

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

MEGHAZI Brahim

MEDDAH Ghlam Allah

Sujet du mémoire

**MODELISATION DES POUTRES AVEC DIVERSES
CONDITIONS D'APPUI PAR ELEMENTS FINIS**

Soutenu publiquement le

Mr, HADJ.L

Mr, HADJ HENNI.A

Mr, BENFERHAT.R

devant le jury composé de :

Président

Rapporteur

Examineur

PROMOTION : 2022_2023

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à exprimer notre gratitude envers Allah, le clément et le miséricordieux, pour nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce travail. Nous remercions également nos parents qui nous ont soutenus tout au long de nos études.

Nos sincères remerciements vont à tous les professeurs qui nous ont enseigné depuis nos années d'études primaires jusqu'à l'obtention de notre diplôme de master. Leur contribution a été essentielle.

Nous souhaitons exprimer notre reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'achèvement de ce travail, en particulier notre encadreur, M. HADJ HENI.ABDELAZIZ, ainsi que notre chef de département, M. Rebahi, pour leurs orientations, leur aide et leurs précieux conseils.

Nous tenons également à remercier chaleureusement tous les membres du personnel de l'université Ibn Khaldoun et tous nos amis avec qui nous avons partagé des moments agréables et des souvenirs précieux.

Enfin, Nous remercions également le président et les membres du jury présent lors de notre soutenance.

Dédicace

Avant tout, je souhaite exprimer ma gratitude envers le Dieu tout-puissant pour m'avoir donné la force et la volonté de mener à bien ce modeste travail.

Je dédie ce travail à mes parents, qui m'ont soutenu et fourni tous les efforts nécessaires tout au long de mon parcours. Je leur souhaite une bonne santé.

J'adresse également cette dédicace au reste de ma famille, mes frères.

À tous mes amis, cette dédicace est aussi pour vous.

Enfin, je dédie ce travail à toute la promotion de 2ème année du Master GC (2022-2023).

Avec mes sincères remerciements,

BRAHIM

Dédicace

Au commencement, je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers le Tout-Puissant d'avoir insufflé en moi la détermination et la volonté nécessaires pour mener à bien ce humble travail.

Cette dédicace est dédiée à mes parents, mes soutiens indéfectibles, dont les efforts constants tout au long de mon parcours ont été inestimables. Je leur adresse mes vœux sincères de bonne santé.

Je souhaite également partager cette dédicace avec le reste de ma famille, mes frères qui ont toujours été présents.

À mes chers amis, cette dédicace est également pour vous. Votre amitié et votre soutien ont été une source d'inspiration et de motivation.

Enfin, je dédie ce travail à l'ensemble de la promotion de la deuxième année du Master GC (2022-2023). Votre présence et votre collaboration ont contribué à rendre ce parcours mémorable.

Avec mes remerciements les plus sincères,

GHLAM ALLAH

Résumé

Le calcul des poutres dans le domaine de génie civil nécessite d'appliquer certaines méthodes de résolution. Mais des fois on peut rencontrer certains systèmes hyperstatiques possédant des difficultés de résolution. Dans ce cadre nous sommes intéressés d'utiliser une méthode numérique celle des éléments finis qui facilite la tâche de calcul.

Notre travail est consacré au calcul des poutres uniformément chargées avec diverses conditions aux bords, pour cela nous développons un code de calcul par cette présente méthode qui contient principalement des expressions de déplacements et des moments.

Un programme de calcul a été effectué et de vérifier la validité du modèle numérique proposé, en faisant la comparaison avec la solution de la résistance des matériaux.

Dans le but de savoir l'utilité de cette méthode approchée pour la résolution des problèmes des poutres hyperstatiques qu'on peut les rencontrer dans la pratique, des exemples concrets ont été exposés dans le dernier chapitre de ce mémoire.

Mots clés : poutres, élément fini, la résistance des matériaux, hyperstatique, condition aux bords, charge uniforme, déplacement, moment.

Abstract:

The calculation of beams in the field of civil engineering requires the application of certain resolution methods. However, sometimes we may encounter certain statically indeterminate systems that pose difficulties in resolution. In this context, we are interested in using a numerical method called the finite element method, which facilitates the calculation task.

Our work is dedicated to the calculation of uniformly loaded beams with various boundary conditions. For this purpose, we are developing a calculation code using this method, which primarily involves expressions for displacements and moments.

A calculation program has been implemented to verify the validity of the proposed numerical model by comparing it with the solution obtained from the mechanics of materials.

In order to understand the usefulness of this approximate method for solving problems related to statically indeterminate beams that are encountered in practice, concrete examples have been presented in the final chapter of this thesis.

Keywords: beams, finite element, mechanics of materials, statically indeterminate, boundary conditions, uniform load, displacement, moment.

ملخص

حساب العوارض في مجال الهندسة المدنية يتطلب تطبيق بعض أساليب الحل. ولكن في بعض الأحيان يمكن أن نواجه بعض الأنظمة الفائضة التي تواجه صعوبات في الحل. في هذا السياق، نحن مهتمون باستخدام طريقة عددية تُعرف بـ "طريقة العناصر المحدودة" والتي تُسهّل مهمة الحساب.

يُخصّص عملنا لحساب العوارض المحمّلة بتوزيع متجانس وبشروط متنوعة على الحدود. لذلك، نقوم بتطوير برنامج حساب باستخدام هذه الطريقة الذي يتضمن بشكل أساسي تعابير الانزياح واللحظات.

تم تنفيذ برنامج الحساب والتحقق من صحة النموذج العددي المقترح، من خلال مقارنته بحل مقاومة المواد.

وذلك لمعرفة فائدة هذه الطريقة التقريبية في حل مشكلات الأنظمة الفائضة للعوارض التي يمكن أن نواجهها في الممارسة، تم عرض أمثلة واقعية في الفصل الأخير من هذا البحث.

الكلمات الرئيسية: عوارض، عنصر محدود، مقاومة المواد، فائض، شروط الحدود، توزيع متجانس، انزياح، لحظة.

Liste des matières:

Remerciement.....	I
Dédicace	II
Dédicace	III
Résumé	IV
Liste des matières:.....	VII
Liste des figures :	IX
Liste des tableaux :	XI
INTRODUCTION GENERALE	1

Chapitre I : Etude bibliographique sur la méthode des éléments finis

I.1. Introduction.....	2
I.2. Historique de la M.E.F.....	3
I.3. Principe général	4
I.4 Technique des éléments finis appliquée à l'analyse structurale	4
I.5 Types d'éléments plus performants	5
I.6 Concept de base de la méthode des éléments finis :	6
I.7 Démarche de formulation éléments finis	7
I.7.1 Discrétisation de la structure en éléments finis.....	8
I.7.2 Construction de l'approximation nodale par sous domaine.....	8
I.7.3 Etablissement de la relation entre déformations et déplacements.....	8
I.7.4 Etablissement de la relation entre contraintes et déformations.....	8
I.7.5 Calcul des matrices élémentaires	8
I.8 Elément fini barre	9
I.8.1 Définition	9
I.8.2 Formulation de l'élément barre dans le plan	10
I.10.1 Principe des travaux virtuels	15
I.10.2 Formulation élémentaire des problèmes d'élasticité.....	15

Chapitre II : généralités sur les poutres

II-1 Généralités sur les poutres	18
II-2-2 Selon l'inertie	23
II-2-3 Selon le matériau	25

Chapitre III : Modalisation des poutres avec diverses conditions d'appuis

III.1. Introduction	31
III.2. Etapes de calcul par la méthode des éléments finis	31
III. 3 Formulation en élément finis :	32
III .3 1 Equation fondamentale pour éléments finis	32

III.3.1. 1 Fonction de déplacement	32
111.3.1.2 Relation déplacement - déformation :	34
III.3.1.3 Relation déformation -contrainte :	35
III.3.1.5 Formulation globale :	37
III.4 Calcul numerique	39
III 4.1 Etude comparative :	39
III.4 .1 Discrétisation de la poutre.....	40
III .4.2 Developpement d' un programme de calcul par elements finis	40
III. 4. 3 Exemples d'application :	44
III.4.3.1 Exemple (01)	44
III.4.3.2 Exemple (02)	46
III. 5 Conclusion.....	48
CONCLUSION GENERALE.....	49
Références bibliographiques	
Annexe	

Liste des figures :

Figure I.1 : Schématisation d'une poutre	2
Figure I.2 : Discrétisation en éléments finis d'un treillis plan.....	2
Figure I.3 : Discrétisation en éléments finis d'un portique plan	3
Figure I.4 : Élément fini typique pour les structures en treillis.....	5
Figure I.5 : Différents éléments utilisés en 3D.....	6
Figure I.6 : Exemples de modélisation par la M.E.F.....	7
Figure I.7 : Géométrie d'un élément fini barre	9
Figure I.8 : Modélisation d'un élément fini barre.....	10
Figure I.9 : Élément fini barre dans le repère local	11
Figure I.10 : Élément fini dans le repère global	13
Figure II-01 : Géométrie d'une poutre	18
Figure II-02 : Poutre rectangulaire.....	19
Figure II-03 : Poutre en courbe.....	20
Figure II-04 : Poutre en I	21
Figure II-05 : Poutre en treillis.....	22
Figure II-06 : Poutre-caisson	23
Figure II-07 : poutre a inertie constante	24
Figure II-08 : poutre a inertie variante	25
Figure II-09 : poutre en béton armé	26
Figure II-10: poutre en bois	27
Figure II-11 : différents profils en acier	28
Figure II-12 : Longrine	29
Figure II-13: Poutrelle.....	30
Figure III.1 : Degré de liberté d'un élément en flexion simple.....	32
Figure III.2 : Assemblage de deux éléments	38
Figure III.3 : Discrétisation de la poutre.....	40
Figure III.4 : digrammes des moments réduites dans une poutre uniformément chargée avec diverses conditions aux bords par la méthode des éléments finis	43
Figure III.5 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à deux travées (S-S-S) et Uniformément chargée.....	44
Figure III.6 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à deux travées (C-S-S) et Uniformément chargée.....	45
Figure III.7 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à deux travées (C-S-C) et Uniformément chargée.....	45
Figure III.8 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à deux travées (C-S-F) et Uniformément chargée.....	46

Figure III.9 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à trois travées (C-S-S-C) et Uniformément chargée.....	47
.....	47
Figure III.10 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à trois travées (C-S-S-F) et Uniformément chargée.....	47
Figure III.11 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à trois travées (C-S-S-S) et Uniformément chargée.....	48
.....	48
Figure III.12 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à trois travées (S-S-S-S) et Uniformément chargée.....	48

Liste des tableaux :

Tableaux III.1 : Comparaison des résultats des déplacements et moments réduits pour une poutre uniformément chargée avec diverses conditions aux bords	42
--	----

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le génie civil représente l'ensemble des techniques concernant les constructions civiles, le maître ingénieur en génie civil s'occupe de conception, de la réalisation de l'exploitation et de la réhabilitation d'ouvrages d'art et d'infrastructure. Dont ils assurent la gestion afin de répondre en besoin de la société, tout en assure la sécurité du public. Très variés, leur réalisation se répartissent principalement dans Cinq grands domaines d'intervention: structure, géotechnique, hydraulique, transport, et management.

Dans le domaine de structure on applique une méthode de calcul numérique s'appelle la méthode des éléments finis (M.E.F).

D'une manière pratique la méthode est en grande majorité des cas mise en œuvre le calcul informatique ces outils de calcul sont aujourd'hui largement utilisés industriellement.

Le présent mémoire comporte trois chapitres:

Dans le premier nous présentons une étude bibliographique sur la méthode des éléments finis

Dans le deuxième, nous avons exposé des généralités sur les poutres.

Le dernier chapitre est consacré à la modélisation des poutres uniformément chargées avec diverses conditions d'appuis par la méthode des éléments finis qui se suit par exposition des exemples d'application.

Chapitre I : Etude bibliographique sur la méthode des éléments finis

I.1. Introduction

Dans ce chapitre nous présentons d'une manière générale le concept de base de la méthode Des éléments finis pour l'analyse des structures. Le comportement Mécanique d'une structure métallique formée de poutres sous les charges qui lui sont appliquées est correctement décrit par la théorie des poutres [1], [3]. Cette dernière est entièrement définie par les caractéristiques géométriques de la section courante (aire, inertie, module d'inertie, etc.) et la géométrie de la fibre moyenne (**Figure. I.01**).

Les efforts appliqués à la poutre sont schématisés comme charges ponctuelles ou charges réparties le long de la fibre moyenne. Les sollicitations résultantes sont obtenues sous la forme de torseurs d'efforts (trois forces et trois moments) en chaque point de la fibre moyenne. Des relations simples reliant les torseurs d'efforts aux caractéristiques géométriques de la section permettent de déduire les contraintes dans la section.

L'application de la théorie des poutres à des structures simples comme les poutres continues, les portiques et les treillis simples, conduit à des solutions analytiques complètes. En revanche, pour les structures plus complexes, le recours à une méthode numérique est nécessaire telle que la méthode aux éléments finis qui est systématiquement et aisément programmable avec les références nécessaires pour l'analyse statique et modale des structures de types tel que les systèmes à treillis (**figure. I.02**) et les pratiques (**figure. I.03**).

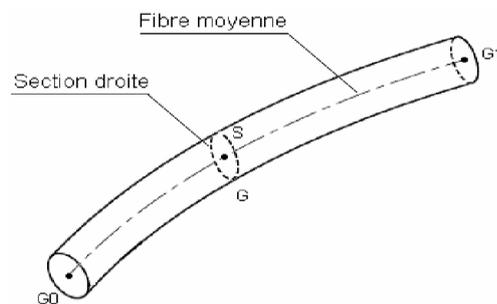


Figure I.1 : Schématisation d'une poutre

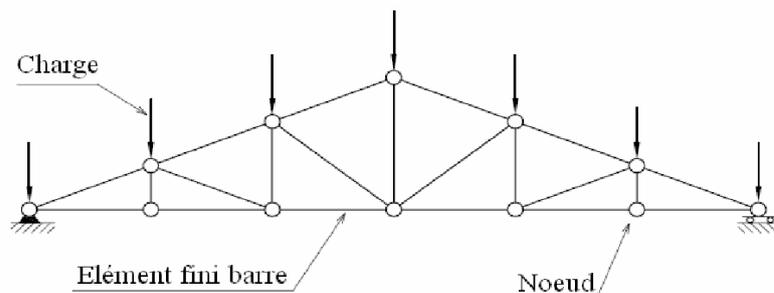


Figure I.2 : Discretisation en éléments finis d'un treillis plan

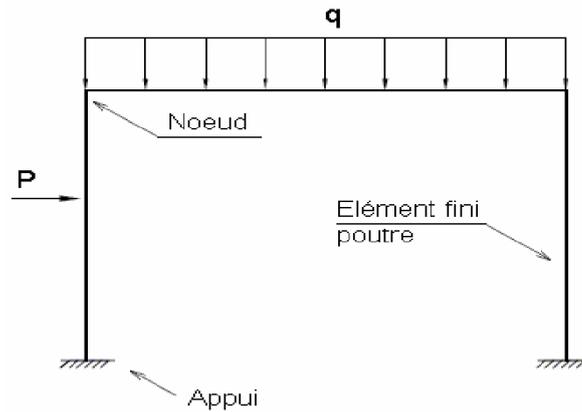


Figure I.3 : Discrétisation en éléments finis d'un portique plan

I.2. Historique de la M.E.F

Depuis une cinquantaine d'années la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages des barres et poutres. Le comportement de chaque élément de barre ou de poutre est représenté par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la résistance des matériaux. A partir des matrices élémentaires nous construisons un système d'équation algébrique en utilisant des conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonction des éléments nœuds. La résolution du système équation correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements de tous les nœuds de la structure. L'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie aéronautique ont provoqué un développement rapide de la mécanique des structures en 1950 et 1960. Turner, Clough, Martin et Topp introduisent en 1956 le concept d'élément fini : ils représentent un milieu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires sur lesquels les déplacements sont supposés varier linéairement. Le comportement de chaque panneau est caractérisé par une matrice de rigidité élémentaire. A partir de ces matrices, la technique classique de la mécanique des structures conduites à la solution, c'est-à-dire aux déplacements en tout point de milieu continu.

Soulignons également de travail d'Argyries et Kelsey qui systématise l'utilisation de la mention d'énergie dans l'analyse des structures. En fait les idées de base de la méthode des éléments finis apparaissent déjà dans courant, Hrennikoff et McHenry.

Dès 1960 la méthode des éléments finis subit un développement rapide dans plusieurs directions : la méthode est reformulée à partir des considérations énergétiques et variationnelles, sous la forme générale résidus pondérés. De nombreux auteurs créent des éléments de haute précision et des éléments à coté curvilignes ou iso paramétrique.

La méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle est donc utilisée pour résoudre de problèmes non linéaire et non

stationnaire dans le domaine des structures ainsi que dans d'autres domaines : mécanique des sols et des roches mécanique des fluides, thermique, etc.

Une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle. [3]

I.3. Principe général

La méthode des éléments finis permet donc de résoudre de manière discrète une EDP dont on cherche une solution approchée «suffisamment» faible. De manière générale, cette EDP porte sur une fonction de (u) , définie sur un domaine. Elle comporte des conditions aux bords permettant d'assurer existence et unicité d'une solution.

Sauf cas particuliers, la discrétisation passe par une redéfinition et une approximation de la géométrie, on considère donc le problème posé sur la géométrie approchée par un domaine polygonal ou polyédrique par morceaux. Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème, dans la MEF, cet espace est défini à l'aide du maillage du domaine (ce qui explique aussi pourquoi il est nécessaire d'approcher la géométrie). Le maillage de domaine permet d'en définir un pavage dont les pavés sont les éléments finis. Un élément fini est la donnée d'une cellule élémentaire et de fonction de base de l'espace d'approximation dont le support est l'élément, et définies de manière à être interpolant.

Bien qu'il existe de nombreux logiciels exploitant cette méthode et permettant de résoudre des problèmes dans divers domaines, il est important que l'utilisateur ait une bonne idée de ce qu'il fait, notamment quant au choix du maillage et type d'éléments qui doivent être adaptés au problème posé : aucun logiciel ne fera tout pour l'utilisateur, et il faut toujours garder un œil critique vis-à-vis de solutions approchées. Pour cela il existe des indicateurs d'erreur et des estimateurs d'erreur qui permettent d'ajouter les différents paramètres.

La solution trouvée, il reste cependant à déterminer les caractéristiques de la méthode ainsi développée, notamment l'unicité de l'éventuelle solution ou encore la stabilité numérique du schéma de résolution. Il est essentiel de trouver une estimation juste de l'erreur liée à la discrétisation et montrer que la méthode ainsi écrite converge, c'est-à-dire que l'erreur tend vers 0 si la finesse du maillage tend elle aussi vers 0.

Dans le cas d'une EDP linéaire avec opérateur symétrique, il s'agit finalement de résoudre une équation algébrique linéaire, inversible dans le meilleur des cas.

