les coefficients A' et k_1 s'expriment par :

$$A' = -1/\alpha^2, \quad k_1 = \alpha^2 \quad (\text{III.6})$$

Où :

$$\alpha = \frac{m\pi}{L} \quad (\text{III.7})$$

Les composantes de la contrainte dans la couche unique d'une poutre isotrope peuvent être calculées à partir des composantes de la déformation en utilisant les relations constitutives associées à la loi de Hooke unidimensionnelle.

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -Ez \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + Ef(z)k_1\theta, \quad (\text{III.8a})$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} k_1 A' g(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{III.8b})$$

Où E et G sont respectivement le module de Young et le module de cisaillement.

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

III.2.4 Equations de mouvement

Les équations régissant la présente théorie déformation en cisaillement des poutres sont dérivées en adoptant le principe d'Hamilton, qui a la forme mathématique suivante :

$$\int_0^T (\delta U - \delta V + \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.9})$$

Où δ désigne l'opérateur variationnel, δU , δV et δK représente les variations de l'énergie de déformation, de l'énergie potentielle due à la charge externe transversale appliquée et/ou à la force de compression axiale et de l'énergie cinétique, respectivement. En substituant ces énergies dans l'équation (III.9), on peut réécrire l'équation (III.9) comme suit :

$$\int_0^T \left\{ \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx - \int_0^L \left(q \delta w + N_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) dx + \int_0^L \int_A \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dA dx \right\} dt = 0 \quad (\text{III.10})$$

Où A est la surface de la section transversale de la poutre uniforme, ρ est la densité de masse, q et N_x^0 sont les charges de compression transversale et axiale, respectivement. En substituant les termes pour les déformations donnés par l'Equation (III.4) dans l'Equation (III.10) et en intégrant dans la direction de l'épaisseur, le principe d'Hamilton peut être réécrit comme suit :

$$\int_0^T \left\{ \int_0^L \left(M_x^b \delta \varepsilon_x^1 + M_x^s \delta \varepsilon_x^2 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 - q \delta w_0 - N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + I_1 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 + I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - I_3 k_1 A' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + I_4 (k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right\} dx \right\} dt = 0 \quad (\text{III.11})$$

Où le symbole de l'indice de point indique la différenciation par rapport au paramètre de temps. Considérant que M_x^b , M_x^s et S_{xz}^s sont les résultantes des contraintes et I_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sont les inerties de masse qui peuvent être définies mathématiquement par les intégrations suivantes :

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

$$\begin{aligned}
 M_x^b &= b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz, \\
 M_x^s &= b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x f(z) \, dz, \\
 S_{xz}^s &= b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} g(z) \, dz
 \end{aligned} \tag{III.12}$$

$$(I_1, I_2, I_3, I_4) = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z^2, z f(z), f^2(z)) \, dz \tag{III.13}$$

En substituant les relations de l'Equation (III.4) à l'Equation (III.8) et les résultats ultérieurs à l'Equation (III.12), les résultantes des contraintes du modèle proposé peuvent être trouvées en termes de déformations par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 M_x^b &= D_{11} \varepsilon_x^1 + F_{11} \varepsilon_x^2, \\
 M_x^s &= F_{11} \varepsilon_x^1 + H_{11} \varepsilon_x^2, \\
 S_{xz}^s &= A_{55}^s \gamma_{xz}^0
 \end{aligned} \tag{III.14}$$

Où D_{11} , F_{11} , H_{11} et A_{55}^s sont les composantes de la rigidité de la poutre prises comme suit :

$$(D_{11}, F_{11}, H_{11}, A_{55}^s) = b \int_{-h/2}^{h/2} E (z^2, z f(z), f^2(z), G g^2(z)) \, dz \tag{III.15}$$

En substituant les composantes de déformation et de contrainte des Equations (III.5) et (III.8) de la théorie proposée dans l'Equation (III.11), en intégrant par parties, puis en joignant les coefficients de δw_0 et $\delta \theta$ séparément, on obtient les équations régissant les divers problèmes de poutres isotropes comme suit :

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + q + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = I_1 \ddot{w}_0 - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + I_3 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \tag{III.16a}$$

$$\delta \theta : -k_1 M_x^s + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} = I_3 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - I_4 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \tag{III.16b}$$

Où l'indice de point spécifie la différenciation par rapport au temps t , en remplaçant les résultantes des contraintes de l'équation (III.14) par l'équation (III.16), les équations

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

directrices de la présente théorie peuvent être exprimées en termes de variables inconnues comme suit :

$$\delta w_0 : -D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + k_1 F_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = I_1 \ddot{w}_0 - I_2 \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} + I_3 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \quad (\text{III.17a})$$

$$\delta \theta : k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - (k_1 A')^2 H_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + (k_1 A')^2 A_{s55} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = I_3 k_1 A' \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} - I_4 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \quad (\text{III.17b})$$

III.3 Solution analytique pour les poutres isotropes

Sur la base de l'approche de type Navier, les solutions analytiques de l'équation (III.17) sont fournies pour des poutres isotropes épaisses simplement appuyées. Deux problèmes statiques ont été considérés dans cette étude, le flambement dû à une force de compression axiale N_0 appliquée sur les bords libres le long de la direction de l'axe x ($x=0, L$) et les flexions dues à une charge mécanique transversale $q(x)$ agissant sur la surface supérieure de la poutre. Les conditions aux limites le long des bords associées à la présente théorie de déformation en cisaillement des poutres sont exprimées comme suit :

$$w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad (\text{III.18})$$

Pour le cas du problème de flambage $N_x \neq 0$

III.3.1 Analyse de flexion

Pour le problème de flexion d'une poutre isotrope simplement appuyée dans les différentes conditions de charge statique, comme le montrent les figures III.2(a) à (c), la charge transversale $q(x)$ agissant sur la surface supérieure de la poutre peut être exprimée à l'aide de la méthode de type Navier sous la forme d'un seul développement de Fourier, comme suit :

$$q(x) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} q_m \sin(\alpha x) \quad (\text{III.19})$$

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

Où m est l'entier positif et q_m est les coefficients de l'expansion de Fourier qui peuvent être représentés avec l'intensité maximale q_0 pour certaines charges typiques comme suit (voir figure III.2 (a)-(c)).

$$q_m = \begin{cases} q_0, & (m = 1) & \text{pour une charge distribuée sinusoïdale (SDL)} \\ \frac{4q_0}{m\pi}, & (m = 1,3,5,\dots) & \text{pour une charge uniformément répartie (UDL)} \\ -\frac{2q_0}{m\pi} \cos(m\pi), & (m = 1,3,5,\dots) & \text{pour une charge variant linéairement (LVL)} \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

