

## II. Les contraintes dans le vilebrequin

### II.1. Calcul des arbres coudés multiples

Comme pour les arbres, le calcul doit dans chaque cas d'espèce tenir compte des sollicitations parfois assez différentes qui peuvent intervenir.

A cause du grand nombre de paliers le système est hyperstatique. En général, on ne se laisse pas entraîner à des calculs trop compliqués, à cause de l'incertitude qui règne sur les différents facteurs élastiques, tels par exemple l'élasticité des paliers, la déformation de l'arbre coudé, etc ...

De plus ces calculs sont incertains aussi, car :

- Les sollicitations sont essentiellement oscillantes.
- Les vibrations de torsions élèvent très notablement les contraintes.
- Il se produit des accélérations angulaires positives ou négatives, provoquant des sollicitations supplémentaires dont il est très difficiles, pour ne pas dire impossible, de tenir compte.
- Dans le cas de plus de deux paliers, la répartition des contraintes est extrêmement sensible aux défauts d'alignement, à l'usure des paliers, aux déformations du bâti.

On se contente souvent de calculs comparatifs en se rapportant à des réalisations antérieures. On peut, en se basant sur un jugement expérimenté, isolé le coudé et ses paliers adjacents, qui paraissent devoir subir les sollicitations les plus sévères. C'est-à-dire pour tous les moteurs n'ayant pas plus de 8 cylindres, la vérification se limitera à la dernière manivelle.

La détermination des efforts se fait alors comme s'il s'agissait d'une pièce droite, pour chaque section normale à la fibre neutre, approximation dont on tiendra compte dans le choix des coefficients de sécurité.

Du point de vue de l'élasticité pour le calcul des contraintes on admet par approximation que les bras sont rigides et ne se déforment pas.

---

---

## II.2. Commentaires

Soulignons, sans plus tarder, que les amplitudes des contraintes nées de la flexion et de la torsion présentent, de la périphérie vers l'intérieur de la pièce, un gradient de contrainte d'autant plus élevée que la pièce est plus petite; or plus ce gradient est élevé mieux se distribuent dans le sein de la pièce les hautes contraintes superficielles; donc plus volumineux est le vilebrequin, plus faibles sont les contraintes admissibles. De surcroît plus grosse est une pièce, plus hétérogène est sa structure. Donc, au total, plus la cylindrée unitaire et la pression de combustion augmentent, plus importantes apparaissent, tant la ductilité du matériau que la forme et l'amplitude des congés. On note combien les contraintes existant aux congés intérieurs entre maneton et bras prennent le pas sur les contraintes moyennes existant dans le maneton. De plus, si l'on n'y prend garde, le perçage du trou de lubrification soit dans le tourillon, soit dans le maneton peuvent induire des concentrations de contraintes influençant directement le calcul à la fatigue du vilebrequin et donc sa durée de vie.

Une autre disparité, d'origine fonctionnelle, existe entre le vilebrequin d'un moteur à essence tournant à 7000 t/min et celui d'un Diesel à vitesse de rotation plus modeste mais à pression maximale de combustion élevée. Dans le premier cas les efforts dynamiques priment sur les forces de combustion alors que dans le second cas, ces dernières sont nettement prépondérantes et le vilebrequin est sollicité au maximum en flexion au point mort haut (PMH.). Les contraintes sont donc de natures différentes : dans le premier cas les efforts complémentaires dus aux vibrations (de flexion en particulier) peuvent ne pas compromettre la résistance, même si chaque manivelle n'est pas prévue avec deux paliers adjacents.

Une forme fonctionnelle résistante, apte à tous les moteurs Diesel (ou à tous les moteurs à explosion) géométriquement semblable ne peut donc pas exister. Plus encore que pour toute autre pièce la réalisation heureuse d'un vilebrequin ne peut être que le fruit d'une harmonieuse coopération entre le motoriste, le métallurgiste, l'usineur et, toutes les fois où cela est possible (et les occasions en sont nombreuses pour qui les recherche), l'expérience vécue par l'utilisateur [01].

Sous l'action du couple moteur, le vilebrequin, considéré en tant qu'arbre coudé, se déforme. Les bras subissent à la fois une flexion dans le plan perpendiculaire à l'axe et une torsion autour d'un axe parallèle à celui-ci : ces déformations des bras sont toujours suffisamment faibles pour ne pas provoquer de réactions des appuis. Mais les manetons et tourillons subissent une torsion autour

---

de leur axe et de ce fait subissent un raccourcissement axial, qui, dans certains cas, peut ne pas être négligeable [01].