I.4 Technique des éléments finis appliquée à l'analyse structurale

La M.E.F dans l'analyse structurale est une technique qui se base primordialement sur l'idée de décomposer la structure en un ensemble (ou en sous-ensemble) de différents composants, ayant chacun un modèle géométrique avec des propriétés physiques particulières. [7] Notant que la structure peut être continue telle que les plaques, ou ayant par sa nature une forme discrète telle

que les treillis. Chaque modèle de composants de la structure est connu comme un type spécifique d'élément fini. Chaque élément fini a une forme structurale bien déterminée et il est interconnecté avec les éléments qui lui sont adjacents par des nœuds ou « Points nodaux ». Les forces agissantes en chaque nœud sont dites « Forces nodales ». L'élément est sujet de déplacements ou rotations aux nœuds, appelés « Degrés de liberté ». [5]

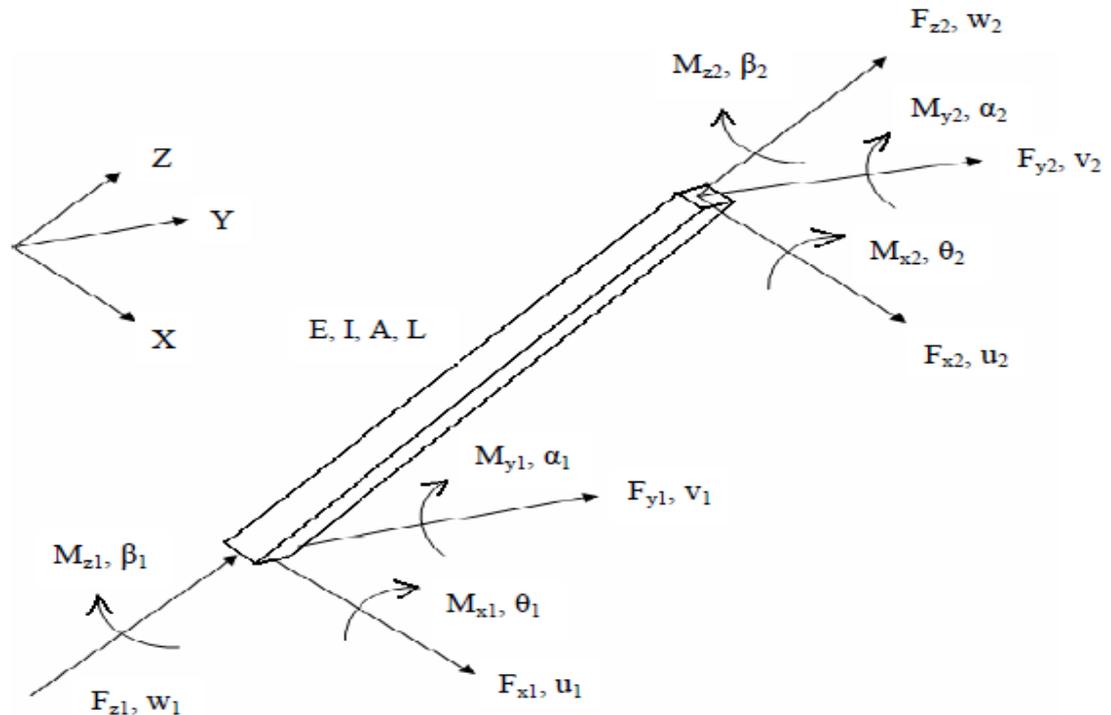


Figure I.4 : Elément fini typique pour les structures en treillis

La figure I-04 représente un seul élément limité par deux nœuds à ses extrémités (noeud1 et noeud2), F_x , F_y et F_z sont les forces qui agissent aux nœuds ainsi que les moments M_x , M_y et M_z ; u , v et w sont les déplacements nodaux dans les directions X , Y et Z respectivement ; θ , α et β sont les rotations nodales autour des axes X , Y et Z respectivement. Ainsi, pour chaque élément fini, un ensemble standard d'équations peut être formulé pour mettre en relation les quantités physiques : Forces et Déplacements. Pour former la structure totale, il faut rassembler tous ces éléments, en qui est, mathématiquement, équivalent à superposer toutes les équations simultanées, qu'il est convenable de résoudre par ordinateur.

I.5 Types d'éléments plus performants

On a vu que le triangle à 3 nœuds conduit à une approximation linéaire pour le champ des déplacements et uniforme pour le tenseur des contraintes.

Des éléments plus performants sont utilisés lorsque l'on veut une approximation plus précise.

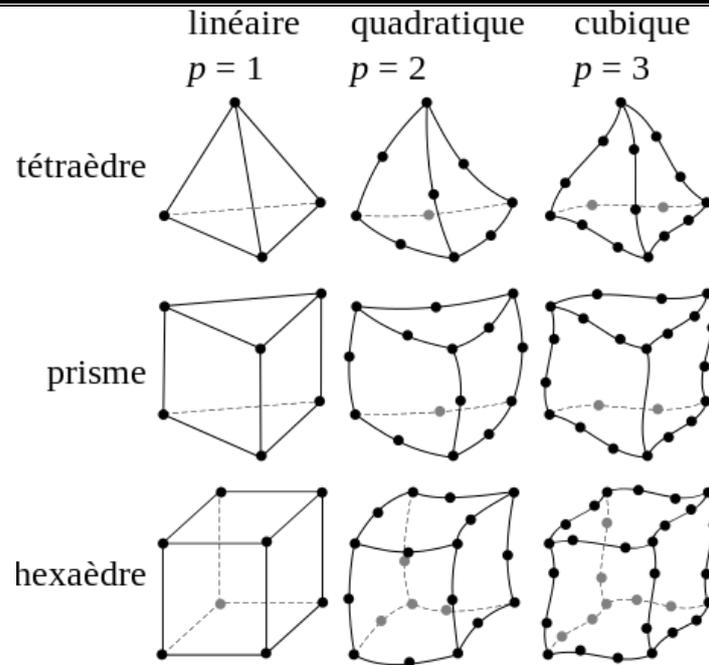


Figure I.5 : Différents éléments utilisés en 3D

I.6 Concept de base de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis (M.E.F.) est un des outils les plus efficaces et les plus généraux pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, automobile, nucléaire, génie civil, construction navale, mécanique, constructions off-shore, etc. Dans le domaine du calcul des structures, la M.E.F. est une technique à caractère pluridisciplinaire qui met en œuvre des connaissances relevant de plusieurs disciplines de base telles que la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée. Les bases théoriques de la M.E.F. reposent d'une part sur les méthodes énergétiques de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation spatiale des fonctions Ritz, Galerkin. La M.E.F. est basée sur une décomposition du domaine dans lequel on désire effectuer la simulation en sous-domaines de forme géométrique simple appelés 'éléments finis' pour lesquels on procède à des approximations nodales des champs de déplacements ou de contraintes qui prennent en général la forme de fonctions polynomiales. L'ensemble de ces éléments constitue ce que l'on appelle le maillage du domaine. Ces éléments sont liés par un nombre fini de conditions de continuité, exprimées en certains points communs à plusieurs éléments appelés 'n nœuds'.

Ce sont les méthodes classiques du calcul des structures, méthode des déplacements et méthode des forces, qui sont à la base de la M.E.F. [4]. Selon que l'on approxime le champ des contraintes ou le champ des déplacements on crée le modèle contrainte ou le modèle déplacement. Le modèle déplacement semble plus commode à mettre en œuvre car il

s'adapte généralement mieux aux problèmes de calcul des structures et sera adopté dans ce qui suit. Dans la méthode des déplacements, la formulation du problème est faite en fonction des déplacements aux nœuds qui sont les inconnues cinématiques. La structure est préalablement discrétisée en éléments finis. Le calcul est conduit suivant deux niveaux de formulation : élémentaire au niveau de l'élément fini et globale au niveau de la structure complète. [5]

La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini

Pour chaque élément et dans un repère local, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux. Puis, on calcule pour chaque élément ses matrices de rigidité et de masse ainsi que son vecteur des forces. Ces caractéristiques élémentaires sont transformées par la suite dans le repère global de la structure.

La formulation globale au niveau de la structure complète

Elle consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus en tous les nœuds de la structure. Cette étape nécessite l'assemblage des matrices de rigidité et de masse et les vecteurs forces et déplacements de la structure à partir des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité et de masse et vecteurs forces et déplacements de chaque élément).

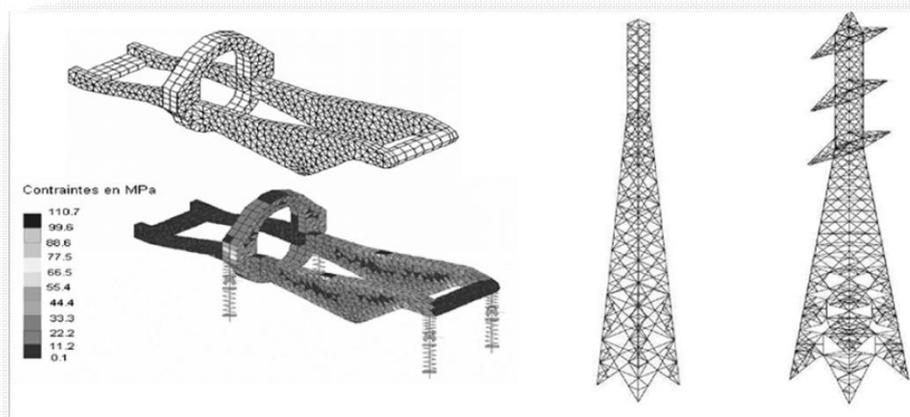


Figure I.6 : Exemples de modélisation par la M.E.F

I.7 Démarche de formulation éléments finis

L'analyse des structures de type treillis ou portique peut s'effectuer en considérant d'abord le comportement de chaque partie (élément barre ou poutre) indépendamment puis en

assemblant ces parties de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

Dans la suite, toutes les grandeurs vectorielles et matricielles relatives à la base locale de l'élément sont surlignées d'une barre. [8]

I.7.1 Discrétisation de la structure en éléments finis

C'est l'ensemble des opérations à effectuer pour établir le modèle mathématique de calculs représentant au mieux la structure réelle. Pratiquement cette idéalisation consiste du point de vue topologique, à ramener la structure à une géométrie simple ; c'est ainsi qu'on réduit les éléments unidimensionnels à leur axe et on définit les conditions d'appuis et les charges. Au point de vue rhéologique, elle consiste à choisir la loi constitutive du matériau et à déterminer les constantes qui définissent cette loi. [4]

I.7.2 Construction de l'approximation nodale par sous domaine

Pour chaque élément, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements $u^e(x, y, z)$ à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux

U^e Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynomiale contenant un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté soit :

$$\mathbf{u}^e(x, y, Z) = \mathbf{N}^t \mathbf{U}^e \quad (\text{I.1})$$

Où \mathbf{N} est la matrice d'interpolation reliant les déplacements d'un point intérieur de l'élément aux déplacements nodaux.

I.7.3 Etablissement de la relation entre déformations et déplacements

Il s'agit ici de trouver la matrice \mathbf{B} reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux U^e cette relation est exprimée par

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{B} \mathbf{U}^e \quad (\text{I.2})$$

I.7.4 Etablissement de la relation entre contraintes et déformations

Pour un matériau élastique linéaire, les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sont des fonctions linéaires des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. Elles sont exprimées par l'expression :

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{D} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (\text{I.3})$$

Où \mathbf{D} est la matrice d'élasticité.

I.7.5 Calcul des matrices élémentaires

Cette étape constitue la partie la plus importante du problème. Le déplacement U^e aux nœuds sont déterminés de telle façon que les contraintes

Engendrées dans l'élément équilibrent le chargement extérieur F^e , c'est-à-dire que :

$$K^e U^e = F^e \quad (\text{I.4})$$

K^e Est la matrice de rigidité de l'élément exprimée dans le repère local. Elle est déduite de l'énergie de déformation de l'élément (Rocky, 1979) et exprimée par :

$$K^e = \int^v B^T D B dv \quad (\text{I.5})$$

Il faut aussi calculer la matrice de masse M^e de chaque élément. Cette matrice est déduite de l'énergie cinétique de l'élément (Rocky, 1979). Dans le repère local de l'élément, cette matrice est donnée par l'expression :

$$M^e = \int^v \rho N^T N dv \quad (\text{I.6})$$

Où ρ est la masse volumique du matériau constituant l'élément.

Finalement, on exprime les matrices K^e , M^e , U^e et F^e dans le repère global défini pour toute la structure. [2]

I.8 Élément fini barre

I.8.1 Définition

Géométriquement une barre correspond à un solide orienté dans la direction x (repère local). Les dimensions dans le plan (y-z) normal à x sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale (figure I.07). Un élément fini barre (figure I.09) schématise un composant d'une structure qui travaille uniquement en traction ou compression. C'est généralement un élément à 2 nœuds, qui comporte 3 inconnues ou degrés de liberté (d.d.l.) par nœud représentant les composantes de son déplacement dans l'espace.

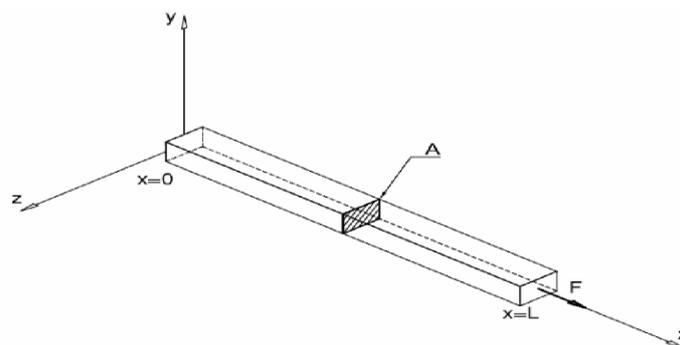


Figure I.7 : Géométrie d'un élément fini barre

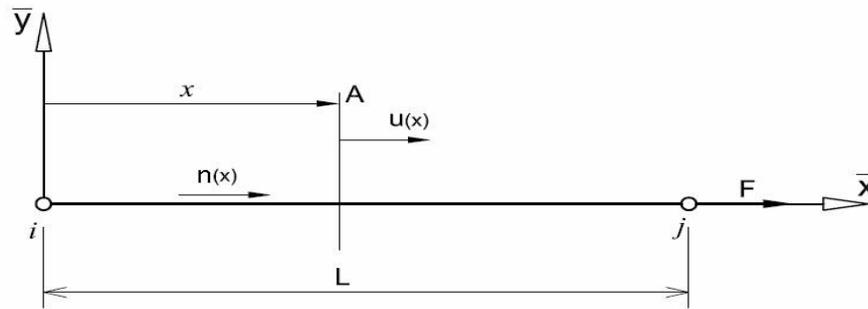


Figure I.8 : Modélisation d'un élément fini barre

Les principales hypothèses pour un élément barre rectiligne qui ne travaille qu'en traction ou compression [3] sont :

- Petites déplacements :

$$\vec{u}(M, t) = u(x, t)\vec{X} \quad (\text{I.7})$$

-déformations en petits déplacement :

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{I.8})$$

-loi de Hooke dans un milieu isotrope homogène élastique :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{I.9})$$

Avec σ est la contrainte dans la barre et E est le module de Young du matériau.

En intégrant les contraintes sur la section A nous obtenons la loi de comportement intégrée des barres :

$$n(x) = EA\varepsilon \quad (\text{I.10})$$

Où $n(x)$ est l'effort normal dans la barre dû à la force nodale F.

I.8.2 Formulation de l'élément barre dans le plan

Identification du problème

Considérons un élément barre dans le plan défini par deux nœuds i et j , de longueur L et de section uniforme A (figure I.09)

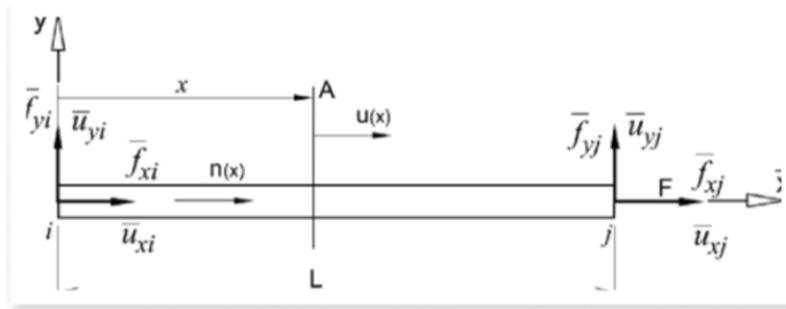


Figure I.9 : Elément fini barre dans le repère local

Dans le repère local (i, \bar{x}, \bar{y}) on note par \bar{u}_{xi} et \bar{u}_{xj} les déplacements aux nœuds i et j et par f_{xi} et f_{xj} les forces aux nœuds i et j .

Le vecteur force relatif à l'élément e est donné par :

$$\bar{F}^e = [\bar{f}_{xi} \cdot \bar{f}_{xj} \cdot \bar{f}_{yi} \cdot \bar{f}_{yj}]^t \quad (\text{I.11})$$

Le vecteur déplacement est donné par :

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi} \cdot \bar{u}_{yi} \cdot \bar{u}_{xj} \cdot \bar{u}_{yj}]^t \quad (\text{I.12})$$

Dans le cas qui nous occupe $\bar{f}_{yi}, \bar{f}_{yj}, \bar{u}_{yi}, \bar{u}_{yj}$ sont nuls puisque l'élément barre ne travaille qu'en traction ou compression. [7]

Fonction d'interpolation

Pour un problème statique, lorsque l'élément est chargé au niveau de ses nœuds, l'effort normal est uniforme. Compte tenu des relations (I.8) et (I.10) la solution $u(x)$ sera linéaire. Pour chercher cette solution, nous allons utiliser une approximation polynomiale linéaire de la forme (Krishnamoorthy, 1987) :

$$u(x) = N_1 \bar{u}_{xi} + N_2 \bar{u}_{xj} \quad (\text{I.13})$$

Où N_1 et N_2 sont les coordonnées naturelles.

Nous identifions aux nœuds i ($x=0$) et j ($x=L$) la valeur de l'approximation des déplacements axiaux. Nous en déduisons :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \text{ et } N_2 = \frac{x}{L} \quad (\text{I.14})$$

Sous forme matricielle nous écrivons :

$$u(x) = N^t \bar{U}^e = \left(1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right) \begin{pmatrix} \bar{U}_{xi} \\ \bar{U}_{xj} \end{pmatrix} \quad (\text{I.15})$$

La matrice N d'interpolation reliant les déplacements d'un point intérieur de l'élément aux Déplacements nodaux est donc :

$$N=[1-x/Lx/L]^t \quad (\text{I.16})$$

Relation entre déformation et déplacement

La déformation est déduite des expressions (I.8) et (I.15) soit :

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \begin{pmatrix} \bar{U}_{xi} \\ \bar{U}_{xj} \end{pmatrix} = B\bar{U}^e \quad (\text{I.17})$$

La matrice B reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux est alors

$$B = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \quad (\text{I.18})$$

Matrice de rigidité d'une barre dans le plan

La forme de la matrice de rigidité K de l'élément dans le repère local est donnée par l'expression (I.5). La matrice d'élasticité D se réduit au scalaire E (module de Young du matériau). Soit, après intégration :

$$\bar{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.19})$$

e. matrice de masse d'une barre dans le plan

La matrice de masse M^e dans le repère local est déterminée à partir de l'expression (I.6) soit, après intégration :

$$\bar{M}^e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.20})$$

Transformation dans le repère global

Soit $u_{xi}, u_{yi}, u_{xj}, u_{yj}$ les déplacements aux nœuds i et j exprimés dans le repère global (figure I.06). La relation entre les déplacements exprimés dans le repère local et ceux exprimés dans le repère global est donnée par :

$$\bar{u}_{xi} = u_{xi}c_x + u_{yi}c_y \quad (\text{I.21})$$

$$\bar{u}_{xj} = u_{xj}c_x + u_{yj}c_y$$

Ou c_x etc_y sont les cosinus directeurs définis par :

$$c_x = \frac{1}{L}(x_j - x_i) \text{ et } c_y = \frac{1}{L}(y_j - y_i) \quad (\text{I.22})$$

Avec L est la longueur de l'élément calculée à partir des coordonnées des nœuds

Soit :

$$L = \sqrt{(Xj - Xi)^2 + (Yj - Yi)^2} \quad (\text{I.22})$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_x & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{pmatrix} \quad (\text{I.24})$$

La matrice transformation du repère local au repère global est :

$$T = \begin{pmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_x & c_y \end{pmatrix} \quad (I.25)$$

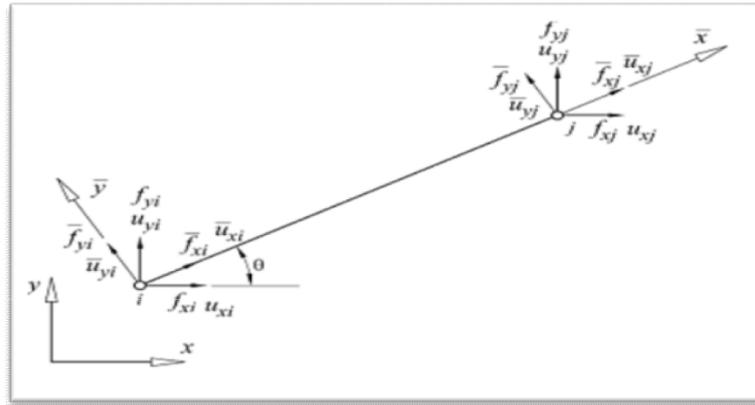


Figure I.10 : Elément fini dans le repère global

La matrice de rigidité exprimée dans le repère global sera déduite de la matrice de rigidité Exprimée dans le repère local par la relation :

$$K^e = T^t \bar{K}^e T \quad (I.26)$$

De même, la matrice de masse de l'élément barre dans le plan exprimée dans le repère global est :

$$M^e = T^t \bar{M}^e T \quad (I.27)$$

I.9 Interpolation par l'approximation nodale

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation d'une fonction inconnue V par fonction approchée U construite sur la base de fonctions polynomiales linéairement indépendantes [4]

$$U(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \dots \dots \dots + \alpha_n x^{n-1} \quad (I.28)$$

Que nous pouvant écrire sous forme matricielle comme suit :

$$U(x) = \langle 1 + x + x^2 + \dots \dots \dots + x^{n-1} \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (I.29)$$

Les coefficients α_i sont les paramètres de l'approximation et n'ont pas en général de sens physique cependant, nous pouvant leurs en donner un. Pour cela, faisant en sorte que la fonction approchée U, coïncide avec la fonction exacte V, aux n points x_i appelés nœuds. Nous pouvant écrire alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_1^{n-1} = V(x_1) = U_1 \\ U(x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_2^{n-1} = V(x_2) = U_2 \\ U(x_n) = \alpha_1 + \alpha_2 x_n + \alpha_3 x_n^2 + \dots + \alpha_n x_n^{n-1} = V(x_n) = U_n \end{array} \right. \quad (\text{I.30})$$

Que nous pouvant réécrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(x_1) \\ U(x_2) \\ U(x_n) \end{Bmatrix}$$

Ou d'une manière plus compacte :

$$[A] * \{\alpha\} = \{U_i\} \quad (\text{I.31})$$

Si la matrice n'est pas singulière, nous pouvant écrire :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} * \{U_i\} \quad (\text{I.32})$$

En remplaçant $\{\alpha\}$ par sa valeur dans l'équation, nous avons :

$$U(x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle [A]^{-1} * \{U_i\} \quad (\text{I.33})$$

Que nous pouvant écrire comme suit :

$$U(x) = \langle N_1(x), N_2(x) \dots N_n(x) \rangle \{U_i\} \quad \text{I.33}$$

Ou tout simplement :

$$U(x) = \langle N_i(x) \rangle \{U_i\}$$

$$U(x) = \sum N_i(x) * U_i \quad (\text{I.35})$$

On appelle ce type d'approximation : approximation nodale

Les paramètres V_i, U_i sont les variables nodales et les fonctions $N_i(x)$ sont les fonctions d'interpolation nodales ou fonctions de forme.

