

II.1 Régimes d'écoulements

En écoulement de fluide réel, on distingue deux grands types de comportement. Chacun de ces comportements caractérise un régime d'écoulement particulier : le régime laminaire et le régime turbulent.

II.1.1 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses [13] ,[14].

$$Re = \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces visqueuses}} = \frac{UD}{\nu} \quad (\text{II.1})$$

II.1.2 Expérience de Schiller-Reynolds

Un tube horizontal en verre comportant deux prises de pression est alimenté par un réservoir en charge. Une vanne placée à l'extrémité permet de faire varier la vitesse de l'écoulement. Un tube effilé alimenté par un réservoir de colorant permet d'obtenir un filet fluide coloré au centre du tube. On observe l'allure de l'écoulement en faisant varier la vitesse [15].

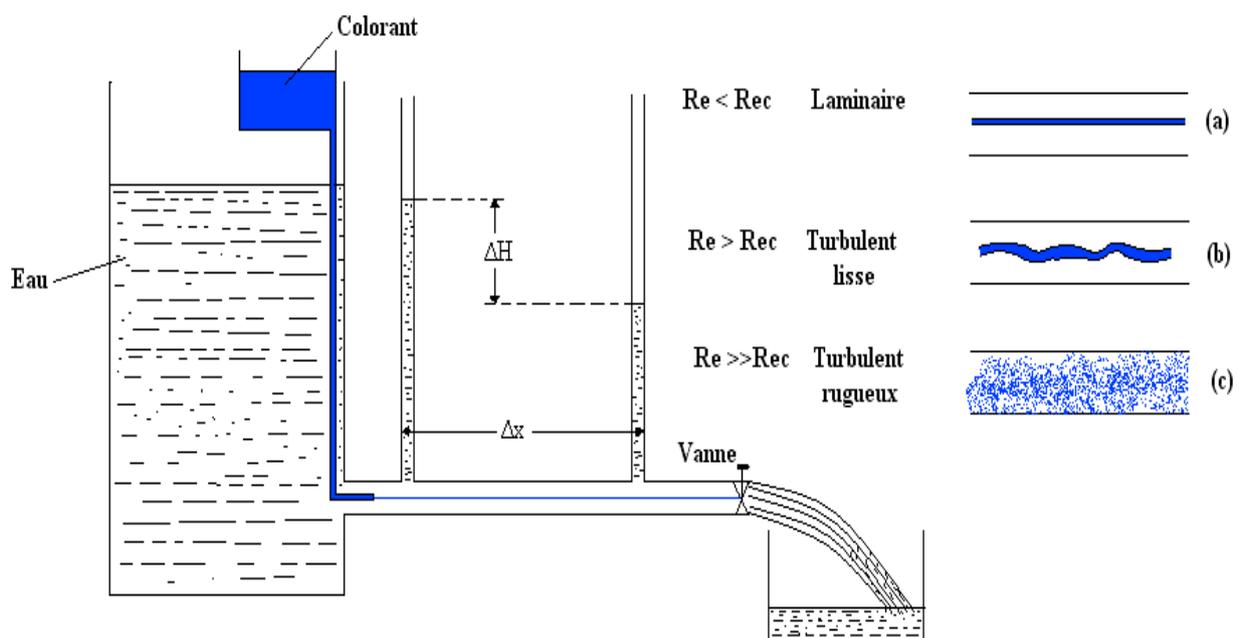


Figure II.1 : Expérience de Schiller-Reynolds.

- a) Aux faible vitesses, le filet coloré conserve son individualité jusqu'à l'extrémité (fig. a). la perte de charge ΔH est faible. Le régime est dit laminaire.

- b) A partir d'une certaine vitesse de l'écoulement, le filet fluide commence à onduler un certain temps (fig. b) avant de se mélanger au reste du fluide, en même temps, on constate une augmentation brutale de ΔH et une diminution de l'amplitude de jet à la sortie, ce qui traduit une discontinuité dans l'évolution de l'écoulement. Le régime est dit turbulent lisse.
- c) Si on augmente encore le débit, les tourbillons augment d'amplitude et le filet coloré se mélange à l'écoulement presque aussitôt après son introduction (fig. c). Le régime est dit turbulent-rugueux.

La valeur du nombre de Reynolds de l'écoulement dans le tuyau pour lequel le régime devient turbulent est appelé nombre de Reynolds critique et désigné par Re_c .

La valeur de Re_c dépend beaucoup des précautions prises à l'établissement de l'écoulement. Si par exemple, le liquide est au repos depuis quelques jours dans le récipient et si la vanne est ouverte très progressivement, on pourra atteindre $Re_c = 20000$.

Au contraire, dans le cas le plus défavorable, si le récipient est en cours de remplissage et si la plaque est ramenée au voisinage de l'orifice du tuyau pour essayer de perturber l'écoulement au maximum, on aura environ $Re_c = 2000$.

C'est, en général, cette dernière valeur qui est choisie comme critère : si $Re < 2000$, on est certain que l'écoulement est laminaire [1].

II.2 Les pertes de charge

Tous les liquides ont en fait une certaine viscosité ; lors du déplacement des liquides des frottements apparaissent entre les différentes couches de liquide ou contre les parois de la canalisation ou dans les singularités. Ces frottements entraînent donc une production de chaleur correspondant à une perte d'énergie pour le liquide. On parle des pertes de charge, il existe deux types de perte de charge :

II.2.1 Perte de charge linéaire

Les pertes de charge par frottement sont provoquées par la viscosité (autant moléculaire que turbulente) des fluides réels ; elles prennent naissance lorsqu'il y a mouvement, et résultent d'un échange de quantité de mouvement entre les molécules (écoulement laminaire) ou entre les diverses particules (écoulement turbulent) des couches voisines du fluide, qui se déplacent avec des vitesses différentes. Ces pertes ont lieu sur toute la longueur de la conduite [16].

Pour une canalisation horizontale (Figure I.2) cette perte d'énergie se caractérise par une diminution de la charge dans le sens de l'écoulement, rappelons que pour ce cas de figure, la perte de charge se réduit à la différence de pression entre les points considérés et donc [9]:

$$\Delta H_{1-2} = H_L = H_1 - H_2 \quad (\text{II.2})$$

ΔH_L : La perte de charge linéaire (par frottement).

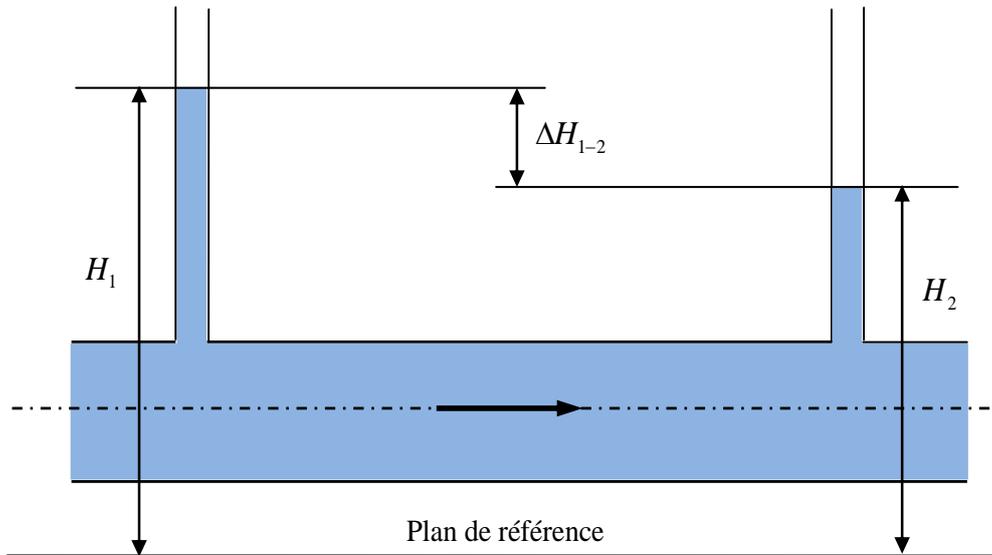


Figure II.2 : Perte de charge linéaire dans une conduite [16].

