

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité: Travaux Publics.

Option: Voies et Ouvrage d'Art (V.O.A).

Présenté par :

KENTOUR MOHAMED

HALOUI SOUHILA

Sujet du mémoire:

**Contribution à l'étude du comportement des
poutres métalliques à ouvertures d'âme.**

Soutenu publiquement le 03/06/2023 devant le jury composé de:

Mr. M. ZIDOUR	Pr	Président
Mr. A. SAOULA	MCA	Rapporteur
Mr. T. HASSAINE DAOUADJI	Pr	Examineur
Mr. T. BENSATTALAH	MCA	Examineur

Promotion: 2022-2023.

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail avec grande amour, sincérité et fierté :

A mes chers parents pour leur patience, leurs amours, leur soutien et leurs encagements.

A mon cher fils Ibrahim

A mes frères.

A mes amis et mes camarades.

Et à tous membres de ma famille.

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

Et à tout qui compulse ce modeste travail.

Mohamed Kentour

Souhila Haloui

Remerciement :

Au terme de ce travail, nous exprimons nos profondes gratitude à notre cher professeur et encadrant Mr. A .SAOULA pour son suivi et pour son énorme soutien, qu'il n'a cessé de nous prodiguer tout au long de la période du projet .Par ailleurs nous remercions Mr. .BOUAKAZE. Chef département génie civile.

Nous adressons aussi nos vifs remerciements aux membres de jury pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail. Nos remerciements vont à tout le personnel que nous avons contacté durant notre projet auprès desquelles nous avons trouvé l'accueil chaleureux, l'aide et l'assistance dont nous avons besoin.

Nous ne laisserons pas cette occasion passer, sans remercier tous les enseignants pour leur aide leur précieux conseils et pour l'intérêt qu'ils portent à notre formation.

Enfin, nos remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ce projet.

Résumé:

Le présent travail traite le déversement latéral par torsion (LTB) de la section creuse rectangulaire (Box) en présence des ouvertures au niveau des âmes. À cette fin, un modèle analytique a été proposé pour fournir les charges critiques de déversement latéral.

Les charges critiques sont déterminées à partir du problème des valeurs propres imposée à la matrice de rigidité tangentielle. La validité des résistances élastiques au déversement latéral évaluées par la méthode proposée est vérifiée avec la simulation par éléments finis à l'aide du logiciel ABAQUS.

Les résultats numériques pour les poutres simplement appuyées et en porte-à-faux, avec des ouvertures d'âme hexagonales, sont présentés pour les poutres de courte et de longue portée. Les propriétés géométriques de la section attribuées à chaque type d'ouverture sont contrôlées en sélectionnant la valeur appropriée du paramètre de réduction.

Mots clés : Poutres, Ouvertures d'âmes, Box, Instabilité latérale, Abaqus.

Abstract:

This work deals with the lateral torsional buckling (LTB) of the rectangular hollow section (Box) in the presence of the openings at the level of the webs. To this end, an analytical model has been proposed to provide critical lateral overturning loads.

The critical loads are given starting from the problem of the eigenvalues imposed on the matrix of tangential rigidity. The validity of the elastic resistances at the lateral level assigned by the proposed method is checked with finite element simulation using the ABAQUS software.

Numerical results for simply supported and cantilevered beams with hexagonal web openings are presented for short and long span beams. The geometric properties of the section assigned to each type of opening are controlled by selecting the appropriate value of the reduction parameter.

Keywords: Beams, Web openings, Box, Lateral instability, Abaqus.

ملخص:

يتم في هذا العمل فحص عدم الاستقرار والالتواء الجانبي المرن (LTB) للعوارض المعدنية المغلفة (Box) في وجود الفتحات على مستوى الويب. تحقيقا لهذه الغاية، تم اقتراح نموذج تحليلي لتوفير أحمال الانقلاب الجانبي الحرجة.

يتم إعطاء الأحمال الحرجة بدءًا من مشكلة القيم الذاتية المفروضة على مصفوفة الصلابة العرضية. تم التحقق من صلاحية المقاومة المرنة للانحناء الجانبي الذي تم تقييمه بالطريقة المقترحة من خلال محاكاة العناصر المحدودة باستخدام برنامج ABAQUS.

يتم تقديم النتائج العددية مع فتحات الويب السداسية للحزم القصيرة والطويلة المدى. يتم التحكم في الخصائص الهندسية للقسم المخصص لكل نوع من أنواع الفتحات عن طريق اختيار القيمة المناسبة لمعامل التخفيض.

الكلمات المفتاحية: الحزم، فتحات الويب، العوارض المغلفة، عدم الاستقرار الجانبي، أباكس.

SOMMAIRE

Remerciements	i
Dédicace	iii
Résumés	iv
Sommaire	vi
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Notations	xii
Introduction Générale.....	2

CHAPITRE – I–

Recherche bibliographique sur l’instabilité des structures.

I.1.Introduction	05
I.2. Modes d’instabilité	06
I.2.1 Flambement.....	06
I.2.1.1 Le Flambement simple	06
I.2.1.2 Le Flambement de flexion	07
I.2.1.3 Aspect expérimental du flambement	07
I.2.1.4 Aspect réglementaire du flambement	08
I.2.2. Déversement des poutres	10
I.2.2.1 Facteurs influençant la résistance au déversement	10
I.2.2.2 Les dangers du déversement	12
I.2.3..Le voilement	12
I.2.3.1. Aspect théorique du voilement	13
I.2.3.2. Aspect réglementaire du voilement	13
I.3.Conclusion	14

CHAPITRE – II–

Le critère de l'instabilité.

II.1.Introduction	16
II.2. Critères de stabilité	16

II.2.1 Critères de bifurcation	16
II.2.2 Critères de cinématique	16
II.2.3 Critères de l'énergie	17
II.2.4 Critère de stabilité choisi	17
II.3. Raisons de la non linéarité dans une structure	17
II.4. Etats d'équilibre stable et instable	18
II.5 Critères généraux de la stabilité élastique	19
II.6 Principe du voyage virtuel	22
II.7 Principe de l'énergie potentielle totale stationnaire	23
II.8 Stabilité de l'équilibre	24
II.9 Equilibre neutre - Chargement critique	25
II.10 Conclusion	27

CHAPITRE – III–

Développement d'un modèle analytique.

III.1 Introduction	29
III.2 Etude analytique de déversement des poutres en Box avec ouvertures d'âme.....	29
III.2.1 Champ de déplacements.....	29
III.2.2 Energie potentielle totale	30
III.2.3 Les solutions numériques de déversement latéral	36
III.3 Conclusion	37

CHAPITRE –IV–

Résultats et discussions.

IV.1. Introduction	39
IV.2. Validations numériques	40
IV.3. Résultats et applications	43
IV.3.1. Influence de la constante k	43
IV.3.2. Influence de la hauteur de charge e_z	46
IV.3.3. Influence de nombre de termes N	50

IV.4.Conclusion:	53
Conclusion Générale et perspectives	54
Références bibliographiques	57

Liste des figures

Figure I.1 : Poutre bi-articulée.....	06
Figure I.2 : Poutrelles laminées courantes.....	08
Figure I.3 : Les courbes de flambement donné par χ et $\bar{\lambda}$	09
Figure I.4 : Déversement d'une poutre.....	10
Figure I.5 : Position de charge.....	11
Figure I.6 : Voilement d'une plaque.....	12
Figure II.1 : Etats d'équilibres.....	19
Figure II.2 : Déformations d'une poutre sur appuis.....	19
Figure II.3 : Déformation d'une poutre cantilever.....	20
Figure III.1 : Poutres caissons avec ouvertures d'âmes: Notations utilisées.....	29
Figure III.2 : Le chargement et les déplacements.....	30
Figure III.3 : Poutres en box avec ouvertures d'âme sous charge concentrée :	
(a) simplement appuyée et (b) en porte-à-faux.....	34
Figure IV.1 : Vue de maillage en élément Shell de la poutre en box avec ouvertures.....	39
Figure IV.2 : Charges critiques Q_{cr} de LTB d'une poutre-caisson en porte-à-faux soumise à une charge concentrée sur la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m): (a) $t=35$ mm et (b) $t=30$ mm.....	42
Figure IV.3 : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson à ouvertures hexagonales simplement appuyée soumise à une charge concentrée à mi-portée pour différentes valeurs de k . ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, $t=30$ mm et hauteur d'ouverture $h_0=0.346$ m, $e_z=-0,3$ m).....	43
Figure IV.4 : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson à ouvertures hexagonales en console soumise à une charge concentrée pour différentes valeurs de k . ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, $t=30$ mm et hauteur d'ouverture $h_0=0.346$ m, $e_z=-0,3$ m).....	44
Figure IV.5 : Charges critiques Q_{cr} d'une poutre avec des ouvertures hexagonales soumise à une charge concentrée ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm $h_0=0,346$ m), Chargement à : (a) la semelle supérieure, (b) le centre de cisaillement et (c) la semelle inférieure.....	49

Figure IV.6 : Charges critiques Q_{cr} d'une poutre simplement appuyée soumises à une charge concentrée ($h=0,6m$, $bf=0,2m$, $t=30mm$ $h_0=0,346 m$), Chargement à la semelle supérieure en fonction de N avec $k=3/4$ 51

Figure IV.7 : Charges critiques Q_{cr} d'une poutre en console soumises à une charge concentrée ($h=0,6m$, $bf=0,2m$, $t=30mm$ $h_0=0,346 m$), Chargement à la semelle supérieure en fonction de N avec $k=1/2$ 52

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Longueurs de flambements poutres courantes.....	9
Tableau IV.1-a : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson en porte-à-faux soumise à une charge concentrée sur la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=35$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec des ouvertures hexagonale	41
Tableau IV.1-b : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson en porte-à-faux soumise à une charge concentrée sur la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec des ouvertures hexagonales.. ..	41
Tableau IV.2-a : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson simplement appuyée soumise à une charge concentrée sur la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec des ouvertures hexagonales.	44
Tableau IV.2-b : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson en porte-à-faux soumise à une charge concentrée sur la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec des ouvertures hexagonales.	45
Tableau IV.3-a : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson simplement appuyée soumise à une charge concentrée ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec $e_z=-h/2$	46
Tableau IV.3-b : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson simplement appuyée soumise à une charge concentrée ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec $e_z=0$	47
Tableau IV.3-c : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson simplement appuyée soumise à une charge concentrée ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec $e_z=+h/2$	47
Tableau IV.4-a : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson simplement appuyée soumise à une charge concentrée dans la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, $t=30$ mm et $h_0=0,346$ m), avec $k=3/4$	50
Tableau IV.4-b : Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson en console soumise à une charge concentrée dans la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, $t=30$ mm et $h_0=0,346$ m), avec $k=1/2$	51

Notations

N : L'effort normal, en générale.

M_0 : Moment fléchissant.

σ_e : Contrainte limite élastique.

σ_K : Contrainte critique d'Euler.

λ : Paramètre d'élanement.

σ_s : Contrainte d'affaissement.

N_c : L'effort de compression.

E : Module d'élasticité.

α : Facteur d'imperfection.

$\bar{\lambda}$: L'élanement réduit.

χ : Coefficient de réduction.

l_k : Longueur de flambement.

l_0 : Longueur nominale.

η_1, η_2 : Les facteurs de distribution de rigidité.

F : Charge concentrée verticale.

G : Centre de gravité.

M_f : Moment de flexion maximal pondérée.

d : étant la hauteur d'âme entre semelles.

a : étant l'écartement, entre nus intérieurs, des raidisseurs.

N_l : Charge axiale de compression.

N_{cr} : Charge critique de flambement élastique.

I_y : Moment d'inertie par rapport à l'axe y .

I_z : Moment d'inertie par rapport à l'axe z .

EI : Rigidité constante.

σ_{cr} : Contrainte critique de flambement élastique.

f_y : Limite d'élasticité.

φ : Angle de torsion.

G : Module de cisaillement.

K : Constante de torsion uniforme.

I_w : Constante de gauchissement.

$C1, C2$ et $C3$: Facteurs dépendant du type de chargement et des conditions d'appui.

k_v, k_φ : Coefficients d'encastrement aux appuis.

z_a : Distance entre le centre de cisaillement C et le point d'application de la charge.

z_C : Distance entre le centre de gravité G et le centre de cisaillement C.

l_D : Longueur de déversement (distance entre deux appuis latéraux).

C : Centre de cisaillement.

β : Caractéristique sectorielle de la section.

v : Déplacement latéral du centre de cisaillement.

w : Déplacement vertical.

θ : Angle de torsion.

U_L : Energie potentielle totale.

T : l'énergie cinétique du système

Π : l'énergie potentielle.

W_{ext} : le travail créé dû aux forces extérieures dans le système,

Q : la quantité de chaleur transmise au système,

ΔT : l'augmentation de l'énergie cinétique,

ΔU : l'augmentation de l'énergie interne,

U : L'énergie de déformation.

δW_{ext} : le travail virtuel des forces extérieures dans les déplacements virtuels.

δU : la variation de l'énergie de déformation dans le déplacement virtuel.

$\delta \Pi$: Variation De l'énergie Potentielle Totale Dans Le Déplacement

Introduction générale

1. Introduction :

La tendance actuelle, dans le domaine des constructions métalliques est de réaliser des structures plus élancées et plus légères en utilisant des nuances d'acier de plus en plus performantes. Mais en contrepartie, cela peut augmenter le risque de ruine par les différents phénomènes d'instabilité (Déversement, flambement et voilement). Il devient alors nécessaire de disposer de méthodes de calcul adaptées et performantes qui permettent d'analyser de façon précise le comportement des éléments structuraux.

Les phénomènes d'instabilité élastique (flambement, déversement, voilement), qui amplifient considérablement les contraintes dans les pièces, et qui sont notamment redoutables en construction métalliques, du fait de l'utilisation de pièces de faible épaisseur et de grand élanement.

Vu que l'emploi des éléments de poutre dans les divers structures est courant, la maîtrise de leur comportement est particulièrement importante, et comme le domaine des Constructions Métalliques est le domaine qui nous intéresse ici, nous nous intéressons aux types de poutres cellulaires (Alvéolaires) qui sont couramment employées. Ces poutres sont très sensibles aux phénomènes d'instabilité.

Les éléments structurels constitués de poutres en acier alvéolaires sont largement employés dans des bâtiments industriels fortement chargés, en raison de leur résistance et économie de matière. Contrairement aux autres membres, les poutres à section creuse rectangulaire cellulaires sont utilisées dans les bâtiments de construction en acier comme une solution économique qui offre l'avantage qui résulte de plus grandes rigidités en flexion et en torsion, facilité d'utilisation due aux perforations des âmes et à l'aspect architectural esthétique.

En comparaison avec les éléments en acier uniformes, en général les poutres cellulaires ayant une section en forme de I sont conçues pour l'efficacité rigidité en flexion requise. Néanmoins, ils présentent plus au moins le déversement par torsion, souvent associé au mode de distorsion de l'âme.

Ce travail vise à comprendre le comportement au déversement latéral des poutres à section fermée sous diverses conditions aux limites. Pour cet objectif un modèle analytique a été formulé afin de fournir les charges critiques, pour les poutres ayant des ouvertures d'âme.

Le modèle est basé sur le principe de l'énergie potentielle totale réalisée dans le cadre de comportement élastique.

La validité du modèle proposé parcouru une quantité d'exemples, comparés avec succès à l'analyse par éléments finis, fournie par le logiciel ABAQUS. Par la suite, étude conceptuelle impliquant des paramètres géométriques est réalisée, y compris également les formes d'ouverture de poutres.

2. L'objectif de thèse :

Les bâtiments métalliques soient portés certains problèmes par la comparaison avec les bâtiments en béton armé notamment les phénomènes d'instabilité qui sont :

- le flambement, qui affecte les poteaux simplement comprimés (flambement simple) ou comprimés et fléchies (flambement composé) qui est très dangereux.
- le déversement, qui affecte les semelles comprimées des poutres fléchies, et le voilement qui affecte les pièces fléchies.

C'est pour cela nous avons choisi dans notre projet de fin d'étude, de présenter la vérification des phénomènes d'instabilité des poutres cellulaires au déversement, sous différents cas de chargement et en présence d'ouverture au niveau des âmes.

3. Plan de travail :

Après une introduction générale, on présente dans le premier chapitre une recherche bibliographique sur les différents phénomènes d'instabilité dans les éléments structuraux en acier, le deuxième chapitre sera consacré à une revue générale sur le critère de l'instabilité des éléments à parois minces ainsi que les différents points théoriques.

Dans le troisième chapitre le modèle analytique pour l'étude de l'instabilité des poutres avec ouvertures d'âmes sera présenté. Le dernier chapitre expose la modélisation en utilisant le logiciel « Abaqus », ainsi que la comparaison des résultats éléments finis et le modèle analytique. Enfin, on achève ce travail par une conclusion générale portant sur les différents aspects traités dans ce mémoire.

Chapitre – I–

Recherche bibliographique sur l'instabilité des structures.

