

I.1. Introduction

Toute étude dynamique des structures, d'une machine ou d'une installation industrielle passe dans un premier temps par une modélisation convenable de ces comportements mécaniques, qui permettra par la suite de décrire un programme de calcul pouvant répondre aux préoccupations actuelles et à venir des industriels. La modélisation numérique est incontournable étant donné la taille des structures à modéliser et la nature des problèmes à traiter à fin d'avoir des modèles auxquels s'appliquent les lois de la physique.

On distingue des méthodes de modélisation spécifiques aux systèmes discrets par exemple le modèle masses, ressorts, amortisseurs et le modèle arbres, disques, amortisseurs (figure I.1 a et b).

Une fois ce modèle établi, les équations du mouvement s'obtiennent assez simplement par diverses méthodes physiques comme le principe fondamental de la dynamique (2^{ème} loi de Newton ou principe d'Alembert), le principe des travaux virtuels, les équations de Lagrange (l'approche énergétique avec la loi de conservation de l'énergie) et le principe d'Hamilton. Quelques un de ces méthodes seront étudiés en détail dans le chapitre II.

Il y'a aussi des méthodes de modélisation spécifiques aux structures continues ou systèmes continus par exemple une poutre (figure I.2). A ce niveau nous avons la méthode des éléments finis.

Ainsi, pour une modélisation, nous avons besoin de connaître et de comprendre la nature et les mécanismes de la structure mis en jeu et les paramètres rechercher, pour pouvoir choisir la méthode la plus adaptée.

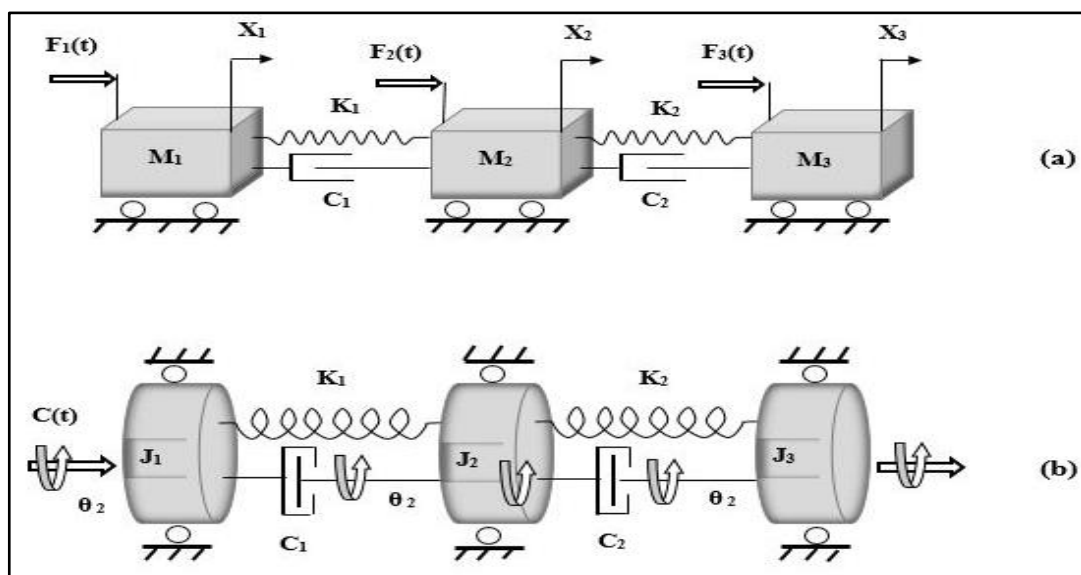


Figure I.1 : Modélisation des systèmes discrets (a) en translation et (b) en rotation