Une remarque générale : les vilebrequins ne sont pas très chargés dans leur ensemble principalement pour des raisons de rigidité. Les zones critiques sont les raccordements entre bras et portées qui sont de plus en plus sollicitée suite à l'accroissement de la puissance spécifique des moteurs.

### **II.1.3. Efforts au sein d'une manivelle**

#### **II.3.1. Position du problème - méthode simplifiée de calcul.**

Pour des problèmes courants de calcul de vilebrequin, on se borne dans les bureaux d'études à admettre que le vilebrequin est interrompu aux droits des portées de paliers. Les calculs se réduisent alors à ceux proposés ci-dessous et cette méthode de calcul porte habituellement le nom de méthode simplifiée; le vilebrequin est alors isostatique [02].

L'application de cette méthode simplifiée conduit à admettre, aux différentes parties de vilebrequin des contraintes plus grandes que les contraintes réelles, mais par contre elle donne des valeurs par défaut pour les réactions de paliers intermédiaires.

La manivelle, premier organe à transmettre sous forme de couple l'énergie développée par la combustion, doit résister à divers efforts. Les calculs de vérification du vilebrequin à deux paliers s'effectuent pour deux positions critiques :

[1] Position critique au P.M.H. d'allumage (effort  $F_{max}$ ) [1ère position critique]

[2] Position critique au maximum d'effort tangentiel  $F_{tg \max}$  [2ème position critique]

#### **II.3.2. Hypothèses simplificatrices et de sécurité :**

[H1] Nous supposerons que le vilebrequin repose sur appuis simples.

[H2] L'effort maximum à lieu au moment de l'explosion pendant le ralenti. C'est pourquoi, lorsqu'un moteur peut-être appelé à fonctionner à plein couple et à faible vitesse, les efforts dynamiques ne doivent pas être retranchés des efforts maxima de combustion. C'est pourquoi nous ne tiendrons pas compte :

- du poids du vilebrequin (négligeable);
- des forces d'inertie du vilebrequin; ces forces tendent à diminuer l'action de  $F_{\max}$

(ce qui est très sensible à grande vitesse);

- des forces d'inertie alternatives, qui pour cette position critique agissent dans le même sens que les précédentes;

[H3] Nous supposons que les efforts dû à l'action du gaz est concentrée au milieu du maneton.

Pour une bonne compréhension, on associera à chaque contrainte calculée, le diagramme de son moment fléchissant (associé à son cisaillement) et/ou de son moment de torsion.

### Remarque importante :

Le développement qui suit est valide pour un vilebrequin dont le maneton est entouré de tourillons.

## II.4. Effort de pression (1e position critique)

L'effort  $F_{\max}$ , dû à la pression  $P$  des gaz sur le piston de diamètre  $D$ , se traduit dans les paliers adjacents par deux réactions  $R_A$  et  $R_B$  valant chacune ( $F_{\max} / 2$ ) (voir figure II.2.).

### II.4.1. Chaque tourillon subit :

- une flexion qui donnera lieu à une contrainte maximale au raccord tourillon-bras :

$$M_f = \frac{F_{\max}}{2} \left( \frac{l_t}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{3ft} = \frac{32M_f}{\pi d_t^3}$$

- un cisaillement, dont le maximum de contrainte se situera au centre de la section du tourillon :

$$\tau_{3cis} = k_\tau \frac{F_{\max}}{2A_{tourillon}} \quad \text{avec : } k_\tau = \frac{4}{3} \text{ pour une section circulaire.}$$

Et la contrainte globale maximale de comparaison se réduira à :

$$\sigma_3 = \sigma_{3ft} \quad \text{ou} \quad \sigma_3 = \sqrt{3}\tau_{3cis}$$

### II.4.2. Les bras subissent :

- une flexion qui entraînera une contrainte maximale le long de la largeur a du bras :

$$M_f = \frac{F_{\max}}{2} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2} \right) \qquad \sigma_{2fl} = \frac{6M_f}{ab^2}$$

Le moment fléchissant est constant sur la hauteur du bras (de 0 à rm) et de ce fait le cisaillement est nul dans le bras.