II.2.1.1 Expression générale de la perte de charge linéaire

A l'aide d'une analyse dimensionnelle on peut donner une forme générale à l'expression de la perte de charge linéaire dans une canalisation. Considérons donc une conduite de longueur L , de diamètre D et de rugosité absolue ε traversée par un fluide de viscosité μ , de masse volumique ρ circulant à la vitesse moyenne U . Cherchons une relation entre $\Delta p, L, D, \rho, \varepsilon, \mu$ et U à l'aide du théorème Π (théorème de VASHY-BUCKINGHAM).

$$\Delta H_L = \lambda \left(\frac{\varepsilon}{D}, \text{Re} \right) \frac{U^2 L}{2g D} \quad (\text{II.3})$$

Dans cette formule, λ désigne le coefficient de perte de charge régulière ne dépend que du nombre de REYNOLDS Re et de la rugosité relative ε/D pour une canalisation rugueuse. Dans le cas d'une canalisation lisse, le nombre sans dimension correspond à la rugosité relative n'intervient pas : le coefficient de perte de charge régulière dépend seulement du nombre de Reynolds Re ($\lambda(\text{Re})$) [17].

II.2.1.2 Régime laminaire

Partons de l'équation de Navier-Stokes établie pour l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{g} \quad (\text{II.4})$$

Si l'écoulement est stationnaire, la dérivée particulaire se résume à la dérivée convective et peut se développer comme :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 - \vec{V} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \quad (\text{II.5})$$

On peut alors écrire :

$$\frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} V^2 - \rho \vec{V} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{g} \quad (\text{II.6})$$

L'accélération de la pesanteur dérivant d'un potentiel et le fluide étant incompressible, on regroupe sous un même gradient trois des cinq termes de cette équation pour lui donner la forme suivante :

$$\vec{\nabla} (p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho V^2) = \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{V} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \quad (\text{II.7})$$

Le produit vectoriel du vecteur vitesse avec le rotationnel de la vitesse s'annule lorsque l'équation est considérée sur l'ensemble des points constituant une ligne de courant. Il reste donc que le long d'une ligne de courant, l'écoulement stationnaire d'un fluide de viscosité non négligeable obéit à l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} (p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho V^2) = \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II.8})$$

La pression totale (également appelée « charge »), notée P_{tot} , correspond à la somme des trois termes de pression se trouvant sous le gradient :

$$P_{tot} = p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (\text{II.9})$$

C'est donc une quantité scalaire qui doit vérifier l'équation :

$$\vec{\nabla} P_{tot} = \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II.10})$$

Un écoulement laminaire étant caractérisé par un champ de vecteurs vitesse tous orientés dans la même direction, supposons qu'un repère cartésien soit choisi de telle sorte qu'en tout point de l'écoulement on ait $\vec{V} = u(x, y, z)\vec{e}_x$. Dans ces conditions, la projection dans les trois directions du repère de l'équation précédemment établie, donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{tot}}{\partial x} = \mu \Delta u \\ \frac{\partial P_{tot}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P_{tot}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

On en déduit que la pression totale n'est fonction que de x , et qu'elle varie en obéissant à l'équation :

$$\frac{dP_{tot}}{dx} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.12})$$

Par ailleurs, l'écoulement étant conservatif, l'équation de continuité s'applique dans sa forme la plus simple :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\text{Et comme } v = w = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow u = u(y, z).$$

Nous pouvons alors reconsidérer l'équation régissant l'évolution de la pression totale en la formulant :

$$\frac{dP_{tot}}{dx} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

Il s'avère alors que le membre de gauche ne peut dépendre que de x alors que celui de droite ne peut dépendre que de y et z . La conséquence est donc que les deux membres sont égaux à une même constante. Ceci permet de montrer que la pression totale varie linéairement avec x :

$$\frac{dP_{tot}}{dx} = \text{Constante} \quad (\text{II.15})$$

Remarque

On notera que si la viscosité est négligée, la pression totale ne varie pas. En effet, la constante étant proportionnelle à μ , elle devient nulle, et on retrouve le contexte d'un écoulement de fluide parfait où l'équation de Bernoulli s'applique le long d'une ligne de courant :

$$\frac{dP_{tot}}{dx} = 0 \Leftrightarrow p + \rho gz + \frac{1}{2} \rho V^2 = Constante \quad (II.16)$$

On dit alors que la charge est constante ou bien encore qu'il n'y a pas de perte de charge. En revanche, pour un fluide réel (dont la viscosité n'est pas négligeable), l'écoulement laminaire est caractérisé par une variation linéaire de la charge (ou pression totale) avec la distance parcourue. À ce stade, la logique peut déjà laisser supposer que la charge décroît et que par conséquent la constante est négative. En effet, puisque les frottements visqueux sont responsables d'une dissipation d'énergie et que la pression totale n'est autre qu'une énergie volumique, il s'ensuit logiquement que la pression totale doit diminuer avec la progression de l'écoulement.

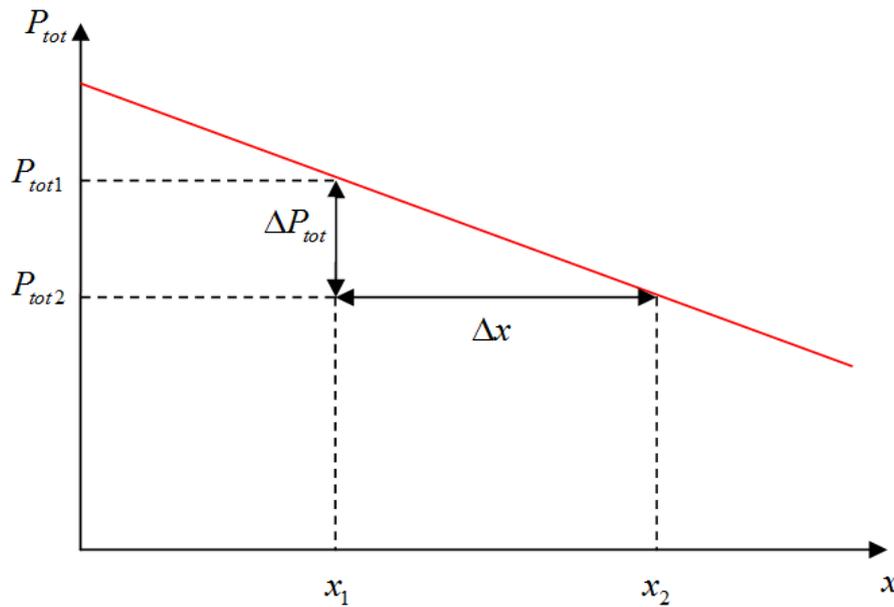


Figure II.3 : La perte de charge en fonction de x [18].

Dans l'hypothèse logique d'une pression totale diminuant linéairement avec la progression de l'écoulement, le graphe de la Figure II.3 montre que sur une longueur $\Delta x = x_2 - x_1$ la chute de pression totale ΔP_{tot} est proportionnelle à Δx et s'exprime :

$$P_{tot1} - P_{tot2} = \Delta P_{tot} = -\frac{dP_{tot}}{dx} \Delta x \quad (II.17)$$

Ainsi, une chute de pression totale (perte de charge) se traduit par $\Delta P_{tot} > 0$ et est la conséquence d'un gradient de pression constant et négatif. C'est pourquoi on parle de pertes de charges régulières.