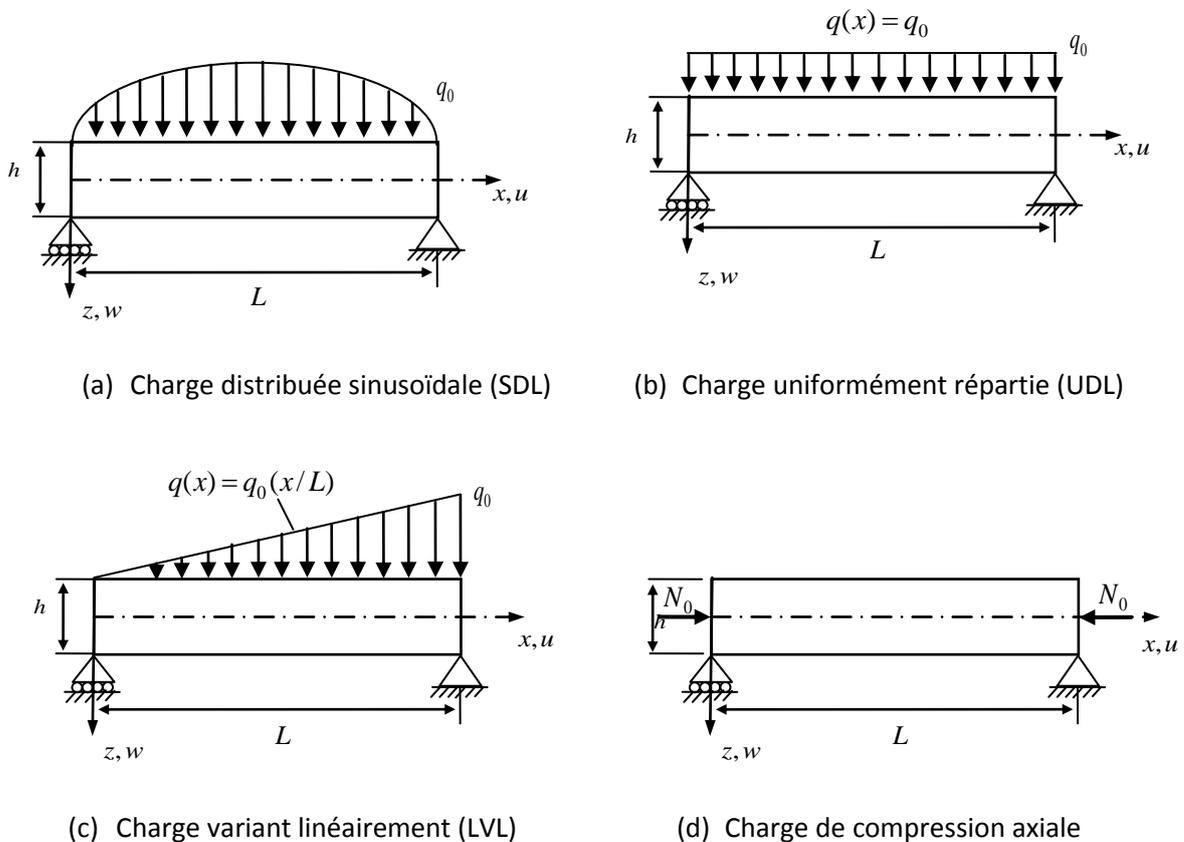


Figure III.2 : poutres isotropes soumise à une charge mécanique axiale et/ou transversale.

Pour résoudre les équations régissant le comportement mécanique des poutres isotropes simplement appuyées, les composantes de déplacements w_0 et θ au-dessous sont supposés être des combinaisons de séries trigonométriques simples qui satisfont précisément les conditions aux limites données dans l'Equation. (III.18)

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\ \Theta_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Où W_m et Θ_m sont les deux variables inconnues, $i^2 = -1$ est l'unité imaginaire et ω est la fréquence naturelle. Dans le cas d'un problème de flexion, les équations directrices données par l'Equation (III.17) peuvent être élaborées en éliminant les termes dépendant du temps et la force de compression axiale N_x^0 comme suit :

$$\delta w_0 : -D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + k_1 F_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q = 0 \quad (\text{III.22a})$$

$$\delta \theta : k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - (k_1 A')^2 H_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + (k_1 A')^2 A_{55} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{III.22b})$$

En substituant les équations (III.19) et (III.21) aux équations directrices modifiées de l'équation (III.22), on peut obtenir des solutions analytiques à partir de l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_m \end{Bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Dans laquelle les composantes de la matrice de rigidité $[K_{ij}]$ pour une poutre isotrope peuvent être définies comme suit :

$$\begin{aligned} K_{11} &= \alpha^4 D_{11}, \\ K_{12} &= -k_1 A' \alpha^4 F_{11}, \\ K_{22} &= (k_1 A')^2 \alpha^2 (\alpha^2 H_{11} + A_{55}^s) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

III.3.2 Analyse de flambement

Pour le cas du problème de flambement élastique, les charges critiques de flambement N_{cr} , comme indiqué à la figure III.2 (d), peuvent être calculées à l'aide de l'équation (III.17), avec une charge transversale nulle et aucun terme d'inertie de matrice, comme suit :

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

$$\delta w_0 : -D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + k_1 F_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{III.25a})$$

$$\delta \theta : k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - (k_1 A')^2 H_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + (k_1 A')^2 A s_{55} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{III.25b})$$

Pour une poutre isotrope soumise à des charges de compression axiale, la charge critique de flambement qui est la valeur propre la plus basse peut être résolue à partir de l'équation algébrique homogène suivante :

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} - N_0 \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} W_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Où :

$$N_{11} = \gamma_1 \alpha^2 \quad (\text{III.27})$$

III.3.3 Analyse de la vibration libre

Dans le cas du problème de vibration libre, les charges axiales de compression et transversales ($N_0 = q_0 = 0$) sont fixées à zéro, ce qui donne les équations différentielles suivantes :

$$\delta w_0 : -D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + k_1 F_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = I_1 \ddot{w}_0 - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + I_3 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \quad (\text{III.28a})$$

$$\delta \theta : k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - (k_1 A')^2 H_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + (k_1 A')^2 A s_{55} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = I_3 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - I_4 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \quad (\text{III.28b})$$

En ce qui concerne les conditions aux limites données dans l'Equation (III.18), les solutions analytiques pour les problèmes de vibration libre sont basées sur l'équation aux valeurs propres décrite comme suit :

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} W_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

Dans laquelle les composantes de la matrice masse $[M_{ij}]$ pour une poutre isotrope peuvent être définies comme suit :

Chapitre III : ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POUTRES ISOTROPES EPAISSES

$$\begin{aligned}M_{11} &= I_0 + I_1 \alpha^2, \\M_{12} &= -I_2 k_1 A' \alpha^2, \\M_{22} &= I_3 (k_1 A')^2 \alpha^2\end{aligned}\tag{III.30}$$

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement mécanique des poutres épaisses en matériaux isotropes en utilisant une théorie efficace d'ordre élevé (PSDBT). Le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement deux, tandis qu'il est de trois ou plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement. Les équations du mouvement pour des plaques poutres épaisses simplement appuyées sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. La solution de Navier est employée pour déterminer les solutions analytiques. La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces supérieur et inférieur de la poutre

Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de la présente théorie d'ordre élevé en les comparant avec les résultats des autres théories disponibles dans la littérature.

IV.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats numériques obtenus par la formulation analytique développée dans le chapitre précédent, et ce pour analyser le comportement mécanique des poutres isotropes épaisses. L'objectif principal de cette étude est de comprendre et analyser le comportement structural des poutres épaisses sous différentes conditions de charge et en tenant en compte l'influence du rapport d'élancement. Nous commençons par une présentation sur les principaux paramètres et caractéristiques du matériau qui constitue la poutre utilisée dans l'ensemble des calculs.

Nous présentons ensuite les résultats numériques obtenus à partir du présent modèle analytique. Ces résultats incluent les déformations, les déplacements axiaux et transversaux, les contraintes de cisaillement et d'autres paramètres d'intérêt dans les poutres isotropes épaisses. Nous illustrons ces résultats sous forme des tableaux et des graphes, ce qui permet une compréhension claire du comportement mécanique de ces poutres.

En conclusion, ce chapitre fournit une vue d'ensemble des résultats numériques obtenus par le développement analytique du comportement mécanique des poutres isotropes épaisses. Ces résultats sont essentiels pour évaluer la résistance et la performance des poutres épaisses dans des situations réelles, ainsi que pour guider la conception et l'optimisation des structures.

IV.2 Résultats numériques et analyse comparative

Il convient de souligner que l'objectif principal de ce travail est de présenter une approche de solution efficace pour les réponses de flexion, de flambement et de vibration libre des poutres isotropes simplement appuyées, modélisées comme un problème d'élasticité unidimensionnel. Plusieurs exemples numériques sont présentés pour comparaison avec ceux obtenus sur la base de la théorie classique des poutres "CBT" d'Euler-Bernoulli (1744), de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre "FSDT" de Timoshenko (1921), et avec les résultats correspondants calculés en utilisant l'équation III.1 de la théorie conventionnelle "HSDT" basée sur la théorie de la déformation en cisaillement parabolique "PSDT" de Reddy (1984), la théorie de déformation en cisaillement trigonométrique de "TSDT" de Touratier (1991), la théorie de déformation en cisaillement hyperbolique "HySDT" de Soldatos (1992), la théorie de déformation en cisaillement exponentielle "ESDT" de Karama *et al.* (2003), ainsi que la solution d'élasticité exacte élaborée par Timoshenko et Goodier (1970).

Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

Dans cette section, les résultats numériques des déplacements adimensionnels, des contraintes, des charges critiques de flambement et des fréquences naturelles sont présentés dans les tableaux IV.1 à IV.5 pour étudier les effets du rapport d'élanement et les différentes conditions de chargement sur les réponses structurelles des poutres isotropes en utilisant le nouveau modèle cinématique basé sur le modèle proposé. Le matériau de la poutre utilisé dans l'ensemble des calculs est homogène, linéairement élastique et isotrope, et ses propriétés sont décrites ci-dessous :

$$E = 210GPa, \quad \rho = 7800kg/m^3, \quad \nu = 0.3 \quad (IV.1)$$

Pour des raisons de commodité, les valeurs physiques sont définies en termes adimensionnels comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u(L, z) \frac{Eb}{q_0 h}, \quad \bar{w} = w\left(\frac{L}{2}, 0\right) \frac{10Eb h^3}{q_0 L^4}, \\ \bar{\sigma}_x &= \sigma_x\left(\frac{L}{2}, z\right) \frac{b}{q_0}, \quad \bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz}(0, z) \frac{b}{q_0}, \\ \bar{N}_{cr} &= \frac{N_0 L^2}{Eh^3}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \end{aligned} \quad (IV.2)$$

IV.2.1 Analyse de la flexion des poutres isotropes

Afin de valider la précision des solutions dérivées de la formulation proposée ci-dessus, la première étude de vérification est effectuée pour l'analyse de la flexion de poutres isotropes simplement appuyées soumises à une charge distribuée sinusoïdale (SDL), comme le montre la figure III.2 (a). Le tableau IV.1 résume la comparaison des déplacements axiaux et transversaux adimensionnels, des contraintes de cisaillement axial et transversal pour les deux valeurs des rapports d'élanement 4 et 10 de la poutre considérée. Le tableau IV.1 montre que le présent modèle de calcul est en excellent accord avec les résultats générés par d'autres théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ; alors que la CBT sous-estime les résultats de déplacement transversal indépendamment du rapport d'élanement parce qu'elle ignore les effets de la déformation en cisaillement transversal.

D'autre part, la contrainte normale axiale calculée à l'aide des diverses théories existantes est en accord avec les solutions exactes données par Timoshenko et Goodier (1970). La contrainte de cisaillement transverse estimée par les relations constitutives est plus élevée que

Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

celle obtenue à l'aide de l'équation d'équilibre. L'étude suivante tente de vérifier la précision des solutions actuelles basées sur le nouveau modèle cinématique pour un autre type de chargement.

Tableau IV.1: Comparaison des déplacements adimensionnels d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale.

L/h	Source	\bar{u}	Erreur %	\bar{w}	Erreur %
4	Présente	12.715	3.399	1.429	1.275
	PSDT	12.715	3.399	1.429	1.275
	TSDT	12.736	3.570	1.429	1.275
	ESDT	12.755	3.724	1.428	1.205
	HSDT	12.713	3.383	1.429	1.276
	FSDT	12.385	0.720	1.430	1.347
	CBT	12.385	0.720	1.232	-12.68
	Exact	12.297	0.000	1.411	0.000
	10	Présente	194.336	0.673	1.263
PSDT		194.336	0.673	1.263	0.318
TSDT		194.389	0.746	1.263	0.318
ESDT		194.438	0.711	1.263	0.318
HSDT		194.332	0.720	1.263	0.318
FSDT		193.509	0.290	1.264	0.397
CBT		193.509	0.290	1.232	-2.145
Exact		192.950	0.000	1.259	0.000

Les tableaux IV.2 et IV.3 montrent la comparaison des déplacements et des contraintes obtenus pour des poutres isotropes soumises à une charge uniformément répartie (UDL) et à une charge qui est variable linéairement (LVL), respectivement, comme le montrent les figures III.3 (b) et (c). L'examen des tableaux IV.2 et IV.3 exprime à nouveau que les résultats actuels sont en excellent accord avec les autres théories de déformation en cisaillement des poutres. Les deux types de chargement montrent également que la contrainte de cisaillement transversale est obtenue avec précision grâce aux relations constitutives. Conformément au présent modèle, on peut toujours remarquer dans cette étude que l'augmentation du rapport d'élançement entraîne une augmentation substantielle des contraintes adimensionnelles des poutres isotropes pour toutes les conditions de chargement. Cela peut s'expliquer par le fait que l'augmentation de ce rapport peut entraîner une diminution de la rigidité de la poutre. Ainsi, grâce aux relations constitutives de la présente approche, les variations du déplacement axial, de la contrainte normale axiale et de la contrainte de cisaillement transversale à travers

Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

l'épaisseur de la poutre épaisse peuvent être facilement obtenues, comme le montrent les figures IV.1 à IV.9.

Tableau IV.2: Comparaison des contraintes adimensionnelles d'une poutre isotrope simplement appuyée. Soumise à une charge sinusoïdale.

L/h	Source	$\bar{\sigma}_x$	Erreur %	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	Erreur %	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$	Erreur %
4	Présente	9.986	0.281	1.906	0.316	1.897	-0,158
	PSDT	9.986	0.281	1.906	0.316	1.897	-0,158
	TSDT	10.003	0.458	1.966	3.474	1.895	-0.263
	ESDT	10.018	0.603	2.027	6.684	1.894	-0.316
	HSDT	9.985	0.271	1.906	0.316	1.901	0.053
	FSDT	9.727	-2.320	1.527	-19.632	1.910	0.526
	CBT	9.727	-2.320	-	-	1.910	0.526
	Exact	9.958	0.000	1.900	1.900	1.900	0.000
10	Présente	61.053	0.223	4.773	0.168	4.769	0.084
	PSDT	61.053	0.181	4.897	2.770	4.769	0.084
	TSDT	61.069	0.250	4.926	3.379	4.769	0.084
	ESDT	61.085	0.276	5.079	6.590	4.768	0.063
	HSDT	61.051	0.220	4.759	-0.126	4.770	0.084
	FSDT	60.793	-0.204	3.820	-19.832	4.775	0.210
	CBT	60.793	-0.204	-	-	4.775	0.210
	Exact	60.917	0.000	4.765	0.000	4.765	0.000

Les résultats graphiques montrent que le modèle actuel est en bonne adéquation avec les prévisions de comportement en flexion par rapport à celles calculées par d'autres théories de déformation en cisaillement des poutres. D'autre part, les figures IV.3, IV.6 et IV.9 montrent que la contrainte de cisaillement transversal satisfait à la condition des contraintes nulles sur les faces supérieure et inférieure de la poutre.

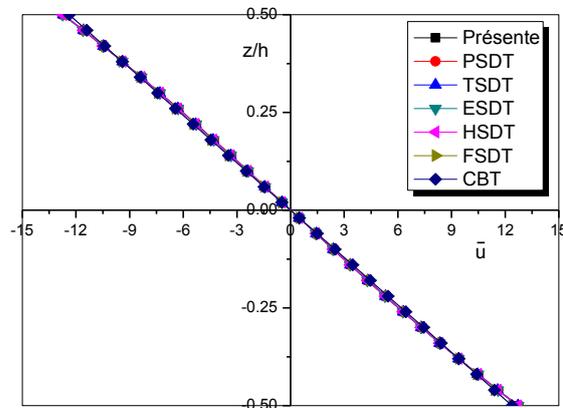


Figure IV.1 : Variations du déplacement axial à travers l'épaisseur \bar{u} d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 4$).