- une compression produisant une contrainte uniforme dans la section :

$$\sigma_{2comp} = \frac{F_{\max}}{2ab}$$

Et la fibre la plus chargée sera soumise à :

$$\sigma_2 = \sigma_{2fl} + \sigma_{2comp}$$

### II.4.3. Le maneton subit :

- une flexion qui donnera lieu à une contrainte maximale au milieu de celui-ci :

$$M_f = \frac{F_{\max}}{2} \left( \frac{l_t}{2} + b + \frac{l_m}{2} \right) \qquad \sigma_{1fl} = \frac{32M_f}{\pi d_m^3}$$

- un cisaillement, dont le maximum de contrainte se situera au centre de la section

du maneton :

$$\tau_{1cis} = k_\tau \frac{F_{\max}}{2A_{maneton}} \qquad \text{avec : } k_\tau = \frac{4}{3} \text{ pour une section circulaire.}$$

Et la contrainte globale maximale de comparaison se réduira à :

$$\sigma_1 = \sigma_{1fl}$$

## II.4.Effort dû aux autres cylindres

Le couple poly cylindrique dû aux autres cylindres est aussi appliquée au dernier coudé de la manivelle dont on calcule les contraintes. Cet efforts est variable suivant le nombre et la disposition des cylindres d'une part et suivant la position considéré de la manivelle d'autre part. Cet effort est, en principe, à superposer avec les deux autres cas de calcul. Mais en pratique effort n'apporte aucune contrainte supplémentaire si le moteur n'a pas plus de 8 cylindres[01].

En effet si nous notons par :

$m_1$  : le moment maximum dû aux gaz pour un seul cylindre

$M_1$  : le moment maximum total dû aux gaz pour tout le moteur,

L'étude de la superposition des couples élémentaires  $m$  conduit à admettre pour valeur du rapport ( $M_1 / m_1$ ), les chiffres du tableau suivant :

Nombre de cylindres	Rapport ( $M_1 / m_1$ )
4	0.99
6	0.97
8	0.97
12	1.08
16	1.20

**Tableau II.1.** – les valeurs du rapport  $M_1 / m_1$

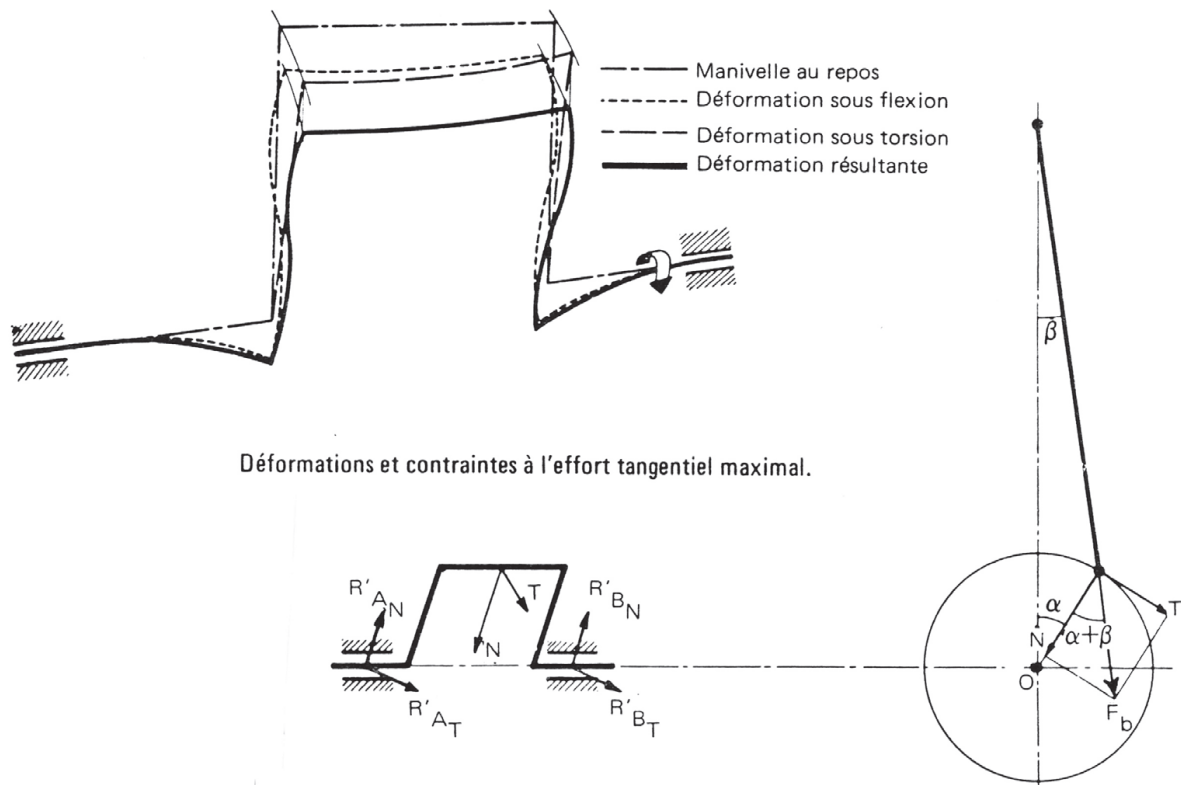
Donc pour tous les moteurs n'ayant pas plus de 8 cylindres:  $M_1 < m_1$ . Dans ce cas en numérotant les manetons à partir de la résistance (volant), la vérification se limitera à la dernière manivelle en considérant uniquement le couple  $m_1$ .