II.2.1.2.a Écoulement de Poiseuille

L'objectif est ici de caractériser les pertes de charge régulières en considérant un écoulement spécifique. Considérons alors l'écoulement laminaire d'un fluide de viscosité μ et de masse volumique ρ , dans une conduite cylindrique de rayon R , posée horizontalement. Le schéma de la figure II.4 explicite cette configuration et permet de définir un repère cylindrique dont l'axe de révolution est celui de la conduite et correspond à la direction de l'écoulement laminaire.

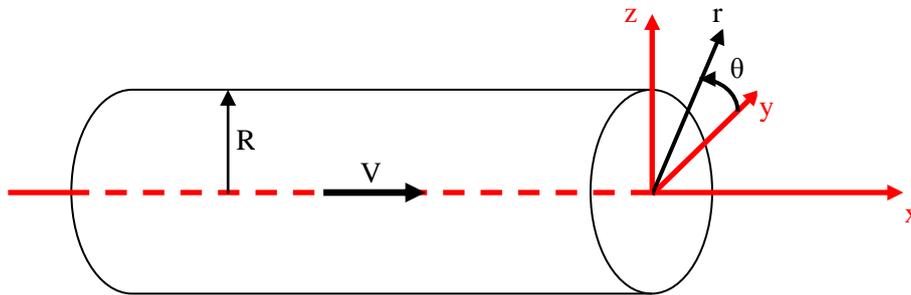


Figure II.4 : conduite cylindrique horizontale [18].

L'écoulement étant laminaire, la vectrice vitesse en tout point s'écrit :

$$\vec{V} = u(r, \theta, x) \vec{e}_x \quad \text{Car } v_r = v_\theta = 0$$

Par ailleurs, l'écoulement étant conservatif et le fluide incompressible, l'équation de continuité se résume à $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ et se développe en coordonnées cylindriques comme :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Et puisque $v_r = v_\theta = 0$, il reste :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.19})$$

Traduisant le fait que la vitesse n'évolue pas le long de l'axe de la conduite. Compte tenu de la symétrie de révolution du problème, on en déduit par ailleurs que $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$, ce qui permet d'en conclure que le vecteur vitesse est purement axial et ne dépend que de r :

$$\vec{V} = u(r) \vec{e}_x \quad (\text{II.20})$$

Reprenons maintenant l'équation régissant l'évolution de la pression totale P_{tot} le long d'un écoulement laminaire orienté suivant l'axe x :

$$\frac{dP_{tot}}{dx} = \mu \Delta u \quad (\text{II.21})$$

Et développons l'expression du Laplacien en tenant compte du fait que u ne dépend que de x :

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (\text{II.22})$$

On obtient donc :

$$\frac{dP_{tot}}{dx} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (\text{II.23})$$

Où le terme de gauche ne dépend que de x et celui de droite que de r . Il s'en suit que les membres de cette équation sont égaux à une même constante k . Ainsi, on a :

$$\frac{dP_{tot}}{dx} = k \quad \text{Traduisant la perte de charge régulière ;}$$

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = k \quad (\text{II.24})$$

Cette équation permettant la détermination du profil de vitesse $u(r)$.

II.2.1.2.b Profil de vitesse pour un écoulement laminaire

Conservons l'équation (II.18) pour établir le profil de vitesse sur une section de la conduite :

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = k \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{kr}{\mu} \Rightarrow r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{kr^2}{2\mu} + k' \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{kr}{2\mu} + \frac{k'}{r} \quad (\text{II.25})$$

$$\text{Et donc : } u(r) = \frac{k}{4\mu} r^2 + k' \ln(r) + k'' \quad (\text{II.26})$$

k' et k'' sont deux constantes d'intégration dont l'indétermination peut être levée en utilisant les conditions aux limites. Ainsi, on sait que la vitesse des particules fluides est nécessairement nulle au contact avec les parois de la conduite. On a donc :

$$u(r=R) = \frac{k}{4\mu} R^2 + k' \ln(R) + k'' = 0 \quad (\text{II.27})$$

Par ailleurs, sur l'axe de la conduite, en $r = 0$, la vitesse est nécessairement finie, ce qui impose d'avoir $k' = 0$, sans quoi $u(r = 0) \rightarrow -\infty$. Donc en résulte que :

$$k'' = -\frac{k}{4\mu}R^2 \quad (\text{II.28})$$

et que le profil de vitesse se formule :

$$u(r) = -\frac{k}{4\mu}(R^2 - r^2) \quad \text{où } 0 \leq r \leq R \quad (\text{II.29})$$

On montre ainsi qu'il s'agit d'un profil parabolique et que $u(r) \geq 0$ impose que $k = \frac{dP_{tot}}{dx} < 0$. Le schéma de la Figure II.5 matérialise ce profil de vitesse caractérisé par une vitesse nulle aux parois et maximale sur l'axe ($u_{max} = u(0) = -\frac{k}{4\mu}R^2$).

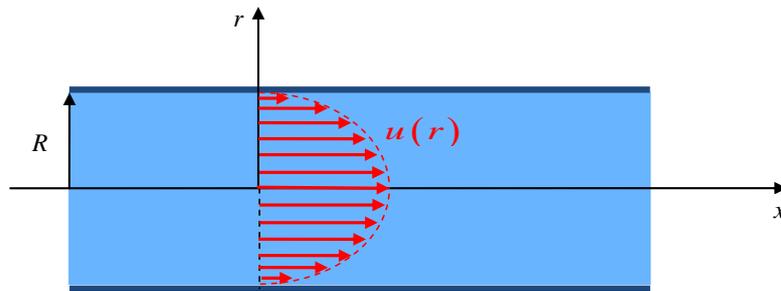


Figure II.5 : profil de vitesse pour le régime est laminaire [18].

On comprend alors qu'à travers la constante k , les pertes de charges régulières sont liées à la vitesse maximale, ou plus globalement à la vitesse moyenne de l'écoulement.

Si on définit la vitesse moyenne de l'écoulement comme le rapport du débit volumique sur la section de la conduite, on a :

$$U = \frac{Q_v}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \iint \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\pi R^2} \iint u(r) dS \quad (\text{II.30})$$

Avec : $dS = 2\pi r dr$, d'où :

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) 2\pi r dr = -\frac{2}{R^2} \frac{k}{4\mu} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = -\frac{2}{R^2} \frac{k}{4\mu} \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = -\frac{2}{R^2} \frac{k}{4\mu} \frac{R^4}{4} \quad (\text{II.31})$$

$$\text{Et donc : } U = -\frac{k}{8\mu} R^2 = \frac{u_{max}}{2} \quad (\text{II.32})$$

Et comme $Q_v = U S = U \pi R^2$, on a par ailleurs :

$$Q_v = -\frac{k}{8\mu} \pi R^2 \quad (\text{II.33})$$

Cette dernière relation permet ainsi de faire le lien entre le débit volumique et les pertes de charge régulières puisque $k = \frac{dP_{tot}}{dx}$ et que $\Delta P_{tot} = -\frac{dP_{tot}}{dx} \Delta x = k \Delta x$, où $k = -8\mu \frac{Q_v}{\pi R^4}$. On obtient alors la formule de *Poiseuille* :

$$\Delta P_{tot} = 8\mu \frac{Q_v}{\pi R^4} \Delta x = 8\mu \frac{U}{R^2} \Delta x \quad (\text{II.34})$$