I.1. Introduction :

La théorie de la stabilité a été développée pour déterminer les conditions dans lesquelles une structure en équilibre n'est plus stable. Il faut s'assurer que la structure s'écarte légèrement de sa position d'équilibre en raison des forces, chocs, vibrations, imperfections, contraintes résiduelles, etc. Une fois la perturbation supprimée, aura tendance à revenir à sa position initiale, nous avons trois instabilités:

Les facteurs les plus importants dans l'étude d'un projet sont l'économie et la sécurité, deux exigences souvent contradictoires. Dans le cas des structures en acier, la satisfaction à l'exigence économique nous pousse à utiliser des éléments légers et élancés, mais cela expose ces éléments à des phénomènes d'instabilité prépondérants dans leur dimensionnement. Les recherches sur la stabilité des éléments élancés ont montré que leur utilisation présente certains inconvénients, tels que l'exigence d'un calcul plus poussé, les difficultés de fabrication et la nécessité de comprendre les phénomènes d'instabilités qui les affectent. Les codes font référence à trois situations principales habituellement: le flambement d'ensemble de la poutre par compression, le déversement d'ensemble de la poutre par flexion et le voilement local des parois de la poutre par compression et par cisaillement.

L'instabilité des structures est un phénomène courant dans le génie civil et peut avoir des conséquences désastreuses. Elle peut être causée par divers facteurs, tels que des erreurs de conception, des conditions environnementales défavorables, des défauts de fabrication ou des dommages résultant de l'utilisation ou du vieillissement de la structure. Les ingénieurs civils et les architectes s'efforcent constamment de minimiser le risque d'instabilité en effectuant des calculs de charge rigoureux, en utilisant des matériaux et des techniques de construction de haute qualité et en appliquant des normes de sécurité strictes.

Les chercheurs travaillent à développer de nouveaux modèles et outils pour prédire et prévenir les défaillances structurelles, ainsi qu'à améliorer les méthodes d'inspection et de maintenance pour détecter les signes avant-coureurs d'instabilité. L'étude de l'instabilité des structures est un domaine de recherche important dans le génie civil, la mécanique des structures et la physique. Les méthodes de prévention incluent l'utilisation de normes de sécurité strictes, l'inspection et la maintenance régulières des structures existantes, ainsi que l'utilisation de technologies de pointe telles que l'intelligence artificielle et les capteurs de surveillance. Malgré toutes les précautions prises, des incidents d'instabilité peuvent toujours se produire, mettant en danger la vie et les biens des personnes.

I.2 Modes d'instabilité :

I.2.1 Flambement :

Le flambement est un phénomène en mécanique des structures qui se produit lorsqu'une colonne ou une poutre mince ne peut plus supporter une charge axiale comprimante et se déforme latéralement de manière instable. Les ingénieurs utilisent des lois mathématiques pour déterminer la capacité de charge critique d'une colonne ou d'une poutre mince, notamment l'équation d'Euler. Cette équation établit que la charge critique de flambement d'une colonne ou d'une poutre mince dépend du module d'élasticité du matériau, de la surface de la section transversale et de la longueur au carré. Si la charge appliquée est inférieure à la charge critique de flambement, la structure reste stable, sinon la structure peut subir une défaillance. Il est donc essentiel de prendre en compte le flambement dans la conception des structures pour garantir leur sécurité.

I.2.1.1 Le Flambement simple :

Le flambement simple affecte les pièces soumises à la compression simple. Son étude est due à EULER.

La théorie d'Euler est fondée :

- Sur une poutre droite, bi-articulée à ses extrémités,
- Soumise à un effort normal de compression centré N , appliqué dans l'axe Ox ,
- Dont les dimensions transversales sont faibles en regard de la longueur (élancement),
- Dont les inerties sont maximales dans le plan zOx et minimale dans le plan yOx (Fig.I.1)

Lorsque N croît, à partir de zéro, l'état d'équilibre rectiligne initial évolue vers un état curviligne fléchi.

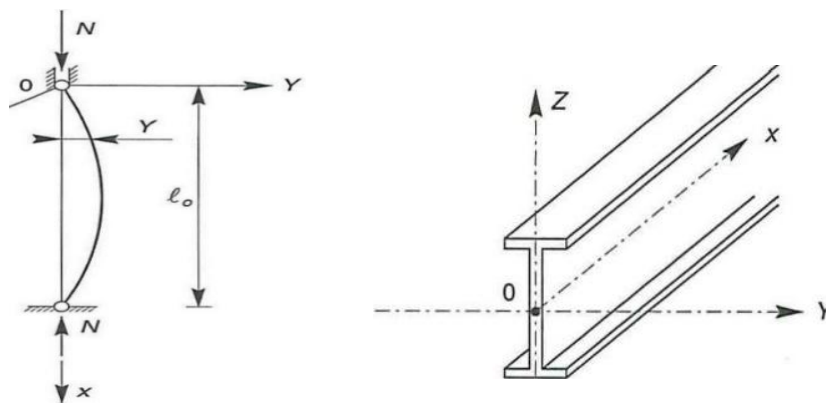


Figure I.1: Poutre bi-articulée

I.2.1.2. Le Flambement flexion :

Il s'agit, dans ce cas, d'une poutre idéale rectiligne, soumise simultanément à une force normale N et à un moment fléchissant M_0 .

En comparaison au flambement simple, il y a dans ce cas une amplification de la déformée et donc des contraintes de flexion et de compression.

Pour des fonctions simples de $M_0(x)$, l'intégration est possible. Considérons les deux cas les plus courants de moments :

- Moment sous charge concentrée transversale,
- Moment sous charge uniformément répartie transversale.

A. Sous charge concentrée q :

Une charge concentrée est une charge qui s'étend sur une distance relativement très courte de la poutre, de sorte que l'on puisse considérer que cette charge agit en un point, sans erreur appréciable. Une colonne de béton supportée par une poutre reposant sur deux poteaux d'acier, est un exemple d'une charge concentrée.

B. Sous charge uniformément répartie :

Une charge uniformément répartie est une charge qui agit sur une distance considérable de la poutre, et ce de façon uniforme, c'est-à-dire la charge sollicitant par unité de longueur de la poutre est constante. Le poids de la poutre, lui aussi, est une charge uniformément répartie sur toute sa longueur.

I.2.1.3. Aspect expérimental du flambement :

L'expérimentation en laboratoire, effectuée sur des poutrelles laminées courantes, (Fig.I.2) soumises à des efforts de compression progressivement croissants, montre que la ruine des pièces se manifeste de deux façons différentes, selon l'élancement des pièces.

- Pour les pièces de faible élancement (forte section, faible hauteur, $\lambda < 20$), la ruine se manifeste par l'affaissement des membrures, sous la contrainte σ_e approximativement.
- Pour les pièces de grand élancement ($\lambda > 100$), la ruine intervient pour une contrainte d'affaissement σ_s (inférieure à la limite élastique σ_e et à la contrainte d'Euler [1] σ_k), pour laquelle on observe une augmentation brutale des déformations, avec l'apparition de zones plastifiées, suivie d'un effondrement. En outre, la courbe contraintes/déformations n'est pas linéaire.

L'affaissement a lieu pour une contrainte σ_s inférieure à σ_k . La contrainte d'Euler [1] représente en fait une borne supérieure, que l'on ne peut atteindre, du fait que la théorie

d'Euler [1] prend en compte une barre idéale, parfaitement rectiligne et soumise à un effort de compression N parfaitement centré au centre de gravité de la section et appliqué suivant l'axe moyen, ce qui n'est jamais le cas dans la réalité. En effet :

- 1 - Les pièces, après leur traitement en laminoir et leurs diverses manutentions et transport, ne sont pas rigoureusement rectilignes (défauts de rectitude) ;
- 2 - Leurs inerties ne sont pas constantes (tolérances de laminage) ;
- 3 - Les efforts normaux de compression et les appuis ne sont jamais rigoureusement centrés (défauts de centrage) ;
- 4 - Les poteaux, sur chantier, ne sont jamais parfaitement verticaux (tolérances de montage) ;
- 5 - Enfin, le module d'élasticité E de l'acier n'est pas vraiment constant, du fait des contraintes résiduelles de laminage (défauts d'homogénéité). Ces cinq types de défauts, plus ou moins prononcés, mais réels et inévitables, contribuent à affaiblir les éléments.

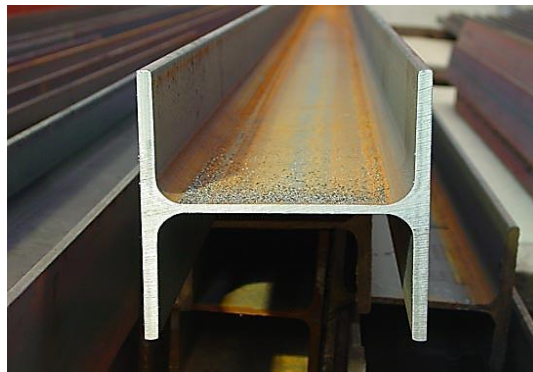


Figure I.2 : Poutrelles laminées courantes

I.2.1.4. Aspect réglementaire du flambement :

La théorie d'Euler [1], établie pour des structures idéales, est très insuffisante, en regard des imperfections de centrage, de rectitude, de verticalité et de la présence de contraintes résiduelles.

Il est donc nécessaire de prendre en compte ces imperfections ou leurs effets. Les règlements ont notamment défini un facteur d'imperfection α

- Vérification selon l'Eurocode 3 :

A. Flambement simple:

Le risque de flambement n'est à considérer que si $\bar{\lambda} > 0,2$

Pour les éléments à section transversale constante, sollicités en compression axiale constante, la valeur de χ pour l'élançement réduit $\bar{\lambda}$

Le facteur d'imperfection α correspondant la courbe appropriée de flambement vaut :

Courbure de flambement	a	b	c	d
Facteur d'imperfection α	0,21	0,34	0,49	0,76

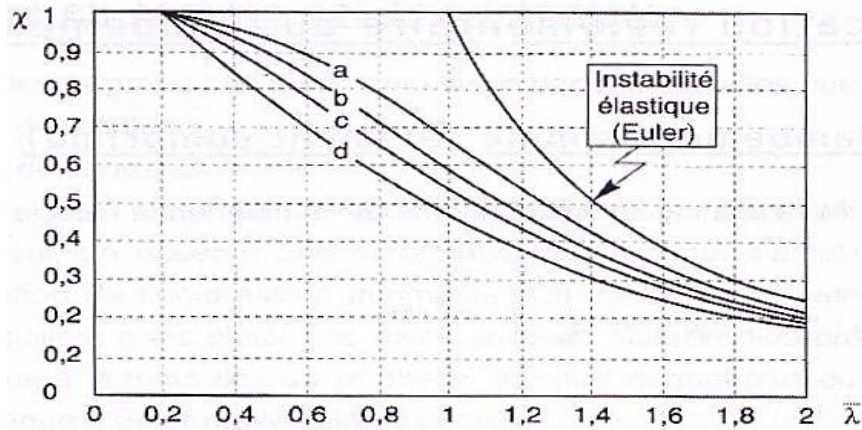


Figure I.3 : Les courbes de flambement donné par χ et $\bar{\lambda}$

B. Flambement flexion:

Les éléments sollicités simultanément en flexion et en compression axiale, doivent satisfaire à diverses conditions, selon la classe de leur section transversale

C. Longueurs de flambement:

La longueur de flambement l_k d'un élément peut être déterminée, en fonction de sa longueur nominale l_0 , à partir de l'annexe E de l'Eurocode3 [2].

Tableau I.1 : Longueurs de flambements poutres courantes

Conditions d'appuis	m	ℓ_K
<p>• Sans déplacements des extrémités</p>	1	ℓ_0
	2	$0,7 \ell_0$
	4	$0,5 \ell_0$
	$1 < m < 2$	$> 0,7 \ell_0$
<p>• Avec liberté de déplacements aux extrémités</p>	$\frac{1}{4}$	$2 \ell_0$
	1	ℓ_0
	$m < \frac{1}{4}$	$> 2 \ell_0$

I.2.2 Déversement des poutres :

Le déversement des poutres métalliques est un phénomène mécanique qui se produit lorsque des poutres en métal fléchissent latéralement sous l'effet d'une charge, et deviennent instables, ce qui peut entraîner un déversement complet de la poutre. Les poutres métalliques sont particulièrement sensibles au déversement en raison de leur faible résistance à la flexion latérale. Les ingénieurs doivent prendre en compte les propriétés physiques de la poutre, telles que la longueur, le module d'élasticité, la section transversale, ainsi que les contraintes internes et externes, pour déterminer la charge maximale admissible avant le déversement. Ils peuvent également concevoir des renforts pour augmenter la résistance à la déformation latérale et minimiser le risque de déversement.

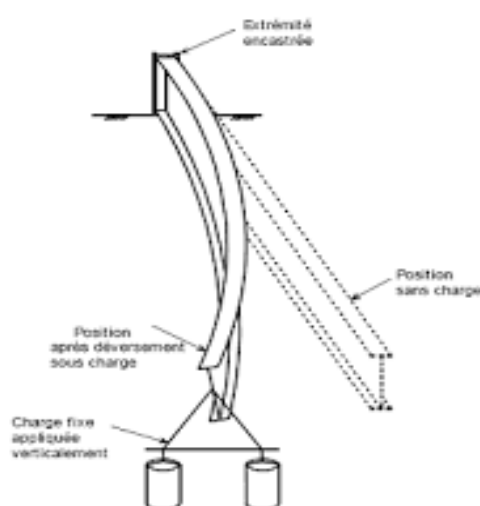


Figure I.4 : Déversement d'une poutre.

I.2.2.1. Facteurs influençant la résistance au déversement :

A- Influence des conditions d'appuis :

La majorité des théories présentées supposent que les appuis aux extrémités de la poutre sont des appuis à fourche. Il convient donc d'accorder une attention particulière à ces appuis pour s'assurer qu'ils respectent au moins cette hypothèse, en empêchant toute translation horizontale et rotation. Si l'on ne prend pas en compte les effets positifs d'un éventuel encastrement latéral des ailes, il est préférable de se concentrer sur la sécurité. Pour augmenter la charge critique de déversement d'une poutre donnée, il est souvent plus rentable de placer des appuis latéraux intermédiaires plutôt que de choisir une section plus importante. Pour ce faire, on peut simplement appuyer la poutre au niveau de la membrure comprimée.

Bien qu'une légère rotation des sections soit possible dans ce cas, elle peut généralement être négligée.

B- Influence du point d'application de la charge :

La position des charges externes par rapport à la section transversale de la poutre peut également influencer la valeur du moment de déversement, selon qu'elles créent un moment de torsion stabilisateur ou déstabilisateur. Cependant, la théorie du déversement présentée dans ce travail suppose que les charges agissent sur l'axe de la poutre. Cette hypothèse peut être étendue à d'autres cas en tenant compte des remarques suivantes. Si les charges ne sont pas situées sur l'axe de la poutre mais sur l'aile inférieure, la contrainte de déversement est légèrement plus élevée, donc du côté de la sécurité. En revanche, si les charges sont situées sur l'aile supérieure, la contrainte de déversement diminue. Ce cas est rarement rencontré en pratique car les éléments stabilisateurs sont généralement présents à l'emplacement des charges. Cependant, les voies de roulement des ponts roulants constituent une exception. Dans ce cas, les poutres sont dimensionnées pour résister aux forces horizontales agissant sur le rail, ce qui réduit le problème de stabilité à un problème de résistance.

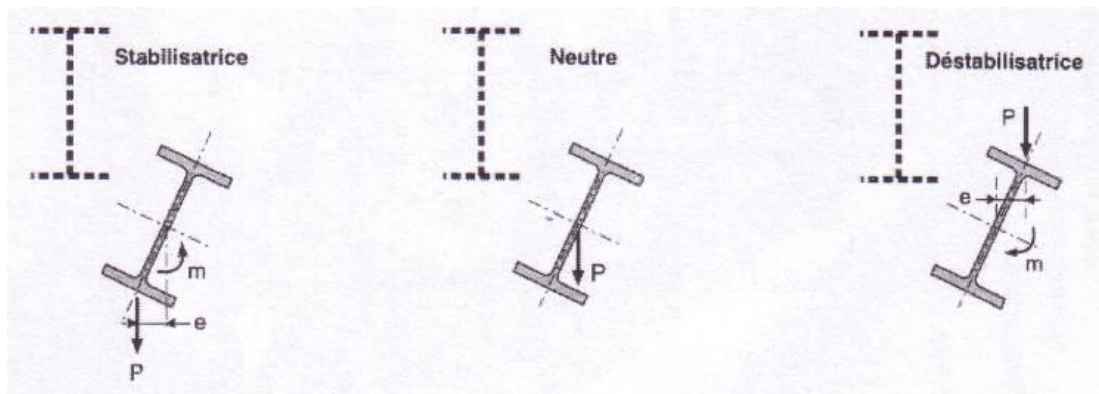


Figure I.5 : Position de charge.

C- Influence du mode de chargement :

Le calcul du moment de déversement est fonction du type de chargement de la poutre, ou, en d'autres termes, de la répartition des moments de flexion.

I.2.2.2. Les dangers du déversement :

Dans la pratique, les entreprises et bureaux d'études sont très avertis des dangers du flambement, et chaque pièce comprimée est calculée en conséquence. En revanche, concernant les pièces fléchies, les calculs très souvent se limitent simple dimensionnement en flexion (simple ou déviée), sans vérification du risque de déversement.

En fait, les désordres provoqués par le déversement peuvent être légers (poutre déformées bacs acier déchirés), mais également graves (effondrements partiels ou totaux).