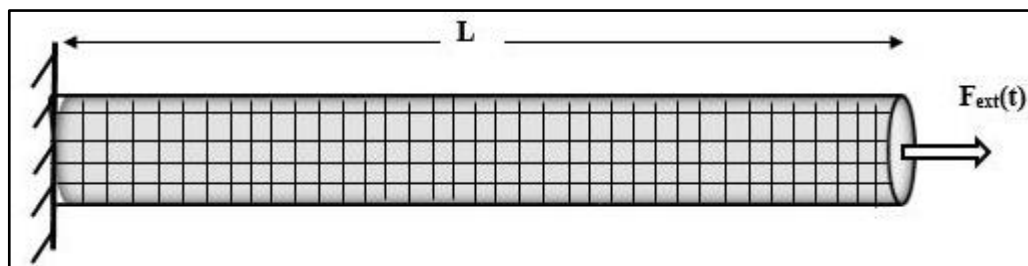
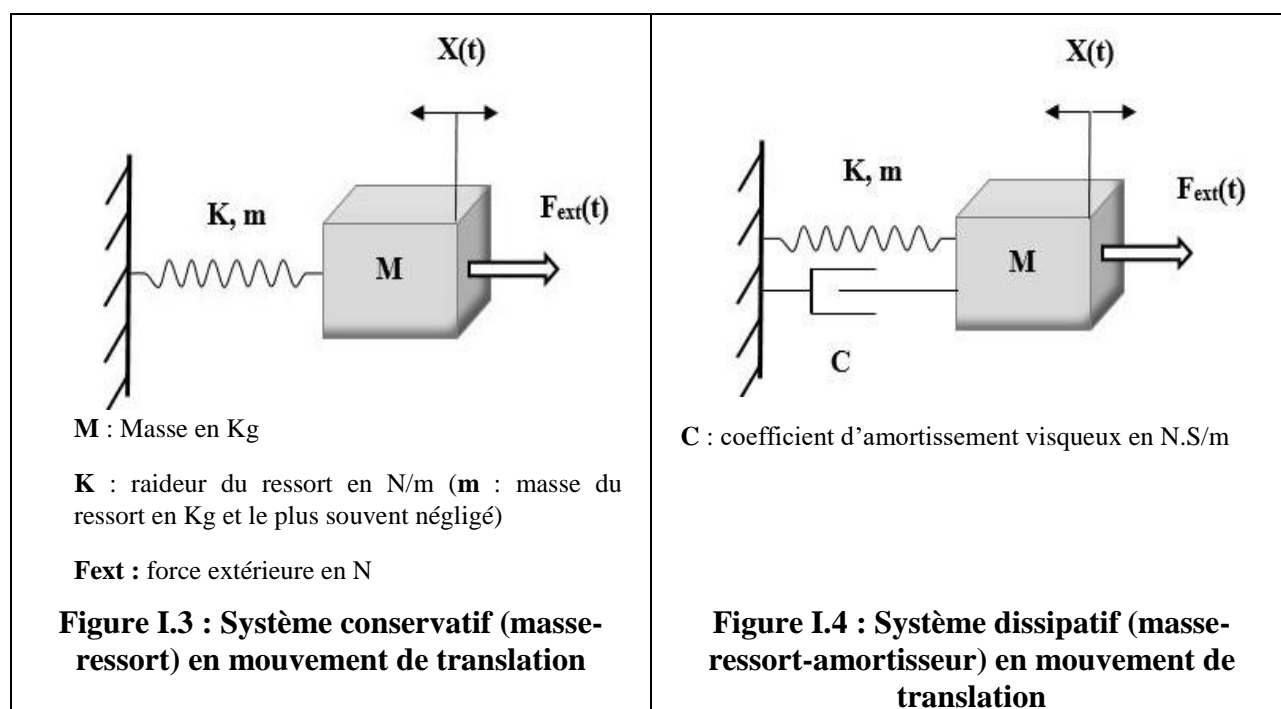


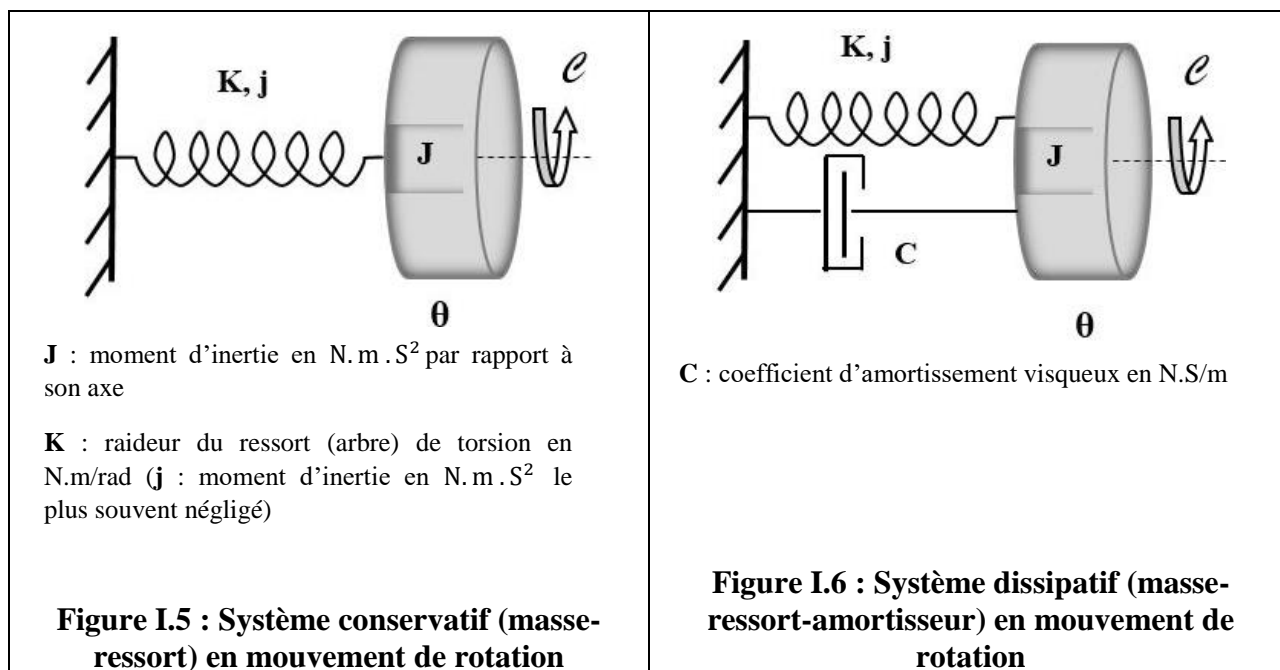
Figure I.2 : Modélisation de système continu (une poutre de longueur L) maillage du modèle éléments finis