La différence de pression totale (ou perte de charge) engendrée par les frottements visqueux dans une conduite de longueur $L = \Delta x$ est donc proportionnelle à L , mais également au débit et à la viscosité du fluide :

$$\Delta P_{tot} = \frac{8\mu}{\pi R^4} Q_v L \quad (\text{II.35})$$

II.2.1.2.c Coefficient de perte de charge linéaire

Il est d'usage d'exprimer une perte de charge en fonction de la pression cinétique de l'écoulement dans la conduite. La pression cinétique est générée par le mouvement (elle correspond à l'énergie cinétique par unité de volume) et s'exprime : $\frac{1}{2} \rho V^2$, La vitesse V peut être considérée comme la vitesse moyenne U dans la conduite dans la mesure où la pression cinétique exprimée est aussi une valeur moyenne. Dans ces conditions, on peut formuler la perte de charge sur une longueur L d'une conduite de rayon $R = D/2$ comme :

$$\Delta P_{tot} = 8\mu \frac{V}{(D/2)^2} L = \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) \left(\frac{1}{\frac{1}{2} \rho V^2} 32\mu \frac{V}{D^2} L \right) = \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) \left(\frac{64\mu}{\rho V D} \right) \frac{L}{D} \quad (\text{II.36})$$

$$\text{Où apparaît le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement : } \text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (\text{II.37})$$

$$\text{Ainsi, la perte de charge s'exprime : } \Delta P_{tot} = \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D} \quad (\text{II.38})$$

Où le rapport $64/\text{Re} = \lambda$ est un nombre sans dimension qui prend le nom de coefficient de perte de charge régulière. À partir de résultat, on peut généraliser cette formulation en exprimant toute perte de charge sur une longueur L de conduite de diamètre D comme :

$$\Delta P_{tot} = \frac{1}{2} \rho V^2 \lambda \frac{L}{D} \quad (\text{II.39})$$

On met ainsi en évidence que les pertes de charge régulières sont proportionnelles à la pression cinétique [18], à une grandeur sans dimension L/D caractérisant la conduite, et au coefficient de perte de charge régulière λ caractérisant l'écoulement et qui, lorsqu'il est laminaire ($Re < 2000$), se

formule comme $\lambda = \frac{64}{Re}$.

II.2.1.3 Régime turbulent

Du fait de sa complexité, l'écoulement turbulent ne se prête à aucune théorie simple. Cette remarque est valable ici encore et les formules de pertes de charge retenues pour le cas des écoulements turbulents sont empiriques ou semi-empiriques. Les expériences qui ont conduit aux premières de ces relations sont extrêmement nombreuses. Les résultats sont à utiliser avec une grande circonspection car ils ne sont valables très souvent que dans des cas très particuliers. Les relations semi-empiriques sont plus crédibles et souvent plus générales.

II.2.1.3.a Profil de vitesse pour un écoulement turbulent

Lorsqu'un écoulement en conduite est turbulent ($Re > 2000$), le profil de vitesse n'est plus parabolique comme c'est le cas en régime laminaire. Il s'uniformise sur un large domaine autour de l'axe et présente en conséquence une brusque variation au voisinage des parois (voir Figure II.6). Les pertes de charge régulières sont donc essentiellement dues aux frottements visqueux entre les particules fluides situées près des parois de la conduite. Il en résulte que les propriétés de la paroi jouent un rôle important et que notamment sa rugosité devient un paramètre non négligeable.

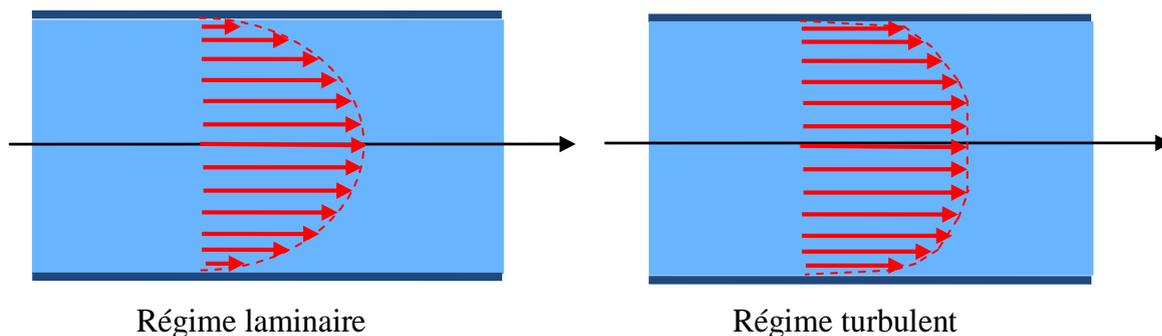


Figure II.6 : Comparaison entre un profil de vitesse pour un régime laminaire et un profil de vitesse d'un régime turbulent [18].

II.2.1.3.b Coefficient de perte de charge linéaire

Pour le régime turbulent, on ne peut plus faire l'hypothèse d'écoulement parallèle. Les simplifications faites précédemment sur les équations de Navier-Stokes ne s'appliquent plus et il n'est donc plus possible de déterminer de façon exacte la solution de l'écoulement. On rappelle que les quantités considérées en régime turbulent sont des grandeurs moyennes. Les grandeurs

instantanées variant très vite dans le temps sont difficiles d'accès et elles ne présentent pas beaucoup d'intérêt pour ce qui nous intéresse ici. La formule de Darcy (II.3) est toujours valable mais avec des grandeurs moyennes.

Pour traiter les problèmes faisant intervenir le régime turbulent (très grande majorité des canalisations industrielles) on dispose de solutions pratiques mises en place par les hydrauliciens qui proviennent d'un grand nombre d'expériences. On peut ainsi déterminer le coefficient de pertes de charge λ . Le problème pratique revient alors à déterminer la fonction $\lambda(\frac{\varepsilon}{D}, \text{Re})$

Pour des conduites hydrauliquement lisses, on pourra utiliser la formule empirique directe de Blasius pour déterminer le coefficient de pertes de charge lorsque le Reynolds est compris entre $2100 < \text{Re} < 10^5$.

$$\text{Formule de Blasius : } \lambda = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}} \quad (\text{II.40})$$

Si le Reynolds est supérieur à 10^5 , on utilisera la formule itérative de Von Kármán et Prandtl.

Formule de Von Kármán [11]:

- Pour $\frac{\varepsilon}{D} < 10^{-3}$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,8 = -2 \log\left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}\right) \quad (\text{II.41})$$

Cette relation, dans laquelle la rugosité n'intervient pas, est valable pour les écoulements dits hydrauliquement lisses (conduites lisses).

- Pour $\frac{\varepsilon}{D} > 10^{-3}$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{\varepsilon}{D}\right) + 1,14 = -2 \log\frac{\varepsilon}{3,71D} \quad (\text{II.42})$$

Cette relation, dans laquelle le nombre de Reynolds n'intervient pas, est applicable aux écoulements dits hydrauliquement rugueux.

L'influence de la qualité de surface des conduites sur la perte de charge a été étudiée par Darcy puis par Nikuradse (voir figure II.7). Pour tenir compte de cet état de surface dans les conduites industrielles, on utilise le plus souvent la formule de Colebrook.

$$\text{Formule de Colebrook [11]: } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}\right) \quad (\text{II.43})$$

On donne à titre d'exemple la valeur du paramètre de rugosité ϵ pour différents matériaux et revêtements intérieurs des tuyaux dans le tableau II.1. Les valeurs peuvent varier de façon significative.

De ce fait le coefficient λ n'est jamais déterminé à moins de 5 à 10% près. En outre, la rugosité évolue dans le temps du fait de la corrosion ou de l'encrassement et il faut prendre cet aspect en considération lorsque l'on doit concevoir et dimensionner une installation qui doit fonctionner sur une longue période.