Pour les moteurs à plus de 8 cylindres, la vérification aura lieu pour le premier coude, en tenant compte de  $m_1$  et du couple transmis par les autres manivelles.

## II.6. Effort tangentiel (2e position critique)

L'effort  $F_b$  appliqué par la bielle à la manivelle, se décompose (voir figure fig. V1.1.) en :

- < une force tangentielle :  $F_b \sin(\theta + \beta) = T$
- < une force radiale :  $F_b \cos(\theta + \beta) = N$



**Figure. II.1.** - Efforts normal et tangentiel.

**Remarque :** Il s'agira de déterminer la position (l'angle) pour laquelle  $T$  est maximum.

La modélisation utilisée pour déterminer les contraintes dans les différentes parties du vilebrequin, et cela en fonction des diverses hypothèses émises précédemment, sera celle de la figure. II.2.

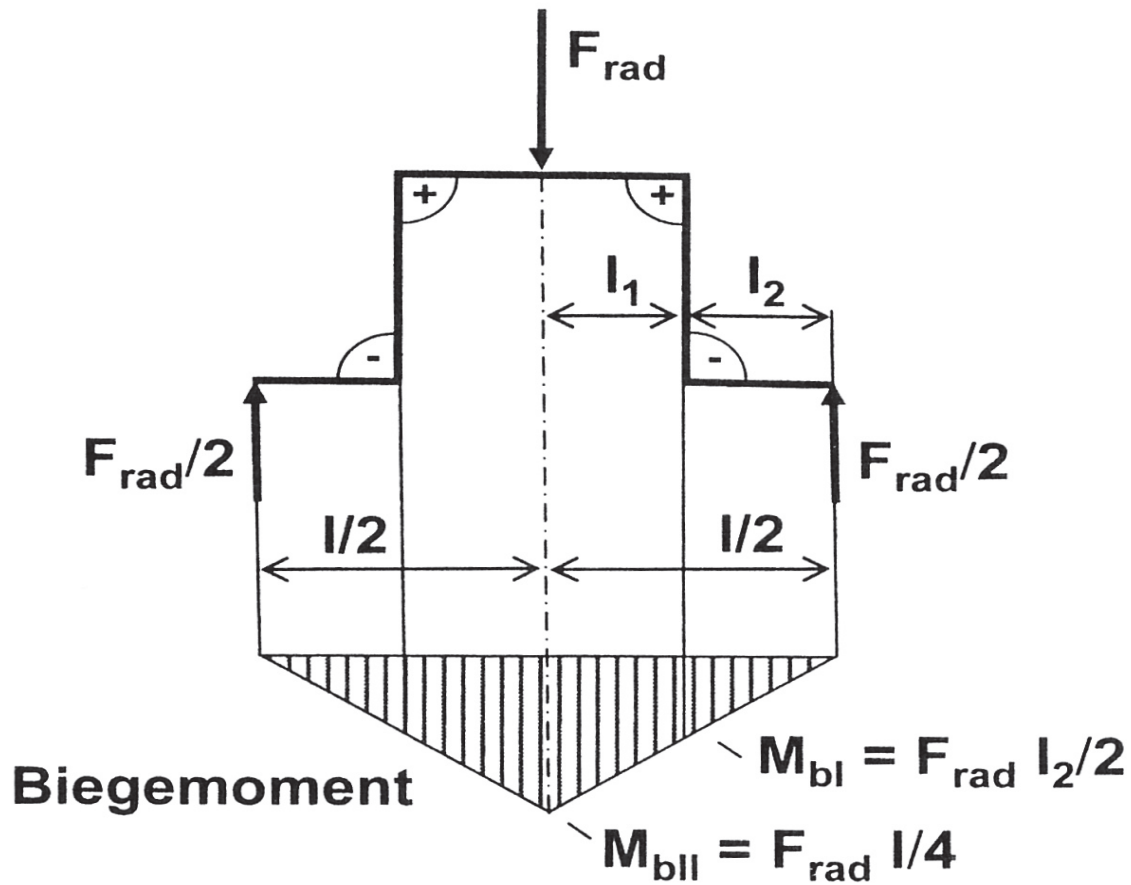


Figure. II.2. - Hypothèse d'un coudé sur deux appuis.

### II.6.1. Le tourillon quant à lui subit :

- une flexion, dû à T et à N, et donc comme pour le maneton, on considérera directement  $F_b$  et on aura la contrainte maximale au raccord du tourillon et du bras qui vaudra :

$$M_f = \frac{F_b}{2} \left( \frac{l_t}{2} \right) \qquad \sigma_{3fl} = \frac{32M_f}{\pi d_t^3}$$

- un cisaillement, dont le maximum de contrainte se situera au centre de la section du tourillon :

$$\tau_{3cis} = k_\tau \frac{F_b}{2A_{tourillon}} \qquad \text{avec : } k_\tau = \frac{4}{3} \text{ pour une section circulaire.}$$



- une torsion, due au couple C, qui entraînera une contrainte maximale en périphérie :

$$M_{iT} = C = T \times r_m \qquad \tau_{3T} = \frac{16M_{iT}}{\pi d_i^3}$$

Et la contrainte globale de comparaison, suivant von Mises, se calculera en périphérie du tourillon et vaudra :

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma_{3fl}^2 + 3\tau_{3T}^2}$$

### II.6.2. Le bras subit: quant à lui, des déformations complexes, à savoir :

- une flexion dans le plan de rotation (dû au couple transmis Ct et à l'effort T/2), qui entraînera une contrainte maximale le long de l'épaisseur b du bras :