I.10 Formulation des problèmes d'élasticité par l'approche d'éléments finis

Pour obtenir une solution approchée d'un problème d'élasticité, nous allons proposer une approche de déplacement à l'aide d'un champ de déplacement inconnu.

Notre objectif dans cette partie est d'exprimer l'équation fondamentale par éléments finis en fonction des déplacements inconnus. [6]

I.10.1 Principe des travaux virtuels

Le principe de l'énergie potentielle minimale d'une structure ou d'un solide peut s'énoncer comme suit :

Considérons un corps solide du volume (V) lié à un repère en état d'équilibre statique sous l'action des forces volumiques \vec{F}_i et les forces de surfaces \vec{X}_i .

Nous admettons qu'un point matériel du corps a suivi des déplacements virtuels ($\delta U, \delta V, \delta W$) selon les directions (X, Y, Z) respectivement.

Ce principe se traduit par égalité de travail des farces extérieures et le travail des forces intérieures selon :

$$\int_{v^e} \delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} d\boldsymbol{v}^e - \left(\int_{s^e} \{\delta\boldsymbol{U}\}^T \cdot \boldsymbol{x}_i \cdot d\boldsymbol{s}^e + \int_{v^e} \delta\{\boldsymbol{U}\}^T \cdot \{\boldsymbol{f}\} d\boldsymbol{v}^e \right) = 0$$

Cette relation représente l'expression du théorème des travaux virtuels qui traduit que la variation de l'énergie totale (énergie de déformation due aux forces internes plus l'énergie potentielle due aux forces externes égale à zéro) c'est-à-dire le principe de conservation d'énergie.

I.10.2 Formulation élémentaire des problèmes d'élasticité

Considérons un seul élément $(D)^e$ du domaine (D) qui comporte n nœuds et de volume $(V)^e$ et de surface $(S)^e$

Afin d'exprimer l'équation de résolution par l'approche d'élément finis pour cet élément, on désigne un champ de déplacements soit :

$$\delta\{\boldsymbol{U}\}^e = \langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W} \rangle^T \quad \text{(I.36)}$$

(U, V, W) sont les variables du champ de déplacement.

En appliquant le principe des travaux virtuels sur cet élément $(V)^e$:

$$\int_{v^e} \delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} d\boldsymbol{v}^e - \int_{s^e} \{\delta\boldsymbol{U}\}^T \cdot \boldsymbol{x}_i \cdot d\boldsymbol{s}^e + \int_{v^e} \delta\{\boldsymbol{U}\}^T \cdot \{\boldsymbol{f}\} d\boldsymbol{v}^e = 0 \quad \text{(I.37)}$$

L'approximation nodale par interpolation sur les déplacements.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{W} \end{Bmatrix} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n N_i \boldsymbol{U}_i = N_1 \boldsymbol{U}_1 + N_2 \boldsymbol{U}_2 + \dots + N_n \boldsymbol{U}_n \\ \sum_{i=1}^n N_i \boldsymbol{V}_i = N_1 \boldsymbol{V}_1 + N_2 \boldsymbol{V}_2 + \dots + N_n \boldsymbol{V}_n \\ \sum_{i=1}^n N_i \boldsymbol{W}_i = N_1 \boldsymbol{W}_1 + N_2 \boldsymbol{W}_2 + \dots + N_n \boldsymbol{W}_n \end{cases} \quad \text{(I.38)}$$

Comme on peut l'écrire sous une forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (\text{I.39})$$

$$\{U\}^e = [N].\{q\}^e \quad (\text{I.40})$$

Avec :

[N] : matrice des fonctions d'interpolations

{q}^e : Vecteur de déplacements aux nœuds

A partir des relations déformation-déplacement on obtient :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

$$\{\varepsilon\} = [L].\{U\}^e \quad (\text{I.42})$$

Avec : [L] : la matrice opérateur.

A partir de la loi de Hooke :

$$\{\sigma\} = [D].\{\varepsilon\} \quad (\text{I.43})$$

Avec : [D] : est la matrice des propriétés élastiques des matériaux.

$$\{\sigma\} = [D].[L]\{U\}^e \quad (\text{I.44})$$

$$\{U\}^e = [N].\{q\}^e \quad (\text{I.45})$$

$$\{\varepsilon\}^e = [L][N].\{q\}^e = [B]\{q\}^e \quad (\text{I.46})$$

$$[B]=[L][N] \quad (\text{I.47})$$

Avec $[B]$: la matrice de déformation

Donc :

$$\{\sigma\} = [D]. [B]. \{q\}^e \quad (\text{I.48})$$

On arrive à :

$$\int_{v^e} [B]^T [D]. [B]. \{q\}^e. \delta\{q\}^{eT} dv^e = \int_{s^e} [N]^T \delta\{q\}^{eT} \{x_i\} ds^e + \int_{v^e} [N]^T \delta\{q\}^{eT} \{f\} dv^e \quad (\text{I.49})$$

$$\delta\{q\}^{eT} \int_{v^e} [B]^T . [D]. [B]. \{q\}^e dv^e = \delta\{q\}^{eT} \int_{s^e} [N]^T \{x_i\} ds^e + \delta\{q\}^{eT} \int_{v^e} [N]^T \{f\} dv^e \quad (\text{I.50})$$

Ou d'une manière encore plus compacte :

$$[K]^e . \{q\}^e = \{F\} \quad (\text{I.51})$$

Ou $[K]^e$: la matrice de rigidité de l'élément :

$$[K]^e = \int_{v^e} [B]^T . [D]. [B] dv^e \quad (\text{I.52})$$

I.10.2.1 Equation fondamentale pour éléments finis en termes de déplacements :

La MEF est basée sur la méthode matricielle des déplacements en mécanique des solides et des structures. L'équation fondamentale est :

$$[K]^e . \{q\}^e = \{F\}^e \quad (\text{I.53})$$

Avec :

$[K]^e$: Est la matrice de rigidité élémentaire

$\{q\}^e$: Le vecteur de déplacement aux nœuds (inconnu)

$\{F\}^e$: Le vecteur des forces nodales

I.10.3 Vecteur des forces nodales

Le vecteur des sollicitations externes, communément appelé vecteur des forces, pour un élément est composé de trois parties :

$$\{F\}^e = \int_{v^e} [N]^T . \{f_i\} dv^e + \int_{s^e} [N]^T \{x_i\} ds^e + \sum_{i=1}^n P_i \quad (\text{I.54})$$

Avec (P_i) : est une charge concentrée aux i eme nœuds.

Chapitre II : généralités sur les poutres

II-1 Généralités sur les poutres

II-1-1 Introduction

La poutre (ou barre) est une solide allongé, caractérise par sa ligne moyenne et sa section droite. Plus précisément, on appelle poutre le volume qui est engendré par la surface s de centre de gravité g lorsque celui-ci décrit l'arc de courbe $Go Gi, S$ restant normale a cet arc

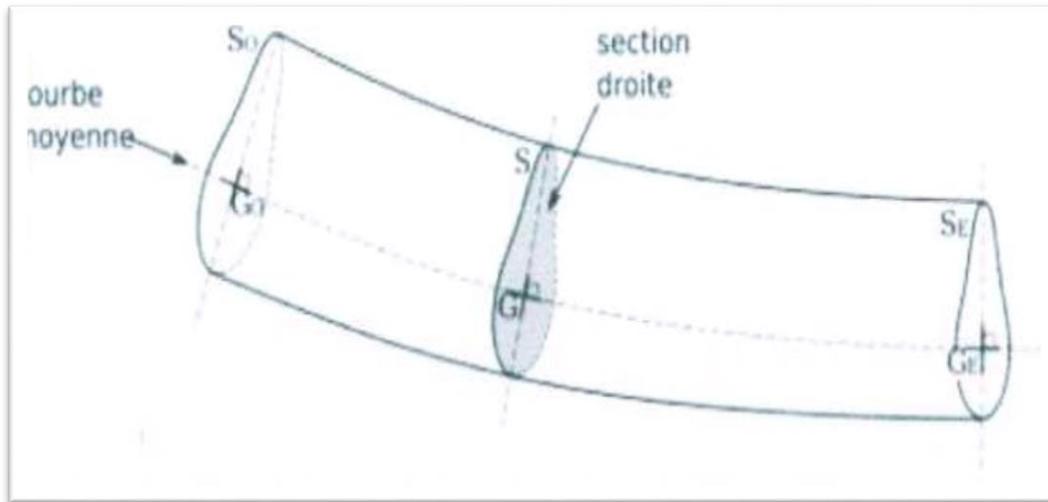


Figure II-01 : Géométrie d'une poutre

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine).

Une poutre est un élément de structure utilise pour la construction dans les bâtiments, les navires, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilise pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions.

Une poutre est une pièce longue horizontale servant a reprendre des charges au- dessus du vide, les poids de la construction et du mobilier, et les transmettre sur le cote aux piliers, colonnes ou aux murs sur lesquels elle s'appuie.

La poutre continue est une poutre sur plusieurs appuis ; elle a une section plus faible que les poutres sur deux appuis pour une même portée.

II-2 Les types des poutres

II-2-1 Selon la géométrie

Poutre rectangulaire

C'est une poutre avec section transversale rectangulaire, elle est en béton précontraint ou en béton armé. Leurs dimensions sont optimisées en fonction des critères techniques de chaque chantier (charges, portées, retombées de poutres, etc.)

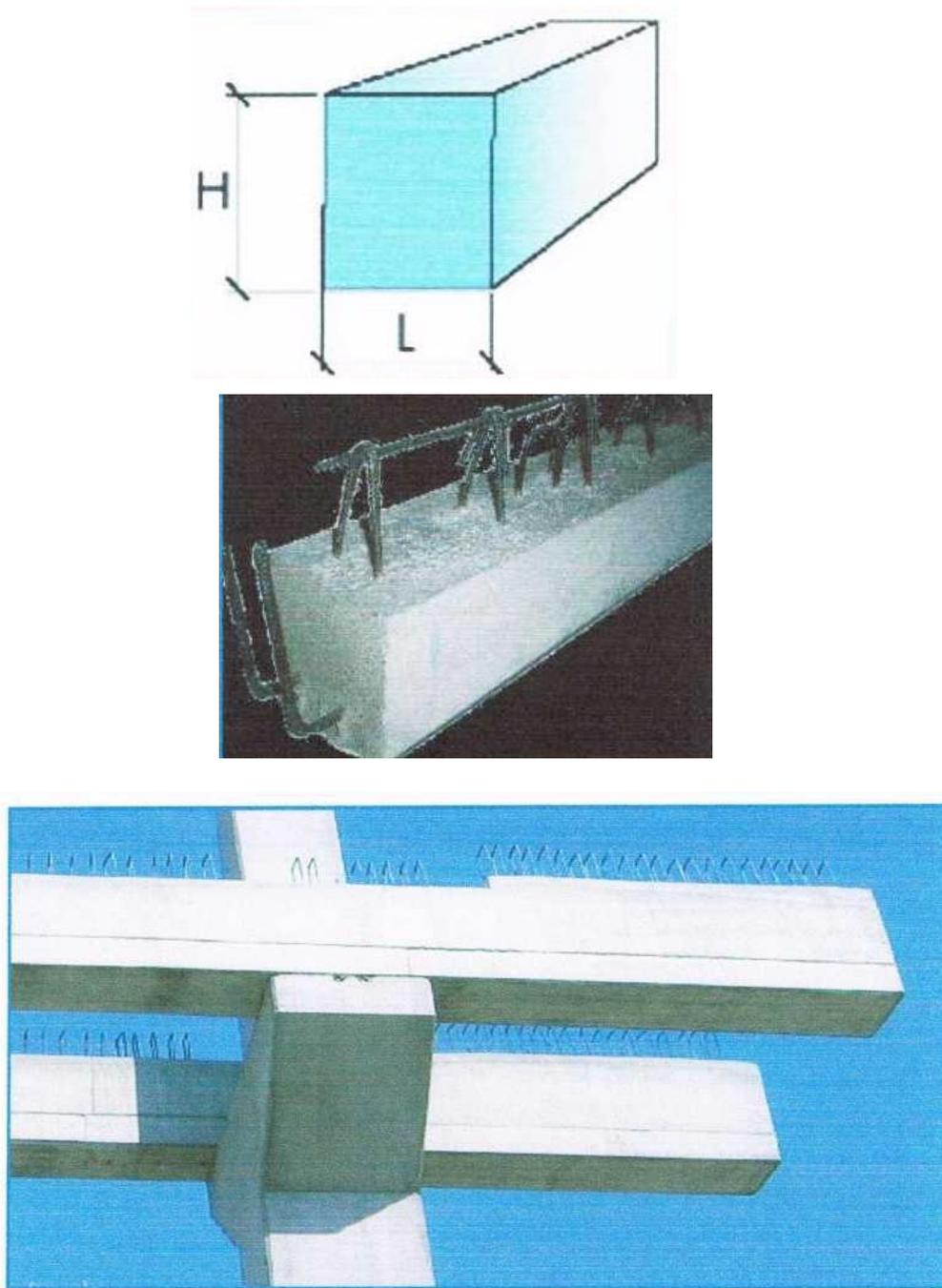


Figure II-02 : Poutre rectangulaire

Poutre courbe (Arc)

Dans le domaine du bâtiment, on opère une distinction entre les poutres et les arcs.

L'arc est une poutre hyperstatique à axe courbe

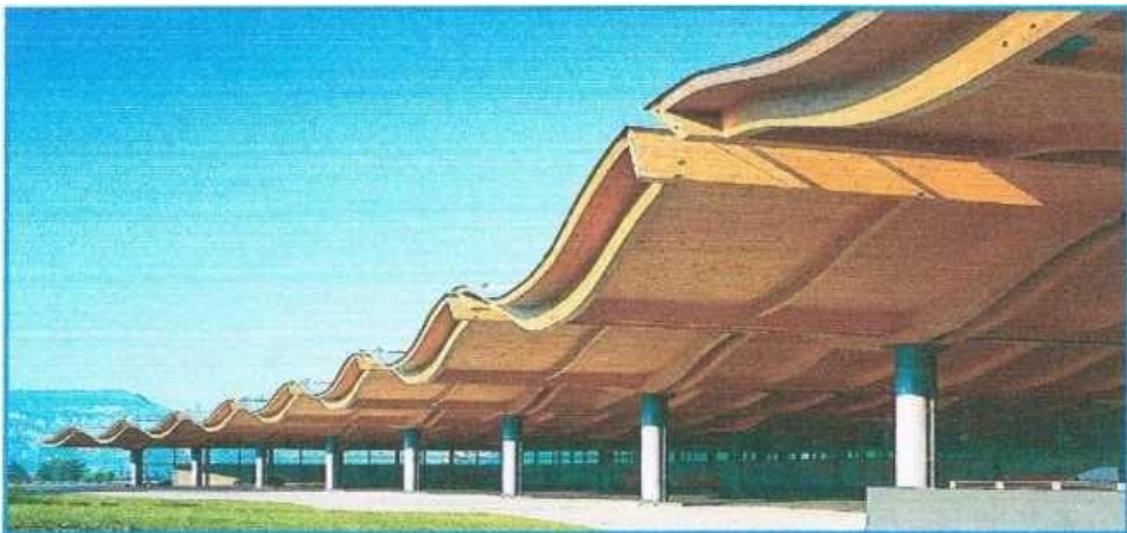
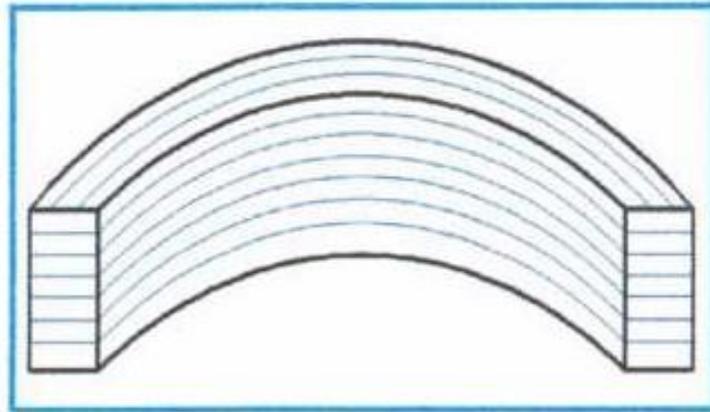


Figure II-03 : Poutre en courbe

Poutre en I

Les poutres en I sont des poutres composites en section en I réalisées avec des membrures en bois ou dérivés, soit avec une âme en panneau dérivé du bois assemblée par collage ou soit avec une âme métallique assemblée par connections mécaniques

Les poutres en I permettent de construire des planchers d'une grande stabilité.

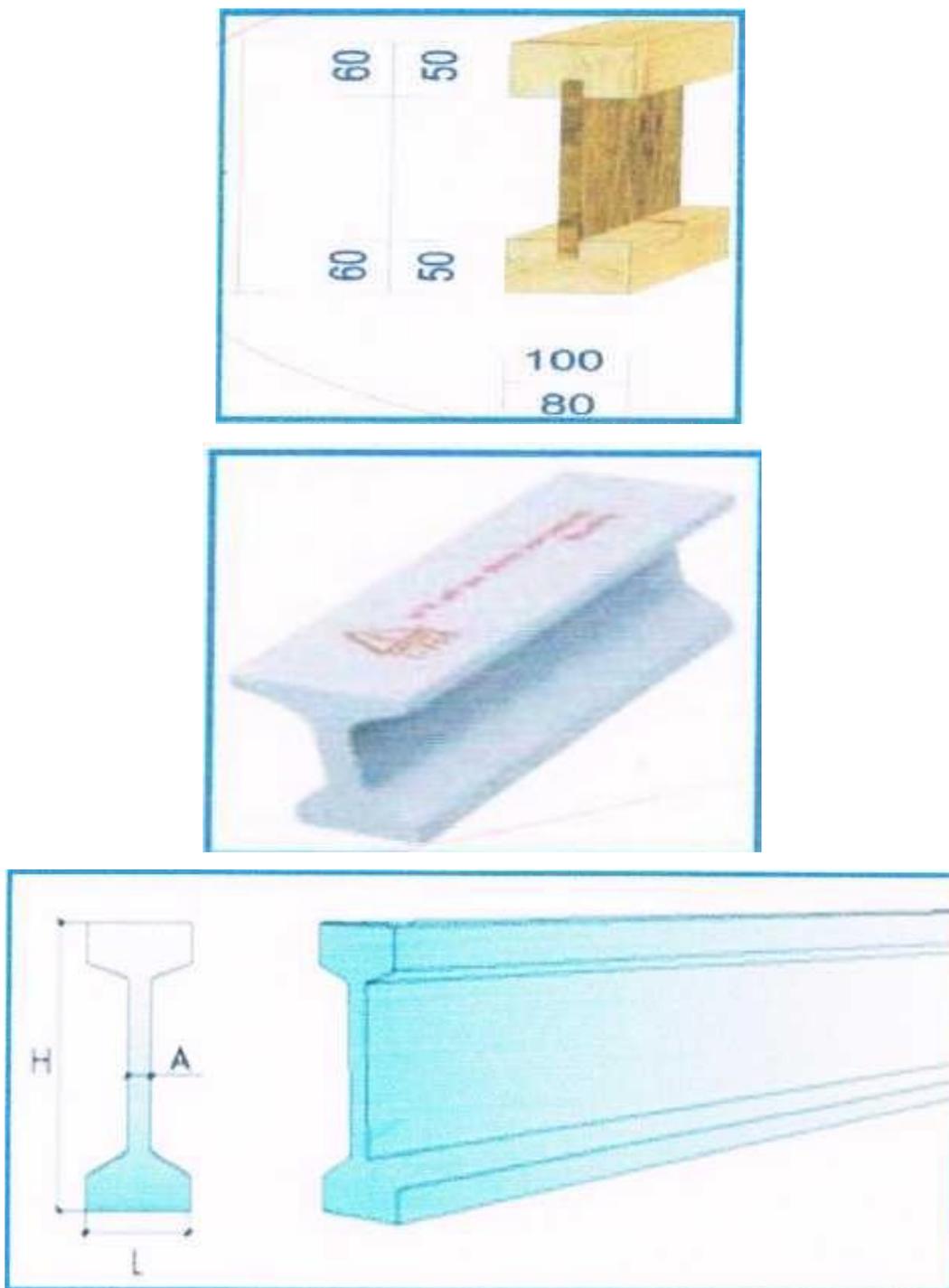


Figure II-04 : Poutre en I

Poutre en treillis

Une poutre réticulé (ou à treillis) est un système composé de barres droites articulées entre elles à leurs extrémités.