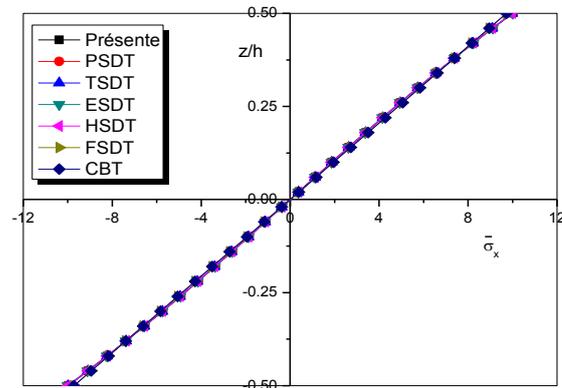


Figure IV.2 : Variations de la contrainte axiale à travers l'épaisseur $\bar{\sigma}_x$ d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 4$).

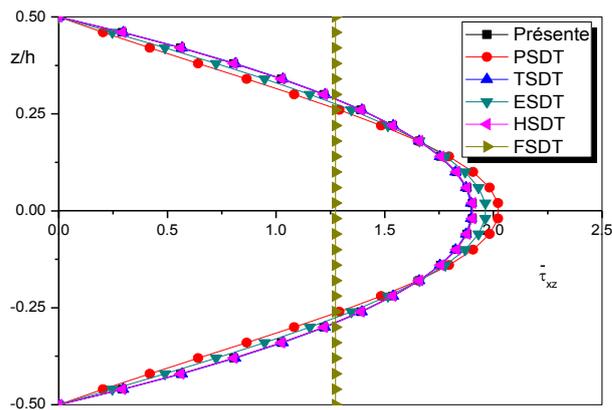


Figure IV.3 : Variations de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale ($L/h = 4$)

Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

Tableau IV.3 : Comparaison des déplacements adimensionnels d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie.

L/h	Source	\bar{u}	Erreur %	\bar{w}	Erreur %
4	Présente	16.505	4.462	1.806	1.176
	PSDT	16.505	4.462	1.806	1.176
	TSDT	16.536	4.658	1.805	1.120
	ESDT	16.564	4.835	1.804	1.064
	HSDT	16.503	4.449	1.806	1.176
	FSDT	16.000	1.265	1.806	1.176
	CBT	16.000	1.265	1.563	-12.430
	Exact	15.800	0.000	1.785	0.000
	10	Présente	251.285	0.715	1.601
PSDT		251.285	0.715	1.601	0.188
TSDT		251.366	0.748	1.601	0.188
ESDT		251.440	0.777	1.601	0.188
HSDT		251.278	0.713	1.601	0.188
FSDT		250.000	0.200	1.601	0.188
CBT		250.000	0.200	1.563	-2.190
Exact		249.500	0.000	1.598	0.000

Tableau IV.4: Comparaison des contraintes adimensionnelles d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie.

L/h	Source	$\bar{\sigma}_x$	Erreur %	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	Erreur %
4	Présente	12.260	0.492	2.908	-3.066
	PSDT	12.260	0.492	2.908	-3.066
	TSDT	12.277	0.631	2.993	-0.233
	ESDT	12.292	0.754	3.077	2.566
	HSDT	12.258	0.475	2.900	-3.333
	FSDT	12.000	-1.639	2.363	-21.23
	CBT	12.000	-1.639	-	-
	Exact	12.200	0.000	3.000	0.000
	10	Présente	75.260	0.079	7.360
PSDT		75.260	0.079	7.360	-1.866
TSDT		75.277	0.102	7.591	0.213
ESDT		75.292	0.122	7.822	4.293
HSDT		75.258	0.077	7.339	-2.147
FSDT		75.000	-0.266	5.906	-21.25
CBT		75.000	-0.266	-	-
Exact		75.200	0.000	7.500	0.000

Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

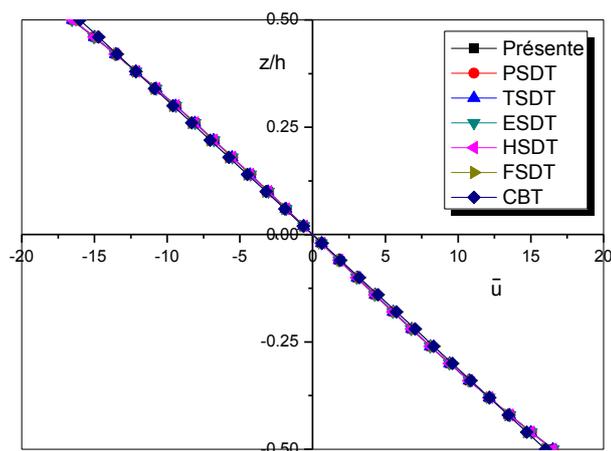


Figure IV.4 : Variations du déplacement axial à travers l'épaisseur \bar{u} d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie. ($L/h = 4$).

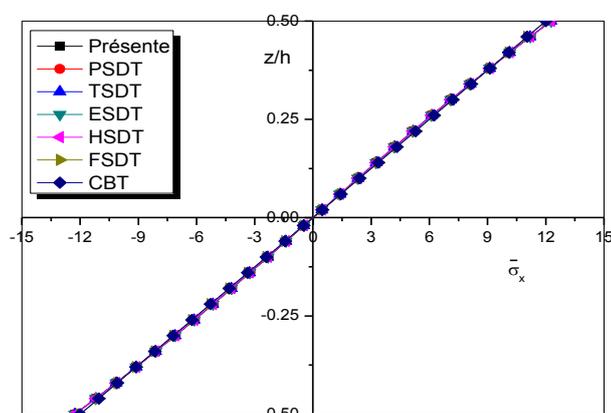


Figure IV.5 : Variations de la contrainte axiale à travers l'épaisseur $\bar{\sigma}_x$ d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie ($L/h = 4$).

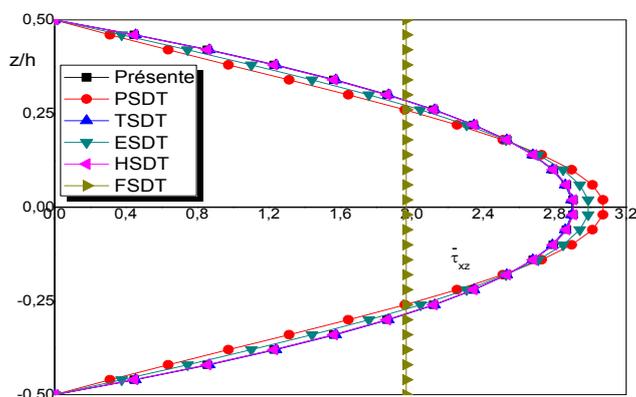


Figure IV.6 : Variations de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie ($L/h = 4$).

Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

Tableau IV.5: Comparaison des déplacements adimensionnels d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge variant linéairement.

L/h	Source	\bar{u}	Erreur %	\bar{w}	Erreur %
4	Présente	8.253	4.468	0.903	1.120
	PSDT	8.253	4.468	0.903	1.120
	TSDT	8.268	4.658	0.903	1.120
	ESDT	8.282	4.835	0.902	1.008
	HSDT	8.251	4.443	0.903	1.176
	FSDT	8.000	1.265	0.903	1.176
	CBT	8.000	1.265	0.781	-12.54
	Exact	7.900	0.000	0.893	0.000
	10	Présente	125.64	0.713	0.801
PSDT		125.64	0.713	0.801	0.250
TSDT		125.68	0.745	0.801	0.188
ESDT		125.72	0.777	0.801	0.188
HSDT		125.64	0.713	0.801	0.250
FSDT		125.00	0.200	0.801	0.250
CBT		125.00	0.200	0.781	-2.252
Exact		124.75	0.000	0.799	0.000

Tableau IV.6: Comparaison des contraintes adimensionnelles d'une poutre isotrope simplement appuyée. Soumise à une charge variant linéairement.