$$C_t \text{ et } T/2 \qquad M_{fT} = C_t - \frac{T}{2}x \qquad \text{avec : } x \text{ variant de } (0 \text{ à } r_m).$$

Autrement dit, le moment fléchissant maximum se situera au raccord tourillon-bras et vaudra :

$$M_{fT} = C_t = Tr_m \qquad \sigma_{2fT} = \frac{6M_{fT}}{a^2b}$$

- une flexion dans le plan perpendiculaire à la rotation (dû à N/2) qui entraînera une contrainte maximale le long de la largeur a du bras :

$$\Rightarrow N/2 \qquad M_{fN} = \frac{N}{2} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2} \right) \qquad \sigma_{2fN} = \frac{6M_{fN}}{ab^2}$$

Dans ce cas le moment fléchissant est constant sur la hauteur du bras (de 0 à rm (rayon de manivelle)).

- Une compression, due à N/2, produisant une contrainte uniforme dans la section :

$$N/2 \qquad \Rightarrow \sigma_{2cN} = \frac{N}{2ab}$$

- Une torsion, due à l'effort T/2, et qui entraîne une contrainte nulle aux angles et une contrainte maximale aux milieux des grands côtés a :

$$\Rightarrow T/2 \qquad \Rightarrow M_{iT} = \frac{T}{2} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2} \right) \qquad \Rightarrow \tau_{2T} = \frac{M_{iT}}{C_1 ab^2}$$

Avec  $C_1$  fonction de  $a/b$  :  $C_1 \approx \frac{1}{3+1.8\frac{b}{a}}$  (voir aussi tableau V1.2.)

Quant aux milieux des petits côtés  $b$ , nous aurons une contrainte :

$$\Rightarrow T/2 \quad \Rightarrow \tau'_{2T} = C_3 \tau_{2T} \quad \text{avec } C_3 \text{ fonction de } a/b \text{ (voir tableau V1.2.)}$$

a/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	$\infty$
C1	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
C2	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
C3	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

**Tableau II.2.** – La valeur de  $C$  fonction de  $a/b$

- un cisaillement dû à  $T/2$  : négligeable;
- Le cisaillement dû à  $N/2$  est nul car le moment dans le bras est constant sur sa hauteur.