I.2. Les composantes de la modélisation des structures à paramètres discrets (systèmes discrets)

I.2.2. Système masse-ressort (amortisseur) à 1 d.d.l

Pour la modélisation des systèmes discrets le modèle masses, ressorts, amortisseurs est le plus utilisé par le fait qu'il permet d'une part, une prédiction très satisfaisante du comportement de la structure, de plus présente l'avantage de pouvoir être résolu rapidement et d'autre part, accorder la possibilité d'application de plusieurs méthodes physiques pour la détermination des équations du mouvement. Nous allons exposer ci-dessous des exemples de modèle masses, ressorts, amortisseurs d'un système à 1 d.d.l, qu'il soit conservatif ou dissipatif animer d'un mouvement en translation (figures I.3 et I.4) ou en rotation (figures I.5 et I.6) et aussi des applications de cette modélisation sur des cas réels.





I.2.2. Exemples de systèmes réels modélisés en masse-ressort (amortisseur) à 1 d.d.l

A) Exemple 1

Prenons l'exemple d'une plateforme offshore soumise au chargement dynamique du courant marin (figure I.7). La partie supérieure de la plateforme peut être considérée comme rigide de masse M (la masse du treillis est négligée), et le mouvement principal est horizontal. Le ressort représente la rigidité de l'ensemble du treillis. Remarquons qu'en 3D le mouvement horizontal à 2 composantes, il faudrait donc un modèle à 2 d.d.l. (translations sur x et y) ou 3 d.d.l. (translations sur x et y , et rotations autour de z) pour caractériser plus précisément le mouvement de la plateforme. ^[3]

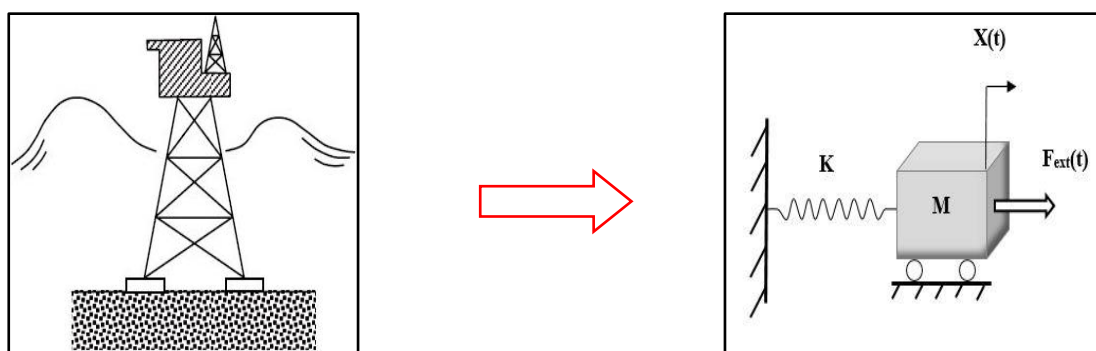


Figure I.7 : Modélisation d'une plateforme offshore (à gauche). Le modèle (à droite)

B) Exemple 2

Un autre exemple est celui d'un bâtiment de génie civil (figure I.8), susceptible de subir un séisme. Le plancher est généralement considéré comme indéformable, tandis que les poteaux verticaux se déforment et constituent donc une rigidité, et animer d'un mouvement latéral. Remarquons ici que pour les bâtiments de plusieurs étages un modèle acceptable serait un système à n d.d.l. n , étant le nombre d'étages. [2]