L/h	Source	$\bar{\sigma}_x$	Erreur %	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	Erreur %
4	Présente	6.130	0.492	1.454	-3.066
	PSDT	6.130	0.492	1.454	-3.066
	TSDT	6.138	0.623	1.497	-0.200
	ESDT	6.146	0.754	1.539	2.600
	HSDT	6.129	0.475	1.450	-3.333
	FSDT	6.000	-1.639	1.181	-21.26
	CBT	12.000	96.72	-	-
	Exact	6.100	0.000	1.500	0.000
	10	Présente	37.630	0.080	3.680
PSDT		37.630	0.080	3.680	-1.866
TSDT		37.648	0.128	3.796	1.226
ESDT		37.646	0.122	3.911	4.293
HSDT		37.629	0.077	3.669	-2.160
FSDT		37.500	-0.266	2.953	-21.25
CBT		37.500	-0.266	-	-
Exact		37.600	0.000	3.750	0.000

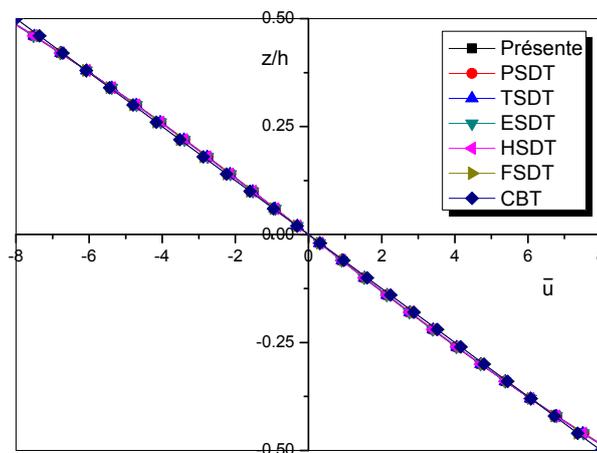


Figure IV.7 : Variations du déplacement axial à travers l'épaisseur \bar{u} d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge variant linéairement ($L/h = 4$).

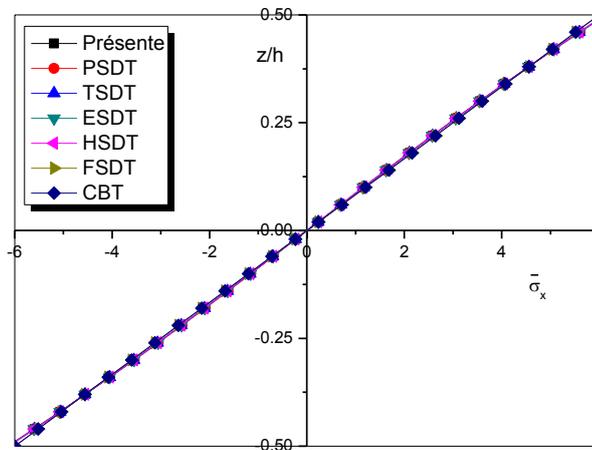


Figure IV.8 : Variations de la contrainte axiale à travers l'épaisseur $\bar{\sigma}_x$ d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge variant linéairement ($L/h = 4$).

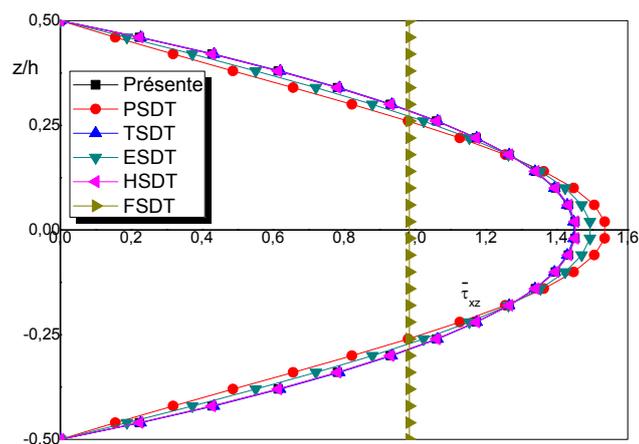


Figure IV.9 : Variations de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une poutre isotrope simplement appuyée soumise à une charge variant linéairement ($L/h = 4$).

IV.2.2 Analyse du flambement des poutres isotropes

Le deuxième exemple est réalisé pour l'analyse du flambement d'une poutre isotrope sous une charge de compression axiale afin d'étudier l'efficacité et la précision du modèle de calcul actuel, comme le montre la figure III.2(d). Les résultats numériques de la charge critique de flambement adimensionnelle d'une poutre simplement appuyée pour différentes valeurs du rapport côté/épaisseur sont présentés dans le tableau IV.7. Pour confirmer à nouveau la précision de ce modèle, les résultats numériques obtenus pour cet exemple sont également comparés aux solutions analytiques utilisant la fonction de forme cubique employée par Reddy (1984) basée sur PSDT, TSDT de Touratier (1991), HySDT de Soldatos (1992), ESDT de Karama *et al.* (2003), et avec les solutions correspondantes trouvées par FSDT, CBT. Par conséquent, la solution exacte de l'élasticité pour l'analyse du flambement des poutres isotropes n'est pas disponible dans la littérature.

Il convient de souligner que la présente théorie donne des résultats plus précis dans la prédiction de la charge critique de flambement par rapport à d'autres théories de déformation en cisaillement des poutres. En outre, la CPT surestime les charges critiques de flambement pour les poutres épaisses et modérément épaisses en raison de la négligence de l'effet de déformation en cisaillement transversal. La variation des charges critiques de flambement en fonction du rapport d'épaisseur est également illustrée à la figure IV.10. De même, on observe

Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

que les poutres isotropes avec des valeurs plus élevées du rapport d'épaisseur produisent des charges critiques de flambement plus importantes.

Tableau IV.7: Comparaison de la charge critique de flambement

Charge critique de flambement (N_{cr})			
Source	$L/h = 4$	$L/h = 10$	$L/h = 100$
Présente	9.3053	1.6840	0.0173
PSDT	0.7112	0.8018	0.8223
TSDT	0.7110	0.8019	0.8223
ESDT	0.7116	0.8020	0.8223
HSDT	0.7090	0.8019	0.8220
FSDT	0.7088	0.8019	0.8222
CBT	0.8225	0.8225	0.8225

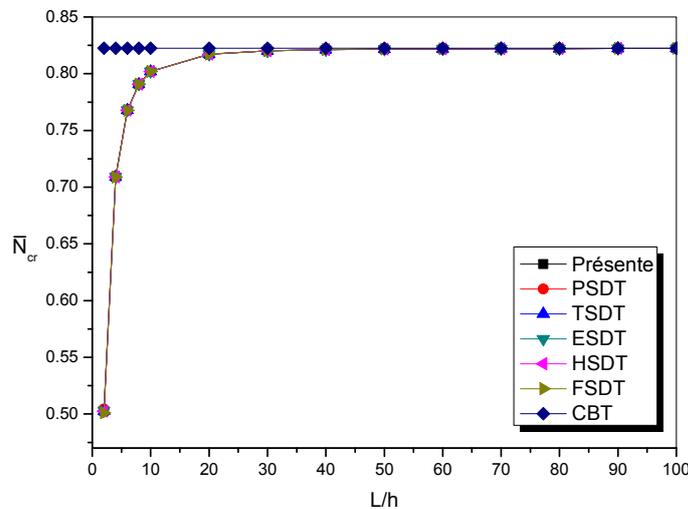


Figure IV.10 : Variation de la charge critique de flambement adimensionnelle \bar{N}_{cr} d'une poutre isotrope simplement appuyée ($L/h = 4$).

Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

Tableau IV.8: Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles d'une poutre isotrope simplement appuyée.