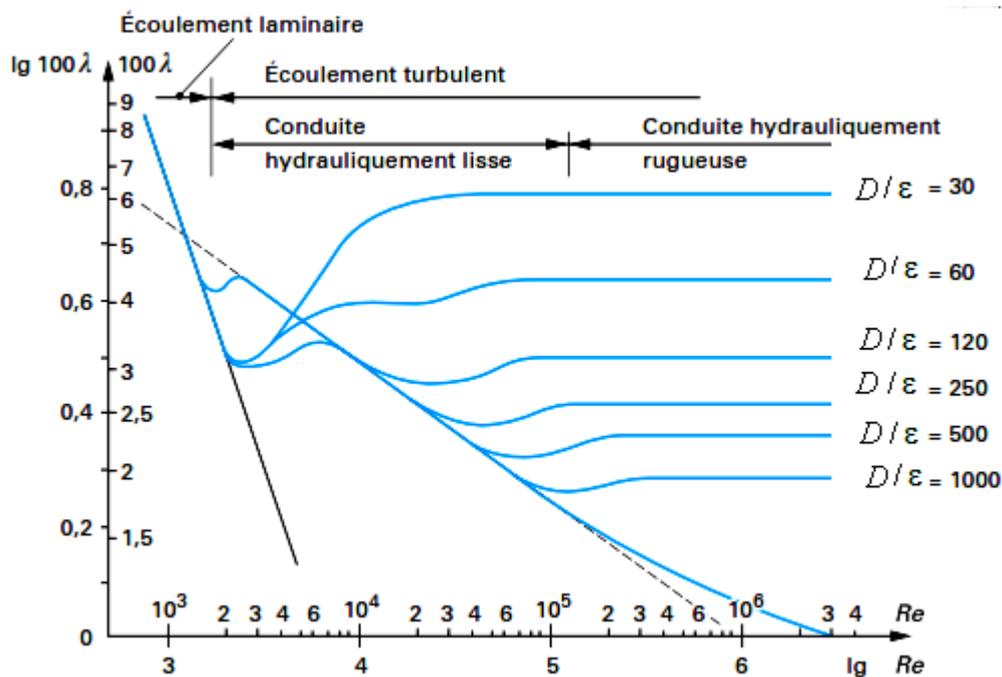


Figure II.7 : Résultat des expériences de Nikuradse [11].

Matériaux	Valeur de ϵ (en mm)	Matériaux	Valeur de ϵ (en mm)
Acier laminé neuf	0.045	Fer galvanisé	0.15
Acier laminé ancien	0.25	Fonte nue neuve	0.24
Acier laminé incrusté	2	Fonte nue rouillée	1.2
Acier riveté	1.8	Fonte asphaltée	0.12
Béton	0.12	Fonte bitumée	0.0024
Bois	0.6	Laiton poli	0.0015
Ciment lissé	0.3	Laiton industriel	0.025
Cuivre	0.0015	verre	0.001

Tableau II.1 : valeurs de rugosité pour quelque matériau commercial [17].

Pour la simplification de la formule de Colebrook-White, plusieurs travaux ont été proposés. On peut citer par exemple :

- **La corrélation Haaland** [19]

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \log \left(\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{\text{Re}} \right) \quad (\text{II.44})$$

- **La corrélation Manadilli** qui est valable pour des valeurs de nombre de Reynolds entre 5235 et 10^8 . [20]

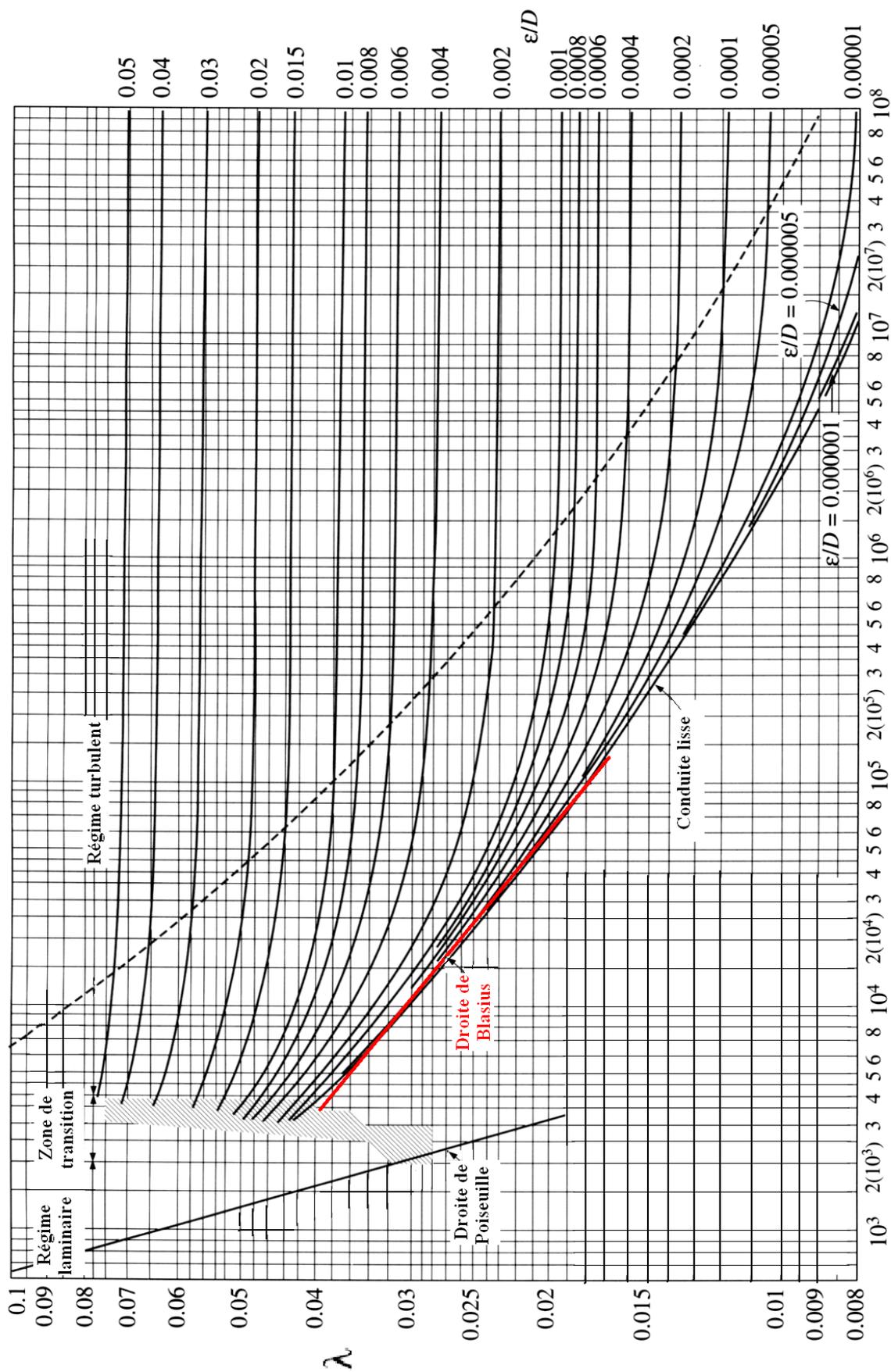
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{95}{\text{Re}^{0,983}} - \frac{96,82}{\text{Re}} \right) \quad (\text{II.45})$$

- **La corrélation Ghanbari** qui est valable pour des valeurs de nombre de Reynolds entre 2100 à 10^8 et pour des valeurs de rugosité relative entre 0 et 0.05. [4]

$$\lambda = -1,52 \log \left(\left(\frac{\varepsilon / D}{7,21} \right)^{1,042} + \left(\frac{2,731}{\text{Re}} \right)^{0,9152} \right)^{-2,169} \quad (\text{II.46})$$

II.2.1.4 Diagramme de Moody

Les canalisations et les conduites employées en pratique diffèrent sensiblement de celles utilisées dans l'expérience de Nikuradse. Leur rugosité n'est pas uniforme et elle n'est pas directement mesurable. Cependant, on peut attribuer une valeur de ε / d à chaque type de conduite. Une étude très détaillée des pertes de charge dans les conduites industrielles est due à Moody 1944. Le résultat principal de cette étude est présenté à la figure II.8 .le diagramme de Moody donne le coefficient de perte de charge linéaire λ en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la canalisation. Le paramètre ε / d est donné pour chaque type de canalisation mais peut varier de façon significative. De ce fait λ n'est jamais déterminé à moins de 5 à 10% près. Ce facteur varie dans le temps du fait de correction et il faut prendre cet aspect en considération lorsque l'on doit concevoir un système fonctionnant sur une grande période de temps [21].