I.2.3 Voilement :

Le voilement des plaques est un phénomène mécanique qui se produit lorsque des plaques minces, telles que des panneaux en métal ou en plastique, se déforment en forme de vague sous l'effet d'une charge. Cette déformation peut causer une perte de stabilité et une défaillance de la structure. Le voilement peut être causé par des charges externes, telles que le vent ou la pression, ou par des contraintes internes résultant de la différence de température ou de la tension dans la plaque. Les ingénieurs utilisent des modèles mathématiques pour déterminer la résistance au voilement des plaques et pour concevoir des solutions de renforcement ou d'amélioration de la résistance en cas de nécessité.

Comme pour les éléments en compression, la plaque reste plane jusqu'à ce que la charge appliquée atteigne une valeur critique, au-delà de laquelle elle flambe avec déplacements latéraux.

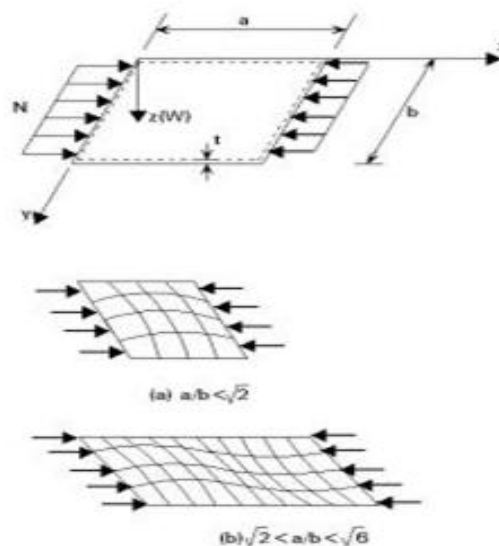


Figure I.6 : Voilement d'une plaque.

I.2.3.1. Aspect théorique du voilement :

La théorie du voilement consiste généralement à utiliser la méthode énergétique de Timoshenko [4], qui détermine une contrainte critique, obtenue dès lors que le travail des forces extérieures appliquées atteint le niveau de potentiel interne de la plaque sollicitée. L'expérience montre cependant que cette théorie est insuffisante, car les contraintes critiques calculées ne correspondent que rarement aux contraintes de ruine expérimentales.

Cela s'explique, entre autres, par les effets de membrane, à savoir des tractions stabilisatrices générées par les déformations transversales, que la théorie ne prend pas en compte. Nous ne développerons donc pas ici les calculs théoriques du voilement:

- D'une part, en raison de leur longueur et de leur grande complexité,
- D'autre part, parce que les profilés laminés normalisés (IPE, HEA...) sont peu ou pas sensibles au voilement ; leurs âmes étant sur dimensionnées.

I.2.3.2. Aspect réglementaire du voilement :

La résistance au voilement par cisaillement des âmes de poutres est définie au chapitre 5.6. De l'Eurocode 3 [2]. Elle dépend du rapport hauteur-épaisseur d/t_w ainsi que de l'espacement des éventuels raidisseurs d'âme intermédiaires.

- Méthodes de calcul :

- La méthode post- critique simple, qui peut être utilisée dans tous les cas, que les âmes comportent ou non des raidisseurs transversaux intermédiaires, à condition qu'il existe des raidisseurs transversaux aux appuis ;
- La méthode du champ diagonal de traction, qui peut être utilisée lorsque les âmes comportent des raidisseurs transversaux intermédiaires, à condition que :

$$1 \leq a/d \leq 3$$

d ; étant la hauteur d'âme entre semelles ;

a : étant l'écartement, entre nus intérieurs, des raidisseurs ;

Lorsque $a/d > 3$, l'inclinaison du champ diagonal de traction est telle, que cette méthode place très largement en sécurité. La première méthode sera alors préférable.

Quelle se soit les méthodes utilisée (postcritique simple, champ diagonal de traction), il convient de vérifier la résistance des raidisseurs transversaux.

La ruine d'une âme non raidie, soumise à des charges transversales, peut survenir selon trois modes :

- Mode1: Ecrasement de l'âme, à proximité de la semelle.
- Mode 2 : Enfoncement local de l'âme sous forme de voilement localisé.
- Mode 3 : Voilement de l'âme sur la plus grande partie de sa hauteur.

Quant aux modes d'application des charges transversales, on distingue :

- Soit des charges appliquées sur une semelle et reprises par cisaillement dans l'âme

En ce cas, il faut vérifier les modes de ruine 1 et 2.

- Soit des charges appliquées sur une semelle et transmises, au travers de l'âme, directement à l'autre semelle.

En ce cas, il faut vérifier les modes de ruine 1 et 3.

I.3. Conclusion :

Dans ce chapitre, une recherche bibliographique a été exposée à savoir: le flambement qui concerne beaucoup plus les éléments comprimés, le déversement qui touche les poutres fléchies, et finalement le voilement des plaques métalliques. Cette revue ne donne aucune information sur le calcul ou l'aspect analytique et réglementaire des poutres métalliques.

Chapitre –II–

Le critère de l'instabilité.

II.1. Introduction :

La stabilité structurelle visent à comprendre les conditions dans lesquelles une structure en équilibre peut perdre sa stabilité. L'instabilité est généralement associée à des configurations géométriques extrêmes, telles que des éléments comprimés de grande portée, des plaques minces plates ou des coques minces cylindriques.

Plusieurs critères de stabilité ont été développés dans le domaine de l'élasticité, offrant des conditions suffisantes pour déterminer si un système est instable, on peut citer :

- Le critère de bifurcation.
- Le critère cinétique.
- Le critère de l'énergie.

II.2. Critères de stabilité:

II.2.1. Critère de bifurcation :

Ce critère est également connu sous divers noms tels que méthode géométrique, méthode classique ou méthode de l'équilibre adjacent. Du point de vue mathématique, il s'agit d'un problème de valeurs propres. Cette méthode, qui remonte à une époque ancienne, est toujours largement utilisée de nos jours dans le contexte linéaire. Elle vise à répondre à la question suivante : si une force externe est appliquée de manière quasi-statique à un système, à quel niveau cette force permet-elle au système de prendre plus d'une position d'équilibre distincte mais très proche l'une de l'autre ?

II.2.2. Critère cinématique :

Également connue sous le nom de méthode dynamique, cette approche consiste à établir les équations d'équilibre pour un niveau fini de la force externe, inférieur à la charge critique. On crée ensuite une perturbation dans le système pour observer son influence sur le mouvement, tout en augmentant progressivement le niveau de charge jusqu'à ce que le mouvement devienne illimité, atteignant ainsi le niveau critique.

Ainsi, l'équilibre est considéré comme stable si une petite perturbation ramène le système à sa position d'équilibre initiale ou à une position très proche, et la condition critique est atteinte lorsque l'écart entre la position initiale et finale cesse d'être limité. Cette approche est purement dynamique et se concentre sur le mouvement à proximité de la position d'équilibre.

II.2.3. Critère de l'énergie :

La méthode en question exige la préservation du système, qui ne peut être considéré en équilibre stable que lorsque son énergie potentielle totale est minimale. Ce critère de stabilité s'appuie sur la théorie de Lagrange-Dirichlet et est reconnu comme étant une condition nécessaire et suffisante. Il permet de déterminer la charge critique du système en cherchant simplement le niveau de charge qui entraîne une perte de stabilité.

Autrement dit, si la variation de l'énergie potentielle totale est positive, le système n'est plus stable. Cette méthode est applicable à divers types de systèmes physiques, tels que les systèmes électromagnétiques, thermodynamiques ou mécaniques, et peut être utilisée pour étudier leur stabilité dans différentes conditions.

II.2.4. Critère de stabilité choisi :

Dans le cadre de cette étude, nous avons opté pour le critère de l'énergie afin de déterminer la charge critique élastique. Ce choix a été motivé par notre examen des travaux antérieurs dans ce domaine, qui nous a convaincus que l'utilisation de ce critère permettrait une meilleure approximation du comportement réel des éléments. Haut du formulaire critère permettrait une meilleure approximation du comportement réel des éléments.

II.3. Raisons de la non linéarité dans une structure :

Dans une structure, la relation entre les charges et les déformations ou entre les charges et les efforts internes peut devenir non linéaire pour deux raisons :

1. La classe des problèmes de non linéarité physique est définie par le fait que le matériau ne soit pas élastique et ne suive pas la loi de Hooke.
2. Dans le cas où le matériau est linéaire, mais où les déplacements de la structure altèrent de manière significative l'action des forces, les conditions d'équilibre doivent être formulées dans la position déformée de la structure. Cette modification entraîne une relation non linéaire entre les charges et les déformations ou les efforts internes, ce qui définit la classe de non linéarité géométrique.

En général, les non linéarités physique et géométrique apparaissent simultanément, ce qui complexifie grandement les calculs. Cette complexité résulte d'une part des complications mathématiques inhérentes aux équations non linéaires, et d'autre part du choix difficile parmi

plusieurs solutions mathématiques possibles, afin de sélectionner celle qui est la plus pertinente pour les applications pratiques.

La théorie linéaire résout le problème de non-linéarité grâce à la linéarité des relations, ce qui permet l'unicité de la solution.

II.4. Etats d'équilibre stable et instable :

La stabilité est la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre après une perturbation légère, de manière générale.

Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet : **«l'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles ».**

Cette définition montre clairement que la stabilité détermine une qualité d'une solution (une solution d'équilibre) d'un système et que le problème de s'assurer de la stabilité d'une solution concerne le « voisinage » de cette solution particulière.

Un système élastique conservatif en équilibre ne bouge que si une force perturbatrice temporaire est appliquée. L'énergie transférée au système par la force perturbatrice est représentée par W . C'est la seule condition pour que le système se déplace de sa position d'équilibre initiale, on a alors :

$$W = T + \Pi = \text{constante (principe de conservation de l'énergie.)}$$

Ou, T représente l'énergie cinétique du système et Π l'énergie potentielle. Pour des corps rigides, la stabilité peut être illustrée par l'exemple bien connu de la bille sur un support courbe.

Si la bille repose sur une surface concave, l'équilibre est stable ; si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre.

D'un autre côté, si le système n'est pas dans une configuration de Π minimum (énergie potentielle), alors le fait de lui donner une impulsion va conduire très rapidement à de grands déplacements et vitesses et on dit que le système est instable. C'est le cas lorsque la bille

repose au sommet d'une surface convexe ou au point d'inflexion horizontal d'une surface. Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit «neutre».

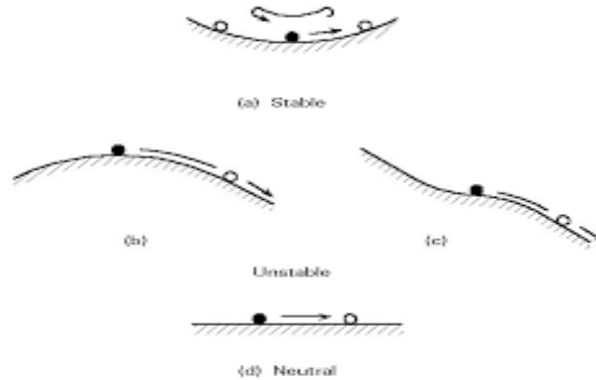


Figure II.1 : Etats d'équilibres.

II.5. Critères généraux de la stabilité élastique :

On considère les changements de la configuration d'un système à partir d'une configuration initiale ; tout changement dans cette configuration est considéré comme un déplacement.

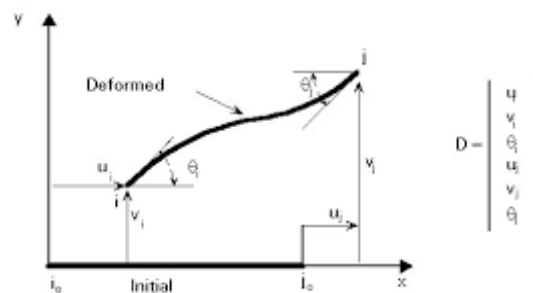


Figure II.2 : Déformations d'une poutre sur appuis.

Une configuration est déterminée au moyen d'un nombre fini de variables réelles indépendantes, appelées coordonnées généralisées, notées ici $q_1, q_2 \dots q_n$ ou plus généralement q_i . Une poutre à travée unique peut, bien sûr, avoir un ensemble infini de coordonnées généralisées, comme par exemple les coefficients q_i de la série de Fourier représentant la flèche :

$$Y = \sum_i q_i \sin \frac{i\pi x}{L} \quad \text{II.1}$$

Cette série peut cependant être approchée par un nombre fini de termes avec un nombre fini de coordonnées généralisées représentant les degrés de liberté du système. Si l'on considère la poutre de la figure II.2, les coordonnées généralisées peuvent être les degrés de liberté des nœuds i et j aux extrémités de la poutre : deux translations u et v et une rotation θ par nœud (dans le plan). On suppose ici que l'ensemble de l'allure de la déformée élastique de la poutre peut être défini en utilisant, par exemple, des fonctions d'interpolation. Le vecteur déplacement de la poutre peut être noté :

$$D = (u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j) \quad \text{II.2}$$

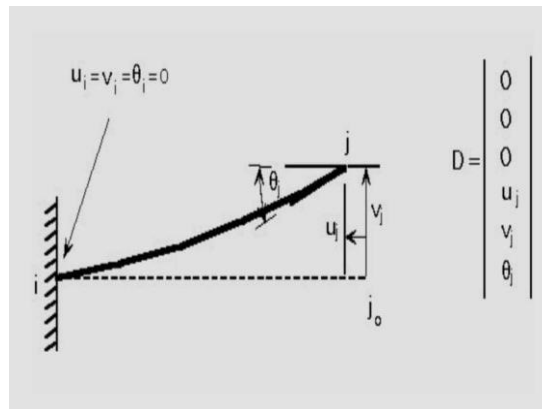


Figure II.3 : Déformation d'une poutre cantilever.

Aux appuis, les conditions aux limites imposent des restrictions aux variables généralisées. Sur la figure II.3, par exemple, les conditions aux limites sont telles que le vecteur déplacement est nul à l'extrémité encastree de la poutre console, d'où les restrictions imposées : $u_i = v_i = \theta_i = 0$.

Une structure est généralement soumise à des forces intérieures et extérieures ; les forces intérieures sont généralement des forces de traction (de décohésion), c'est-à-dire des forces dues aux contraintes, sur les faces d'un cube infiniment petit de matériau. Les forces extérieures agissent sur le volume (par exemple la gravitation), et/ou sur la surface (forces ou couples de contacts) de l'élément de la structure.

Lors d'un changement dans la configuration du système, la loi de conservation de l'énergie peut s'exprimer de la manière suivante :

$$W_{ext} + Q = \Delta T + \Delta U \quad \text{II.3}$$

Où :

W_{ext} représente le travail créé dû aux forces extérieures dans le système,

Q représente la quantité de chaleur transmise au système,

ΔT représente l'augmentation de l'énergie cinétique,

ΔU représente l'augmentation de l'énergie interne,

U est souvent appelée énergie de déformation.

D'autre part, la loi de l'énergie cinétique est donnée par :

$$W = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta T \quad \text{II.4}$$

Où : W_{int} représente le travail des forces intérieures,

W représente le travail créé par toutes les forces appliquées au système.

Les équations (2.3) et (2.4) donnent :

$$W_{\text{int}} = Q - \Delta U \quad \text{II.5}$$

Comme on ne prend en compte ici que des processus adiabatiques : $Q = 0$

L'équation (2.5) donne :

$$W_{\text{int}} = -\Delta U \quad \text{II.6}$$

N.B. : ΔU n'existe que pour des systèmes déformables ; pour un système rigide on a :

$W_{\text{int}} = 0$ donc

$$\Delta U = 0 \quad \text{II.7}$$

Comme on ne prend en compte ici que les aspects statiques, on suppose qu'il n'y a pas de variation de l'énergie cinétique pendant le déplacement (vitesse très faible) :

$$\Delta T = 0 \quad \text{II.8}$$

Des équations (2.1), (2.2) et (2.5) donnent :

$$W_{\text{ext}} = \Delta U \quad \text{II.9}$$

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = 0$$

II.10

La théorie de la stabilité élastique fournit des méthodes pour déterminer :

- La stabilité d'une configuration d'équilibre.
- La valeur critique de la charge à l'instabilité.

La plupart de ces méthodes dérivent des critères énergétiques généraux qui proviennent eux-mêmes des principes énergétiques de la mécanique.

II.6. Principe du voyage virtuel :

En général, pour étudier les problèmes de stabilité, on se réfère au principe du travail virtuel. Tout d'abord, il convient de déterminer si le système possède une configuration d'équilibre réelle, si elle existe. Ensuite, il faut vérifier si cette configuration est stable.

Les conditions aux limites permettent à un système de prendre un nombre infini de configurations déformées, mais parmi celles-ci, seule une correspond à l'équilibre entre les charges réellement appliquées et les réactions correspondantes.

Supposons qu'un système soit dans une configuration caractérisée par les Coordonnées généralisées q_1, q_2, \dots, q_n et pour laquelle on recherche l'équilibre.

En supposant que le système a atteint sa configuration d'équilibre, il peut être soumis à des déplacements arbitraires et petits à partir de cette position. Cependant, ces déplacements doivent satisfaire les conditions aux limites, tandis que la structure est soumise à son chargement réel. Bien que ces déplacements soient imaginaires et ne servent qu'à des fins de comparaison, ils sont appelés déplacements virtuels (δq_i). Les déplacements virtuels ne dépendent pas du chargement et sont considérés indépendamment de ce dernier.