Fréquences fondamentales ($\bar{\omega}$)				
Source	$L/h = 4$	Erreur%	$L/h = 10$	Erreur%
Présente	2.5958	-0.2421	2.8023	-0.0749
PSDT	2.6030	0.0345	2.8022	-0.0784
TSDT	2.6021	0.0000	2.8024	-0.0713
ESDT	2.6121	0.3843	2.8038	-0.0214
HSDT	2.5960	-0.2344	2.8020	-0.0856
FSDT	2.5987	-0.1307	2.8027	-0.0606
CBT	2.8491	9.4923	2.8240	0.6989
Exact	2.6021	0.0000	2.8044	0.0000

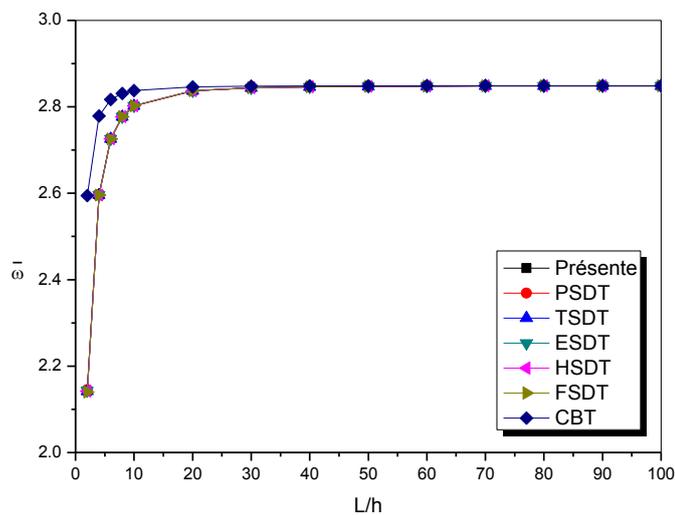


Figure IV.11 : Variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une poutre isotrope simplement appuyée ($L/h = 4$).

IV.2.3 Analyse des vibrations libres des poutres isotropes

Dans le dernier exemple, l'analyse des vibrations libres d'une poutre isotrope est étudiée à l'aide de l'équation (III.29) en l'absence de toute charge externe. Les résultats obtenus des fréquences naturelles adimensionnelles pour différentes valeurs du rapport côté/épaisseur sont présentés dans le tableau IV.8. Ces résultats sont ensuite comparés aux valeurs correspondantes d'autres théories classiques et conventionnelles de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ainsi qu'à la solution d'élasticité exacte donnée par Timoshenko et Goodier (1970). L'examen du tableau IV.8 montre que les fréquences

Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

naturelles calculées par la présente théorie des poutres et les autres théories sont en bon accord entre elles pour toutes les valeurs du rapport entre les côtés et l'épaisseur. Cependant, la CPT donne des valeurs de fréquences naturelles plus élevées que celles des HSDT et des résultats exacts en raison de la négligence des contraintes de cisaillement transversal et ne donne des résultats acceptables que pour les poutres isotropes minces. En outre, ces fréquences augmentent avec le rapport d'épaisseur, mais le degré d'augmentation de la fréquence n'est pas significatif lorsque la poutre devient plus mince. La variation des fréquences naturelles en fonction du rapport d'épaisseur est également illustrée à la figure IV.11. On peut observer que la présente théorie est plus précise et plus efficace dans l'analyse du comportement dynamique des poutres isotropes épaisses que les autres modèles disponibles dans la littérature.

IV.3 Conclusion

Dans cette étude, une nouvelle théorie raffinée de déformation en cisaillement parabolique (PSDBT) à deux variables est développée pour analyser la flexion, le flambement et la vibration libre des poutres isotropes simplement appuyées. La théorie proposée utilise un terme intégral indéterminé qui tient compte des effets de la déformation en cisaillement et satisfait les conditions aux limites sans contrainte aux surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans besoin d'un facteur de correction du cisaillement. Les équations de mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton et les solutions analytiques des déplacements, des contraintes, des charges critiques de flambement et des fréquences naturelles de vibration libre ont été obtenues en utilisant la méthode de solution de type Navier. Pour prouver la validité et l'efficacité du présent modèle de calcul, les résultats numériques et graphiques obtenus en ce qui concerne le rapport côté/épaisseur et les différentes conditions de chargement sont comparés à ceux calculés en utilisant d'autres théories de poutres d'ordre élevé. Enfin, on peut affirmer que le modèle mathématique développé est non seulement plus précis mais aussi plus simple que les autres HSDT pour prédire les réponses de flexion, de flambement et de vibration libre des poutres isotropes.

CONCLUSION GENERALE

Les poutres sont des éléments structurels courants dans la plupart des structures et elles sont analysées à l'aide de théories de déformation en cisaillement conventionnelles ou raffinées pour évaluer les caractéristiques statiques et dynamiques. La théorie élémentaire de la flexion des poutres sous-estime les flexions et surestime les fréquences propres car elle ne tient pas compte de l'effet de déformation en cisaillement transversal. Timoshenko a été le premier à inclure des effets raffinés tels que l'inertie rotative et la déformation de cisaillement dans la théorie des poutres. Cette théorie est actuellement largement appelée théorie des poutres de Timoshenko ou théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre. Dans cette théorie, la répartition des contraintes de cisaillement transversales est supposée être constante sur toute l'épaisseur de la poutre et nécessite donc un facteur de correction de cisaillement dépendant du problème. La précision de la théorie des poutres de Timoshenko pour les vibrations transversales d'une poutre simplement appuyée par rapport à la fréquence fondamentale est vérifiée par plusieurs chercheurs en utilisant une solution d'élasticité exacte.

Les limitations de la théorie élémentaire de la poutre et de la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre ont conduit au développement de théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé. De nombreuses théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé sont disponibles dans la littérature pour l'analyse statique et dynamique des poutres. Dans cette étude, une théorie raffinée de poutre de déformation en cisaillement d'ordre élevé considérant une composante intégrale indéterminée est présentée sur la base d'une simple fonction de forme polynomiale. La théorie actuelle utilise un nouveau modèle cinématique récemment développé par Sellam *et al.* (2020) pour l'analyse des vibrations libres et du flambement des plaques rectangulaires orthotropes est employé avec succès pour l'analyse mécanique des poutres isotropes épaisses soumises à diverses conditions de chargement statique. Contrairement aux HSDT existants, la théorie proposée n'a que deux variables inconnues indépendantes et satisfait ainsi la condition d'absence de contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la poutre. Les équations différentielles d'équilibres sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton et résolues via une procédure analytique de type Navier pour des conditions aux limites simplement appuyées. Les résultats numériques obtenus à partir de présente formulation pour les déplacements, les contraintes, les fréquences propres et les charges critiques de flambement des poutres isotropes épaisses sont présentés et comparés avec d'autres théories de déformation en cisaillement pour confirmer l'exactitude et la validité de la présente théorie.

CONCLUSION GENERALE

Finalement, la recherche dans le domaine du développement théorique des poutres en matériaux composites est vaste et nous avons fait qu'effloré une partie de ces aspects dans ce mémoire, et puisque la porte de la recherche est grande ouverte sur le développement des théories des poutres.