Ces poutres sont constituées généralement de 2 membrures reliées par diagonales (barres inclinées)

et parfois des montants (barres verticales).

La terminologie utilisée est variable et spécifique du matériau utilisé (acier, bois,...). Pourquoi l'utilisation de poutres de ce type ?

Ces poutres sont légères, économiques, leur inertie flexionnelle peut être adaptée par variation de hauteur de la poutre, disons que la matière de part sa distribution est bien utilisée. Cependant elles exigent des temps de main-d'œuvre importants pour le découpage des éléments ainsi que la réalisation de nombreux assemblages qui ne les rendent plus compétitives que pour :

Les grandes portées,

Les bâtiments légers standardisés, produits en grande série en usine.

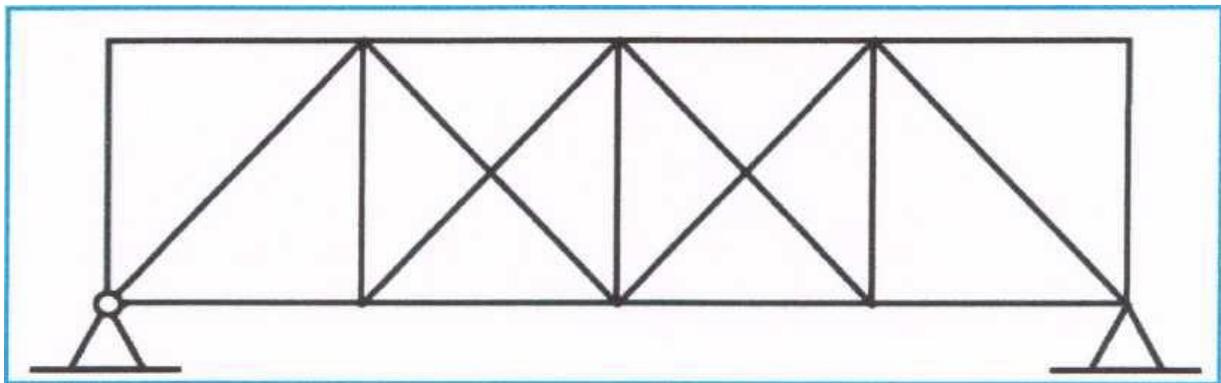
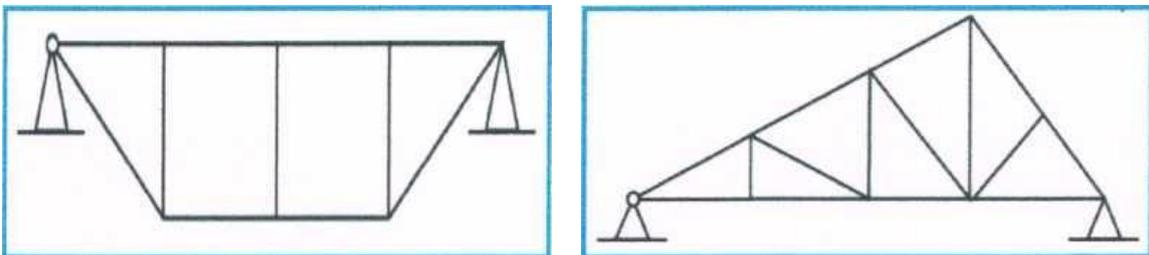


Figure II-05 : Poutre en treillis

Poutre-caisson

Des poutres creuses à section fermée et parois minces, dites poutres-caissons, sont fréquemment employées dans le domaine des structures.

Une des raisons les plus importantes est qu'elles présentent une rigidité à la torsion relativement grande

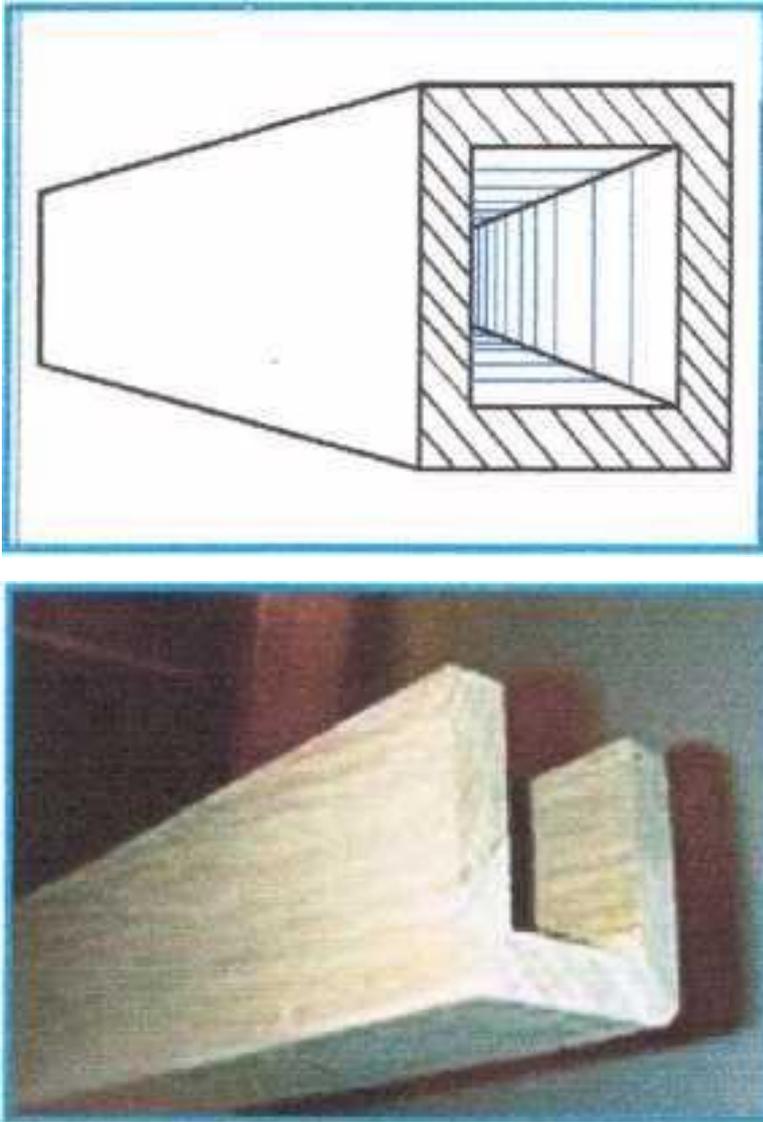


Figure II-06 : Poutre-caisson

II-2-2 Selon l'inertie

Poutre a inertie constante

C'est la poutre qui garde la même section transversale dans tous les points

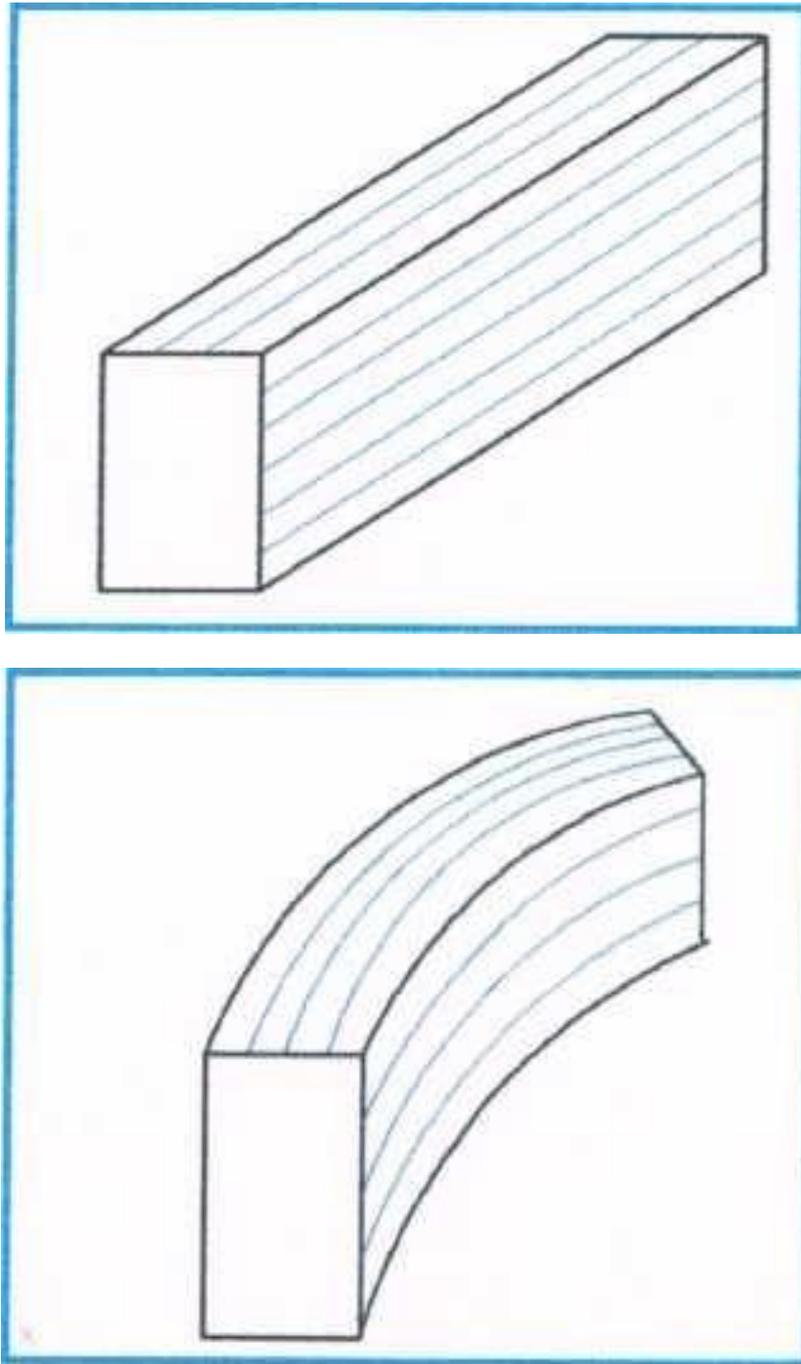


Figure II-07 : poutre a inertie constante

Poutre a inertie variante

C'est la poutre qui varie sa section transversale au long de la poutre

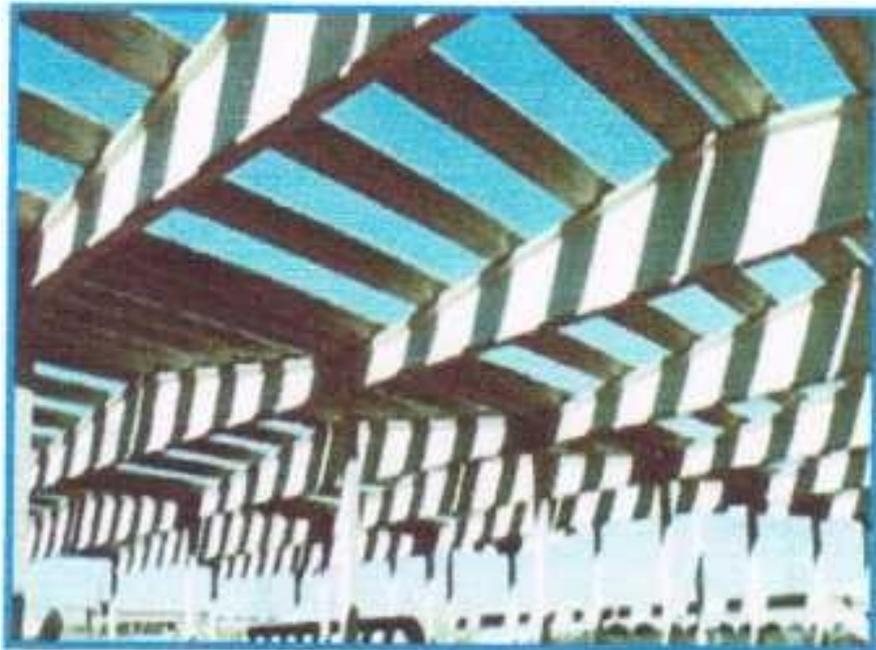
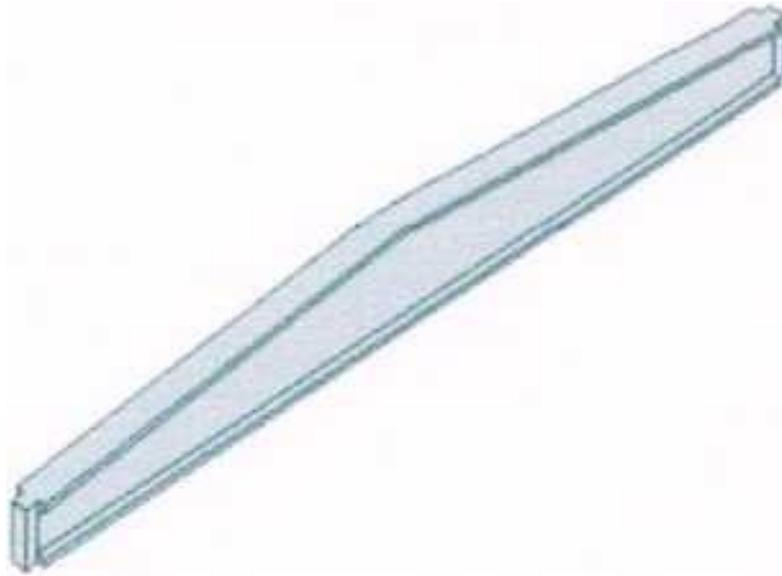


Figure II-08 : poutre a inertie variante

II-2-3 Selon le matériau

Poutre en béton armé poutre mixte

Le béton armé est un matériau composite constitué de béton et d'acier qui allie la résistance à la compression du béton à la résistance à la traction de l'acier. Il est utilisé comme matériau de construction, notamment pour le génie civil.

Dans un ferrailage, il existe plusieurs types d'armatures :

- **Les aciers principaux** qui reprennent les efforts dans les parties tendues du béton;
- **Les aciers transversaux** pour reprendre les effets de l'effort tranchant et de la torsion;
- **Les aciers de comportement** (pourcentage minimum d'armatures principalement pour limiter la fissuration) ;

Les aciers de montage pour fixer les aciers et les maintenir au bon emplacement.

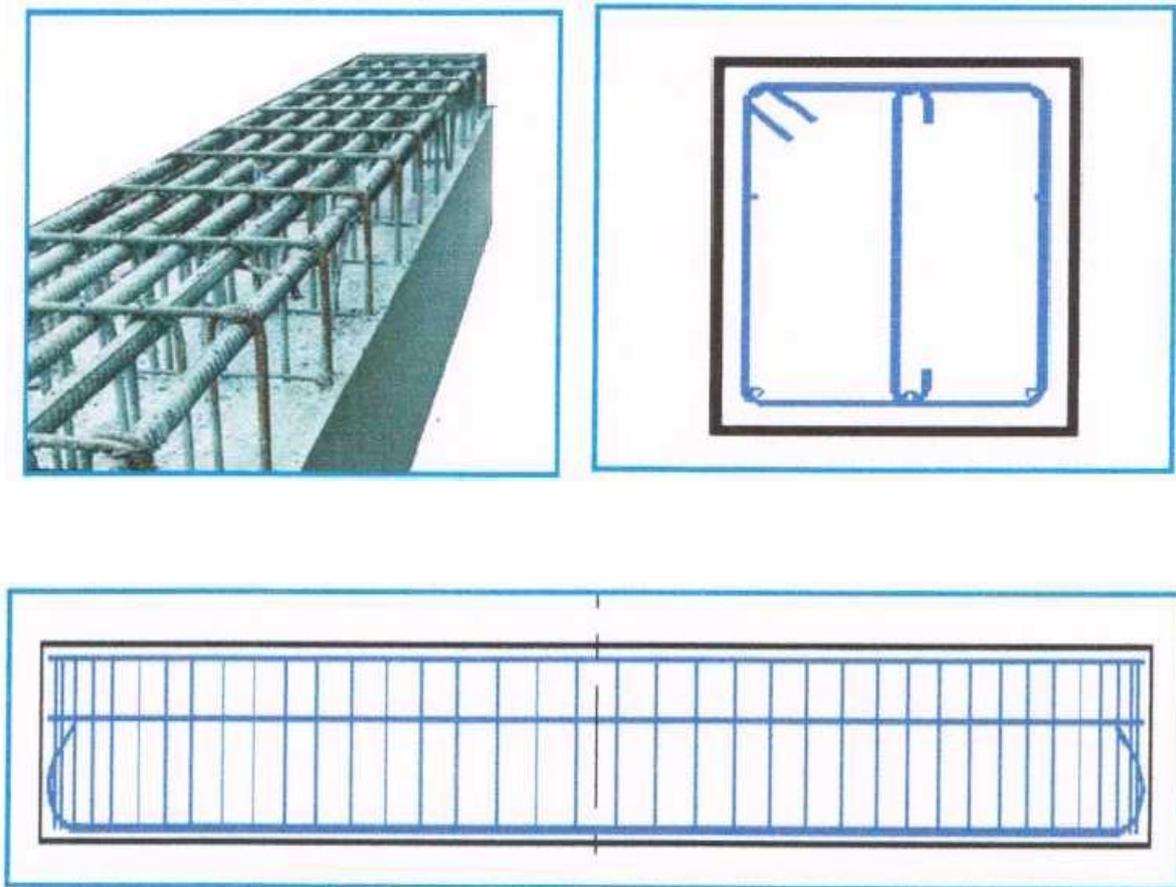


Figure II-09 : poutre en béton armé

Poutre en bois

C'est une poutre réalisée en bois, elle est utilisée généralement pour les fermes et les toitures.

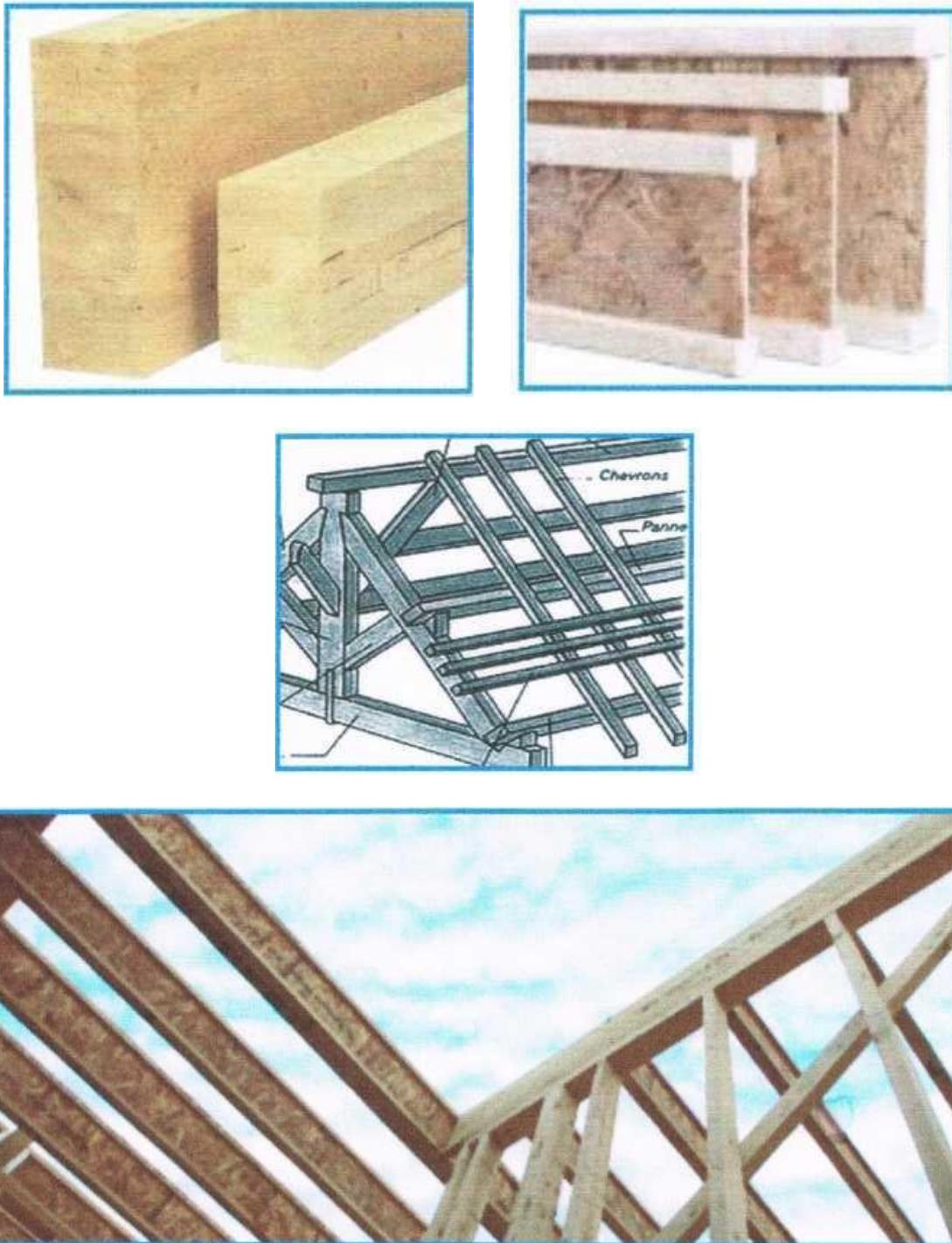


Figure II-10: poutre en bois

Poutre en acier

C'est une poutre réalisée en acier ; elle est utilisée généralement pour le montage des toitures et les fermes.