Par conséquent, tous les travaux ou calculs énergétiques mis en œuvre sur ce système donneront lieu à des travaux ou énergie virtuels.

Pour un système déformable, l'équation (2.9) donne :

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta U$$

II.11

Où : δW_{ext} représente le travail virtuel des forces extérieures dans les déplacements virtuels.

Et δU représente la variation de l'énergie de déformation dans le déplacement virtuel.

Le principe du travail virtuel peut être exprimé ainsi :

«Un système déformable est dans sa configuration d'équilibre si le travail virtuel de toutes les forces extérieures est égal à la variation d'énergie de déformation, dans tout déplacement virtuel satisfaisant les conditions aux limites».

C'est là la forme du principe que l'on rencontre le plus souvent en analyse des structures ; cette condition est équivalente à la condition suivante, en utilisant l'équation (2.10) :

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad \text{II.12}$$

II.7. Principe de l'énergie potentielle totale stationnaire :

Le système est considéré comme parfaitement conservatif, avec des forces intérieures et extérieures qui sont toutes conservatrices. Les forces intérieures dérivent d'une fonction scalaire unique des coordonnées généralisées $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$, qui représente l'énergie de déformation du système, comme exprimé dans l'équation (3.6).

De même, les forces extérieures dérivent d'une fonction $\Omega(q_1, q_2, \dots, q_n)$, qui représente l'énergie potentielle de ces forces. Par conséquent, toutes les forces peuvent être dérivées d'une seule fonction scalaire $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$, appelée fonction potentiel total, dont la valeur est la somme de l'énergie potentielle totale du système, exprimée par l'équation Le système est considéré comme parfaitement conservatif, avec des forces intérieures et extérieures qui sont toutes conservatrices.

Les forces intérieures dérivent d'une fonction scalaire unique des coordonnées généralisées $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$, qui représente l'énergie de déformation du système, comme exprimé dans l'équation (3.4). De même, les forces extérieures dérivent d'une fonction $\Omega(q_1, q_2, \dots, q_n)$, qui représente l'énergie potentielle de ces forces. Par conséquent, toutes les forces peuvent être dérivées d'une seule fonction scalaire $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$, appelée fonction potentiel total, dont la valeur est la somme de l'énergie potentielle totale du système, exprimée par l'équation :

$$\Pi = U + \Omega. \quad \text{II.13}$$

La valeur totale de l'énergie potentielle est généralement indéterminée. Seules des différences d'énergie potentielle peuvent être déterminées.

Parce qu'on suppose le système parfaitement conservatif, on a :

$$\delta W = -\delta II \quad \text{II.14}$$

Où δII Représente La Variation De l'énergie Potentielle Totale Dans Le Déplacement Virtuel et (2.12) et (2.14) Donnent :

$$\delta II = 0 \quad \text{II.15}$$

L'équation (2.15) Est Une Traduction Analytique Du Principe De l'énergie Potentielle Totale Stationnaire qui dit que :

« De toutes les configurations géométriques possibles d'un système, celle qui correspond à l'équilibre entre les charges appliquées et les réactions correspondantes est celle pour laquelle l'énergie potentielle totale est stationnaire ».

En conclusion, il convient de souligner que pour les systèmes parfaitement conservatifs, le principe du travail virtuel peut être remplacé par le principe de l'énergie potentielle totale stationnaire. Ce principe est précis et extrêmement efficace, permettant de développer des méthodes approximatives pour résoudre les problèmes de stabilité dans la conception générale des structures.

II.8. Stabilité de l'équilibre :

La stabilité d'un système peut être définie par sa tendance à revenir à sa configuration d'équilibre initiale après une perturbation faible. Si la perturbation amène le système à quitter sa position d'équilibre, il est considéré comme instable. Toutefois, il peut exister une situation intermédiaire où la configuration légèrement déformée se maintient à l'arrêt de la perturbation, correspondant à un état d'équilibre neutre (comme l'exemple classique de la bille dans un bol).

Il est important de noter que les petits déplacements doivent être compatibles avec les conditions aux limites et correspondre à de légères variations des coordonnées généralisées du système, afin que l'analyse de la stabilité de l'équilibre puisse être basée sur les déplacements virtuels.

Le principe du travail virtuel montre que l'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre ; on a aussi vu que l'équilibre est stable pour un minimum relatif ; la condition de stabilité peut donc être écrite sous la forme :

« L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale, en configuration d'équilibre constitue à la fois une condition nécessaire et suffisante de stabilité de cette configuration ».

Si on note $\Delta\Pi$ l'augmentation de l'énergie potentielle totale due à un déplacement virtuel à partir de la configuration d'équilibre, on a :

- $\Delta\Pi > 0$: équilibre stable;
- $\Delta\Pi = 0$: équilibre neutre;
- $\Delta\Pi < 0$: équilibre instable;

On peut voir que, car que l'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre ($\delta\Pi = 0$), discuter de la stabilité revient à discuter des termes d'ordre supérieur qui apparaissent dans l'augmentation de l'énergie potentielle totale $\Delta\Pi$.

II.9. Equilibre neutre - Chargement critique :

Si l'on prend en compte la notion de stabilité et que l'on considère que l'équilibre neutre représente une limite de celle-ci, alors la condition de l'équilibre neutre peut être formulée de la façon suivante :

$$\delta^2 \Pi = 0 = \text{minimum} \quad \text{II.16}$$

La détermination des valeurs critiques des charges conduisant à l'équilibre neutre d'un système qui subit un changement de stabilité de sa configuration d'équilibre revêt une importance pratique considérable. Il est donc essentiel de pouvoir les déterminer avec précision.

Si l'on introduit un coefficient multiplicateur de charge commun α , pour toutes les composantes du chargement et si l'on définit un système de chargement de référence S_1 (correspondant à $\alpha = 1$), les charges, à chaque instant d'une histoire du chargement proportionnelle (linéaire) sont égales à :

$$S = \alpha S_1 \quad \text{II.17}$$

Seul le facteur multiplicateur de charge est inconnu et la condition d'équilibre neutre nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres :

$$\text{Det}[a(\alpha)] = 0 \quad \text{II.18}$$

Les coefficients a_{ij} de la matrice $[a]$ dépendent des charges appliquées ainsi que des caractéristiques du système. Ainsi, la détermination de la positivité de la matrice $[a]$ impose une condition à vérifier pour les charges afin de garantir la stabilité de la configuration du système concerné.

En résolvant l'équation (2.18), on obtient un ensemble de solutions α , également appelées α_{cr} , dont le nombre est égal au nombre de coordonnées généralisées du système. Chacune de ces solutions représente une configuration déformée du système associée à une valeur propre. Toutefois, la plupart de ces solutions mathématiques ne correspondent pas au comportement réel de la structure. L'ingénieur s'intéresse généralement aux valeurs de chargement au-delà desquelles le système, qui est stable en l'absence de charges, devient instable. Ces charges critiques sont normalement obtenues pour la plus petite valeur positive de α_{cr} .

II.10. Conclusion :

En utilisant des coordonnées généralisées q_i , il est possible de décrire la configuration d'un système. L'énergie potentielle totale du système Π permet d'identifier les configurations d'équilibre vérifiant $\delta^2\Pi = 0$, dont la stabilité est assurée si $\delta^2\Pi > 0$.

Les première et seconde variations de Π sont calculées pour tout déplacement virtuel δq_i satisfaisant les conditions aux limites, pour déterminer la stabilité de la configuration d'équilibre. Cette méthode est essentielle pour comprendre le comportement des systèmes dans différentes conditions.

Les charges critiques sont calculées à partir de la condition d'équilibre neutre donnée par :
 $\delta^2\Pi = 0 = \text{minimum}$.

Chapitre –III–

Développement d'un modèle analytique.

III.1. Introduction :

Les éléments structurels constitués de poutres en acier alvéolaires sont largement employés dans des bâtiments industriels fortement chargés, en raison de leur résistance et économie de matière. Contrairement aux éléments uniformes, les poutres à section creuse rectangulaire en présence d'ouverture au niveau des âmes sont utilisées dans les bâtiments en acier comme une solution économique qui offre un avantage résultant d'une plus grande rigidité en flexion et en torsion.

Pour cet objectif un modèle analytique a été formulé pour fournir les charges de déversement, pour les poutres ayant des ouvertures d'âme. Le modèle est basé sur le principe de l'énergie potentielle totale réalisée dans le contexte de comportement élastique linéaire. Pour la validité du modèle proposé. La méthode proposée est vérifiée avec la simulation par éléments finis à l'aide du logiciel *ABAQUS*.

III.2. Etude analytique de déversement des poutres en Box avec ouvertures d'âme:

III.2.1. Champ de déplacements:

Une approche analytique pour le déversement latéral des poutres en Box est présentée dans ce papier, pour cet objectif, on considère une poutre en caisson droite à paroi mince de longueur L comme indiqué sur la Fig. 1. La largeur et la hauteur de la poutre sont désignées respectivement par b_f et h et épaisseur des parois par t_f et t_w pour la semelle et les âmes respectivement. Un système de coordonnées global direct x , y , et z est adopté, dans lequel l'axe des x fait référence à l'axe normal de la poutre, tandis que y et z sont les axes principaux de la section transversale. L'origine de ces axes est situé au centre de gravité C .

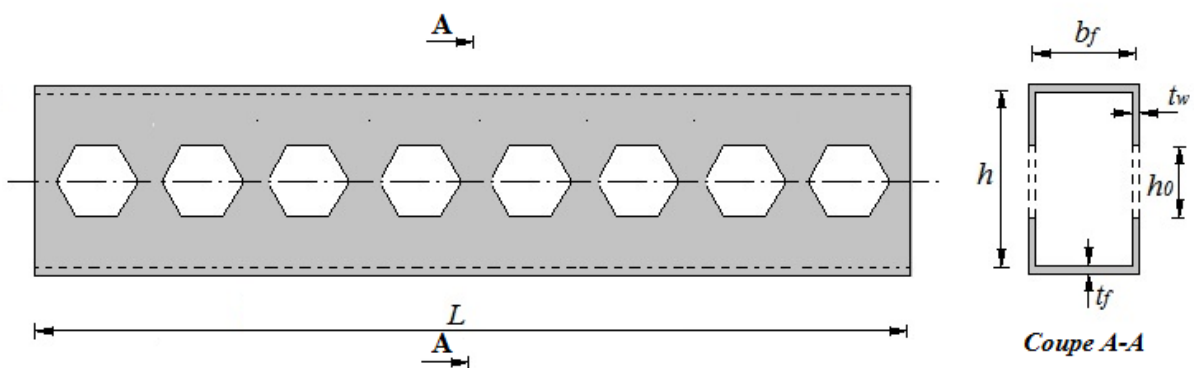


Figure III.1: Poutres caissons avec ouvertures d'âmes: Notations utilisées.

Dans le cadre du présent modèle, la section transversale de la poutre se décompose en quatre (04) parties, haute et basse semelle, âme droite et gauche, comme illustré à la Fig. 2. Dans ces conditions, le champ de déplacement à l'axe neutre de chaque élément i ($i = 1, \dots, 4$) ne peut être décrite que par trois éléments, attribué au centre de cisaillement G, à savoir deux translations $v(x)$ (déplacement latérale) et $w(x)$ (déplacement vertical), et la rotation autour du centre de cisaillement $\theta(x)$.

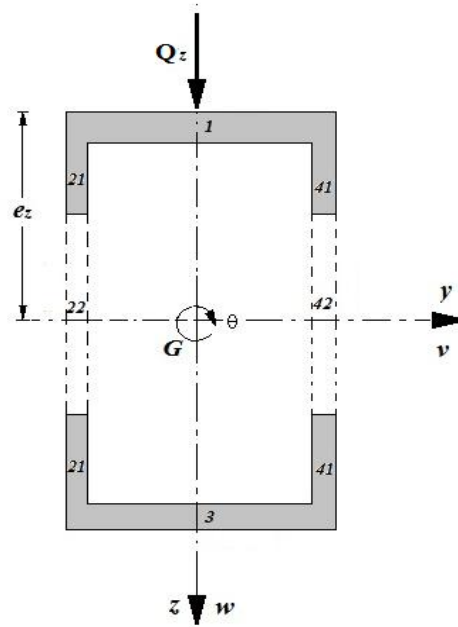


Figure III.2: Le chargement et les déplacements.

Les déplacements sont exprimé comme suit :

$$v_i = v + (\xi_1^i) \frac{h}{2} \theta \quad (\text{III.1})$$

$$w_i = w + (\xi_2^i) \frac{b_f}{2} \theta \quad (\text{III.2})$$

Les fonctions ξ_1^i et ξ_2^i sont données comme suit:

$$\xi_1^i = \frac{[1+(-1)^{i+1}]}{2} (2 - i) \quad (\text{III.3})$$

$$\xi_2^i = \frac{[1+(-1)^i]}{2} (i - 3) \quad (\text{III.4})$$

III.2.2. Energie potentielle totale:

Désignant par U l'énergie de déformation de l'élément de poutre, et par W le travail dépensé par les charges externes. Lorsque le déversement latéral torsionnel LTB se produit, nous pouvons utiliser la méthode variationnelle de la fonction d'énergie potentielle totale de la poutre pour calculer le moment critique élastique comme suit:

$$\Pi = U - W \quad (\text{III.5})$$

Dans le comportement élastique linéaire, l'énergie de déformation stockée dans chaque paroi la partie unitaire de la poutre peut s'écrire :

$$U_L = \sum_{i=1}^{i=4} U_{Li} = \frac{1}{2} \int_L \left[EI_{yi} \left(\frac{d^2 w_i}{dx^2} \right)^2 + EI_{zi} \left(\frac{d^2 v_i}{dx^2} \right)^2 + EI_{\omega i} \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 + GJ_i \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (\text{III.6})$$

Où U_L est l'énergie de déformation totale de la poutre, U_{Li} est l'énergie de déformation de la partie i , E est le module de Young et G est le module de cisaillement. Les paramètres géométriques sont notés I_{yi} et I_{zi} , $I_{\omega i}$ et J_i qui représentent respectivement, les seconds moments autour des axes y et z , le gauchissement et les constantes de torsion de l'unité i . Pour les quatre parois, les constantes de gauchissement dans leur propre axe local sont si petit et peut donc être ignorés. Par conséquent, l'énergie de déformation totale s'exprime par :

$$\begin{aligned} U_L = & \frac{1}{2} \int_L \left[EI_{y1} \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)^2 + EI_{z1} \left(\frac{d^2 v_1}{dx^2} \right)^2 + GJ_1 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_L \left[EI_{y2} \left(\frac{d^2 w_2}{dx^2} \right)^2 + EI_{z2} \left(\frac{d^2 v_2}{dx^2} \right)^2 + GJ_2 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_L \left[EI_{y3} \left(\frac{d^2 w_3}{dx^2} \right)^2 + EI_{z3} \left(\frac{d^2 v_3}{dx^2} \right)^2 + GJ_3 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_L \left[EI_{y4} \left(\frac{d^2 w_4}{dx^2} \right)^2 + EI_{z4} \left(\frac{d^2 v_4}{dx^2} \right)^2 + GJ_4 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (\text{III.7}) \end{aligned}$$

Si la poutre a des ouvertures au niveau des deux âmes verticaux, l'énergie de déformation totale de la poutre (Eq.7) peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}
U_L = & \frac{1}{2} \int_L \left[EI_{y1} \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)^2 + EI_{z1} \left(\frac{d^2 v_1}{dx^2} \right)^2 + GJ_1 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \\
& + \frac{1}{2} \int_L \left[2EI_{y21} \left(\frac{d^2 w_2}{dx^2} \right)^2 + 2EI_{z21} \left(\frac{d^2 v_2}{dx^2} \right)^2 + 2GJ_{21} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \\
& + \frac{1}{2} \int_L \left[EI_{y22} \left(\frac{d^2 w_2}{dx^2} \right)^2 + EI_{z22} \left(\frac{d^2 v_2}{dx^2} \right)^2 + GJ_{22} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \\
& + \frac{1}{2} \int_L \left[EI_{y3} \left(\frac{d^2 w_3}{dx^2} \right)^2 + EI_{z3} \left(\frac{d^2 v_3}{dx^2} \right)^2 + GJ_3 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \\
& + \frac{1}{2} \int_L \left[2EI_{y41} \left(\frac{d^2 w_4}{dx^2} \right)^2 + 2EI_{z41} \left(\frac{d^2 v_4}{dx^2} \right)^2 + 2GJ_{41} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \\
& + \frac{1}{2} \int_L \left[EI_{y42} \left(\frac{d^2 w_4}{dx^2} \right)^2 + EI_{z42} \left(\frac{d^2 v_4}{dx^2} \right)^2 + GJ_{42} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx
\end{aligned} \tag{III.8}$$

Dont: I_{y1} (I_{y3}), I_{z1} (I_{z3}) et J_1 (J_3) sont respectivement le moment d'inertie par rapport y, le moment d'inertie par rapport z, et le constant de torsion des semelles supérieures et inférieures. I_{y21} (I_{y41}), I_{z21} (I_{z41}) et J_{21} (J_{41}) sont respectivement le moment d'inertie par rapport y, le moment d'inertie par rapport z, et le constant de torsion de la partie pleine des âmes gauche et droit. I_{y22} (I_{y42}), I_{z22} (I_{z42}) et J_{22} (J_{42}) sont respectivement le moment d'inertie par rapport y, le moment d'inertie par rapport z, et le constant de torsion des ouvertures des âmes (Fig.III.2).