Nombre de Reynolds (Re)

Figure II.8 : Diagramme de Moody [16].

I.2.1.5 Perte de charge linéaire dans les conduites à section non circulaire

Lorsque la pression de transport d'un fluide est très différente de la pression atmosphérique, les lois de la résistance des matériaux, appliquées à la paroi de la conduite, conduisent au choix logique d'une conduite de section circulaire. Ce n'est plus le cas si la pression effective de transport est faible, par exemple pour les gaines de ventilation ou de conditionnement de l'air, pour lesquelles une section rectangulaire conduit à un prix de revient moins élevé [3].

Pour le calcul de coefficient de perte de charge dans des conduites à section non circulaire, on introduit la notion de diamètre hydraulique. Ce dernier est défini par la relation suivante :

$$D_H = \frac{4 * \text{la section d'écoulement}}{\text{périmètre mouillé}} = \frac{4S}{p_{ér}} \quad (\text{II.47})$$

Les conduites à section non circulaire les plus utilisés dans l'industrie sont les conduites à section rectangulaire et les conduites à section annulaire.

- **Conduite à section rectangulaire [16]**

Le coefficient de perte de charge linéaire dans une conduite à section rectangulaire s'écrit :

$$\lambda_{rect} = k_1 \lambda \quad (\text{II.48})$$

Où k_1 est déterminé à l'aide du tableau II.2

a_0 / b_0	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
k_1	1.5	1.34	1.20	1.02	0.94	0.90	0.89

Tableau II.2 : valeurs de coefficient de proportionnalité k_1 [16].

- **Conduite à section annulaire**

Le coefficient de perte de charge linéaire dans une conduite à section annulaire s'écrit :

$$\lambda_{annl} = k_2 \lambda \quad (\text{II.49})$$

Pour les écoulements turbulents rugueux le coefficient de perte de charge linéaire est donné par la relation suivante :

$$\lambda_{annl} = k_3 \lambda \quad (\text{II.50})$$

λ est le coefficient de perte de charge linéaire pour une conduite à section circulaire, ce dernier est déterminé à l'aide de diagramme de Moody [16].

Les coefficients de correction k_2 et k_3 sont déterminés à l'aide du tableau II.3.

$\frac{D_{int}}{D_{ext}}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1
$Re \leq 2.10^2$										
k_2	1.0	1.40	1.45	1.47	1.48	-	1.49	-	-	1.5
$Re = 10^4$										
k_3	1.0	1.03	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07
$Re = 10^5$										
k_3	1.0	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06
$Re = 10^6$										
k_3	1.0	1.02	1.03	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05	1.06
$Re = 10^7$										
k_3	1.0	1.01	1.02	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.06

Tableau II.3 : valeurs des coefficients de correction k_2 et k_3 [16].

II.2.2 Perte de charge singulière

Il existe d'autres pertes de charge d'écoulement. Ce sont les pertes de charges "singulières" dont l'origine est due aux obstacles qui créent des variations géométriques d'écoulement. Les changements brutaux de géométrie - coudes, tés de bifurcation, évasement ou rétrécissement de section de tube, robinet, vannes, obstacles divers - occasionnent des perturbations particulières vis-à-vis de l'écoulement.

Les mécanismes physiques de perte d'énergie ne sont plus alors seulement liés aux frottements, mais aussi aux transformations géométriques rencontrées par le fluide lors de son déplacement [15].

II.2.2.1 Changement de direction

Dans les conduites et les canaux courbes (coudes à parois parallèles ou concentrique), est par suite du changement de direction de l'écoulement, il apparaît des forces centrifuges dirigées du

centre de courbure vers la paroi extérieure de la conduite. De cela dépend l'augmentation de pression au voisinage de la paroi extérieure et sa diminution au voisinage de la paroi intérieure, lorsque l'écoulement passe de la conduite rectiligne à la partie coudée. La vitesse de l'écoulement devient beaucoup plus faible vers la paroi intérieure et plus élevée vers la paroi extérieure.

Coudes à parois parallèles : sont ceux pour lesquels les rayons de courbure des parois intérieure et extérieure sont identiques.

Coudes concentrique : sont ceux pour lesquels les sections d'entrée et de sortie étant égales, les courbes des parois intérieure et extérieure sont deux arcs de cercle concentrique.

II.2.2.1.a Coudes Arrondi

Pour les coudes arrondis (figure II.9) le coefficient de perte de charge s'écrit :

$$K = \left(0.131 + 1.847 \left(\frac{D}{2R_c} \right)^{\frac{7}{2}} \right) \frac{\delta}{90^\circ} \quad (\text{II.51})$$

Où : R_c est le rayon de courbure, δ l'angle au centre du coude en degré et D le diamètre du coude.

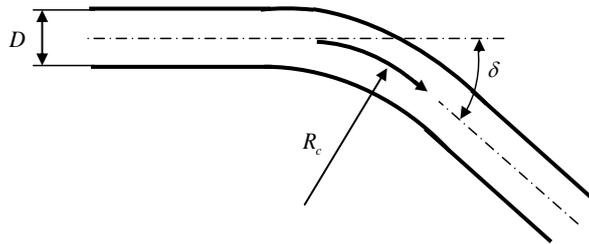


Figure II.9 : Coude arrondi d'un angle δ [22].

On peut tirer le coefficient de perte de charge d'un coude arrondi à l'aide du tableau II.4

δ (°)	R_c / D				
	1	1.5	2	2.5	3
11.25	0.037	0.021	0.018	0.017	0.017
22.5	0.074	0.043	0.036	0.034	0.034
30	0.098	0.057	0.048	0.046	0.045
45	0.147	0.085	0.073	0.069	0.067
60	0.196	0.114	0.097	0.092	0.090
90	0.294	0.170	0.145	0.138	0.134
180	0.589	0.341	0.291	0.275	0.269

Tableau II.4 : Coefficient de perte de charge pour un coude arrondi [22].

II.2.2.1.b Coudes à angle vif

Pour les coudes à angle vif le coefficient de perte de charge ne dépend pas du diamètre, il dépend seulement de l'angle δ . On peut le tirer directement du tableau II.5.

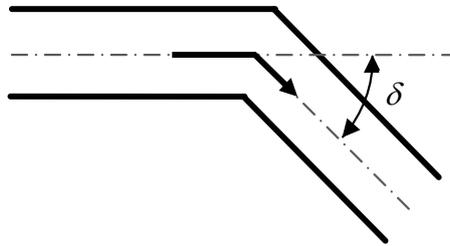


Figure II.10 : Coude à angle vif d'un angle δ [22].