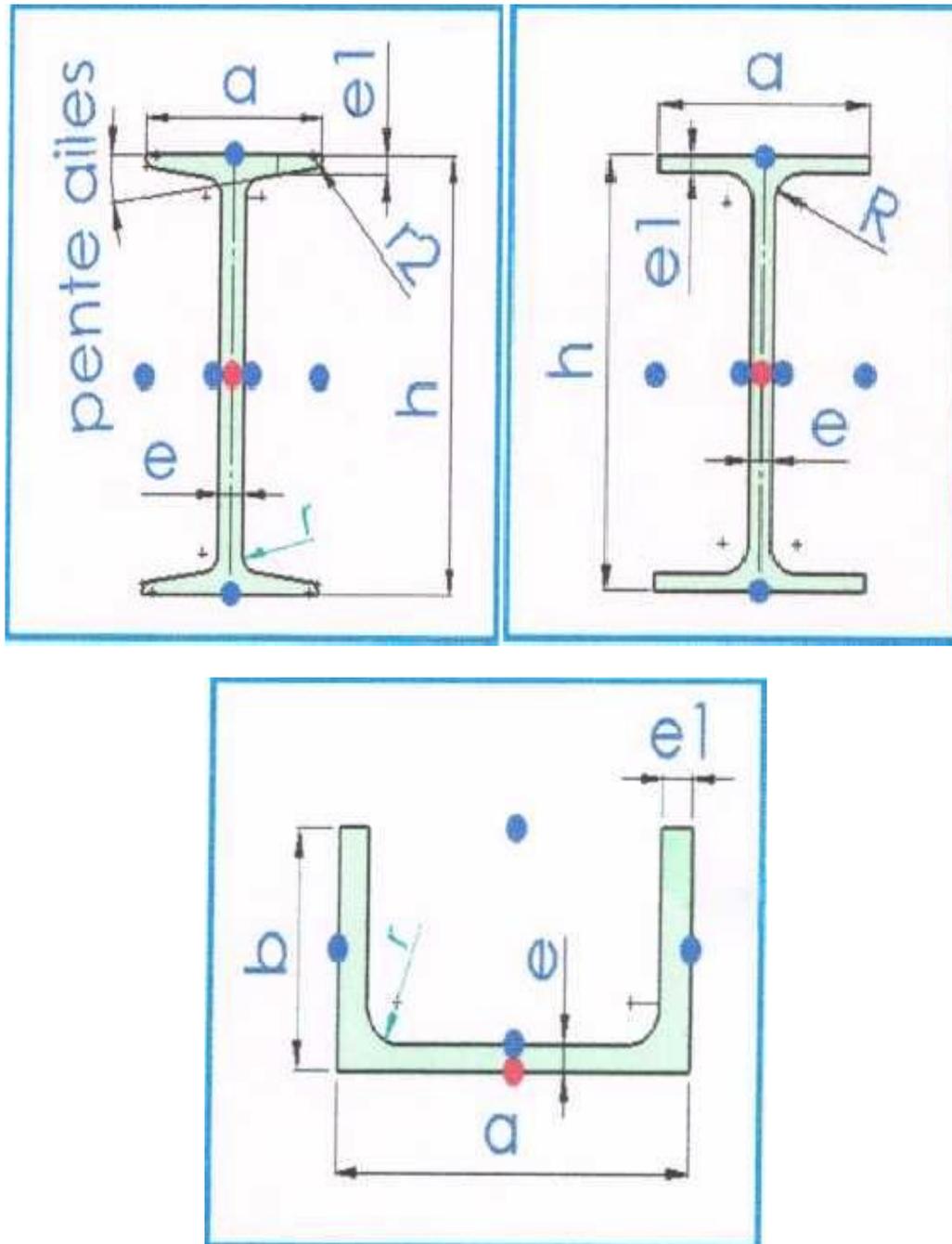


Figure II-11 : différents profils en acier

Le profil de la poutre métallique industrielle à section constante est normalisé (IPE, IPN, HEA, UPA etc., la première lettre donne la forme de la section), elle a un sens de pose impératif

II-2-4 Selon la fonction

Longrine

Une longrine est un élément de structure ayant la forme d'une poutre et orientée horizontalement, supportant des forces mécaniques importantes.

Une longrine peut être en béton, en bois, en métal ou en une matière capable de supporter les efforts mécaniques liés à la structure dans laquelle elle est contenue.

Pour un bâtiment, la longrine se situe à la base de la construction, au niveau des fondations



Figure II-12 : Longrine

Poutrelle

La poutrelle est élément de construction préfabriqué en béton armé ou précontraint. Ce composant industrialisé de faible section est utilisé pour constituer la structure d'un plancher, et on peut voir aussi des poutrelles en bois et en métal.

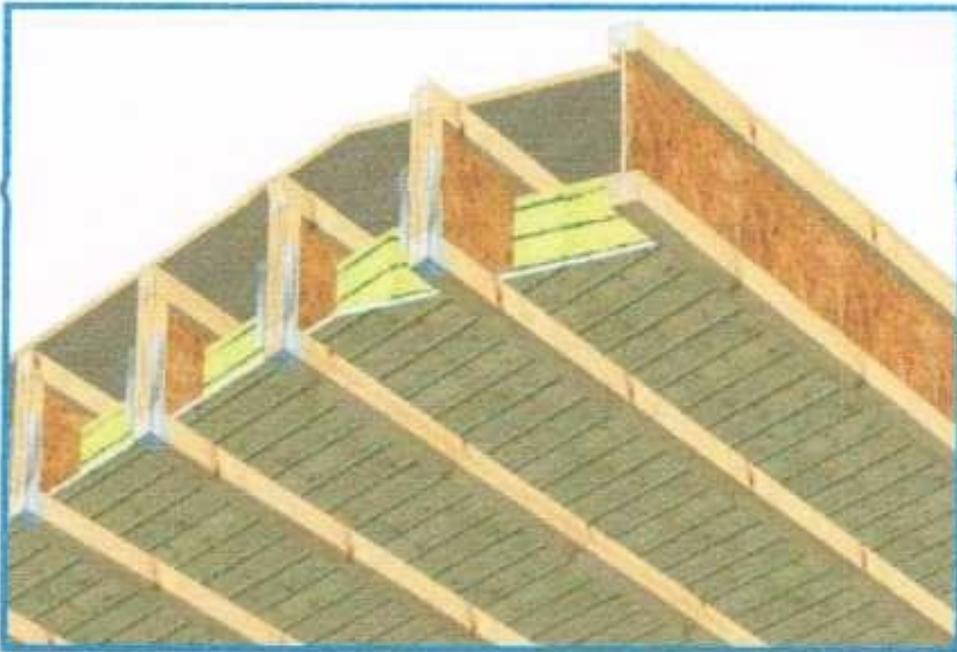
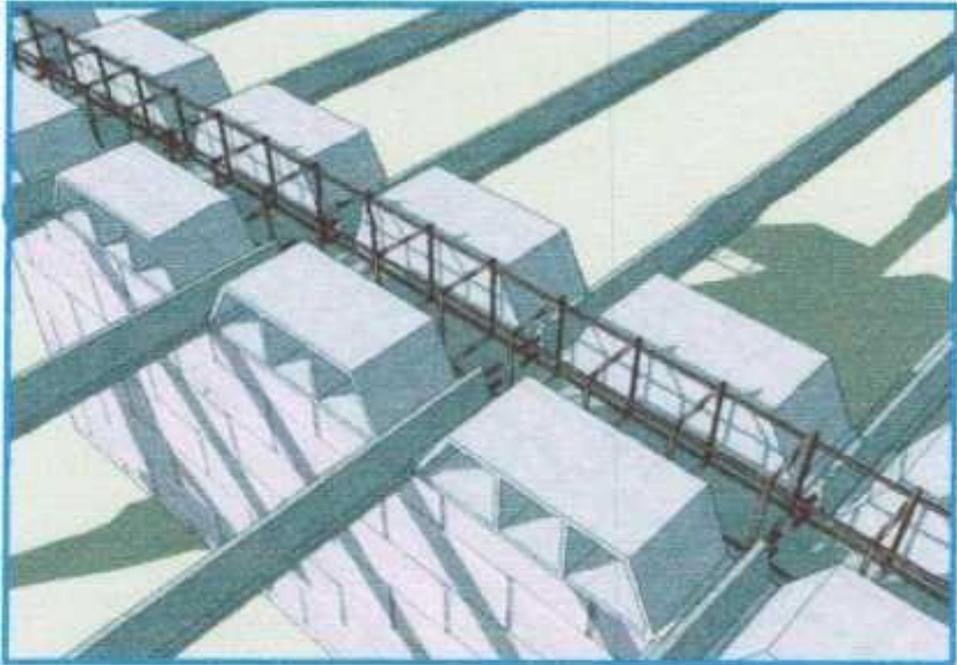


Figure II-13: Poutrelle

**Chapitre III : Modalisation des
poutres avec diverses conditions
d'appuis**

III.1. Introduction

En rendant la complexité des calculs une chose de passé, l'avènement de l'ordinateur a solutionné les sciences de l'ingénieur. Des problèmes, autrefois considérés insolubles avec les méthodes classiques, sont maintenant facilement accessibles avec les méthodes numériques, et conduit à l'apparition d'une nouvelle méthode qui convient par une nouvelle méthode dite méthode des éléments finis (**M.E.F**).

La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis entraîne le calcul des matrices de rigidité et des forces nodales de tous les éléments de la structure discrétisée puis l'assemblage des matrices de rigidité $[K]$ et des forces nodales $\{F\}$ de toute la structure.

Le vecteur de charge $\{F\}$ est relié au vecteur des déplacements nodaux $\{q\}$ donc :

$$[K]. \{q\} = \{F\} \quad (\text{III.1})$$

III.2. Etapes de calcul par la méthode des éléments finis

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivantes :

- ❖ Entrée des données :
 - Les caractéristiques géométriques (longueur, largeur),
 - Les caractéristiques physiques ($E, \nu \dots$)
- ❖ Discrétisation :
 - Maillage du domaine en éléments finis (type d'élément souhaité).
 - Numérotation des nœuds et des éléments).
- ❖ Formulation élémentaire :
 - Evaluation de la matrice de rigidité élémentaire $[K]^e$.
 - Evaluation du vecteur des forces nodales $\{F\}^e$.
- ❖ Formulation globale :
 - Assemblage des matrices de rigidité et vecteurs des forces nodales.

$$[K]^G = \sum_{e=1}^{ne} [K]^e, \quad \{F\}^G = \sum_{e=1}^{ne} \{F\}^e \quad (\text{III.2})$$

D'où : (ne : nombre d'élément constituant une structure) .

- ❖ Introduction des conditions d'appuis ou les déplacements imposés.
 - Résolution du système global :

Sachant que :

$$[K]. \{q\}^e = \{F\} \quad (\text{III.3})$$

Détermination des déplacements aux nœuds.

- ❖ Calcul des contraintes et des déformations dans chaque élément

III. 3 Formulation en élément finis :

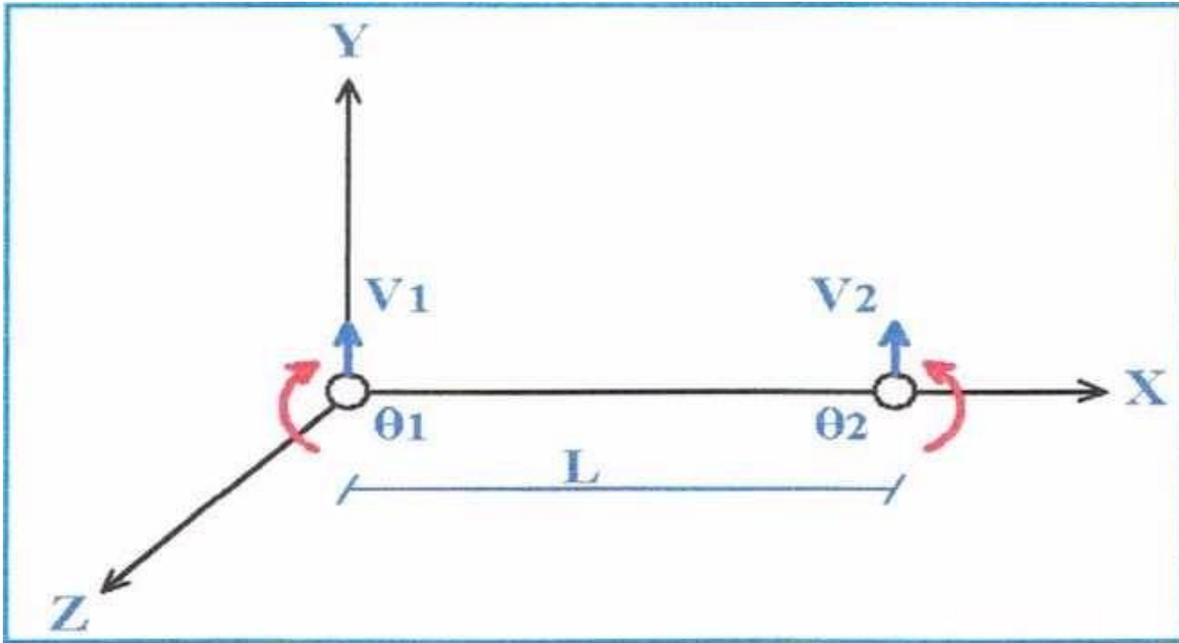


Figure III.1 : Degré de liberté d'un élément en flexion simple

On considère un élément de barre à deux (02) nœuds, chaque nœud possède deux degrés de liberté, un déplacement vertical (V) et une rotation (θ) autour de l'axe(y).

Le nombre total de degrés de liberté est égal à quatre (04) ainsi que le vecteur de déplacement nodal $\{q\}$ et le vecteur de charges (forces) nodales $\{F\}$.

III.3.1 Equation fondamentale pour éléments finis

$$[K]^e \times \{q\} = \{F\} \quad (\text{III.4})$$

$[K]^e$: est la matrice de rigidité élémentaire.

III.3.1.1 Fonction de déplacement

On choisit le polynôme suivant qui définit (V) sur le domaine de la poutre.

$$V(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (\text{III.5})$$

La rotation (θ) étant la dérivée de déplacement (V) par rapport à (x)

$$\Theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (III.6)$$

Sous une forme matricielle $V(x)$ et $\Theta(x)$ deviennent :

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (III.7)$$

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = F(x) \{ a \} \quad (III.8)$$

On veut relier les coefficients de déplacements aux déplacements nodaux

Nœud 01:

$$\text{Pour } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} V(0) = a_1 = V_1 \\ \theta(0) = a_2 = \theta_1 \end{cases}$$

Nœud 02:

$$= \theta_1$$

$$\text{pour } x = L \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 = V_2 \\ a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 = \theta_2 \end{cases}$$

Sous une forme matricielle

$$\{q\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L^2 & 3L^2 \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{q\} = [A] \times \{a\} \Rightarrow \{a\} = \{q\} \times [A]^{-1} \quad (III.9)$$

Avec:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Calculons $[A]^{-1}$:

Après la résolution du système (4), on a trouvé les résultats suivants :

$$\begin{aligned} a_1 &= V_1 \\ a_2 &= \theta_1 \\ \begin{cases} a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 = V_2 \\ a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 = \theta_2 \end{cases} & \quad \text{(III.10)} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{cases} a_3 = \frac{3}{l^2}(v_2 - v_1) - \frac{1}{l} = (2\theta_1 + \theta_2) \\ a_4 = \frac{2}{l^2}(v_1 - v_2) - \frac{1}{l^2} = (2\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{-3}{l^2} & \frac{-2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & \frac{-2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \quad \text{(III.11)}$$

En remplaçant $\{a\}$ dans l'expression (3) on aura :

$$\{f(x)\} = [\emptyset(x)] \times [A]^{-1} \times \{q\} \quad \text{(III.12)}$$

111.3.1.2 Relation déplacement - déformation :

La fonction $s(x)$ des déformations est obtenue par la dérivation de la fonction de déplacement $f(x)$;

Soit : $s(x) = f'(x)$

D'après l'expression (4) la fonction $s(x)$ devient :

$$\varepsilon(x) = [B(x)] \times [A]^{-1} \times \{q\} \quad \text{(III.13)}$$

Avec: $[B(x)] =$ dérive de $[\emptyset(x)]$

D'après l'équation de la ligne élastique de flexion des poutres on a :

$$M(x) = -EI \frac{d^2V}{dx^2} \tag{III.14}$$

$$\varepsilon(x) = -\frac{d^2V}{dx^2}$$

D'autre part on a :

$$-\frac{d^2V}{dx^2} = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \times \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon(x) = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \times \{a\}$$

Avec : $\{a\} = \{q\} \times [A]^{-1}$

$$\varepsilon(x) = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \times [A]^{-1} \times \{q\}$$

$$\varepsilon(x) = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l^2} & \frac{-2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & \frac{-2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{III. 15}$$

$$\varepsilon(x) = \left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \right] \times \{q\} \tag{III. 16}$$

III.3.1.3 Relation déformation -contrainte :

En général : $\{\sigma(x)\} = [D] \times \{\varepsilon(x)\}$ (III. 17)

Où [D]: représente la matrice des propriétés élastiques d'élément. D'après la théorie des poutres on a :

$\{\sigma(x)\} = E \times \{\varepsilon(x)\}$; (pour notre cas [D] est égal au module d'élasticité E)

$$\{\sigma(x)\} = [D] \times [\varepsilon(x) \times [A]^{-1}] \times \{q\} \tag{III.18}$$

Appliquons le principe des travaux virtuels:

$$\sum F_q = \int \sigma \times \varepsilon \times dv \tag{III. 19}$$

Le premier terme représente le travail externe des forces nodales dues à un déplacement virtuel.

$$Q_e = dq_1p_1 + dq_2p_2 + \dots + dq_n p_n \tag{III.20}$$

$$Q_e = [dq]^{-1} \times \{p\}$$

Le deuxième membre représente le travail interne Q_i , par unité de volume :

$$Q_i = \int [d\varepsilon(x)]^T \times \sigma x \ dv \tag{III. 21}$$

En utilisant les équations précédentes (6) et (7) on obtient :

$$Q_i = \int y^2 \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dV$$

$$Q_i = y^2 \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dS \times dx \quad (III. 22)$$

Avec : $\iint y^2 dS = I$

I: étant le moment d'inertie. D'où:

$$Q_i = \int_0^L I \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dx \quad (III.23)$$

En égalisant le premier et le second terme ; on obtient :

$$\{dq\} \{P\} = \int_0^L I \{ [B(x)][A]^{-1} \{dq\} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} \{q\} dx \quad (III.24)$$

On sait que : $\{P\} = [K] \{q\}$ D'où:

$$[K] = \int_0^L I \{ [B(x)][A]^{-1} \}^T [D] [B(x)][A]^{-1} dx \quad (III.25)$$

Avec : $[D] = E$

$$[K] = \int_0^L EI \begin{bmatrix} \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \\ \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \\ \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \\ \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \end{bmatrix} \times \left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \right] dx \quad (III. 26)$$

Si "I" est constant , la matrice de rigidité élémentaire d'un élément de barre a deux nœuds soumis a la sollicitation de la flexion s'écrit comme suit :

$$[K]_{flexion}^e = \frac{EI}{L} \times \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \quad (III. 27)$$

III 3 1 4 Les efforts internes (moment de flexion):

L'expression du moment s'exprime comme suit :

$$\{M\}^e = (B)_F \times \{q\} \quad (III. 28)$$

Avec :

$$(B)_f = \left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \right] \times \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Et encore :

$$\{M\}^e_{(x)} = \left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \right] \times \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (III. 29)$$

III.3.1.5 Formulation globale :

Afin d'établir cette formulation ; on doit déterminer la matrice de rigidité globale et le vecteur des forces nodales globales, pour une structure composée des plusieurs éléments.