Pour une section symétrique par rapport y et z, nous avons:

$$\begin{aligned}
I_{y1} = I_{y3}, I_{z1} = I_{z3}, J_1 = J_3, I_{y21} = I_{y41}, I_{z21} = I_{z41}, J_{21} = J_{41}, I_{y22} = I_{y42}, \\
I_{z22} = I_{z42} \text{ et } J_{22} = J_{42}.
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Substituant (III.1), (III.2) et (III.9) dans (III.8):

$$\begin{aligned}
U_L = & \frac{1}{2} \int_L \left[E(2I_{y1} + 4I_{y21} + 2I_{y22}) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + E(2I_{z1} + 4I_{z21} + 2I_{z22}) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + \right. \\
& \left. E \left(2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 I_{z1} + 4 \left(\frac{b_f}{2} \right)^2 I_{y21} + 2 \left(\frac{b_f}{2} \right)^2 I_{y22} \right) \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 + G(2J_1 + 4J_{21} + 2J_{22}) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx
\end{aligned} \tag{III.10}$$

Dans ce qui suit, nous considérons:

$$I_y = 2I_{y1} + 4I_{y21} + 2kI_{y22}^* \quad (\text{III.11-a})$$

$$I_z = 2I_{z1} + 4I_{z21} + 2kI_{z22}^* \quad (\text{III.11-b})$$

$$J = 2J_1 + 4J_{21} + 2kJ_{22}^* \quad (\text{III.11-c})$$

$$I_\omega = 2\left(\frac{h}{2}\right)^2 I_{z1} + 4\left(\frac{b_f}{2}\right)^2 I_{y21} + 2k\left(\frac{b_f}{2}\right)^2 I_{y22}^* \quad (\text{III.11-d})$$

Où : I_{y22}^* et I_{z22}^* sont les seconds moments de la section transversale de la partie médiane de l'âme sans ouvertures autour des axes y et z , et J_{22}^* est la constante de torsion de la partie médiane de l'âme sans ouvertures.

Dans les expressions précédentes, k est une constante qui varie entre 1 et 0, représente la fraction volumique du solide dans la partie médiane de chaque âme. Si $k = 1$, alors les propriétés complètes de la section sont utilisées (c'est-à-dire que les trous d'âme sont ignorés). Si $k = 0$, alors les propriétés de section réduites sont utilisées (c'est-à-dire que toute la partie médiane de l'âme est ignorée).

Le travail extérieur W pour une poutre en Box sous charges Q_z concentrée de flexion est exprimé par la relation :

$$W = \int_L \left[M_y \frac{d^2 w}{dx^2} + M_y \theta \frac{d^2 v}{dx^2} + q_z e_z \frac{\sum \theta_i^2}{2} \right] dx \quad (\text{III.12})$$

M_y est le moment de flexion interne autour de l'axe y , e_z est la coordonnée z du point de chargement définissant la distance verticale entre le point de chargement et le centre de cisaillement de la poutre, est également appelé paramètre de hauteur de charge et L est la longueur de la poutre.

Cette étude porte sur des poutres simplement appuyées sous des charges concentrées à mi-portée, et des poutres en porte-à-faux sous des charges concentrées à l'extrémité libre. Le moment de flexion pour un une poutre simplement appuyée soumise à une charge concentrée peut être exprimé comme suit :

$$M_y = \begin{cases} \frac{1}{2} Q_z x & \text{pour } 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{1}{2} Q_z (L - x) & \text{pour } L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

L'équation (III.13) dans (III.12):

$$W = \int_0^{L/2} \left[\frac{1}{2} Q_z x \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{2} Q_z x \theta \frac{d^2 v}{dx^2} + q_z e_z \frac{\sum \theta_i^2}{2} \right] dx + \int_{L/2}^L \left[\frac{1}{2} Q_z (L-x) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{2} Q_z (L-x) \theta \frac{d^2 v}{dx^2} + q_z e_z \frac{\sum \theta_i^2}{2} \right] dx \quad (\text{III.14})$$

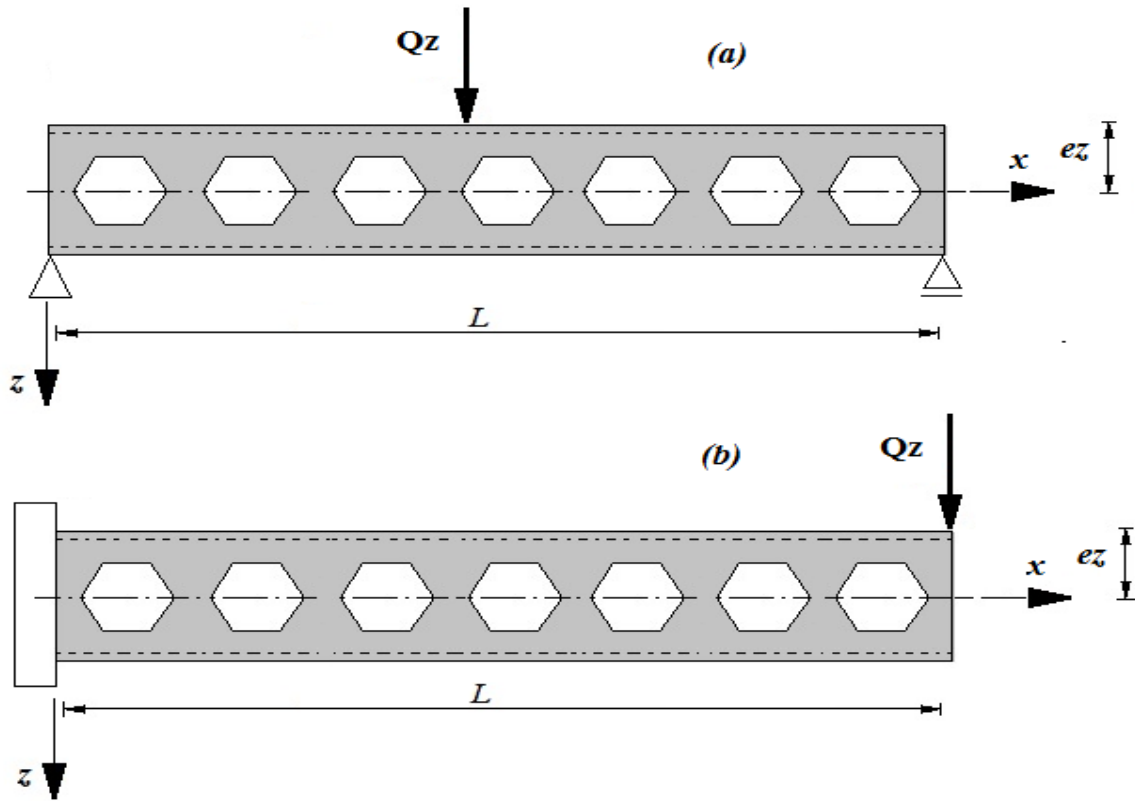


Figure III.3: Poutres en box avec ouvertures d'âme sous charge concentrée :
(a) simplement appuyée et (b) en porte-à-faux.

Le moment de flexion interne d'une poutre en porte-à-faux soumise à une charge uniformément répartie peut être exprimée par :

$$M_y = -Q_z(L-x) \quad (\text{III.15})$$

L'équation (III.15) dans (III.12):

$$W = \int_L \left[-Q_z(L-x) \frac{d^2 w}{dx^2} - Q_z(L-x) \theta \frac{d^2 v}{dx^2} + q_z e_z \frac{\sum \theta_i^2}{2} \right] dx \quad (\text{III.16})$$

Selon le chemin d'équilibre exprimé par l'équation (III.5) et en considérant les équations (III.10 et III.12), la fonction d'énergie potentielle totale de la poutre Π compte tenu de déversement par torsion latérale devient :

$$\begin{aligned}
\Pi = \frac{1}{2} \int_L \left[E(2I_{y1} + 4I_{y21} + 2kI_{y22}^*) \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + E(2I_{z1} + 4I_{z21} + 2kI_{z22}^*) \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right. \\
+ E \left(2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 I_{z1} + 4 \left(\frac{b_f}{2} \right)^2 I_{y21} + 2k \left(\frac{b_f}{2} \right)^2 I_{y22}^* \right) \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right)^2 \\
\left. + G(2J_1 + 4J_{21} + 2kJ_{22}^*) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx - \int_L \left[M_y \frac{d^2w}{dx^2} + M_y \theta \frac{d^2v}{dx^2} + Q_z e_z \frac{\sum \theta_i^2}{2} \right] dx
\end{aligned}
\tag{III.17}$$

Dans le cas des poutres simplement appuyées, en remplaçant (III.13) dans (III.17) on obtient:

$$\begin{aligned}
\Pi = \frac{1}{2} \int_L \left[E(2I_{y1} + 4I_{y21} + 2kI_{y22}^*) \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + E(2I_{z1} + 4I_{z21} + 2kI_{z22}^*) \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right. \\
+ E \left(2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 I_{z1} + 4 \left(\frac{b_f}{2} \right)^2 I_{y21} + 2k \left(\frac{b_f}{2} \right)^2 I_{y22}^* \right) \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right)^2 \\
\left. + G(2J_1 + 4J_{21} + 2kJ_{22}^*) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \\
- \int_0^{L/2} \left[\frac{1}{2} Q_z x \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2} Q_z x \theta \frac{d^2v}{dx^2} + q_z e_z \frac{\sum \theta_i^2}{2} \right] dx \\
- \int_{L/2}^L \left[\frac{1}{2} Q_z (L-x) \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2} Q_z (L-x) \theta \frac{d^2v}{dx^2} + q_z e_z \frac{\sum \theta_i^2}{2} \right] dx
\end{aligned}
\tag{III.18}$$

Dans le cas des poutres en porte-à-faux, en remplaçant (III.15) dans (III.17) on obtient:

$$\begin{aligned}
\Pi = \frac{1}{2} \int_L \left[E(2I_{y1} + 4I_{y21} + 2kI_{y22}^*) \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + E(2I_{z1} + 4I_{z21} + 2kI_{z22}^*) \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right. \\
+ E \left(2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 I_{z1} + 4 \left(\frac{b_f}{2} \right)^2 I_{y21} + 2k \left(\frac{b_f}{2} \right)^2 I_{y22}^* \right) \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} \right)^2 \\
\left. + G(2J_1 + 4J_{21} + 2kJ_{22}^*) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx \\
- \int_L \left[-Q_z (L-x) \frac{d^2w}{dx^2} - Q_z (L-x) \theta \frac{d^2v}{dx^2} + q_z e_z \frac{\sum \theta_i^2}{2} \right] dx
\end{aligned}
\tag{III.19}$$

Les équations fondamentales d'équilibre sont obtenues en utilisant la condition stationnaire du potentiel total donnée par:

$$\delta\Pi = \delta(U - W) = 0 \quad (\text{III.20})$$

Où δ dénote est la variation virtuelle.

III.2.3. Les solutions numériques de déversement latéral:

Conformément à la procédure de calcul du Ritz, il est primordial dans la première étape de sélectionner les fonctions de forme de déplacement. Celles-ci sont choisies pour satisfaire uniquement les conditions aux limites. La résolution de la valeur propre d'un système structural continu peut être exprimée en terme de combinaison linéaire des fonctions de forme sélectionnées. Par conséquent, dans le cas de poutre simplement appuyée, les fonctions trigonométriques suivantes sont utilisés :

$$v(x) = \sum_{i=1}^N \left[v_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right) \right]$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^N \left[w_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right) \right]$$

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^N \left[\theta_i \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right) \right]$$

(III. 21-a-c)

Dans le cas de poutres en porte-à-faux., les fonctions trigonométriques suivantes sont utilisés :

$$v(x) = \sum_{i=1}^N v_i \left[1 - \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2L} x\right) \right]$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^N w_i \left[1 - \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2L} x\right) \right]$$

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^N \theta_i \left[1 - \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2L} x\right) \right]$$

(III.22-a-c)

Avec: v_i , w_i et θ_i sont les amplitudes de déplacements et de rotation associées.

Substituant Eqs (III.21) et (III.22) dans Eq(III.18) et (III.19), 3N équations d'équilibre sont dérivées en utilisant l'opérateur gradient comme suit:

$$\{f\} = \text{grad}((U - W), \{d\}) = \{0\} \quad (\text{III.23})$$

Dont $\{f\}$ est le vecteur des équations d'équilibre, et le vecteur $\{d\}$ est donné par:

$$\{d\} = \{\{v_i\}, \{w_i\}, \{\theta_i\}\}^T \quad (\text{III.24})$$

Après la détermination du vecteur $\{f\}$, on obtient la matrice tangente K_t qui est définie comme étant la matrice *Jacobian* de $\{f\}$. Les charges critiques de déversement seront déterminées par la condition de singularité de la matrice tangente: ($\det K_t = 0$).

III.3. Conclusion :

Dans ce chapitre, un nouvel modèle analytique a été exposé pour fournir les charges critique de déversement latéral par torsion, pour des poutres en console et simplement appuyées qui présentent des ouvertures au niveau des âmes verticaux. Ces poutres sont soumises à des charges concentrées, appliquées à mi-portée pour les poutres simplement appuyées, et à l'extrémité libre pour les poutres en console.

Ce modèle est basé sur le principe de l'énergie potentielle totale réalisée dans le contexte de comportement élastique linéaire. Pour valider et vérifier l'efficacité du modèle proposé, les résultats de la méthode proposée seront comparés avec ceux obtenus par la simulation numérique par éléments finis en utilisant le logiciel *ABAQUS* dans le chapitre qui suit.

Chapitre –IV–

Résultats et discussions.

IV.1. Introduction:

Afin de vérifier la validité de la méthode proposée dans l'analyse de déversement des poutres caissons (box) à parois minces avec des trous, une comparaison est faite entre:

- les résultats de stabilité de déversement latéral du présent modèle analytique (les charges critiques de flambement q_{cr}) des poutres simplement appuyées et en porte-à-faux.
- les résultats de la simulation par éléments finis 3D à l'aide du logiciel ABAQUS.

Cette étude comparative implique l'analyse de stabilité au déversement des poutres en variant la section du box (différentes épaisseurs), ainsi que la longueur de la poutre L , avec les mêmes conditions aux limites (simplement appuyées ou bien en console).

L'analyse par éléments finis est effectuée en utilisant le code de commerce ABAQUS. Dans ce code, chaque poutre à parois minces en box étudiées est discrétisée en élément Shell S8R5 comme indiqué dans la figure (Fig. IV.1).

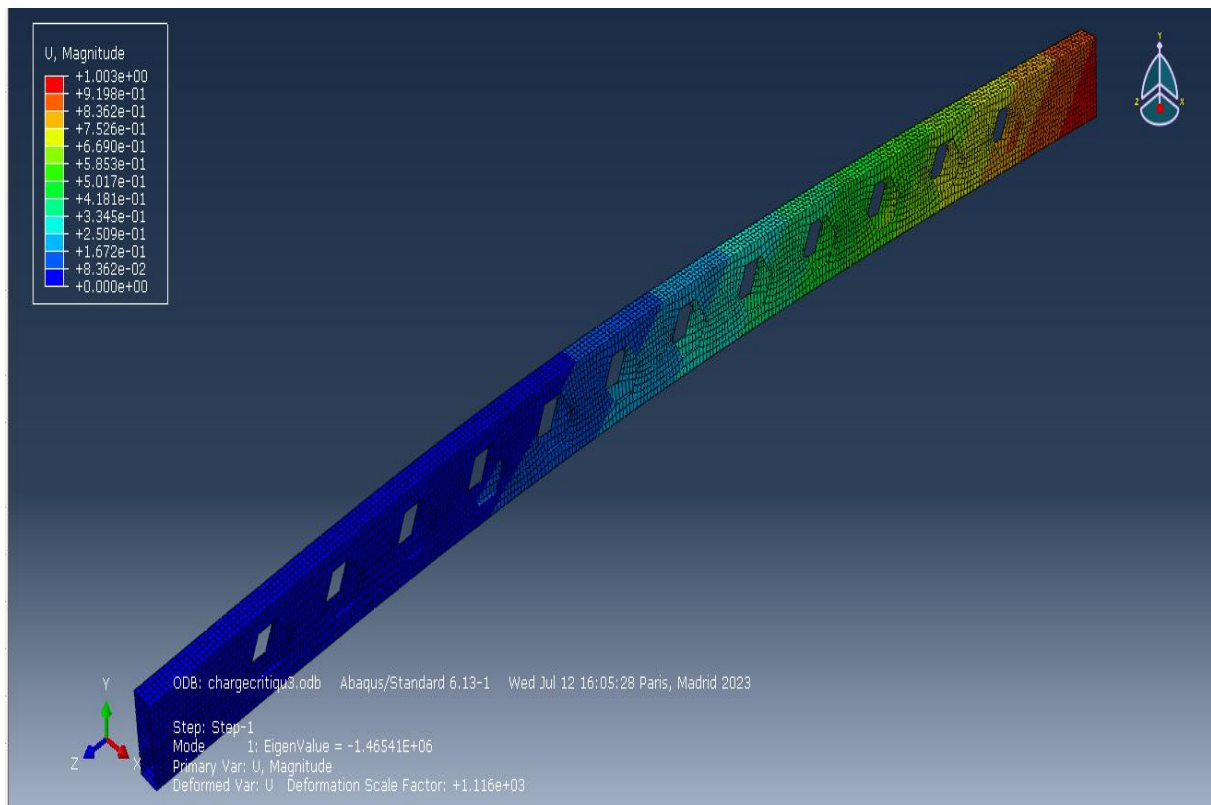


Figure IV.1: Vue de maillage en élément Shell de la poutre en box avec ouvertures.