La formule qui donne le coefficient de perte de charge singulière en fonction de l'angle δ pour un coude à angle vif est [18] :

$$K = \sin^2 \delta + 2 \sin^4 \frac{\delta}{2} \tag{II.52}$$

Relation de Gibson [23]

$$K = 67,6 \cdot 10^{-6} (\delta^\circ)^{2,17} \tag{II.53}$$

δ (°)	22.5	30	45	60	90
K	0.07	0.11	0.24	0.47	1.13

Tableau II.5: Coefficient de perte de charge pour un coude à angle vif [22].

II.2.2.1.c Coude à paroi concentrique

Pour les coudes à paroi concentrique le coefficient de perte de charge dépende a la fois de deux coefficients un représente la perte de charge linéaire et l'autre représente la perte de charge singulière.

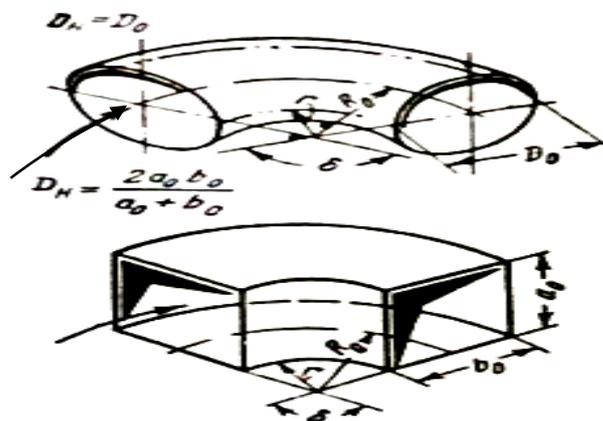


Figure II.11 : Coude à paroi concentrique [16].

Pour des Paroi lisse ($\varepsilon \approx 0$) et $Re \geq 2.10^5$:

$$K = K_s + K_f \tag{II.54}$$

$$K_s = A_1 B_1 C_1 \text{ et } K_f = 0.0175 \lambda \frac{R_c}{D_H} \delta \tag{II.55}$$

λ est le coefficient de perte de charge linéaire du coude, A_1, B_1 et C_1 sont déterminés à l'aide des tableaux (II.6).

δ (°)	0	20	30	45	60	75	90	110	130	150	180
A_1	0	0.31	0.45	0.60	0.78	0.90	1.00	1.13	1.20	1.28	1.40

R_c / D_H	1.0	2.0	4.0	6.0	8.0	10	15	20	25	30	35	40	45	50
B_1	0.21	0.15	0.11	0.09	0.07	0.07	0.06	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03

a_0 / b_0	0.25	0.50	0.75	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
C_1	1.8	1.45	1.20	1.00	0.68	0.45	0.40	0.43	0.48	0.55	0.58	0.60

Tableaux II.6 : Valeurs de A_1, B_1 et C_1 pour la détermination du coefficient de perte de charge [16].

II.2.2.1.d Jonction en "T" à 90°

- Branchement de prise à 90° de même diamètre et à angles vifs :

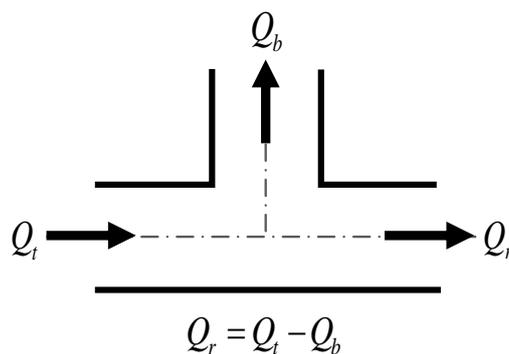


Figure II.12 : Une "T" (Branchement de prise à 90°) [22].

$$\Delta H_{s_r} = K_r \frac{V_s^2}{2g} \tag{II.56}$$

$$\Delta H_{s_b} = K_b \frac{V_s^2}{2g} \tag{II.57}$$

K_r et K_b sont les coefficient de perte de charge singulière, ils sont déterminer à l'aide du tableau II.7.

Q_b / Q_t	$Q_b / Q_t \rightarrow 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	$Q_b / Q_t \rightarrow 1$
K_r	0.40	0.26	0.15	0.06	0.02	0.00
K_b	1.00	1.01	1.05	1.15	1.32	1.45

Tableau II.7 : Coefficient de perte de charge d'une "T" (branchement de prise à 90°) [22].

- Branchement d'amenée à 90° de même diamètre et à angles vifs

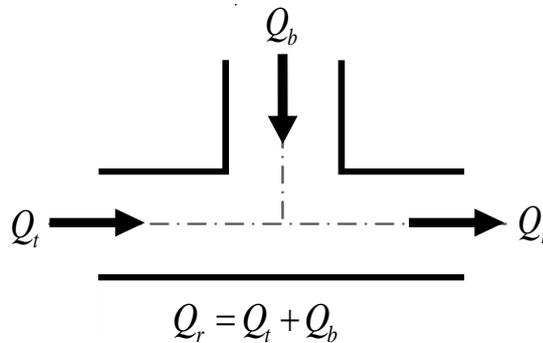


Figure II.13 : Une "T" (Branchement d'amenée à 90°) [22].

On utilisant les relations (II.56) et (II. 57) pour calculer la perte de charge dans une "T", où K_r et K_b sont déterminer à l'aide du tableau II.8.

Q_b / Q_t	$Q_b / Q_t \rightarrow 0$	0.1	0.2	0.4	0.8	$Q_b / Q_t \rightarrow 1$
K_r	0	0.16	0.27	0.46	0.60	0.55
K_b	-0.60	-0.37	-0.18	0.26	0.94	1.20

Tableau II.8 : Coefficient de perte de charge d'une "T" (branchement d'amenée à 90°) [22].

II.2.2.1.e Jonction en "y" à 45°

Pour les jonction en "y" à 45° (figure II.14) le coefficient de perte de charge s'écrit :

$$K_{p,l} = 1 + \left(\frac{Q_l S_p}{Q_p S_l} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{Q_l}{Q_p} \right)^2 - 1.41 \frac{S_p}{S_l} \left(\frac{Q_l}{Q_p} \right)^2 \quad (\text{II.58})$$

$$K_l = \frac{K_{p,l}}{\left(\frac{Q_l S_p}{Q_p S_l} \right)^2} \quad (\text{II.59})$$

$$K_{p,r} = 1 - \left(1 - \frac{Q_l}{Q_p}\right)^2 - 1.41 \frac{S_p}{S_l} \left(\frac{Q_l}{Q_p}\right)^2 \quad (\text{II.60})$$

$$K_r = \frac{K_{p,r}}{\left(1 - \frac{Q_l}{Q_p}\right)^2} \quad (\text{II.61})$$

Les coefficients des pertes de charge latérale et principale sont déterminés à partir des relations (II.59 et II.61) ou à partir des tableaux II.9 et II.10.

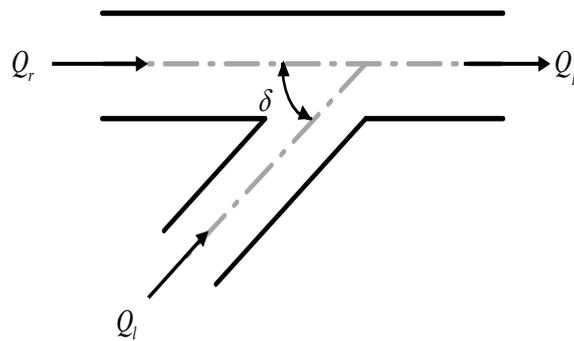


Figure II.14 : Jonction en en "y" à 45° [16].