On appelle une matrice globale est la matrice correspondante à la somme des matrices élémentaires aussi de rigidité et des forces appliquées.

$$[K]^G = \sum_{e=1}^{ne} [k] ; \{F\} = \sum_{e=1}^{ne} \{F\} \quad (III. 30)$$

D'où: (n: nombre d'élément constituant une structure)

Prenons un exemple simple d'une structure composée de deux éléments de barre unidimensionnels, ayant deux degrés de liberté en chaque nœud.

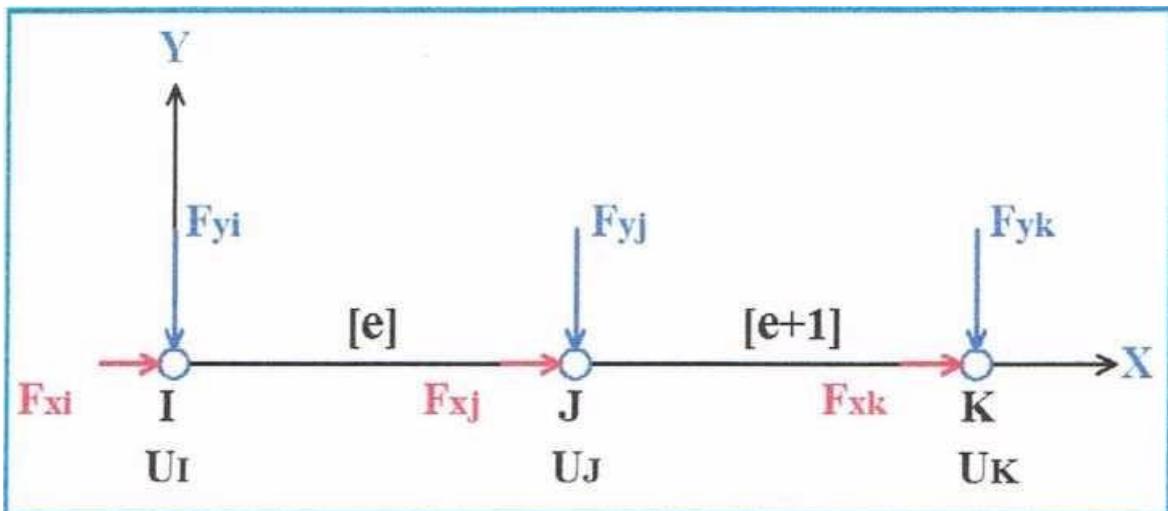


Figure III.2 : Assemblage de deux éléments

$$\begin{aligned}
 [K]^e &= \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \\
 [K]^{e+1} &= \begin{bmatrix} K_{jj}^{e+1} & K_{jk}^{e+1} \\ K_{jk}^{e+1} & K_{kk}^{e+1} \end{bmatrix} \\
 [F]^e &= \begin{Bmatrix} f y_i^e \\ M_i^e \\ f y_j^e \\ M_j^e \end{Bmatrix} \\
 [F]^{e+1} &= \begin{Bmatrix} f y_j^{e+1} \\ M_j^{e+1} \\ f y_k^{e+1} \\ M_k^{e+1} \end{Bmatrix} \quad (III. 31)
 \end{aligned}$$

La matrice de rigidité globale (par assemblage):

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e} [k] = [K] + [K]^{+15} \quad (III. 32)$$

F^e : Force élastique intérieure au nœud i

La condition d'équilibre statique aux différents nœuds

$$\text{Nœud}(i) : F_{xi} - F_i^e = 0$$

$$\text{Nœud}(j) : F_{xi} - F_i^e - F_i^{e+1} = 0$$

$$\text{Nœud}(k) : F_{xk} - F_k^{e+1} = 0$$

Ou encore :

$$F_i^e = F_{xi} \Leftrightarrow k_{ii}^e \times q_i + k_{ij}^e \times q_j = F_{xi}$$

$$F_k^{e+1} = F_{xk} \Leftrightarrow k_{jk}^{e+1} \times q_j + k_{kk}^{e+1} \times q_k = F_{xk}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & 0 \\ k_{ij}^e & k_{jj}^e + k_{jj}^{e+1} & k_{jk}^{e+1} \\ 0 & k_{jk}^{e+1} & k_{kk}^{e+1} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} \Leftrightarrow [k] \times \{q\} = \{F\} \quad (III. 33)$$

[K] : Matrice de rigidité globale

{q} : vecteur des déplacements nodaux

{F} : vecteur des forces nodales globales

D'après l'expression matricielle ci-dessus on peut constater que la règle d'assemblage des matrices de rigidités élémentaires consiste pour un nœud donné à additionner les sous matrices de rigidité affectées aux nœuds des éléments ayant ce nœud en commun

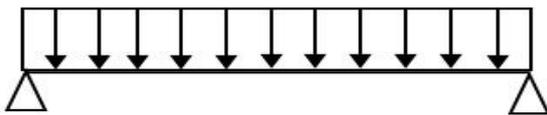
III.4 Calcul numérique

Le calcul des poutres hyperstatique nécessite d'appliquer des méthodes analytiques basées sur des conditions complémentaires pour résoudre ce problème. A cet effet nous appliquons la présente méthode numérique pour prédire les déplacements ainsi que les moments de flexion.

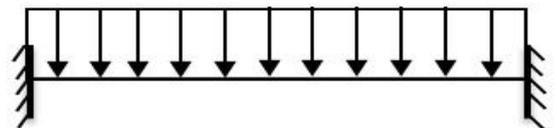
Au premier lieu, nous commençons par une étude comparative pour valider notre modèle ensuite on doit traiter quelques exemples de poutres continues.

III 4.1 Etude comparative :

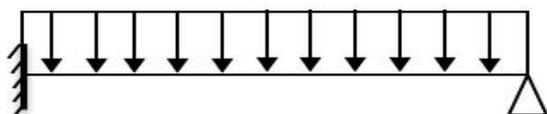
Cette étude est effectuée par la représentation des déplacements ainsi les moments réduits dans des tableaux de comparaison pour des poutres avec diverses conditions aux bords à savoir S-S, C-S, C-C et C-F et uniformément chargées. Les résultats obtenus numériquement sont comparés avec ceux de la théorie élémentaire de RDM



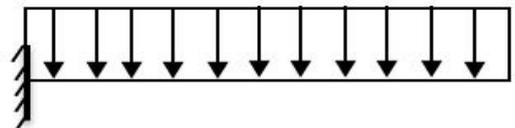
Cas 1 : Poutre simplement appuyée (S-S) et uniformément chargée.



Cas 2 : Poutre encastrement-encastrement (C-C) et uniformément chargée.



Cas 3: Poutre encastrement- simplement appuyée (C-S) et uniformément chargée.



Cas 4: Poutre encastrement- libre (C-F) et uniformément chargée.

III.4 .1 Discrétisation de la poutre

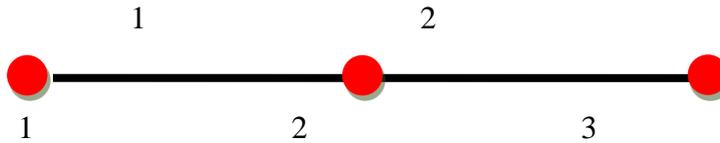


Figure III.3 : Discrétisation de la poutre.

III .4.2 Développement d' un programme de calcul par éléments finis

```
> restart;
```

```
>
```

```
entrée des données:
```

```
> L:=1;ne:=2;nn:=ne+1;q:=1;eiz:=1;
```

```
>
```

```
appliquer les conditions d'appuis:
```

```
  S - S
```

```
> ifix:=2;
```

```
> nfix:=Matrix([1,2*nn-1,2*((ne/2)+1)-1]);
```

```
> nfix:=Matrix([1,2*nn-1]);
```

```
>
```

```
> nfix:=Matrix([1,2*nn-1,(2/3)*(ne+3)-1,(2/3)*(2*ne+3)-1]);
```

```
  C - C
```

```
> ifix:=4;
```

```
> nfix:=Matrix([1,2,2*nn-1,2*nn,2*((ne/2)+1)-1]);
```

```
> nfix:=Matrix([1,2,2*nn-1,2*nn]);
```

```
> nfix:=Matrix([1,2,2*nn-1,2*nn,(2/3)*(ne+3)-1,(2/3)*(2*ne+3)-1]);
```

```
  C - S
```

```
>
```

```
> ifix:=3;
```

```
> nfix:=Matrix([1,2,2*nn-1,2*((ne/2)+1)-1]);
```

```
> nfix:=Matrix([1,2,2*nn-1]);
```

```
> nfix:=Matrix([1,2,2*nn-1,(2/3)*(ne+3)-1,(2/3)*(2*ne+3)-1]);
```

```
  C - F
```

```
> ifix:=2;
```

```
> nfix:=Matrix([1,2,2*((ne/2)+1)-1]);
```

```
> nfix:=Matrix([1,2]);
```

```

> nfix:=Matrix([1,2,(2/3)*(ne+3)-1,(2/3)*(2*ne+3)-1]);
> le:=L/ne;
  Discrétisation
> for i to ne do;
> N[i,1]:=i;
> N[i,2]:=i+1;
> end;
  Matrices de rigidité élémentaires
> for i to ne do;
> k(i):=Matrix(2*nn,2*nn);
> end;
>
> for i to ne do;
> k(i)[3*N[i,1]-1,2*N[i,1]-1]:=12*eiz/(le**3);
> k(i)[3*N[i,1]-2,2*N[i,1]]:=6*eiz/(le**2);
> k(i)[3*N[i,1]-1,2*N[i,2]-1]:=-12*eiz/(le**3);
> k(i)[3*N[i,1]-2,2*N[i,2]]:=6*eiz/(le**2);
> k(i)[3*N[i,1],2*N[i,1]-1]:=6*eiz/(le**2);
> k(i)[3*N[i,1],2*N[i,1]]:=4*eiz/(le);
> k(i)[3*N[i,1],2*N[i,2]-1]:=-6*eiz/(le**2);
> k(i)[3*N[i,1],2*N[i,2]]:=2*eiz/(le);
> k(i)[3*N[i,2]-1,2*N[i,1]-2]:=-12*eiz/(le**3);
> k(i)[3*N[i,2]-2,2*N[i,1]]:=6*eiz/(le**2);
> k(i)[3*N[i,2]-1,2*N[i,2]-1]:=12*eiz/(le**3);
> k(i)[3*N[i,2]-1,2*N[i,2]]:=6*eiz/(le**2);
> k(i)[3*N[i,2],2*N[i,1]-1]:=6*eiz/(le**2);
> k(i)[3*N[i,2],2*N[i,1]]:=2*eiz/(le);
> k(i)[3*N[i,2],2*N[i,2]-2]:=-6*eiz/(le**2);
> k(i)[3*N[i,2],2*N[i,2]]:=4*eiz/(le);print(k(i));
> end;
  Matrice globale
> K:=sum(k(j),j=1..ne);
> for i to ifix do K[nfix[1,i],nfix[1,i]]:=K[nfix[1,i],nfix[1,i]]*10**8 end do;
>

```

Vecteurs de forces élémentaires

```

> F:=Matrix(2*nn,1);
> F[ne+1,1]:=-p;print(F);
> for i to ne do f(i):=Matrix(2*nn,1)end do;
>
> for i to ne do f(i)[2*N[i,1]-1,1]:=q*le/2 end do;
> for i to ne do f(i)[2*N[i,2]-1,1]:=q*le/2 end do;
> F:=sum(f(m),m=1..ne);
> KK:=evalm(K**(-1));
    Résolution du système
> Q:=evalf(evalm(KK&*F));
    Déplacements
> for i to nn do v(i):=Q[2*i-1,1]end do;
    Rotations
> for i to nn do teta(i):=Q[2*i,1]end do;
    Moments
> for i to ne do Mg(i):=eiz*((6/le**3)*Q[3*N[i,1]-1,1]+(4/le)*Q[3*N[i,1],1]-
(6/le**3)*#[3*N[i,2]-1,1]+(2/le)*Q[3*N[i,2],1]) end do;
> for i to ne do Md(i):=eiz*((-6/le**3)*Q[3*N[i,1]-1,1]+(-
2/le)*Q[3*N[i,1],1]+(6/le**2)*Q[3*N[i,2]-1,1]+(-4/le)*Q[3*N[i,2],1]) end do;
>
>
    
```

Tableaux III.1 : Comparaison des résultats des déplacements et moments réduits pour une poutre uniformément chargée avec diverses conditions aux bords

Type d'appuis	Ne	Solution M.E.F		Solution RDM	
		V:EI/ql ⁴	M/ql ²	V:EI/ql ⁴	M/ql ²
S -S	4	0,01237	0,1249	0.01302	0.1250
	8	0,01285	0,1249		
	16	0,01298	0,12499		
	32	0,01301	0,125		
	64	0,01301	0,125		
	4	0.00260	-0.0781		

C-C	8	0.00260	-0.08203	0.00260	0.0833
	16	0.00260	-0.08300		
	32	0.00260	-0.08325		
	64	0.00260	-0.0833		
C-S	4	0.005000	-0.1171	0.00543	0.125
	8	0.005100	-0.1230		
	16	0.00539	-0.1245		
	32	0.00539	-0.1248		
	64	0.00539	-0.1250		
C-F	4	0.127	0.500	0.125	0.500
	8	0.125	0.4999		
	16	0.125	0.5		
	32	0.125	0.5		
	64	0.125	0.5		

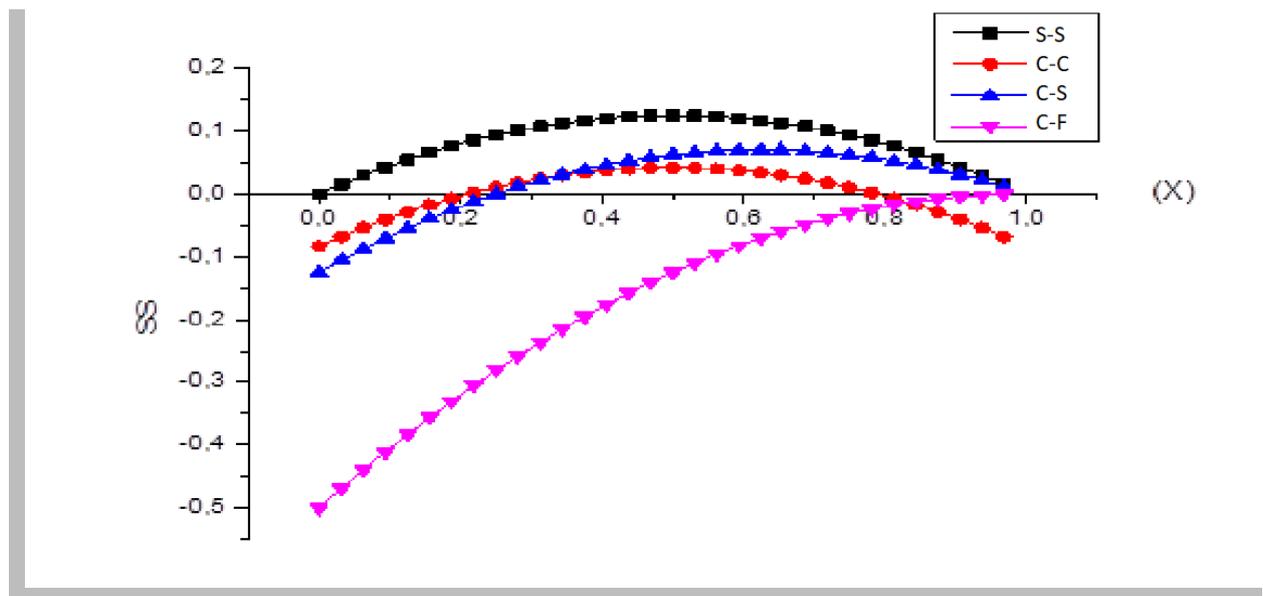


Figure III.4 : digrammes des moments réduites dans une poutre uniformément chargée avec diverses conditions aux bords par la méthode des éléments finis

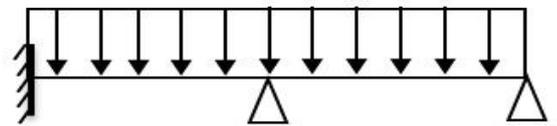
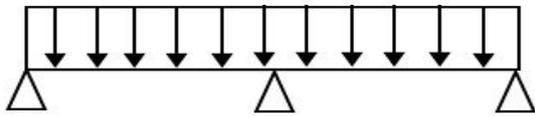
Le tableau III.1 montre la comparaison des résultats par la MEF pour des poutres avec divers d'appuis aux extrémités et uniformément chargées avec ceux donné par la RDM . On remarque bien plus qu'on augmente le nombre des éléments les résultats correspondants sont satisfaisants c'est-à-dire que ces résultats s'approchent des solutions existantes. Ce qui implique que notre modèle est validé.

III. 4. 3 Exemples d'application :

Après avoir validé notre modèle, nous avons traité quelques cas de calcul des poutres continues comme il est représenté en exemples 1 et 2.

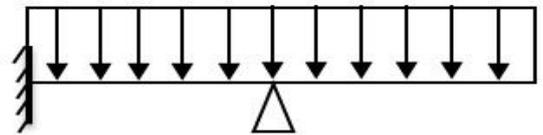
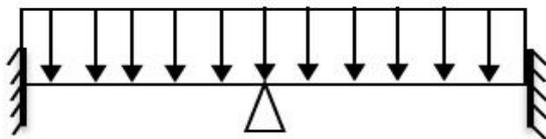
III.4.3.1 Exemple (01)

Cas d'une poutre continue à deux travées et uniformément chargée



Cas 5 : Poutre simplement appuyé (S-S-S) et Uniformément chargée.

Cas 6 : Poutre encasturé-deux appuyé (C-S-S) et Uniformément chargée.



Cas 7 : Poutre encasturé-encasturé-simplement Appuyé (C-S-C) et uniformément chargée.

Cas 8 : Poutre encasturé-simplement Appuyé Libre (C-S-F) et uniformément chargée.

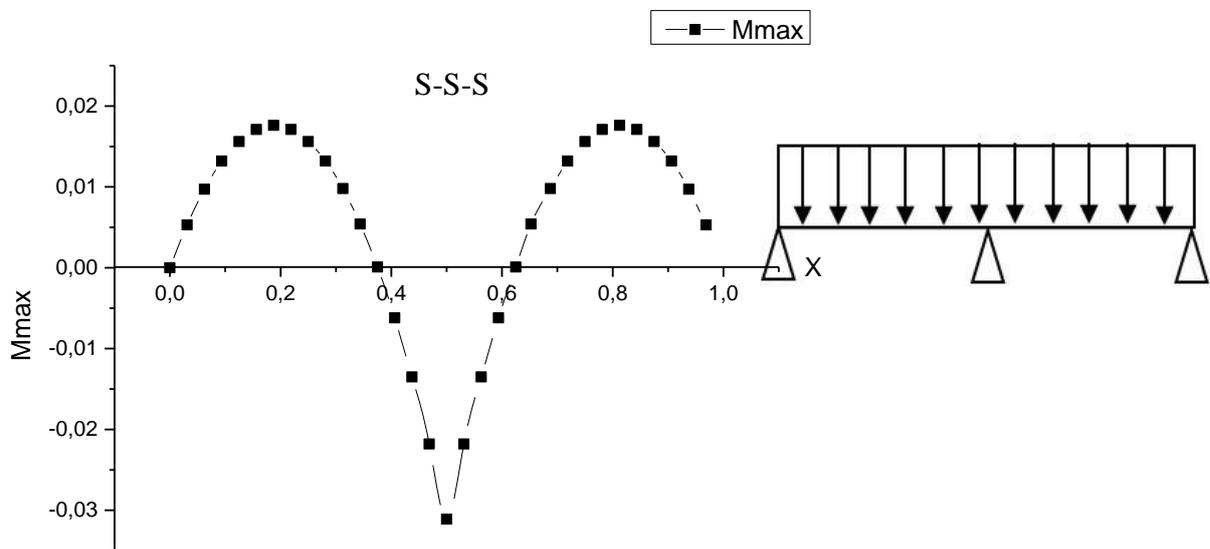


Figure III.5 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à deux travées (S-S-S) et Uniformément chargée.