IV.2. Validations numériques :

Dans tous les cas structurels envisagés dans les comparaisons, les résultats présentés comprennent : la charge critique (Q_{cr}) donnés au moyen du modèle proposé, l'analyse par éléments finis Shell (Q_{FEM}).

L'erreur relative associée aux valeurs (Q_{cr}) est donnée par l'expression suivante:

$$\Delta = \left(\frac{(Q_{FEM}) - (Q_{cr})}{(Q_{FEM})} \right) \% \quad (IV. 1)$$

Dans cet exemple, les charges critiques Q_{cr} du déversement latéral en torsion d'une poutre-caisson en porte-à-faux avec des ouvertures hexagonales dans les deux âmes sous une charge concentrée Q sont calculées à l'aide du modèle analytique actuel avec une valeur de $k = 1/2$ et $k = 1$. La poutre est soumise à une charge concentrée au niveau de la semelle supérieure c'est-à-dire ($e_z = -0,3 m$).

Les propriétés géométriques sont $h=0.6m$, $bf=0.2m$ et $h_0=0.346m$. Les longueurs de la poutre varient de $6,40 m$ à $19,20 m$. Deux sections transversales avec une épaisseur de paroi de 35 et $30 mm$ respectivement sont prises en compte pour l'analyse. Le module d'élasticité du matériau et le coefficient de Poisson sont supposés respectivement $210GPa$ et $0,3$. Les résultats de calcul de la charge critique de déversement sont donnés dans les tableaux (Tableau IV.1.a-b), et sont comparés avec les autres résultats.

Cependant, les charges critiques de déversement latéral évaluées par le modèle proposé atteignent des approximations raisonnables. De ce fait, les erreurs relatives importantes qui ont été observées dans le cas d'un box avec une épaisseur de $35mm$, sont de l'ordre de $\Delta = 13,47\%$ (en moins value pour $k=1/2$), et $\Delta = -7.62\%$ (en plus value pour $k=1$) par rapport au modèle éléments finis.

Dans le cas d'un box avec une épaisseur de $30mm$, ces mêmes erreurs sont de l'ordre de 6.09% pour $k=1/2$ et -16.95% (plus value) pour $k=1$. On peut conclure que notre modèle peut être adopté pour prédire la stabilité d'un élément en box qui contient des ouvertures au niveau des parois verticaux, et cette conclusion peut être confirmé par la valeur de l'erreur relative.

Tableau IV.1-a: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson en porte-à-faux soumise à une charge concentrée sur la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=35$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec des ouvertures hexagonales.

L(m)	Présent		FEM	$\Delta(\%)$	
	k= 1/2	k= 1		/ k= 1/2	/ k= 1
6.40	4673.40	5438.56	5400.69	13.47	-0.70
8.00	3000.78	3507.98	3450.80	13.04	-1.66
9.60	2097.48	2449.64	2389.24	12.21	-2.53
11.20	1545.98	1807.27	1741.42	11.22	-3.78
12.80	1186.69	1388.22	1323.53	10.34	-4.89
14.40	939.60	1099.76	1040.88	9.73	-5.66
16.00	762.40	892.74	839.51	9.19	-6.34
17.60	631.01	739.14	690.21	8.58	-7.09
19.20	530.89	622.04	577.98	8.15	-7.62

Tableau IV.1-b: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson en porte-à-faux soumise à une charge concentrée sur la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec des ouvertures hexagonales.

L(m)	Présent		FEM	$\Delta(\%)$	
	k= 1/2	k= 1		/ k= 1/2	/ k= 1
6.40	4302.14	4999.82	4581.22	6.09	-9.14
8.00	2769.1	3225.18	2885.25	4.03	-11.78
9.60	1931.1	2252.23	2000.69	3.48	-12.57
11.20	1423.39	1661.65	1465.41	2.87	-13.39
12.80	1092.6	1276.38	1115.14	2.02	-14.46
14.40	865.11	1011.16	877.72	1.44	-15.20
16.00	701.96	820.82	708.33	0.90	-15.88
17.60	580.96	679.59	582.62	0.28	-16.64
19.20	488.81	571.93	489.04	0.05	-16.95

Les résultats prévoient qu'une convergence acceptable est obtenue lorsque le constant $k=1/2$ pour une épaisseur de 30mm, tandis que pour le cas d'une épaisseur de 35mm, la valeur de $k=1/2$ est la plus adaptée pour des grandes poutres ($L \geq 14$ m). Il est évident que dans le cas de petites longueurs, le mode de déversement global n'est pas évident et le mode de flambement local peut être observé.

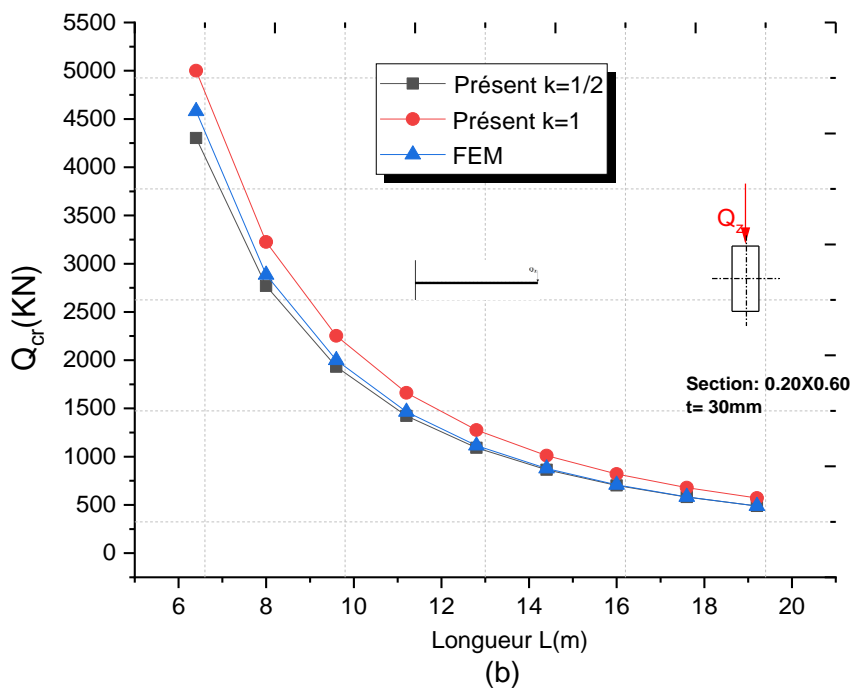
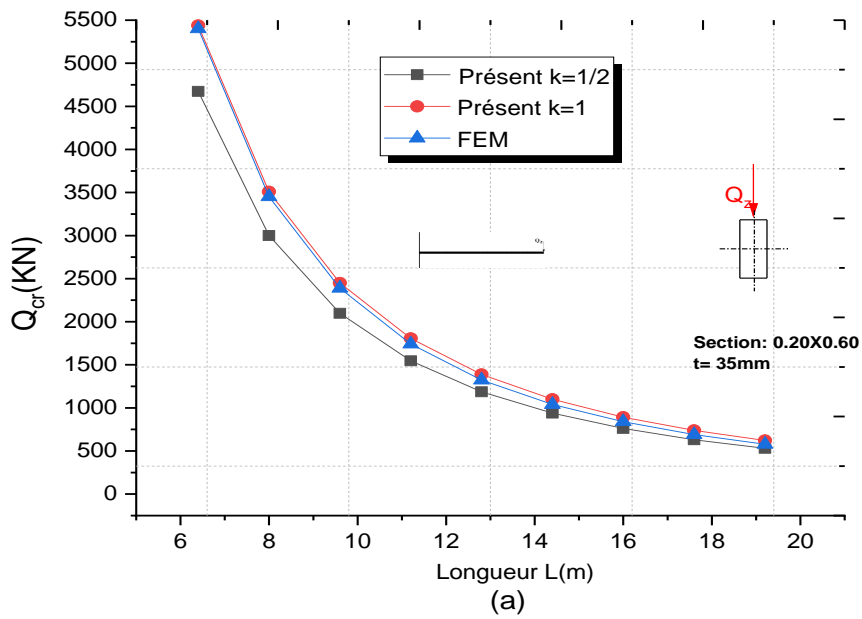


Figure IV.2: Charges critiques Q_{cr} de LTB d'une poutre-caisson en porte-à-faux soumise à une charge concentrée sur la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m): (a) $t=35$ mm et (b) $t=30$ mm.

IV.3. Résultats et applications :

IV.3.1. Influence de la constante k :

Dans cette partie, à des fins de comparaison, les charges critiques de déversement Q_{cr} sont déterminées pour différentes valeurs de k : $k = 1$ (propriétés de la section pleine), $k = 1/2$ (propriétés de la demi-section), $k = 3/4$ et $k = 0$ (propriétés de la section réduite). La forme d'ouvertures considérées est de type hexagonale en gardant la même hauteur d'ouvertures h_0 . Les propriétés géométriques sont $h=0.6m$, $bf=0.2m$, $h_0=0.346m$ et avec une épaisseur de $30mm$ pour tous les parois. Les charges critiques de déversement Q_{cr} sont évaluées pour la position de hauteur de charge correspondant à $e_z=-0,3 m$ (semelle supérieure). Les résultats correspondants et ceux obtenus à partir des analyses par éléments finis sont tracés aux figures IV.3 et VI.4 pour une poutre simplement appuyée et en console respectivement.

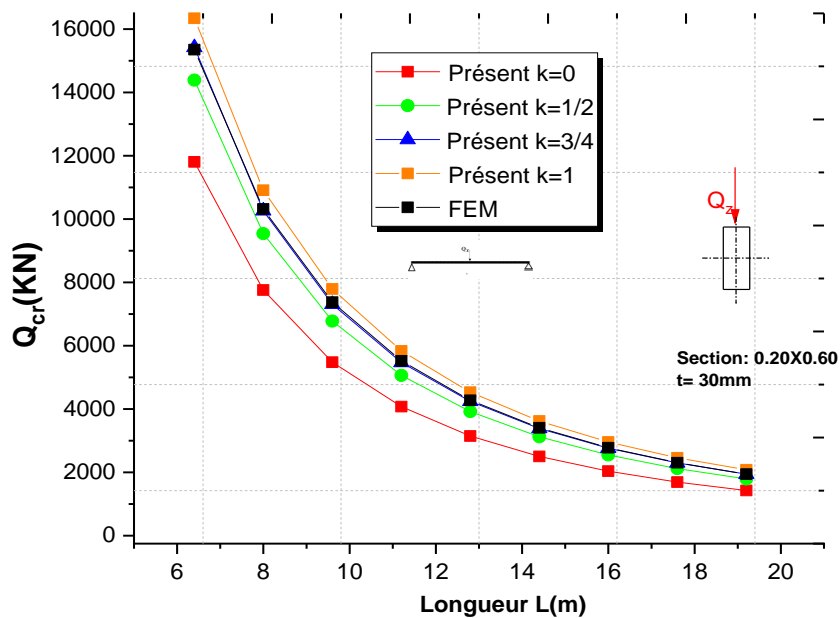


Figure IV.3: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson à ouvertures hexagonales simplement appuyée soumise à une charge concentrée à mi-portée pour différentes valeurs de k . ($h=0,6m$, $bf=0,2m$, $t=30mm$ et hauteur d'ouverture $h_0=0.346m$, $e_z=-0,3 m$).

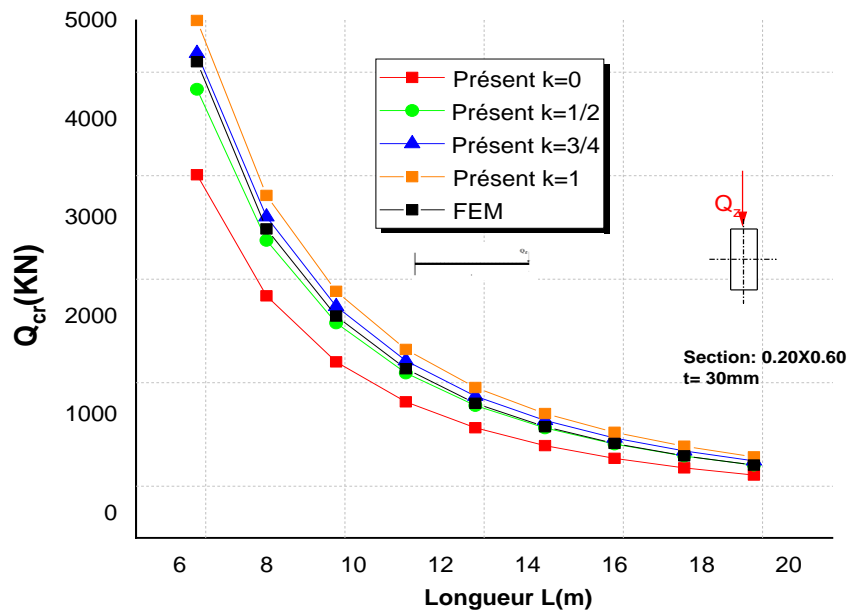


Figure IV.4: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson à ouvertures hexagonales en console soumise à une charge concentrée pour différentes valeurs de k . ($h=0,6\text{m}$, $bf=0,2\text{m}$, $t=30\text{mm}$ et hauteur d'ouverture $h_0=0,346\text{m}$, $e_z=-0,3\text{ m}$).

Tableau IV.2-a: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson simplement appuyée soumise à une charge concentrée sur la semelle supérieure ($h=0,6\text{ m}$, $bf=0,2\text{ m}$, épaisseur des parois $t=30\text{mm}$ et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346\text{ m}$), avec des ouvertures hexagonales.

L(m)	Présent				FEM	$\Delta(\%)$			
	k= 0	k= 1/2	k= 3/4	k= 1		k= 0	k= 1/2	k= 3/4	k= 1
6.40	11809.47	14393.06	15425.80	16341.56	15354.70	23.09	6.26	-0.46	-6.43
8.00	7759.22	9540.36	10264.25	10912.40	10320.50	24.82	7.56	0.55	-5.74
9.60	5482.08	6779.17	7311.95	7792.01	7375.83	25.68	8.09	0.87	-5.64
11.20	4076.87	5061.52	5468.89	5837.53	5520.93	26.16	8.32	0.94	-5.73
12.80	3149.57	3921.60	4242.65	4534.08	4276.59	26.35	8.30	0.79	-6.02
14.40	2505.86	3126.97	3386.25	3622.15	3409.77	26.51	8.29	0.69	-6.23
16.00	2040.94	2551.20	2764.84	2959.56	2778.83	26.55	8.19	0.50	-6.50
17.60	1694.28	2120.80	2299.80	2463.18	2304.81	26.49	7.98	0.22	-6.87
19.20	1428.95	1790.70	1942.81	2081.80	1943.06	26.46	7.84	0.01	-7.14

Tableau IV.2-b: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson en porte-à-faux soumise à une charge concentrée sur la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec des ouvertures hexagonales.

L(m)	Présent				FEM	$\Delta(\%)$			
	k= 0	k= 1/2	k= 3/4	k= 1		k= 0	k= 1/2	k= 3/4	k= 1
6.40	3434.64	4302.14	4666.74	4999.82	4581.22	25.03	6.09	-1.87	-9.14
8.00	2205.10	2769.1	3007.15	3225.18	2885.25	23.57	4.03	-4.22	-11.78
9.60	1535.28	1931.1	2098.59	2252.23	2000.69	23.26	3.48	-4.89	-12.57
11.20	1130.36	1423.39	1547.60	1661.65	1465.41	22.86	2.87	-5.61	-13.39
12.80	866.95	1092.6	1188.37	1276.38	1115.14	22.26	2.02	-6.57	-14.46
14.40	686.00	865.11	941.20	1011.16	877.72	21.84	1.44	-7.23	-15.20
16.00	556.35	701.96	763.87	820.82	708.33	21.46	0.90	-7.84	-15.88
17.60	460.28	580.96	632.34	679.59	582.62	21.00	0.28	-8.53	-16.64
19.20	387.12	488.81	532.09	571.93	489.04	20.84	0.05	-8.80	-16.95

On peut observer sur les figures ainsi que les tableaux que les ouvertures d'âme ont une influence sur les charges critiques de déversement Q_{cr} de la poutre quelque soit les condition aux limites. Cependant, la présence des ouvertures d'âme tend à réduire les charges critiques de déversement. Ceci est principalement dû à la réduction de la constante de torsion provoquée par les ouvertures de l'âme.

On note aussi que pour la poutre en box à ouvertures hexagonales simplement appuyée, en comparant les résultats analytiques avec ceux de FEM, l'utilisation des propriétés de section pleine ($k = 1$) conduira à une surestimation de la charge critique, alors que l'utilisation de la des propriétés de section réduites ($k = 0$) conduiront à une sous-estimation de la charge critique. Ainsi, les charges de déversement convergent lorsque $k=3/4$ pour la poutre caisson à ouvertures hexagonales simplement appuyée.