Déterminons maintenant les contraintes globales de comparaison agissant :

- au milieu du grand côté  $a$ ;
- au milieu du petit côté  $b$ ;
- aux angles.

1) Au milieu du grand côté  $a$  :

Celui-ci sera soumis à :  $\sigma_{2fIN}$ ,  $\sigma_{2cN}$  et  $\tau_{2T}$

$$\sigma_{2GC} = \sqrt{(\sigma_{2fIN} + \sigma_{2cN})^2 + 3\tau_{2T}^2}$$

2) Au milieu du petit côté  $b$  :

Celui-ci sera soumis à :  $\sigma_{2fIT}$ ,  $\sigma_{2cN}$  et  $\tau'_{2T}$

$$\sigma_{2PC} = \sqrt{(\sigma_{2fIT} + \sigma_{2cN})^2 + 3\tau'_{2T}{}^2}$$

3) Aux angles :

Ceux-ci seront soumis à :  $\sigma_{2fIN}$  ,  $\sigma_{2fIT}$  et  $\sigma_{2cN}$

$$\sigma_{2mg} = \sigma_{2fIT} + \sigma_{2fIT} + \sigma_{2cN}$$

**II.6.3. Le maneton subit:** chacun des efforts T et N, ou en considérant directement  $F_b$  :

- une flexion qui donnera lieu à une contrainte maximale au milieu de celui-ci :

$$\Rightarrow F_b \quad \Rightarrow M_f = \frac{F_b}{2} \left( \frac{l_t}{2} + b + \frac{l_m}{2} \right) \quad \Rightarrow \sigma_{1fI} = \frac{32M_f}{\pi d_m^3}$$

- un cisaillement, dont le maximum de contrainte se situera au centre de la section du maneton:

$$\Rightarrow F_b \quad \Rightarrow \tau_{1cis} = k_\tau \frac{F_b}{2A_{maneton}} \quad \text{avec : } k_\tau = \frac{4}{3} \text{ pour une section circulaire.}$$

- une torsion qui entraînera une contrainte maximale en périphérie :

$$\Rightarrow C_t \text{ et } T / 2 \quad \Rightarrow M_{tT} = C_t - \frac{T}{2} r_m = \frac{T}{2} r_m \quad \Rightarrow \tau_{1T} = \frac{16M_{tT}}{\pi d_m^3}$$

Et la contrainte globale maximale de comparaison, suivant von Mises, se calculera en périphérie du maneton et vaudra :

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_{1fI}^2 + 3\tau_{1T}^2}$$

**II.6.4. Commentaire général :**

On remarquera la transformation du moment de torsion existant dans le tourillon  $M_t = C_t$  en moment fléchissant dans le bras  $M_f = C_t$ . Celui-ci diminuant tout au long de la hauteur du bras pour atteindre son minimum au raccord bras-maneton  $M_f = (T / 2) r_m$ , pour enfin ce changer en moment de torsion dans le maneton  $M_t = (T / 2) r_m$

## II.7. Contraintes admissibles

Nous avons vu précédemment les raisons d'admettre, pour les calculs de vérification, des contraintes admissibles faibles (gros coefficient de sécurité).

Les tableaux suivant nous donne une série de contraintes admissibles en  $N / mm^2$ . Ces chiffres tiennent compte que nous avons négligé les efforts de compression et de traction, ainsi que les contraintes de cisaillement dans le bras. Cette approximation est tout à fait justifiée par la pratique courante. De plus ces contraintes sont celles qui existent en dehors des zones de concentrations de contraintes.

Type de vilebrequin	Maneton		Bras		Tourillon	
	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
Moteur Diesel	100	150	120	140	40	60
Moteur à explosion	160	240	130	150	80	130

Type de vilebrequin	Maneton		Bras						Tourillon	
			Milieu grand côté		Milieu petit côté		Angle de section			
	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
Diesel	120	170	120	140	90	130	160	190	90	120
Essence	160	240	140	170	120	180	170	190	110	120

Il s'agira de vérifier que les diverses contraintes de comparaison calculées précédemment restent, toutes, en deçà des différentes contraintes admissibles maximales données dans les deux tableaux ci-dessus.