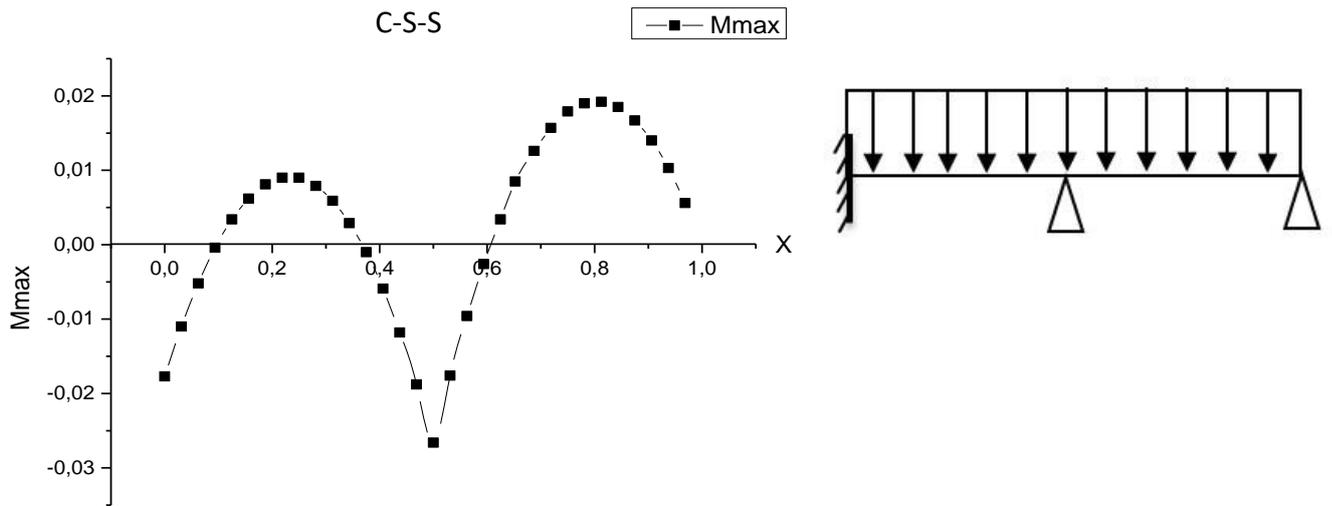


Figure III.6 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à deux travées (C-S-S) et Uniformément chargée.

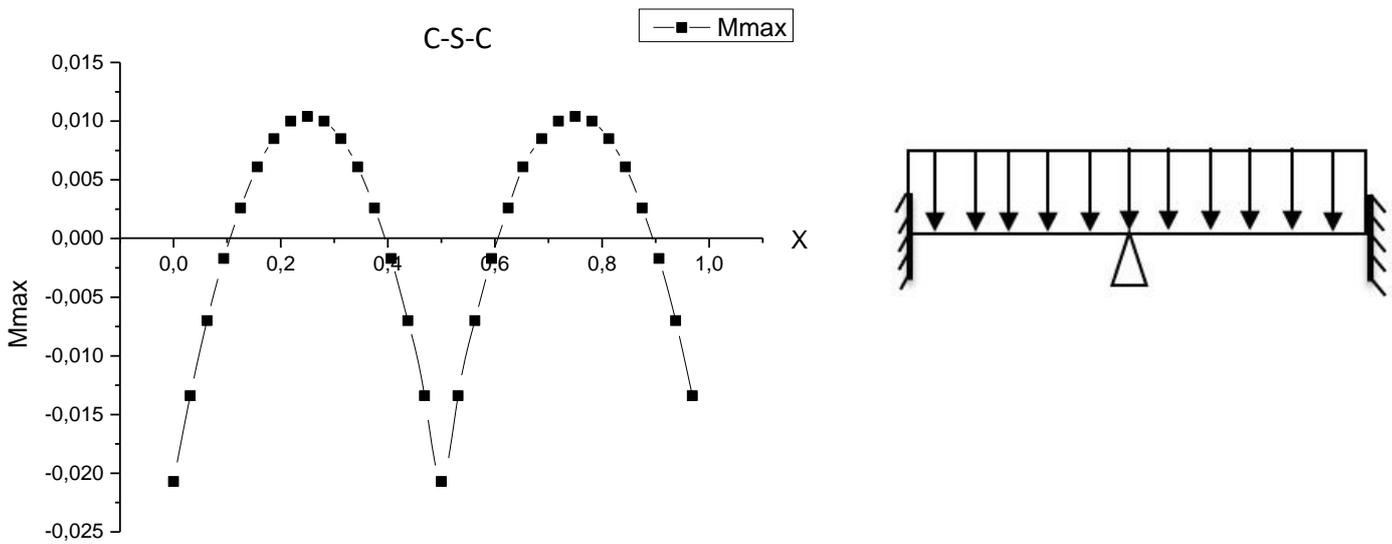


Figure III.7 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à deux travées (C-S-C) et Uniformément chargée.

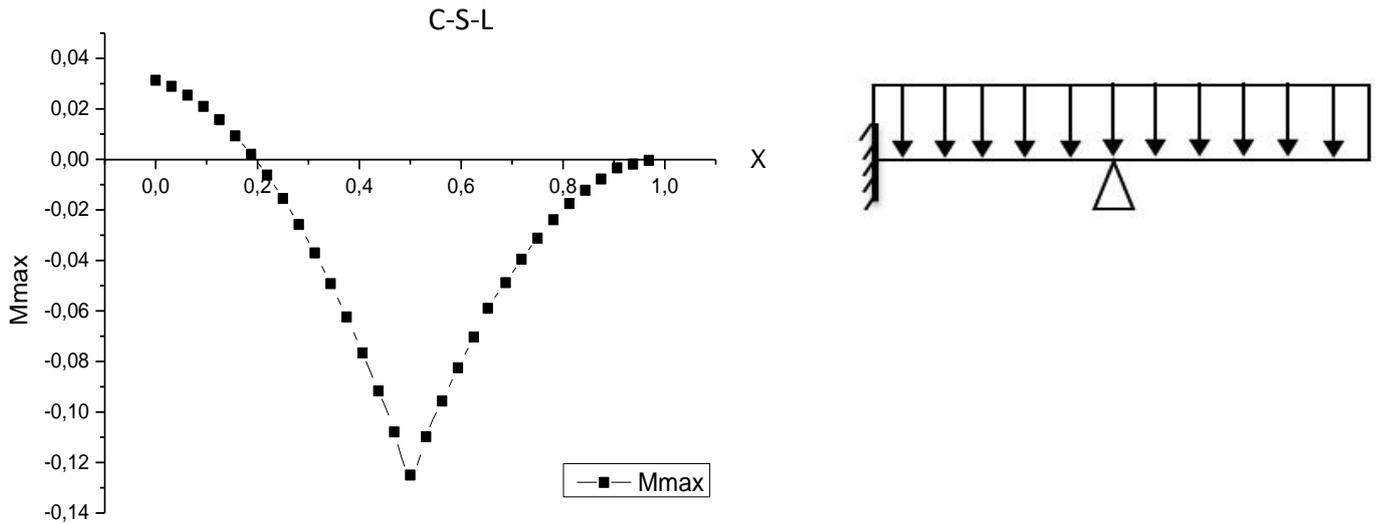
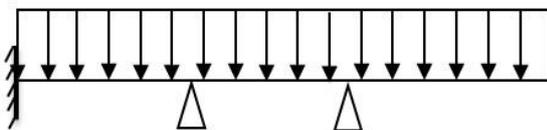


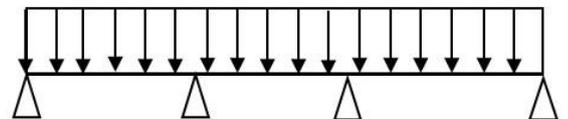
Figure III.8 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à deux travées (C-S-F) et Uniformément chargée.

III.4.3.2 Exemple (02)

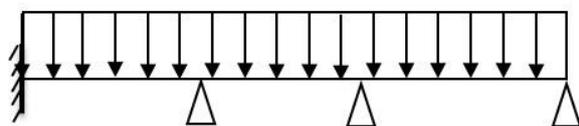
Cas d'une poutre continue à trois travées et uniformément chargée.



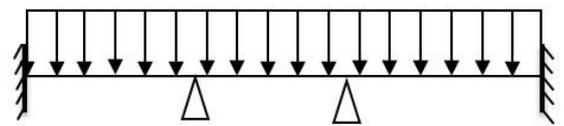
Cas 9 : Poutre encastré-deux appuyé - libre (C-S-S-F) et uniformément chargée.



Cas 10 : Poutre simplement appuyé (S-S-S-S) et Uniformément chargée.



Cas 11 : Poutre encastré-trois appuyé (C-S-S) et Uniformément chargée.



Cas 12 : Poutre encastré-encasté-deux Appuyé (C-S-S-C) et uniformément chargée.

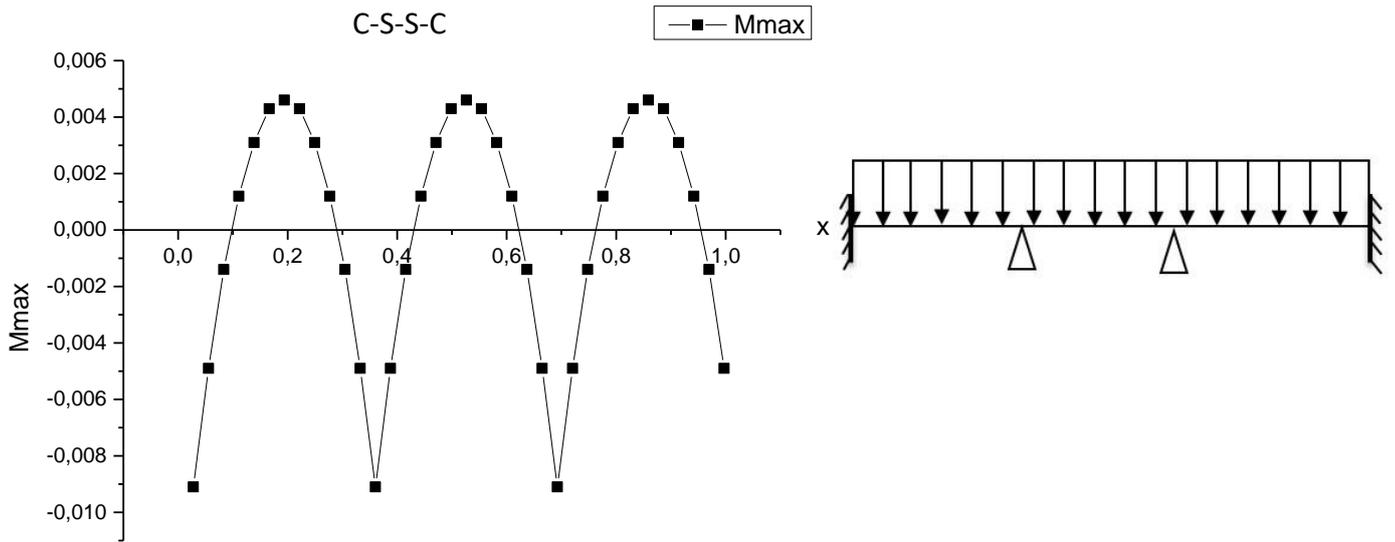


Figure III.9 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à trois travées (C-S-S-C) et Uniformément chargée.

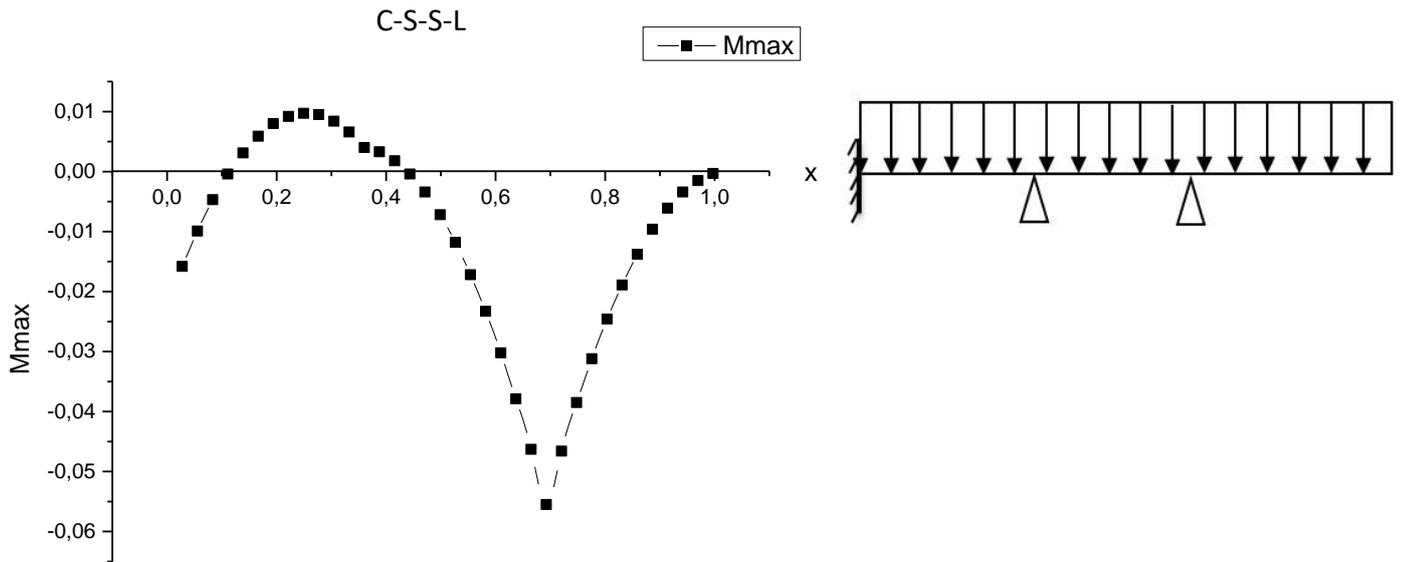


Figure III.10 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à trois travées (C-S-S-F) et Uniformément chargée.

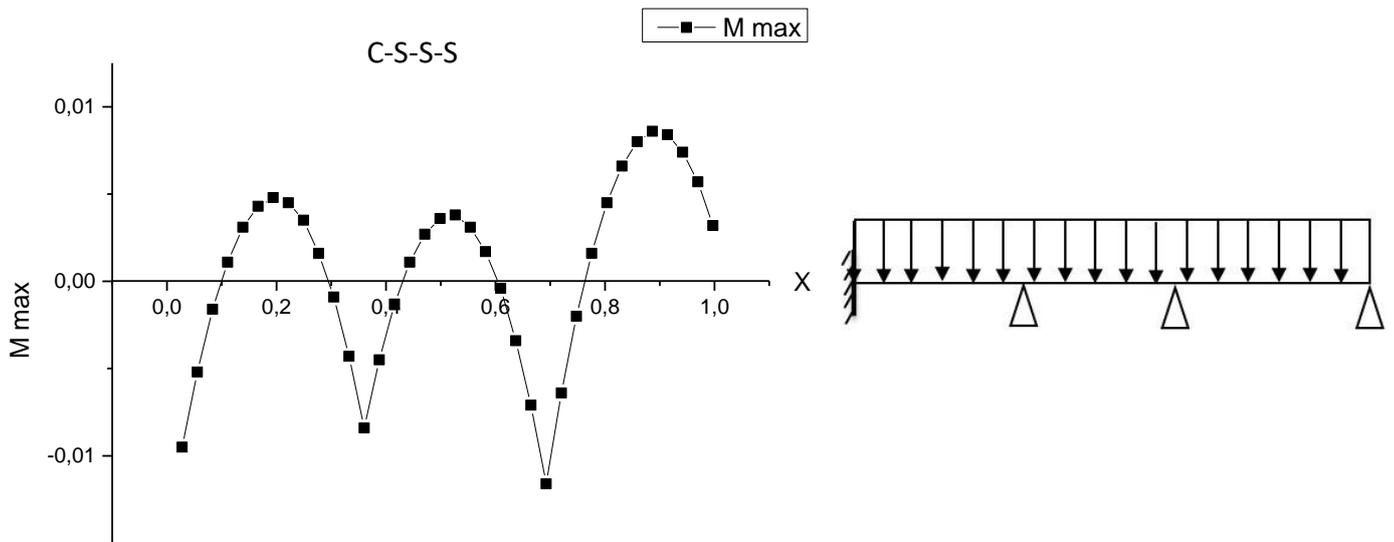


Figure III.11 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à trois travées (C-S-S-S) et Uniformément chargée.

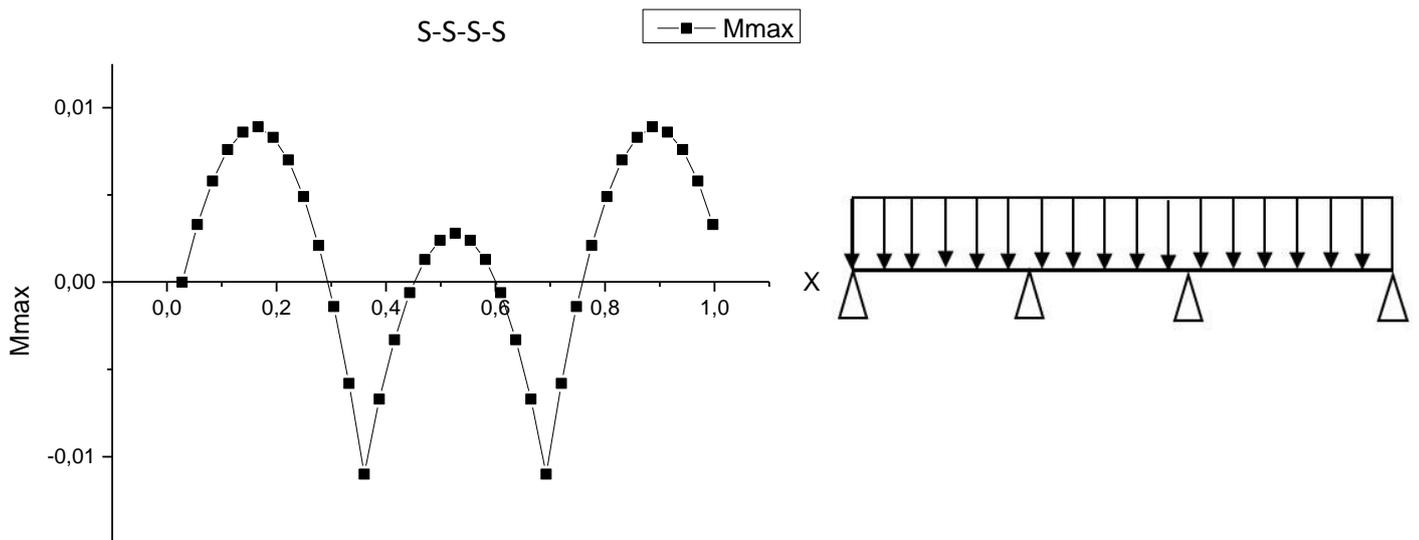


Figure III.12 : Diagramme des moments réduites dans une poutre à trois travées (S-S-S-S) et Uniformément chargée.

III. 5 Conclusion

Dans ce chapitre on a exposé la formulation des problèmes des poutres en flexion par la méthode des éléments finis ensuite on a tiré que ce présent modèle est validé par l'exécution d'un programme en maple par rapport aux solutions d'RDM et à la fin des exemples sont présentés pour le calcul des poutres hyperstatiques (continues).

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Un problème de mécanique est généralement représenté par un modèle mathématique des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur les frontières de ce domaine. De plus étant un problème continu, il possède une infinité de degrés de libertés. La méthode des éléments finis consiste donc à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent, à cet effet cette méthode est rapide et simple que les autres méthodes et parfois est utilisée pour le calcul des systèmes hyperstatiques ou de formes irrégulière.

Dans notre travail un programme en Maple est élaboré pour modéliser et analyser les poutres en flexion avec diverses conditions aux bords en éléments finis après avoir vérifié les résultats numériques avec ceux de la méthode de résistance des matériaux et effectivement sont satisfaisants.

L'utilité de cette présente méthode est de réduire le temps de calcul et facilite la tâche surtout pour les systèmes hyperstatiques et cela à été montré en chapitre trois.

Cette recherche peut être étendue dans le futur pour effectuer :

- Une étude du comportement des poutres courbes avec diverses conditions aux bords.
- Une application de la méthode actuelle au calcul dynamique des poutres.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] Mémoire de fin d'études 2013 : Etude du comportement dynamique des structures à barres comportant des fissures.
- [2] Reddy, J. N. (2004). Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis (2nd ed.). CRC Press.
- [3] Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2005). The finite element method for solid and structural mechanics (6th ed.). Butterworth-Heinemann.
- [4] conception et construction d'arcs, Adrien Antonelli-Clément Desort Hélène Horsin Molinaro
- [5]. Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. (2007). Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons.
- [6] Rémy Mouterde, François Fleury, (2007) Comprendre simplement la résistance des matériaux - La structure, principes et enjeux de la conception.
- [7] Mémoire de fin d'études 2009/2010 : application de la méthode des éléments finis pour le dimensionnement des portiques métallique.
- [8] René Walther, Julien Tréleani, (1993), Construire en béton, synthèse pour architectes, Presses polytechniques et universitaires romandes. Lausanne épuisé.