Dans le cas d'une poutre en console, les valeurs de $k = 1$ surestiment toujours la charge critique Q_{cr} , mais où les propriétés de section réduites $k = 1/2$, une convergence acceptable est obtenue. Ceci est dû à la présence d'une zone de transition de section pleine à section réduite dans le cas d'ouvertures hexagonales.

De ce fait, le rapport de la constante de torsion et du deuxième moment autour de l'axe z de l'aire de la section transversale de la zone de transition de l'âme à celle de la section entière devient plus significatif. Dans l'une ou l'autre section, la véritable charge critique se situera

entre ces deux limites de k (0 et 1), tandis que la relation entre la charge critique Q_{cr} et la valeur de k n'est pas linéaire.

IV.3.2. Influence de la hauteur de charge e_z :

Dans cet exemple, les charges critiques Q_{cr} du déversement latéral en torsion d'une poutre-caisson simplement appuyée avec une ouverture hexagonale dans les deux âmes sous une charge concentrée sont calculées à l'aide du modèle analytique actuel avec une valeur de $k = 1/2$ et $3/4$ (Fig.VI.5) . Les propriétés géométriques sont $h=0.6m$, $bf=0.2m$ et $h_0=0.346m$. Les longueurs de la poutre varient de $6,4 m$ à $19,2 m$. Des sections transversales avec une épaisseur de paroi de $30 mm$ sont prises en compte pour l'analyse. Le module d'élasticité du matériau et le coefficient de Poisson sont supposés à $210GPa$ et $0,3$ respectivement.

Les charges critiques de déversement Q_{cr} sont évaluées pour différentes positions de hauteur de charge ($e_z=-0,3$, $0,0$ et $+0,3 m$), qui sont comparées à d'autres résultats. Ces hauteurs de charge correspondent à la semelle supérieure ; le centre de cisaillement G et les emplacements de la semelle inférieure respectivement.

Tableau IV.3-a: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson simplement appuyée soumise à une charge concentrée ($h=0,6 m$, $bf=0,2 m$, épaisseur des parois $t=30 mm$ et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346 m$), avec $e_z=-h/2$.

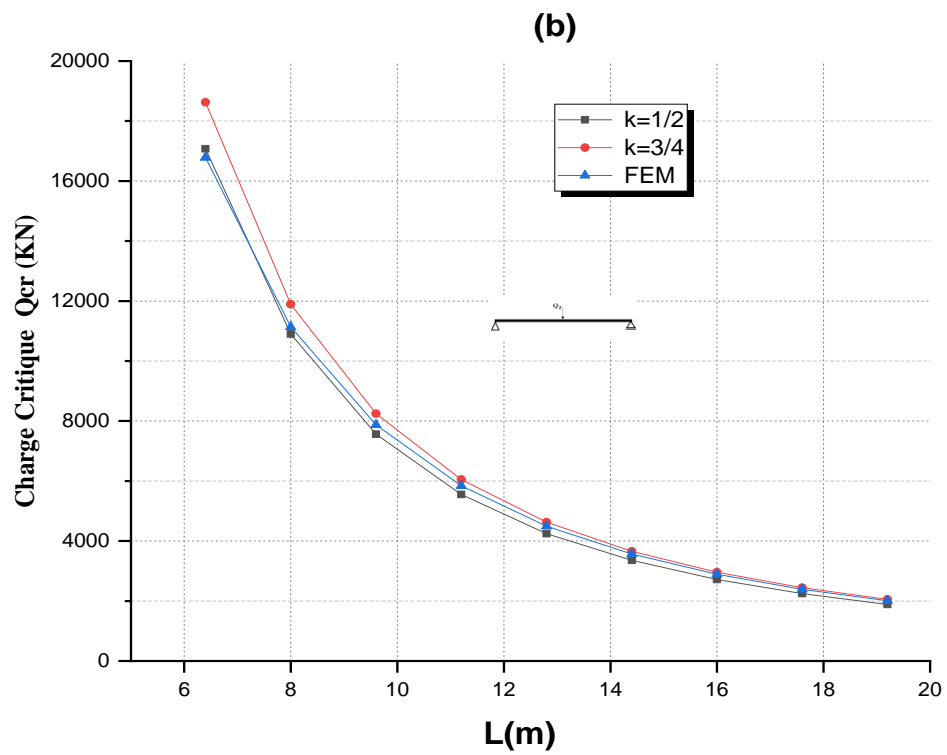
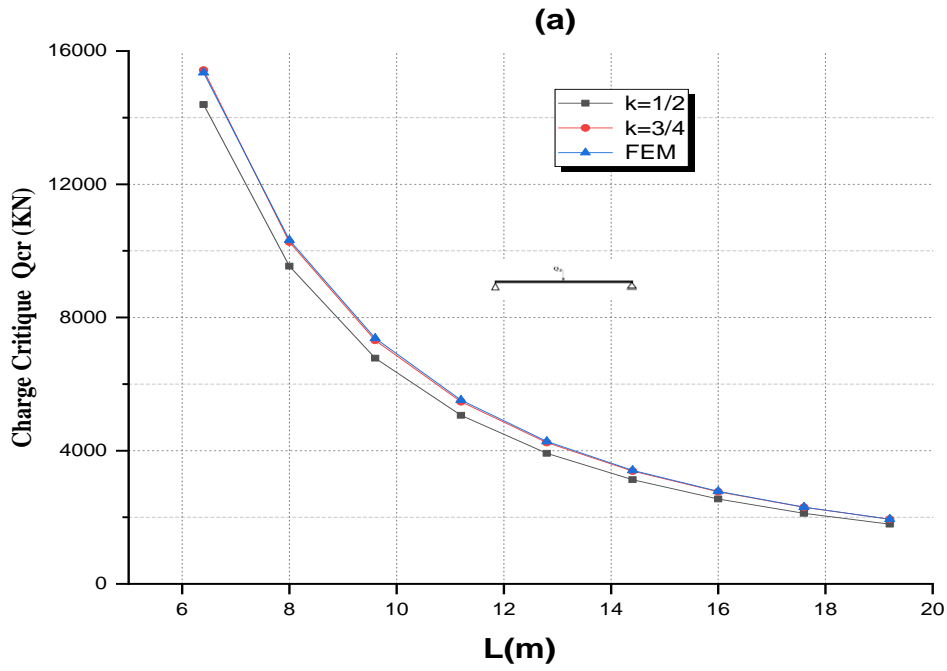
L(m)			FEM	$\Delta(\%)$	
	k= 1/2	k= 3/4		k= 1/2	k= 3/4
6.40	14393.06	15425.80	15354.70	6.26	-0.46
8.00	9540.36	10264.25	10320.50	7.56	0.55
9.60	6779.17	7311.95	7375.83	8.09	0.87
11.20	5061.52	5468.89	5520.93	8.32	0.94
12.80	3921.60	4242.65	4276.59	8.30	0.79
14.40	3126.97	3386.25	3409.77	8.29	0.69
16.00	2551.20	2764.84	2778.83	8.19	0.50
17.60	2120.80	2299.80	2304.81	7.98	0.22
19.20	1790.70	1942.81	1943.06	7.84	0.01

Tableau IV.3-b: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson simplement appuyée soumise à une charge concentrée ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec $e_z=0$.

L(m)			FEM	$\Delta(\%)$	
	k= 1/2	k= 3/4		k= 1/2	k= 3/4
6.40	17075.72	18623.52	16784.30	-1.74	-10.96
8.00	10900.78	11887.51	11139.60	2.14	-6.71
9.60	7559.44	8243.20	7874.73	4.00	-4.68
11.20	5549.18	6050.87	5843.02	5.03	-3.56
12.80	4246.25	4630.02	4494.73	5.53	-3.01
14.40	3353.78	3656.84	3564.28	5.91	-2.60
16.00	2715.83	2961.20	2891.87	6.09	-2.40
17.60	2244.03	2446.75	2389.76	6.10	-2.38
19.20	1885.32	2055.62	2008.56	6.14	-2.34

Tableau IV.3-c: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson simplement appuyée soumise à une charge concentrée ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, épaisseur des parois $t=30$ mm et hauteur de l'ouverture des âmes $h_0=0,346$ m), avec $e_z=+h/2$.

L(m)			FEM	$\Delta(\%)$	
	k= 1/2	k= 3/4		k= 1/2	k= 3/4
6.40	19265.64	21195.67	18948.50	-1.67	-11.86
8.00	12044.46	13233.72	12179.00	1.10	-8.66
9.60	8230.95	9034.86	8450.35	2.60	-6.92
11.20	5976.68	6555.46	6195.12	3.53	-5.82
12.80	4535.06	4971.22	4726.48	4.05	-5.18
14.40	3557.99	3898.25	3724.60	4.47	-4.66
16.00	2865.50	3138.24	3007.63	4.73	-4.34
17.60	2356.99	2580.43	2476.25	4.82	-4.21
19.20	1972.65	2159.01	2074.72	4.92	-4.06



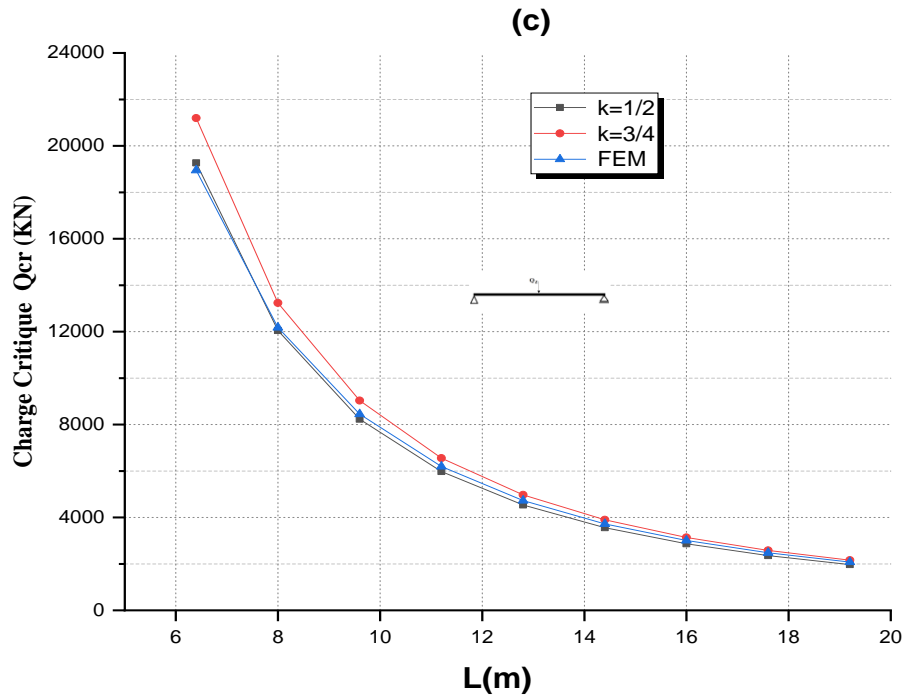


Figure IV.5 : Charges critiques Q_{cr} d'une poutre avec des ouvertures hexagonales soumises à une charge concentrée ($h=0,6\text{m}$, $bf=0,2\text{m}$, épaisseur des parois $t=30\text{mm}$ $h_0=0,346\text{ m}$), Chargement à :
 (a) la semelle supérieure, (b) le centre de cisaillement et (c) la semelle inférieure.

Les charges de déversement de la poutre caisson à ouverture hexagonale sont calculées en tenant en compte deux valeurs de la constante k et bien comparées aux résultats FEM. On remarque, que les charges de déversement augmentent pour différentes positions de hauteur de charge (e_z), en allant de la semelle supérieure qui correspond à $e_z = -h/2$ vers la semelle inférieure correspond à $e_z = +h/2$ en passant par le centre de gravité ($e_z = 0$).

On remarque aussi que les résultats convergent pour une valeur de $k=3/4$ par rapport au MEF et ce quand la charge est appliquée à la semelle supérieure. Par contre, une valeur de $k=1/2$ donne des résultats plus proches quand la charge est appliquée à la semelle inférieure et au centre de gravité de la section.

IV.3.3. Influence de nombre de termes N:

Les charges critiques Q_{cr} du déversement latéral en torsion d'une poutre-caisson simplement appuyée et en console avec une ouverture hexagonale dans les deux âmes sous une charge concentrée sont calculées à l'aide du modèle analytique actuel. La valeur de $k = 3/4$ a été prise pour une poutre simplement appuyée, alors que la valeur de $k = 1/2$ a été prise pour une poutre en console. Les propriétés géométriques sont les mêmes que l'exemple précédent. Les longueurs de la poutre varient de 6,4 m à 19,2 m. Des sections transversales avec une épaisseur de paroi de 30 mm sont prises en compte pour l'analyse. Le module d'élasticité du matériau et le coefficient de Poisson sont supposés à 210GPa et 0,3 respectivement.

Les charges de déversement de la poutre caisson à ouverture hexagonale sont calculées en augmentant le nombre N des termes de séries des formes de fonctions trigonométriques (N=1 à 4) et bien comparées aux résultats FEM.

Tableau IV.4-a: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson simplement appuyée soumise à une charge concentrée dans la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, $t=30$ mm et $h_0=0,346$ m), avec $k=3/4$.

L(m)	N=1	N=2	N=3	N=4	FEM	$\Delta(\%)$			
						N= 1	N= 2	N= 3	N= 4
6.40	16232.48	15968.45	15474.54	15425.80	15354.70	-5.72	-4.00	-0.78	-0.46
8.00	10756.50	10636.91	10286.31	10264.25	10320.50	-4.22	-3.07	0.33	0.55
9.60	7649.03	7587.57	7323.16	7311.95	7375.83	-3.70	-2.87	0.71	0.87
11.20	5717.04	5682.39	5475.13	5468.89	5520.93	-3.55	-2.92	0.83	0.94
12.80	4434.39	4413.43	4246.38	4242.65	4276.59	-3.69	-3.20	0.71	0.79
14.40	3539.58	3526.18	3388.60	3386.25	3409.77	-3.81	-3.41	0.62	0.69
16.00	2890.63	2881.67	2766.39	2764.84	2778.83	-4.02	-3.70	0.45	0.50
17.60	2405.07	2398.86	2300.87	2299.80	2304.81	-4.35	-4.08	0.17	0.22
19.20	2032.32	2027.89	1943.57	1942.81	1943.06	-4.59	-4.37	-0.03	0.01

Tableau IV.4-b: Charges critiques Q_{cr} de déversement d'une poutre-caisson en console soumise à une charge concentrée dans la semelle supérieure ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, $t=30$ mm et $h_0=0,346$ m), avec $k=1/2$.

L(m)	N=2	N=3	N=4	FEM	$\Delta(\%)$		
					N= 2	N= 3	N= 4
6.40	5019.88	4466.21	4302.14	4581.22	-9.58	2.51	6.09
8.00	3254.53	2880.79	2769.1	2885.25	-12.80	0.15	4.03
9.60	2279.80	2011.58	1931.1	2000.69	-13.95	-0.54	3.48
11.20	1685.45	1483.95	1423.39	1465.41	-15.02	-1.27	2.87
12.80	1296.52	1139.76	1092.6	1115.14	-16.27	-2.21	2.02
14.40	1028.19	902.83	865.11	877.72	-17.14	-2.86	1.44
16.00	835.30	732.80	701.96	708.33	-17.93	-3.45	0.90
17.60	692.00	606.66	580.96	582.62	-18.77	-4.13	0.28
19.20	582.66	510.50	488.81	489.04	-19.14	-4.39	0.05

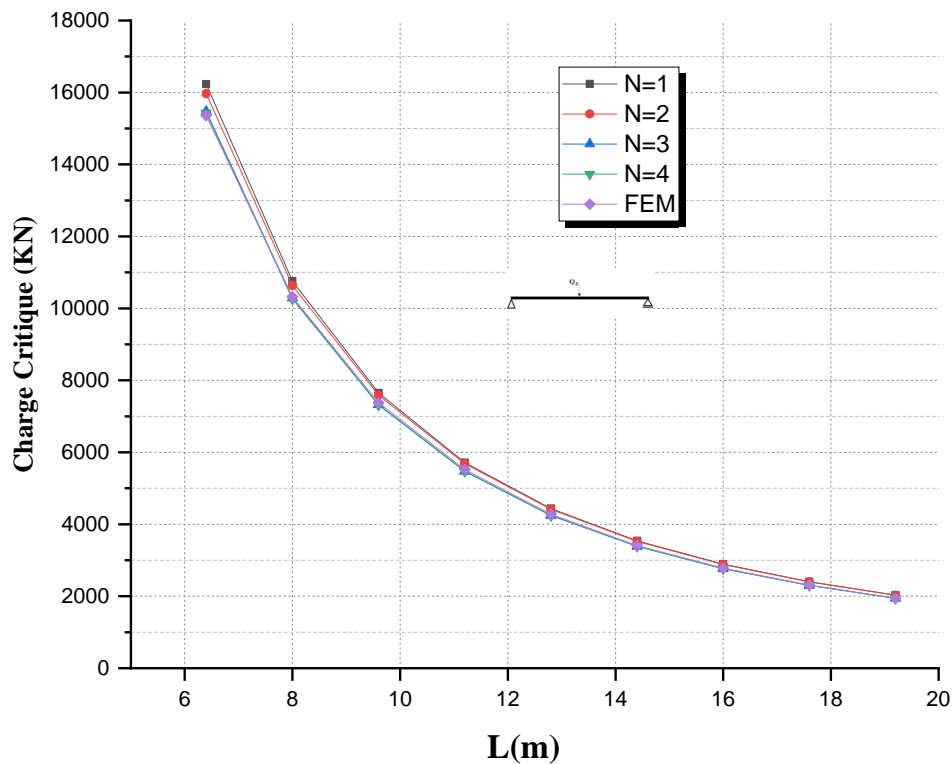


Figure IV.6 : Charges critiques Q_{cr} d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge concentrée ($h=0,6$ m, $bf=0,2$ m, $t=30$ mm $h_0=0,346$ m), Chargement à la semelle supérieure en fonction de N avec $k=3/4$.