En perspective, nous pouvons compléter cette étude en apportant plus d'informations sur l'étude de comportement des poutres composites :

- Etudier les différents comportements des poutres composites sous condition de charge thermomécanique,
- Etude des poutres composites avec des différentes conditions d'appuis en utilisant la présente théorie raffinée d'ordre élevé,
- Etude des poutres en matériaux composites sur fondations élastiques en utilisant la présente théorie raffinée d'ordre élevé,

REFERENCES

- [1] Timoshenko, SP, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philosophical Magazine* 41(6) (1921) 742-746.
- [2] Levinson, M., Une nouvelle théorie du faisceau rectangulaire, *Journal of Sound and Vibration* 74(1) (1981) 81–87.
- [3] Krishna Murty, AV, Vers une théorie des faisceaux cohérente, *AIAA Journal* 22(6) (1984) 811–816.
- [4] Heyliger, PR, Reddy, JN, Un élément fini de poutre d'ordre supérieur pour les problèmes de flexion et de vibration, *Journal du son et des vibrations* 126(2) (1988) 309–326.
- [5] Ghugal, YM, Une nouvelle théorie de flexion raffinée pour les poutres épaisses, y compris les effets de cisaillement transversal et de déformation normale transversale, *Departmental Report, Applied Mechanics Department, Government Collage of Engineering, Aurangabad, Inde, 2006, pp. 1–96.*
- [6] Ghugal, YM, Sharma, R., Une théorie de déformation par cisaillement hyperbolique pour la flexion et la vibration de poutres isotropes épaisses, *International Journal of Computational Methods* 6(4) (2009) 585–604.
- [7] Soldatos, KP, Une théorie de déformation par cisaillement transverse pour des plaques monocliniques homogènes, *Acta Mechanica* 94 (1992) 195–200.
- [8] Sayyad, AS, Ghugal, YM, Effet du cisaillement transversal et de la déformation normale transversale sur l'analyse de flexion des poutres stratifiées à plis croisés, *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 7(12) (2011) 85–118.
- [9] Karama, M., Afaq, KS, Mistou, S., Comportement mécanique d'une poutre composite stratifiée par un nouveau modèle de structures composites stratifiées multicouches avec continuité de contrainte de cisaillement transversal, *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003) 1525– 1546.
- [10] Sayyad, AS, Comparaison de diverses théories de poutres raffinées pour l'analyse de la flexion et des vibrations libres de poutres épaisses, *Applied and Computational Mechanics* 5(2) (2011) 217–230.

REFERENCES

- [11] Ghugal, YM, A single variable parabolic shear deformation theory for flexure and flexural vibration of thick isotropic beams, Actes de la troisième conférence internationale sur l'ingénierie structurelle, la mécanique et le calcul, Le Cap, Afrique du Sud, 2007, pp. 77– 78.
- [12] Sayyad, AS, Ghugal, YM, Static flexure of soft core sandwich beams using trigonometric shear théorie de la déformation, Mechanics of Advanced Composite Structures 2(1) (2015) 43–53.
- [13] Sayyad, AS, Ghugal, YM, Naik, NS, Analyse de flexion des poutres stratifiées composites et sandwich selon la théorie trigonométrique raffinée des poutres, Structures courbes et en couches 2(1) (2015) 279–289.
- [14] Sayyad, AS, Ghugal, YM, Shinde, PN, Analyse des contraintes des poutres composites stratifiées et à noyau souple à l'aide d'une théorie simple de déformation par cisaillement d'ordre supérieur, Journal de la Société serbe de mécanique informatique 9 (1) (2015) 15 –35.
- [15] Jean-M Berthelot mécanique et analyse des structure 5^eédition 2012 Lavoisier Paris IBBN : 978-2-7430-14507.
- [16] ELMOSSOUESS Bouchra, « Étude de la stabilité des plaques en matériaux fonctionnellement gradués En utilisant des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé », thèse de doctorat, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf, 2018.
- [17] Brigante. Domenico. New composite materials: selection, design, and application, New York London: Springer, 2013.
- [18] Baali Hafida, « étude de l'effet du traitement chimique des fibres de palmier dattier sur le comportement mécanique du béton polymère », mémoire master, université de M'sila, juin 2014.
- [19] Laurent Gornet. Généralités sur les matériaux Composites. Ecole d'ingénieur. 2008.
- [20] Jérémie Aucher, « étude comparative du comportement composite à matrice thermoplastique ou thermodurcissable », thèse de doctorat, INSA de Rouen, France, 2009.
- [21] Haddadi Manel, « étude numérique avec comparaison expérimental des propriétés thermoplastique des matériaux composites à matrice polymère », mémoire master, université Al Hadj Lakhdar, Batna, 2011.

REFERENCES

- [22] KAOUCHE Naima, «prise en compte du vieillissement et de l'endommagement dans le dimensionnement de structures en matériaux composites », Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf, 2016.
- [23] CARMA, « Glossaire des matériaux composites », centre d'animation régional en matériaux avancés, Décembre, 2006.
- [24] William ALBOUY, « De la contribution de la visco-élasto-plasticité au comportement en fatigue de composites à matrice thermoplastique et thermodurcissable », thèse de doctorat, Pour obtenir le grade de Docteur de Normandie Université délivré par l'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, Novembre 2013.
- [25] L'ingénierie des matériaux avancés. Disponible sur : <https://www.final-materials.com/fr/21-fibre-aramide>
- [26] La fibre de bore : la fibre haute performance originale disponible sur : <https://www.ifth.org/2020/09/22/la-fibre-de-bore-la-fibre-haute-performance-originale/#>
- [27] MOKADDEM.A, « Modélisation du Comportement de L'interface Fibre-Matrice de Matériaux Composites », Mémoire de magister, USTO, 2008.
- [28] Edward L. Wilson “Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures isotropic materials” January 2002
- [29] GIRARD, Gautier. Caractérisation et modélisation thermomécaniques de matériaux et de structures circuits imprimés complexes destinés aux applications spatiales radiofréquences et micro-ondes. 2018. PhD Thesis. Université de Lorraine.
- [30] SALLAI BEN-OUMRANE « Etude et analyse des structures en FGM : Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [31] Thermoelastic Stress Analysis of Isotropic Thick Beam by using Hyperbolic Shear Deformation Theory. V. G. PARDESHI1 , G. R. GANDHE2 , D. H. TUPE3.
- [32] Reddy J.N., —An evaluation of equivalent-single-layer and layer-wise theories of composite laminates, Composite Structures, 25, 21–35, 1993.

REFERENCES

- [33] Belarbi, M. O. « Éléments finis pour l'analyse des Structures Sandwichs », Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie, 2015. [Bernoulli 1694]: Bernoulli, J. —Curvatura laminae elasticae, Acta Eruditorum Lipsiae, 3(6), 262–276, 1694.
- [34] Bernoulli J. Curvatura laminae elasticae. Acta Eruditorum Lipsiae 1694;262– 276. (Also in Jacobi Bernoulli Basileensis Opera (2 vols.) 1744;1(LVIII):576.
- [35] Bernoulli J. Explicationes, annotations et additions. Acta Eruditorum Lipsiae 1695. (Also in Jacobi Bernoulli Basileensis Opera (2 vols.) 1744;1(LXVI):639.
- [36] Bernoulli J. Vritable hypothese de la resistance des solides, avec la demonstration de la corbure des corps qui font reort. Histoire de l' Academie des Sciences Paris 1705. (Also in Jacobi Bernoulli Basileensis Opera (2 vols.) 1744;2(CII):976–989.
- [37] Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausanne and Geneva; 1744.
- [38] Saint Venant A, Barre de. Memoire sur la flexion des prismes. J Math Pures Appl (Liouville) 1856;2(1):89–189.
- [39] Saint Venant A. Memoire sur la torsion des prismes. Acad Sci Inst Imperial Frances 1856;14:233–560.
- [40] Love AEH. The mathematical theory of elasticity. New York: Dover Publications; 1944.
- [41] Timoshenko SP. History of strength of materials. New York: McGraw Hill Book Co., Inc; 1953.
- [42] Todhunter I, Pearson K. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galileo Galilei (1564–1642) to Lord Kelvin (1824–1907). Vols. I, II and III. New York: Dover publications, Inc; 1960.
- [43] Rayleigh L. Thoery of sound. London: Macmillan and Co.; 1877
- [44] Boley BA. On the accuracy of the Benloulli-Euler theory for beams of variable section. ASME J Appl Mech 1963;30:373.
- [45] “Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature”. Atteshamuddin S. Sayyad ,† , Yuwaraj M. Ghugal department of Civil Engineering, SRES's Sanjivani College of Engineering, Savitribai Phule Pune

REFERENCES

University, Kopergaon 423601, Maharashtra, India bDepartment of Applied Mechanics, Government College of Engineering, Karad 415124, Maharashtra, India.

[46] AYACHE Belqassim « Analyse des propriétés statiques et dynamiques des structures FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé ». Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2019.