$\frac{Q_l}{Q_p}$	S_l / S_p						
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0
0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.05	0.12	0.14	0.16	0.17	0.17	0.17
0.2	-0.20	0.17	0.22	0.27	0.27	0.29	0.31
0.3	-0.76	-0.13	0.08	0.20	0.28	0.32	0.40
0.4	-1.65	-0.50	-0.12	0.08	0.26	0.36	0.41
0.5	-2.77	-1.00	-0.49	-0.13	0.16	0.30	0.40
0.6	-4.30	-1.70	-0.87	-0.45	-0.04	0.20	0.33
0.7	-6.05	-2.60	-1.40	-0.85	-0.25	0.08	0.25
0.8	-8.10	-3.56	-2.10	-1.30	-0.55	-0.17	0.06
0.9	-10.0	-4.75	-2.80	-1.90	-0.88	-0.40	-0.18
1.0	-13.2	-6.10	-3.70	-2.55	-1.35	-0.77	-0.42

Tableau II.9 : Valeurs de $K_{p,r}$ en fonction des débits et des surfaces d'entrée et de sortie [16].

$\frac{Q_i}{Q_p}$	S_i / S_p						
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0.1	0.24	-0.45	-0.56	-0.59	-0.61	-0.62	-0.62
0.2	3.15	0.54	-0.02	-0.17	-0.26	-0.28	-0.29
0.3	8.0	1.64	0.60	0.30	0.08	0.00	-0.03
0.4	14.0	3.15	1.3	0.72	0.35	0.25	0.21
0.5	21.9	5.0	2.1	1.18	0.60	0.45	0.40
0.6	31.6	6.90	2.97	1.65	0.85	0.60	0.53
0.7	42.9	9.2	3.9	2.15	1.02	0.70	0.60
0.8	55.9	12.4	4.90	2.66	1.20	0.79	0.66
0.9	70.6	15.4	6.20	3.20	1.30	0.80	0.64
1.0	86.9	18.9	7.40	3.71	1.42	0.80	0.59

Tableau II.10 : Valeurs de $K_{p,l}$ en fonction des débits et des surfaces d'entrée et de sortie [16].

II.2.2.2 Changement de section

- **Changement brusque de diamètre**

- **Rétrécissement**

Le coefficient de perte de charge singulière K d'un rétrécissement brusque est calculé à l'aide de la relation II.62.

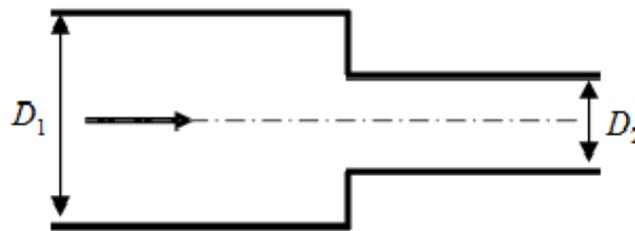


Figure II.15 : Rétrécissement brusque [22].

$$K = 0.5 \left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right) \tag{II.62}$$

- **Elargissement**

Le coefficient de perte de charge singulière K d'un élargissement brusque est calculé à l'aide de la relation II.63.

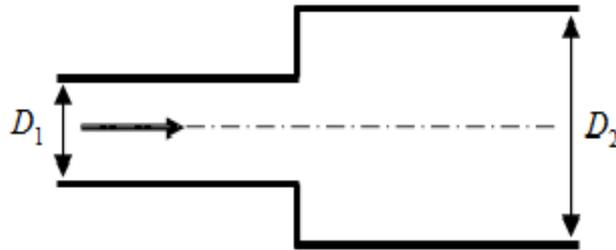


Figure II.16 : Elargissement brusque [22].

$$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (\text{II.63})$$

II.2.2.3 Appareils de robinetterie

- Vanne opercule

Le coefficient de perte de charge singulière K d'une vanne opercule est déterminé à l'aide du tableau II.11.

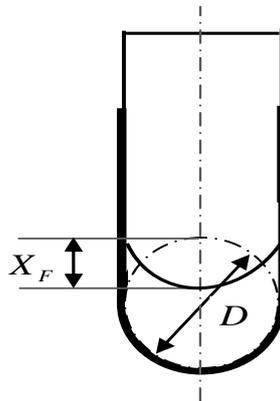


Figure II.17 : Vanne opercule [22].

$\frac{X_F}{D}$	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875
K	0.07	0.26	0.81	2.06	5.52	17	98

Tableau II.11 : Valeurs de K en fonction de l'ouverture de la vanne (opercule) [22].

- **Vanne à papillon**

Le coefficient de perte de charge singulière K d'une vanne à papillon est déterminé à l'aide du tableau II.12.

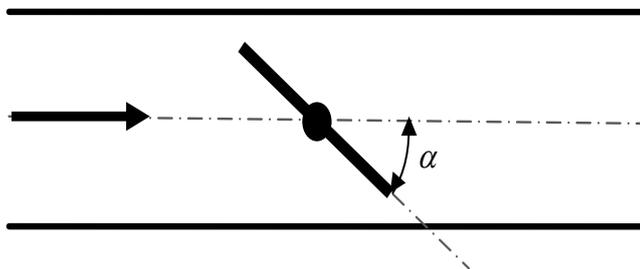


Figure II.18 : Vanne à papillon [22].

$\alpha(^{\circ})$	5	10	15	20	30	40	45	50	60	70
K	0.24	0.52	0.90	1.5	3.9	11	19	33	118	750

Tableau II.12 : Valeurs de K en fonction de l'angle d'ouverture de la vanne (à papillon) [22].

- **Robinet à Boisseau**

Le coefficient de perte de charge singulière K d'un robinet à boisseau est déterminé à l'aide du tableau II.13.

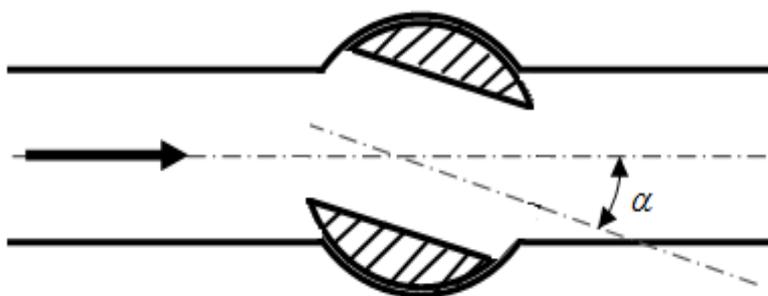


Figure II.19 : Robinet à boisseau [22].

$\alpha(^{\circ})$	5	10	15	20	30	40	45	50	55	60
K	0.05	0.29	0.75	1.6	5.5	17	31	53	110	206

Tableau II.13 : Valeurs de K en fonction de l'angle d'ouverture de la vanne (à boisseau) [22].

- Clapet à battant

Le coefficient de perte de charge singulière K d'un clapet à battant est déterminé à l'aide du tableau II.14.

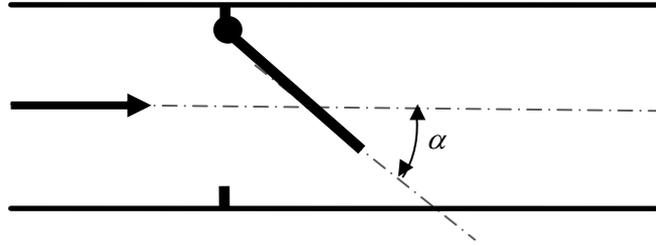


Figure II.20 : Clapet à battant [22].

$\alpha(^{\circ})$	20	30	40	45	50	55	60	65	70	75
K	1.7	3.2	6.6	9.5	14	20	30	42	62	90

Tableau II.14 : Valeurs de K en fonction de l'angle d'ouverture du clapet à battant [22].