Annexe

Poutres simplement appuyée S-S uniformément chargées

$$NE = 32$$

Déplacements et rotations réduits

$v(12) := 0.01151061058$
 $v(13) := 0.01204490662$
 $v(14) := 0.01246492068$
 $v(15) := 0.01276731491$
 $v(16) := 0.01294970512$
 $v(17) := 0.01301066081$
 $v(18) := 0.01294970512$
 $v(19) := 0.01276731491$
 $v(20) := 0.01246492068$
 $v(21) := 0.01204490662$
 $v(22) := 0.01151061058$
 $v(23) := 0.01086632411$
 $v(24) := 0.01011729240$
 $v(25) := 0.009269714355$
 $v(26) := 0.008330742518$
 $v(27) := 0.007308483124$
 $v(28) := 0.006211996079$
 $v(29) := 0.005051294963$
 $v(30) := 0.003837347031$
 $v(31) := 0.002582073212$
 $v(32) := 0.001298348109$
 $v(33) := 1.271565768 \cdot 10^{-14}$
 $teta(1) := 0.04162597656$
 $teta(2) := 0.04138946533$
 $teta(3) := 0.04069519043$
 $teta(4) := 0.03957366943$
 $teta(5) := 0.03805541992$
 $teta(6) := 0.03617095947$
 $teta(7) := 0.03395080566$
 $teta(8) := 0.03142547607$
 $teta(9) := 0.02862548828$

$teta(10) := 0.02558135986$

$teta(11) := 0.02232360840$

$teta(12) := 0.01888275146$

$teta(13) := 0.01528930664$

$teta(14) := 0.01157379150$

$teta(15) := 0.007766723633$

$teta(16) := 0.003898620605$

$teta(17) := 0.$

$teta(18) := -0.003898620605$

$teta(19) := -0.007766723633$

$teta(20) := -0.01157379150$

$teta(21) := -0.01528930664$

$teta(22) := -0.01888275146$

$teta(23) := -0.02232360840$

$teta(24) := -0.02558135986$

$teta(25) := -0.02862548828$

$teta(26) := -0.03142547607$

$teta(27) := -0.03395080566$

$teta(28) := -0.03617095947$

$teta(29) := -0.03805541992$

$teta(30) := -0.03957366943$

$teta(31) := -0.04069519043$

$teta(32) := -0.04138946533$

$teta(33) := -0.04162597656$

Moments reduits

0

$Mg(17) := 0.1250000612$

$Mg(18) := 0.1245116674$

$Mg(19) := 0.1230468540$

$Mg(20) := 0.1206054650$

$Mg(21) := 0.117187557$

$Mg(22) := 0.112792912$

$Mg(23) := 0.107421909$

$Mg(24) := 0.101074210$

$Mg(25) := 0.093750002$

$Mg(26) := 0.085449218$

Annexe

$Mg(27) := 0.076171874$
 $Mg(28) := 0.065917976$
 $Mg(29) := 0.054687496$
 $Mg(30) := 0.042480472$
 $Mg(31) := 0.029296864$
 $Mg(32) := 0.015136720$
 $Md(1) := 0.015136720$
 $Md(2) := 0.029296864$
 $Md(3) := 0.042480472$
 $Md(4) := 0.054687502$
 $Md(5) := 0.065917978$
 $Md(6) := 0.076171866$
 $Md(7) := 0.085449224$
 $Md(8) := 0.093750000$
 $Md(9) := 0.101074208$
 $Md(10) := 0.107421915$
 $Md(11) := 0.112792913$
 $Md(12) := 0.117187560$
 $Md(13) := 0.120605468$
 $Md(14) := 0.1230468548$
 $Md(15) := 0.1245116724$
 $Md(16) := 0.12500006$
 $Md(17) := 0.1245116576$
 $Md(18) := 0.1230469252$
 $Md(19) := 0.120605482$
 $Md(20) := 0.117187510$
 $Md(21) := 0.112792907$
 $Md(22) := 0.107421925$
 $Md(23) := 0.101074182$
 $Md(24) := 0.093750010$
 $Md(25) := 0.085449216$
 $Md(26) := 0.076171874$
 $Md(27) := 0.065917972$
 $Md(28) := 0.054687498$
 $Md(29) := 0.042480468$

$$Md(30) := 0.029296866$$

$$Md(31) := 0.015136728$$

$$Md(32) := -2.10^{-9}$$

Poutres Bi-encastées C-C uniformément chargées

NE = 32

Déplacements et rotations réduits

$$v(1) := 1.271565768 \cdot 10^{-14}$$

$$v(2) := 0.00003818670930$$

$$v(3) := 0.0001430511479$$

$$v(4) := 0.0003007650381$$

$$v(5) := 0.0004984537768$$

$$v(6) := 0.0007241964349$$

$$v(7) := 0.0009670257578$$

$$v(8) := 0.001216928165$$

$$v(9) := 0.001464843751$$

$$v(10) := 0.001702666284$$

$$v(11) := 0.001923243206$$

$$v(12) := 0.002120375635$$

$$v(13) := 0.002288818361$$

$$v(14) := 0.002424279850$$

$$v(15) := 0.002523422243$$

$$v(16) := 0.002583861353$$

$$v(17) := 0.002604166668$$

$$v(18) := 0.002583861353$$

$$v(19) := 0.002523422243$$

$$v(20) := 0.002424279850$$

$$v(21) := 0.002288818361$$

$$v(22) := 0.002120375635$$

$$v(23) := 0.001923243206$$

$$v(24) := 0.001702666284$$

$$v(25) := 0.001464843751$$

$$v(26) := 0.001216928165$$

$$v(27) := 0.0009670257578$$

$$v(28) := 0.0007241964349$$

Annexe

$v(29) := 0.0004984537768$
 $v(30) := 0.0003007650381$
 $v(31) := 0.0001430511479$
 $v(32) := 0.00003818670930$
 $v(33) := 1.271565768 \cdot 10^{-14}$
 $teta(1) := 6.504058902 \cdot 10^{-12}$
 $teta(2) := 0.002365112311$
 $teta(3) := 0.004272460943$
 $teta(4) := 0.005752563482$
 $teta(5) := 0.006835937505$
 $teta(6) := 0.007553100590$
 $teta(7) := 0.007934570317$
 $teta(8) := 0.008010864261$
 $teta(9) := 0.007812500003$
 $teta(10) := 0.007369995120$
 $teta(11) := 0.006713867190$
 $teta(12) := 0.005874633791$
 $teta(13) := 0.004882812502$
 $teta(14) := 0.003768920900$
 $teta(15) := 0.002563476563$
 $teta(16) := 0.001296997071$
 $teta(17) := 0.$
 $teta(18) := -0.001296997071$
 $teta(19) := -0.002563476563$
 $teta(20) := -0.003768920900$
 $teta(21) := -0.004882812502$
 $teta(22) := -0.005874633791$
 $teta(23) := -0.006713867190$
 $teta(24) := -0.007369995120$
 $teta(25) := -0.007812500003$
 $teta(26) := -0.008010864261$
 $teta(27) := -0.007934570317$
 $teta(28) := -0.007553100590$
 $teta(29) := -0.006835937505$
 $teta(30) := -0.005752563482$

$teta(31) := -0.004272460943$
 $teta(32) := -0.002365112311$
 $teta(33) := -6.504058902 \cdot 10^{-12}$

Moments réduits

$Mg(1) := -0.0832519531$
 $Mg(2) := -0.0681152343$
 $Mg(3) := -0.0539550782$
 $Mg(4) := -0.0407714836$
 $Mg(5) := -0.0285644532$
 $Mg(6) := -0.0173339838$
 $Mg(7) := -0.0070800772$
 $Mg(8) := 0.0021972662$
 $Mg(9) := 0.0104980476$
 $Mg(10) := 0.0178222702$
 $Mg(11) := 0.0241699226$
 $Mg(12) := 0.0295410202$
 $Mg(13) := 0.0339355476$
 $Mg(14) := 0.0373535200$
 $Mg(15) := 0.03979492254$
 $Mg(16) := 0.04125977$
 $Mg(17) := 0.04174804746$
 $Mg(18) := 0.0412597600$
 $Mg(19) := 0.0397949224$
 $Mg(20) := 0.0373535098$
 $Mg(21) := 0.0339355474$
 $Mg(22) := 0.0295410098$
 $Mg(23) := 0.0241699224$
 $Mg(24) := 0.0178222688$
 $Mg(25) := 0.0104980472$
 $Mg(26) := 0.0021972638$
 $Mg(27) := -0.0070800778$
 $Mg(28) := -0.0173339844$
 $Mg(29) := -0.0285644538$
 $Mg(30) := -0.0407714848$
 $Mg(31) := -0.0539550782$
 $Mg(32) := -0.06811523440$

$Md(1) := -0.0681152344$
 $Md(2) := -0.0539550782$
 $Md(3) := -0.0407714846$
 $Md(4) := -0.0285644538$
 $Md(5) := -0.0173339836$
 $Md(6) := -0.007080078$
 $Md(7) := 0.002197264$
 $Md(8) := 0.010498047$
 $Md(9) := 0.0178222688$
 $Md(10) := 0.0241699196$
 $Md(11) := 0.0295410148$
 $Md(12) := 0.0339355496$
 $Md(13) := 0.0373535148$
 $Md(14) := 0.0397949199$
 $Md(15) := 0.0412597649$
 $Md(16) := 0.04174805$
 $Md(17) := 0.0412597651$
 $Md(18) := 0.0397949201$
 $Md(19) := 0.0373535152$
 $Md(20) := 0.0339355504$
 $Md(21) := 0.0295410152$
 $Md(22) := 0.0241699204$
 $Md(23) := 0.0178222652$
 $Md(24) := 0.010498044$
 $Md(25) := 0.002197266$
 $Md(26) := -0.007080077$
 $Md(27) := -0.0173339844$
 $Md(28) := -0.0285644532$
 $Md(29) := -0.0407714844$
 $Md(30) := -0.0539550778$
 $Md(31) := -0.0681152343$
 $Md(32) := -0.08325195309$

Poutres à deux travées S-S-S uniformément chargées

NE = 32

Déplacements et rotations réduits

$v(1) := 4.77458044710^{-15}$
 $v(2) := 0.0000801868736$
 $v(3) := 0.000155280033$
 $v(4) := 0.000220980495$
 $v(5) := 0.000273942947$
 $v(6) := 0.000311775753$
 $v(7) := 0.000333040952$
 $v(8) := 0.000337254256$
 $v(9) := 0.000324885050$
 $v(10) := 0.000297356396$
 $v(11) := 0.000257045030$
 $v(12) := 0.000207281361$
 $v(13) := 0.000152349472$
 $v(14) := 0.0000974871218$
 $v(15) := 0.0000488857428$
 $v(16) := 0.0000136904418$
 $v(17) := 7.94107723210^{-15}$
 $v(18) := 0.0000136904418$
 $v(19) := 0.0000488857428$
 $v(20) := 0.0000974871218$
 $v(21) := 0.000152349472$
 $v(22) := 0.000207281361$
 $v(23) := 0.000257045030$
 $v(24) := 0.000297356396$
 $v(25) := 0.000324885050$
 $v(26) := 0.000337254256$
 $v(27) := 0.000333040952$
 $v(28) := 0.000311775753$
 $v(29) := 0.000273942947$
 $v(30) := 0.000220980495$
 $v(31) := 0.000155280033$
 $v(32) := 0.0000801868736$
 $v(33) := 4.77458044710^{-15}$

Annexe

$teta(1) := 0.00259399414$
 $teta(2) := 0.00250995159$
 $teta(3) := 0.00227308273$
 $teta(4) := 0.00191390514$
 $teta(5) := 0.00146293640$
 $teta(6) := 0.000950694084$
 $teta(7) := 0.000407695770$
 $teta(8) := -0.000135540962$
 $teta(9) := -0.000648498535$
 $teta(10) := -0.00110065937$
 $teta(11) := -0.00146150589$
 $teta(12) := -0.00170052051$
 $teta(13) := -0.00178718566$
 $teta(14) := -0.00169098377$
 $teta(15) := -0.00138139724$
 $teta(16) := -0.000827908515$
 $teta(17) := 0.$
 $teta(18) := 0.000827908515$
 $teta(19) := 0.00138139724$
 $teta(20) := 0.00169098377$
 $teta(21) := 0.00178718566$
 $teta(22) := 0.00170052051$
 $teta(23) := 0.00146150589$
 $teta(24) := 0.00110065937$
 $teta(25) := 0.000648498535$
 $teta(26) := 0.000135540962$
 $teta(27) := -0.000407695770$
 $teta(28) := -0.000950694084$
 $teta(29) := -0.00146293640$
 $teta(30) := -0.00191390514$
 $teta(31) := -0.00227308273$
 $teta(32) := -0.00250995159$
 $teta(33) := -0.00259399414$

Moments réduits

$Mg(1) := 0.$
 $Mg(2) := 0.0053787231$

Annexe

$Mg(3) := 0.009780883;$
 $Mg(4) := 0.0132064816;$
 $Mg(5) := 0.0156555173;$
 $Mg(6) := 0.0171279903;$
 $Mg(7) := 0.0176239024;$
 $Mg(8) := 0.0171432497;$
 $Mg(9) := 0.0156860363;$
 $Mg(10) := 0.0132522580;$
 $Mg(11) := 0.0098419190;$
 $Mg(12) := 0.005455016;$
 $Mg(13) := 0.000091552;$
 $Mg(14) := -0.0062484741;$
 $Mg(15) := -0.0135650633;$
 $Mg(16) := -0.0218582153;$
 $Mg(17) := -0.0311279296;$
 $Mg(18) := -0.0218582155;$
 $Mg(19) := -0.013565063;$
 $Mg(20) := -0.006248474;$
 $Mg(21) := 0.000091553;$
 $Mg(22) := 0.0054550169;$
 $Mg(23) := 0.0098419196;$
 $Mg(24) := 0.0132522572;$
 $Mg(25) := 0.0156860345;$
 $Mg(26) := 0.0171432487;$
 $Mg(27) := 0.0176239016;$
 $Mg(28) := 0.0171279903;$
 $Mg(29) := 0.015655517;$
 $Mg(30) := 0.013206482;$
 $Mg(31) := 0.009780884;$
 $Mg(32) := 0.005378723$
 $Md(1) := 0.005378723$
 $Md(2) := 0.009780884;$
 $Md(3) := 0.013206482;$
 $Md(4) := 0.015655517;$
 $Md(5) := 0.017127990;$

$Md(6) := 0.0176239024$
 $Md(7) := 0.0171432491$
 $Md(8) := 0.0156860354$
 $Md(9) := 0.013252257$
 $Md(10) := 0.009841919$
 $Md(11) := 0.005455016$
 $Md(12) := 0.000091553$
 $Md(13) := -0.006248474$
 $Md(14) := -0.013565063$
 $Md(15) := -0.021858215$
 $Md(16) := -0.0311279296$
 $Md(17) := -0.0218582153$
 $Md(18) := -0.013565063$
 $Md(19) := -0.006248474$
 $Md(20) := 0.000091552$
 $Md(21) := 0.005455017$
 $Md(22) := 0.009841919$
 $Md(23) := 0.013252257$
 $Md(24) := 0.0156860355$
 $Md(25) := 0.0171432498$
 $Md(26) := 0.0176239016$
 $Md(27) := 0.017127989$
 $Md(28) := 0.015655517$
 $Md(29) := 0.013206482$
 $Md(30) := 0.009780883$
 $Md(31) := 0.005378723$
 $Md(32) := 0.$

Poutres à deux travées C-S-C uniformément chargées

NE = 32

Déplacements et rotations réduits

$v(1) := 6.35782883910^{-15}$
 $v(2) := 0.00000894069676$
 $v(3) := 0.0000311533610$
 $v(4) := 0.0000604391099$
 $v(5) := 0.0000915527345$

Annexe

$v(6) := 0.000120202700$
 $v(7) := 0.000143051147$
 $v(8) := 0.000157713890$
 $v(9) := 0.000162760416$
 $v(10) := 0.000157713890$
 $v(11) := 0.000143051147$
 $v(12) := 0.000120202700$
 $v(13) := 0.0000915527344$
 $v(14) := 0.0000604391098$
 $v(15) := 0.0000311533610$
 $v(16) := 0.00000894069672$
 $v(17) := 6.35782884110^{-15}$
 $v(18) := 0.00000894069672$
 $v(19) := 0.0000311533610$
 $v(20) := 0.0000604391098$
 $v(21) := 0.0000915527344$
 $v(22) := 0.000120202700$
 $v(23) := 0.000143051147$
 $v(24) := 0.000157713890$
 $v(25) := 0.000162760416$
 $v(26) := 0.000157713890$
 $v(27) := 0.000143051147$
 $v(28) := 0.000120202700$
 $v(29) := 0.0000915527345$
 $v(30) := 0.0000604391099$
 $v(31) := 0.0000311533610$
 $v(32) := 0.00000894069676$
 $v(33) := 6.35782883910^{-15}$
 $teta(1) := 1.62124635310^{-12}$
 $teta(2) := 0.000534057618$
 $teta(3) := 0.000854492188$
 $teta(4) := 0.000991821289$
 $teta(5) := 0.000976562500$
 $teta(6) := 0.000839233398$
 $teta(7) := 0.000610351562$

$teta(8) := 0.000320434570$
 $teta(9) := -4.05311588310^{-13}$
 $teta(10) := -0.000320434570$
 $teta(11) := -0.000610351563$
 $teta(12) := -0.000839233399$
 $teta(13) := -0.000976562500$
 $teta(14) := -0.000991821289$
 $teta(15) := -0.000854492187$
 $teta(16) := -0.000534057617$
 $teta(17) := 0.$
 $teta(18) := 0.000534057617$
 $teta(19) := 0.000854492187$
 $teta(20) := 0.000991821289$
 $teta(21) := 0.000976562500$
 $teta(22) := 0.000839233399$
 $teta(23) := 0.000610351563$
 $teta(24) := 0.000320434570$
 $teta(25) := 4.05311588310^{-13}$
 $teta(26) := -0.000320434570$
 $teta(27) := -0.000610351562$
 $teta(28) := -0.000839233398$
 $teta(29) := -0.000976562500$
 $teta(30) := -0.000991821289$
 $teta(31) := -0.000854492188$
 $teta(32) := -0.000534057618$
 $teta(33) := -1.62124635310^{-12}$

Moments réduits

$Mg(1) := -0.02075195310$
 $Mg(2) := -0.0134277344$
 $Mg(3) := -0.0070800780$
 $Mg(4) := -0.0017089843$
 $Mg(5) := 0.00268554710$
 $Mg(6) := 0.0061035156$
 $Mg(7) := 0.0085449214$
 $Mg(8) := 0.0100097659$
 $Mg(9) := 0.0104980468$

Annexe

$Mg(10) := 0.0100097664$
 $Mg(11) := 0.0085449211$
 $Mg(12) := 0.0061035157$
 $Mg(13) := 0.0026855468$
 $Mg(14) := -0.0017089843$
 $Mg(15) := -0.0070800781$
 $Mg(16) := -0.0134277344$
 $Mg(17) := -0.0207519531$
 $Mg(18) := -0.0134277343$
 $Mg(19) := -0.0070800781$
 $Mg(20) := -0.0017089844$
 $Mg(21) := 0.0026855467$
 $Mg(22) := 0.0061035163$
 $Mg(23) := 0.0085449210$
 $Mg(24) := 0.0100097660$
 $Mg(25) := 0.0104980469$
 $Mg(26) := 0.0100097660$
 $Mg(27) := 0.0085449219$
 $Mg(28) := 0.0061035153$
 $Mg(29) := 0.0026855469$
 $Mg(30) := -0.0017089844$
 $Mg(31) := -0.0070800780$
 $Mg(32) := -0.0134277343$
 $Md(1) := -0.0134277343$
 $Md(2) := -0.0070800781$
 $Md(3) := -0.0017089843$
 $Md(4) := 0.0026855471$
 $Md(5) := 0.0061035155$
 $Md(6) := 0.0085449219$
 $Md(7) := 0.0100097660$
 $Md(8) := 0.0104980469$
 $Md(9) := 0.0100097656$
 $Md(10) := 0.0085449209$
 $Md(11) := 0.0061035161$
 $Md(12) := 0.0026855467$

Annexe

$Md(13) := -0.001708984;$

$Md(14) := -0.007080078;$

$Md(15) := -0.0134277343;$

$Md(16) := -0.0207519531;$

$Md(17) := -0.0134277344;$

$Md(18) := -0.007080078;$

$Md(19) := -0.001708984;$

$Md(20) := 0.002685546;$

$Md(21) := 0.006103515;$

$Md(22) := 0.0085449212;$

$Md(23) := 0.0100097665;$

$Md(24) := 0.0104980468;$

$Md(25) := 0.0100097655;$

$Md(26) := 0.0085449215;$

$Md(27) := 0.006103515;$

$Md(28) := 0.002685547;$

$Md(29) := -0.001708984;$

$Md(30) := -0.007080078;$

$Md(31) := -0.0134277344;$

$Md(32) := -0.0207519531;$