[47] Free vibration analysis of beams by using a third-order shear deformation theory MESUT S, IMS, EK and TURGUT KOCATURK " Department of Civil Engineering, Yildiz Technical University, Yildiz 34349, Istanbul, Turkey

[48] A Review of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams. Y. M. GHUGAL AND R. P. SHIMPI Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Technology Bombay Powai, Mumbai—400 076, India.

[49] Rankine, W. J. M., 1858, A Manual of Applied Mechanics, R. Griffin and Company Ltd., London, U.K., pp. 342–344.

[50] Bresse, J. A. C., 1859, Cours de Mécanique Appliquée, Paris: Mallet-bachelier, (1866 2nd ed.), Gauthier-Villars, Paris.

[51] Vlasov, V. Z. and Leont'ev, U. N., 1960, Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations, Translated from Russian by Barouch, A., and edited by Pelz, T.; Israel Program for Scientific Translations Ltd., Jerusalem, Chapter 1, pp. 1–8

[52] Reddy, J.N. (2007), "Theory and analysis of elastic plates and shells", Second edition, CRC Press, Taylor & Francis Group, an informa business, Boca Raton London.

[53] Rebello, C. A., Bert, C. W. and Gordaninejad, F., 1983, "Vibration of Bimodular Sandwich Beams with Thick Facings: A New Theory and Experimental Results," Journal of Sound and Vibration, Vol. 90, No. 3, pp. 381–397.

[54] Kruszewski, E. T., 1949, "Effect of Transverse Shear and Rotatory Inertia on the Natural Frequency of a Uniform Beam," NACA TN 1909.

[55] Dengler, M. A. and Goland, M., 1951, "Transverse Impact of Long Beams Including Inertia and Shear Effects," ASME Proceedings of 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics, New York, pp. 179–186.

REFERENCES

- [56] Dym, C. L. and Shames, I. H., 1973, *Solid Mechanics: A Variational Approach*, McGraw-Hill Book Co., New York, 556 p.
- [57] Mindlin, R. D. and Deresiewicz, H., 1954, "Timoshenko's Shear Coefficient for Flexural Vibrations of Beams," *Proceedings of 2nd U.S. National Congress of Applied Mechanics*, ASME Publication, New York, pp. 175–178.
- [58] Cowper, G. R., 1966, "The Shear Coefficients in Timoshenko Beam Theory," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 335–340.
- [59] Cowper, G. R., 1968, "On the Accuracy of Timoshenko's Beam Theory," *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 94, No. EM 6, pp. 1447–1453.
- [60] Murty, A. V. K., 1970, "Vibration of Short Beams," *AIAA Journal*, Vol. 8, pp. 34–38.
- [61] Murty, A. V. K., 1970, "Analysis of Short Beams," *AIAA Journal*, Vol. 8, pp. 2098–2100.
- [62] Kaneko, T., 1975, "On Timoshenko's Correction for Shear in Vibrating Beams," *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 8, No. 16, pp. 1927–1936.
- [63] Hutchinson, J. R., 1981, "Transverse Vibrations of Beams, Exact Versus Approximate Solutions," *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, No. 4, pp. 923–928.
- [64] Hutchinson, J. R. and Zillmer, S. D., 1986. "On the Transverse Vibration of Beams of Rectangular Cross-section," *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, No. 1, pp. 39–44.
- [65] Rychter, Z., 1987, "On the Shear Coefficient in Beam Bending," *Mechanics Research Communications*, Vol. 14, No. 5/6, pp. 379–385.
- [66] Stephen, N. G. and Levinson, M., 1979, "A Second Order Beam Theory," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 67, pp. 293–305. 24. Rychter, Z., 1988, "An Engineering Theory for Beam Bending," *Ingenieur-Archiv*, Vol. 58, No. 1, pp. 25–34.
- [67] Renton, J. D. 1991, "Generalised Beam Theory Applied to Shear Stiffness," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 27, No. 15, pp. 1955–1967.
- [68] Fan, H. and Widera, G. E. O., 1991, "Refined Engineering Beam Theory Based on the Asymptotic Expansion Approach," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 3, pp. 444–449.

REFERENCES

- [69] Kathnelson, A. N., 1996, "Improved Engineering Theory for Uniform Beams," *Acta Mechanica*, Note, Vol. 114, No. 1–4, pp. 225–229.
- [70] Zaslavsky, A., 1980, "On the Limitations of the Shearing Stress Formula," *The International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 8, pp. 13–19.
- [71] Goodier JN. On the problem of the beam and the plate in the theory of elasticity. *Trans R Soc Canada Ser 3* 1938;32(3):65–8.
- [72] Analysis of Thick Isotropic Beam Using Trigonometric Shear Deformation Theory D. H.Tupe1, A. G.Dahake 2.
- [73] Soler, A. I., 1968, "Higher Order Effects in Thick Rectangular Elastic Beams," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, No. 7, pp. 723–739.
- [74] Tsai, H. and Soler, A. I., 1970, "Approximate Theory for Locally Loaded Plane Orthotropic Beams," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 6, No. 8, pp. 1055–1068.
- [75] Essenburg, F., 1975, "On the Significance of the Inclusion of the Effect of Transverse Normal Strain in Problems Involving Beams with Surface Constraint," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 97, pp. 127–132.
- [76] Levinson, M., 1981, "A New Rectangular Beam Theory," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 74, pp. 81–87.
- [77] Levinson, M., 1981, "Further Results of a New Beam Theory," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 77, pp. 440–444.
- [78] Levinson, M., 1985, "On Bickford's Consistent Higher Order Beam Theory," *Mechanics Research Communications*, Vol. 12, pp. 1–9.
- [79] Levinson, M., 1986, "Consistent and Inconsistent Higher Order Beam and Plate Theories: Some Surprising Comparisons," *Proceedings of Euromech Colloquium 219 on Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells and Their Applications*, Kassel, F.R. Germany, pp. 122–130.

REFERENCES

- [80] Bhimaraddi, A. and Chandrashekhara, K., 1993, "Observations on Higher-Order Beam Theory," *Journal of Aerospace Engineering, Proceedings of ASCE, Technical Note, Vol. 6*, pp. 408–413.
- [81] Vlasov, V. Z., Leontev, U. N., *Beams, plates and shells on elastic foundations*, Moskva, Chapter 1, 18. Translated from the Russian by Barouch A. and Plez T., Israel Program for Scientific Translation Ltd., Jerusalem, 1966.
- lasov, V. Z. and Leont'ev, U. N., 1960, *Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations*, Translated from Russian by Barouch, A., and edited by Pelz, T.; Israel Program for Scientific Translations Ltd., Jerusalem, Chapter 1, pp. 1–8.
- [82] Stein, M., Vibration of beams and plate strips with three dimensional flexibility, *ASME Journal of Applied Mechanics* 56(1) (1989) 228231.
- [83] Ghugal Y. M. and Dahake A. G., Flexural Analysis of Deep Beam Subjected to Parabolic Load Using Refined Shear Deformation Theory, *Applied and Computational Mechanics*, 2012, 6(2), pp. 163-172.
- [84] Ghugal Y. M. and Shimpi R. P., "A Re- view of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams", 2001, Vol: 20, No:3, pp. 255-272.
- [85] Mantari, J., Canales, F.: A unified quasi-3D HSDT for the bending analysis of laminated beams. *Aerosp. Sci. Technol.* **54**, 267–275 ([2016](#)).
- [86] Karamanli, A. (2017), "Bending behaviour of two directional functionally graded sandwich beams by using a quasi-3D shear deformation theory", *Compos. Struct.*, 174, 70–86.
- [87] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. (2017), "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 13(1), 71–84.
- [88] Donnell, L. H., 1952, "Bending of Rectangular Beams," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 74, p. 123
- [89] Donnell, L. H., 1976. *Beams, Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, New York, 453 p.

REFERENCES

[90] DJAROUN Basma HAOUACHE Kheira « Contribution à l'étude du comportement mécanique des poutres en matériaux à gradient de propriétés » Sujet du mémoire, UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.