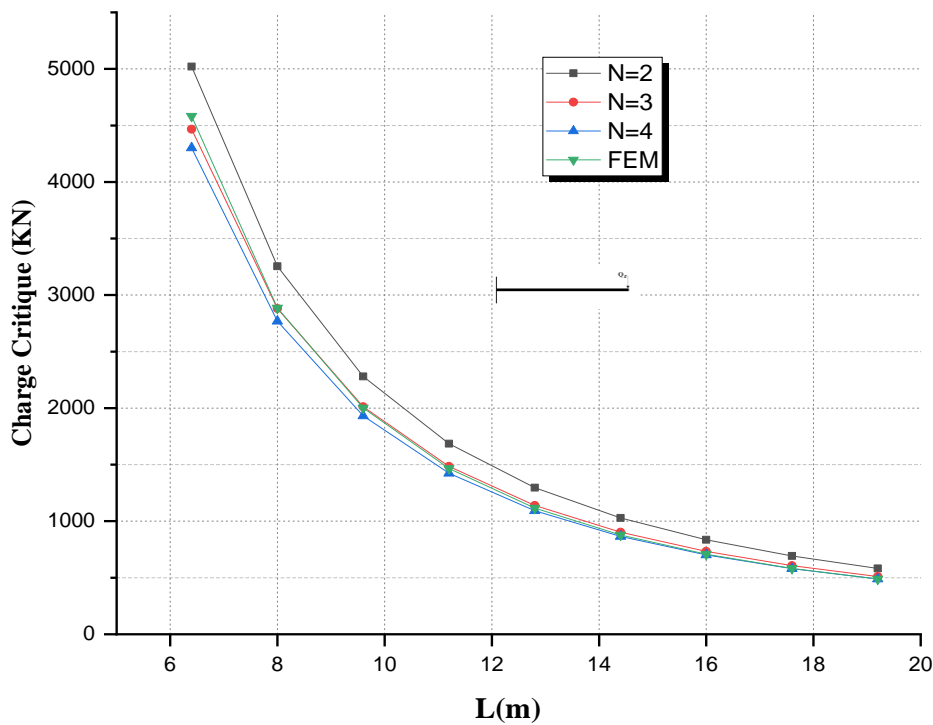


Figure IV.7 : Charges critiques Q_{cr} d'une poutre en console soumises à une charge concentrée ($h=0,6\text{m}$, $bf=0,2\text{m}$, $t=30\text{mm}$ $h_0=0,346\text{ m}$), Chargement à la semelle supérieure en fonction de N avec $k=1/2$.

On remarque, que les charges de déversement convergent lorsque le nombre N des termes de séries des formes de fonctions trigonométriques augmente et ceci pour différentes longueurs de poutre. D'après les figures VI.5 et VI.6, ainsi que les valeurs des erreurs relatives indiquées dans les tableaux VI.4 a-b, on distingue qu'à partir de $N=3$ les valeurs commencent à se converger par rapport aux valeurs de FEM et ce pour les poutres simplement appuyées ainsi que les poutres en console.

De plus, il ressort de la comparaison que les solutions analytiques actuelles concordent très bien avec les résultats obtenus à partir des analyses par éléments finis pour la poutre de grandes longueurs.

On peut en conclure que pour une précision acceptable des charges de flambement latéral, il n'est pas nécessaire de prendre 4 termes dans les séries de termes des formes des fonctions trigonométriques.

IV.4.Conclusion:

Cette partie présente et discute les résultats de l'étude comparative effectuée afin de valider et d'évaluer la performance du modèle analytique proposé dans l'analyse de déversement élastique des poutres de section creuse ou en box qui contient des ouvertures au niveau des parois verticales (âmes).

Sur la base de la série de fonctions de forme trigonométriques, les équations d'équilibre sont déterminées et donc la matrice tangentielle des poutres-caissons simplement appuyées et en porte-à-faux soumises à une charge concentrée. Cela permet de déterminer les charges critiques. Par la suite, les solutions analytiques sont comparées à celles obtenues à l'aide de l'analyse par éléments finis. Au moyen de ces exemples numériques, les résultats obtenus à l'aide de notre modèle analytique en bon accord avec ceux obtenus par éléments finis en utilisant le code Abaqus.

Conclusion générale & perspectives.

1- Conclusion générale:

Dans ce travail, nous nous sommes attachés à donner une solution au problème de déversement des poutres à parois minces et à sections fermées comme celle d'un box et qui contient des ouvertures au niveau des parois verticales (âmes). A cet effet, un nouvel modèle analytique a été adopté pour analyser la stabilité et le comportement des éléments (poutres) en box.

Le modèle qui a été proposé est basé sur le principe de l'énergie potentielle totale réalisée dans le contexte de comportement élastique linéaire. Sur la base de la série de fonctions de forme trigonométriques, les équations d'équilibre sont déterminées, ces équations qui gèrent l'équilibre élastiques sont réalisées à partir de l'état stationnaire.

Par la suite, la matrice tangentielle des poutres-caissons simplement appuyées et en porte-à-faux soumises à une charge concentrée a été déduite. Cela permet de déterminer les charges critiques déversement à partir de la condition de nullité de la matrice de rigidité tangente. Par la suite, les solutions analytiques sont comparées à celles obtenues à l'aide de l'analyse par éléments finis.

Une étude comparative des résultats effectuée afin de valider et d'évaluer la performance du modèle proposé dans l'analyse de déversement élastique des poutres de section en box avec ouvertures d'âmes. Cette étude a porté sur une analyse de déversement de plusieurs poutres simplement appuyées soumises à des charges latérales concentrées appliqués à des différentes positions dans la section. Dans les cas envisagés, les résultats présentés comprennent : la charge critique donnée au moyen des solutions numériques du modèle analytique ainsi que l'analyse par éléments finis par Abaqus.

A partir de ce qui 'a été obtenu comme résultats, on peut conclure que:

- Au moyen des exemples numériques, les charges critiques de déversement obtenues à l'aide de notre modèle analytique sont en bon accord avec celles obtenues par éléments finis en utilisant le code Abaqus.
- Les charges critiques de déversement d'une poutre-caisson avec ouvertures sont influencées par le type d'ouvertures d'âme, les conditions aux limites, les propriétés géométriques et mécaniques de la poutre.

- Pour les poutres-caissons avec des ouvertures d'âme, le déversement latéral sera affecté, et ceci en raison de la réduction de la rigidité en torsion causée par les ouvertures d'âme.
- La charge critique de ce type de poutres doit être calculée en utilisant la constante de torsion moyenne des propriétés de section pleine et réduite pour les ouvertures hexagonales ($k=1/2$).
- Les charges critiques en cas d'ouvertures sont moindres par rapport à celles en cas d'une poutre sans ouvertures quelles que soient les conditions aux limites (poutre simplement appuyée ou poutre en porte-à-faux).
- Pour les poutres courtes, le mode de déversement global n'est pas évident et le mode de flambement local peut être observé, qu'il y a une distorsion substantielle impliquée dans l'âme. Cependant, avec l'augmentation de la longueur de la poutre, ce mode de flambement local est dépassé par le mode de flambement par torsion latérale.
- L'augmentation de la longueur de la poutre provoque une diminution de la charge critique de déversement;

2- Perspectives:

Dans notre étude, nous avons traité l'instabilité des poutres en box des ouvertures au niveau des âmes, où un nouvel modèle analytique a été adoptée afin d'analyser le déversement des poutres simplement appuyées et en porte-à-faux..

Cependant, d'autres travaux postérieurs de recherche peuvent avoir lieu à savoir:

- La méthode proposée pourrait être appliquée à des poutres avec d'autres conditions aux limites et d'autres types de chargement;
- Etude de l'influence de caractéristiques mécaniques sur l'instabilité des poutres à section fermée creuse avec ouvertures d'âmes;
- Etude de la forme des ouvertures sur l'instabilité des poutres.

Références Bibliographiques

- [1] **Le théorie d'Euler**, Contrainte critique due à la compression, Calcul des structures métalliques selon l'Eurocode 3, sixième tirage 2005, éditions Eyrolles.
- [2] **l'Eurocode3**, « Calculer des structures en acier » a été adopté par la Comité européen de normalisation (CEN) en 1992 et a été classé Norme provisoire pour une durée de 3 années (1993 à 1996).
- [3] Additif 80, Règles de calcul des constructions en acier. Construction Métallique, N°1, 1981.
- [4] **Timoshenko S.P**, Théorie de la stabilité élastique. Dunod, 1966.
- [5] **AISC (2005)**, Specification for Structural Steel Buildings, 13th Ed. Chicago: American Institute of Steel Construction, 2005.
- [6] **T. BELAID**, « Etude de la stabilité latérale des éléments en acier à section mono symétrique - cas des profilés en U », Thèse de Magister, USTHB Houari Boumedienne, 2009.
- [7] **Saint-Venant A. J. C. B. (1847)**, Mémoire sur la torsion des prismes et sur la forme affectée par leurs sections transversales primitivement planes. Comptes rendus, Vol. 24, 1847, pp. 485-488.
- [8] **ACB® beams are fabricated based on** the exclusive use of hot rolled sections. A double cut-out is made in the web by flame cutting. The two obtained T-sections are shifted and rewelded leading to an increase in height.
- [9] **Angelina™** beams offer a new architectural dimension within an environmentally friendly approach. With their sinusoidal web openings, they elegantly combine function with flexibility, integrating technical installations and optimising the weight/height or load/weight ratio.
- [10] **Eurocode4**, L'Eurocode 4 concerne uniquement les exigences de résistance, d'aptitude au service, de durabilité et de résistance au feu des structures mixtes.

- [11] **D. E. KERDAL, D.A. NETHERCOT**, « Failure modes of castellated beams », Journal of constructional steel research, vol.4, pp.295-315, 1984.
- [12] **S. DEMIRDJIAN**, « Stability of Castellated Beam Webs », thèse de masters, McGill University, Montreal, 1999.
- [13] **K.D. TSAVDARIDIS**, « Structural Performance of perforated steel beams with novel web openings and with partial concrete encasement », Thèse de doctorat, School of Engineering and Mathematical Sciences City University London, 2010.
- [14] **M.U. HUSAIN, W.G. SPEIRS**, « Failure of castellated beams due to rupture of welded joints », Acier-Stahl-Steel, No. 1, 1971.
- [15] **M.D. ALTIFILLISCH, B.R. COOKE, A.A. TOPRAC**, « An investigation of open web expanded beams », Welding Research Council Bulletin, Series No.47. pp. 77s-88s, 1957.
- [16] **A.A. TOPRAC, B.R. COOKE**, « An experimental investigation of open-web beams ». Welding Research Council Bulletin, New York. Series No.47, pp 1 – 10, 1959.
- [17] **A.N. SHERBOURNE**, «The plastic behavior of castellated beams », Proc. 2nd Commonwealth Welding Conference. Inst. Of Welding, No. C2, London. pp 1-5, 1966.
- [18] **Hirt M.A., Bez R., Nussbaumer A. (2006)**, Construction Métallique, Notions Fondamentales et Méthodes de Dimensionnement, Traité de Génie Civil, vol.10, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- [19] **BAZILE, J. TEXIER**, « Essais de poutres ajourées (Tests on castellated beams) », onstr. Métallique, Paris, France, Vol.3, pp 12-25, 1968.
- [20] **S. Durif et al**, “Modèle mécanique pour les poutres à larges ouvertures d’âmes de section variable” XXIXe Rencontres Universitaires de Génie Civil. Tlemcen, 29 au 31 Mai 2011.
- [21] **SAFIR** SAFIR est un logiciel de calculs numériques, non linéaire, basé sur la méthode des éléments finis (MEF).
- [22] **S. Durif**, “Comportement mécanique des poutres cellulaires à ouvertures sinusoïdales développement d’un modèle analytique adapté -”. Laboratoire : Institut Pascal, Clermont Ferrand, France, Thèse de doctorat, 2012.

- [23] **K.D. Tsavdaridis and C. D’Mello**. “Vierendeel Bending Study of Perforated Steel Beams with Various Novel Web Opening Shapes, through Non-linear Finite Element Analyses” *Journal of Structural Engineering*, 138 (10). 1214-1230.2012.
- [24] **P. Panedpojaman et T. Rongram** “Buckling analysis for web post of cellular beams”*The 10th International PSU Engineering Conference*, May 14-15, 2012.
- [25] **F. ERDAL et M. POLAT SAKA**, “Ultimate load carrying capacity of optimally designed cellular beams”, *Journal of Constructional Steel Research* 80 (2013)355–368, 2013.
- [26] **P. Panedpojaman and T. Rongram** “Design Equations for Vierendeel Bending of Steel Beams with Circular Web Openings” *Proceedings of the World Congress on Engineering 2014 Vol II, WCE 2014*, July 2 - 4, 2014, London, U.K.
- [27] **P.D. Pachpor et al**, “analysis and design of cellular beam and its verification”*International Conference on Applied Computing, Computer Science, and Computer*.
- [28] **British Standards Institution** BS5950: « Structural use of steelwork in building », Part3 Section 3.1: Code of practice for design of composite beams, 1990.
- [29] **A.S. Shaikh et H.R. Aher**, “Structural Design of Circular Cross-Section Beam”*International Journal on Recent Technologies in Mechanical and Electrical Engineering (IJRMEE)* Volume: 2 Issue: 7. July2015.
- [30] **K. KUCHTA et M. MAŚLAK**. “Failure modes determining the resistance and the stability of steel cellular beams” *Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture*. pp 263-280, 2015.
- [31] **S. Saju et M. George**. “Buckling Analysis of Cellular Beams” *International Journal of Engineering Development and Research*. Volume 3, Issue 4.2015.
- [32] **S. A. Patil et P. D. Kumbhar**. “STUDY OF CASTELLATED BEAM USING STIFFENERS: A REVIEW” *International Journal of Research in Engineering and Technology*. Volume: 04 Issue: 11,Nov-2015.

- [33] **P.Panedpojaman.** “INVESTIGATION ON LATERAL TORSIONAL BUCKLING RESISTANCE OF EC3 FOR CELLULAR BEAM” International Journal of Advances in Mechanical and Civil Engineering. Volume 2, Issue 4, Aug- 2015.
- [34] **A.S. Shaikh et P.B. Autade.** “Structural Analysis and Design of Castellated Beam in Fixed Action” International Journal of Innovative Research in Advanced Engineering. Volume 3, Issue 8, Aug-2016.
- [35] **F. ERDAL et al,** “Nonlinear finite element analysis of optimally designed steel cellular beams”. Res. Eng. Struct. Mat. Vol. 2 Iss. 2 (2016) 59-66. Feb 2016.
- [36] **B. Djebli,** “Vierendeel failure mechanisms of composite cellular beams: Non-linear finite element analysis” International Conference on Advanced in Science and Arts. ICASA’17, March 29-31, 2017.
- [37] **P.P. Rugge et P.K. Pasnur,** “Review on Study of Castellated Beam with & without Stiffeners” International Journal of Science Technology & Engineering. Volume 3, Issue 09. March 2017.
- [38] **ECCS (2010),** Design of steel structures, Eurocode 3: Design of steel structures: Part 1-1 – General rules and rules for buildings 1st Edition, European Convention for Constructional Steelwork, Ernst & Sohn. 2010.
- [39] **Clark J. W, Hill H. N. (1960),** Lateral Buckling of Beams, Proceedings ASCE, Journal of the Structural Division, Vol 86, no. ST7, 1960.
- [40] **Djalaly H. (1974),** La théorie du second-ordre de la stabilité élastique des barres à parois minces et profil ouvert et son application. Annales de l’ITBTP, N° 171, Sept. 1974, pp. 130-162.
- [41] **Boissonnade N., Greiner R., Jaspart J.P, Lindner J. (2006),** Design rules in EN 1993-1-1 for member stability, ECCS Technical Committee 8: Structural Stability, P119, European Convention for Constructional Steelwork, Brussels.
- [42] **Bureau A. (2006),** NCCI: Elastic critical moment for lateral torsional buckling. Paris CTICM, 2006.
- [43] **R.G. REDWOOD,** « Analyse et dimensionnement des poutres ayant des ouvertures dans les âmes », Revue Construction métallique, n°3, pp.15-27, 1978.

- [44] **K.F. CHUNG, TCH. LIU, ACH KO**, « Investigation on Vierendeel Mechanism in steel beams with circular web openings », *Journal of Constructional Steel Research*, vol.5, pp.467-490, 2001.
- [45] **K.F. CHUNG, TCH. LIU, ACH KO**, « Steel beams with large web openings of various shapes and sizes: an empirical design method using a generalized moment shearinteraction curve », *Journal of Constructional Steel Research*, vol.59, pp. 1177- 1200, 2003.
- [46] **P. HALLEUX**, « Limit analysis of castellated steel beams », *Acier-Stahl-Steel*, 325,133-144, 1967.