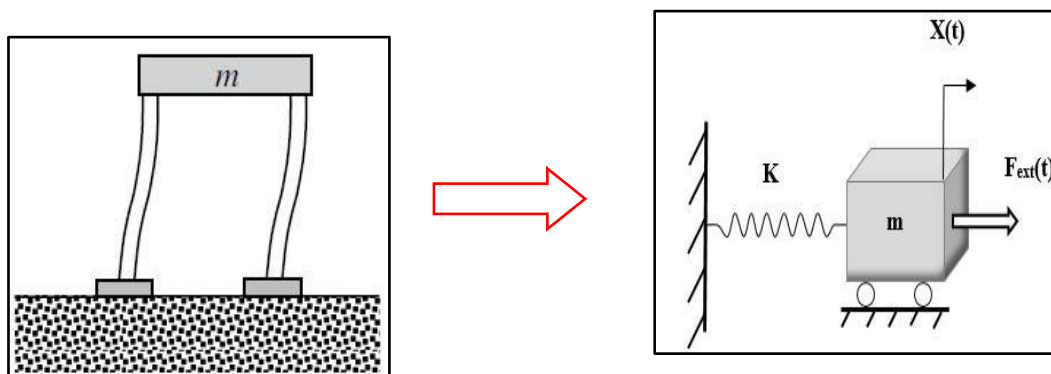
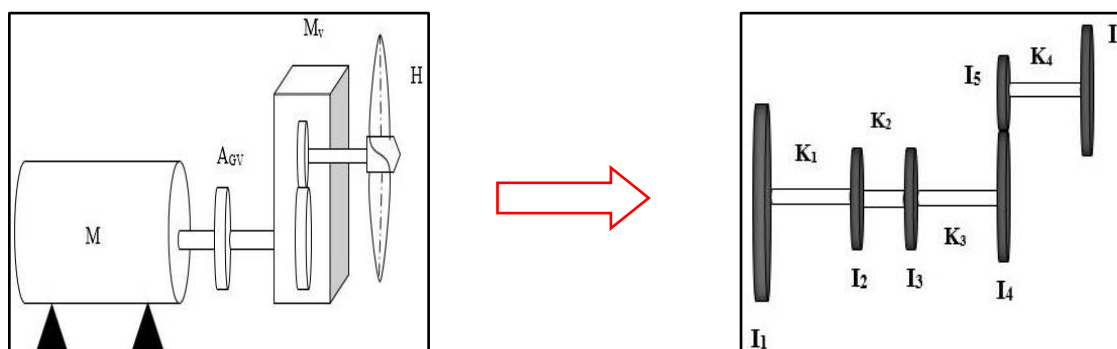


Figure I.8 : Modélisation d'un bâtiment (à gauche)

C) Exemple 3

Notre dernier exemple est celui d'un système de ventilation industrielle (figure I.9), animé d'un mouvement de rotation. Les éléments qui le composent sont réduits à des modèles équivalents constitués de disques i avec un moment d'inertie I_i correspondant, reliés entre eux par des ressorts (arbres) de torsion sans masse, de rigidité torsionnelle K_i .



M : moteur
A_{GV} : accouplement à grand vitesse
M_V : multiplicateur de vitesse
H : hélice

I₁ (N . m . S²) moment d'inertie du rotor du moteur électrique
I₂ et **I₃** (N . m . S²) moment d'inertie des deux parties de l'accouplement
I₄ (N . m . S²) moment d'inertie de la roue du multiplicateur de vitesse
I₅ (N . m . S²) moment d'inertie du pignon du multiplicateur de vitesse
I₆ (N . m . S²) moment d'inertie de l'hélice

Figure I.9 : Modélisation d'un système de ventilation industrielle

I.3. Les lignes d'arbres non ramifiées

Une ligne d'arbres non ramifiée est une configuration ou un modèle représentant toute machine ou installation industrielle, dont ses composants sont disposés sur un même axe horizontale (groupe compresseur) ou vertical (une centrifugeuse) reliés entre eux par des ressorts ou des arbres de torsion sans masse, de rigidité torsionnelle.

Les lignes d'arbres non ramifiées font partie des types d'installations les plus répandus en milieu industriel, d'où l'intérêt pour nous d'étudier le comportement dynamique de ses structures.

L'état des connaissances à un instant donné et la complexité d'une ligne d'arbres, conduit à substituer à la réalité des esquisses (représentations) simplifiées ou modèles auxquels s'appliquent les lois de la physique. Du fait que chaque modèle traduise l'une des manifestations de la structure.

Ainsi, il est nécessaire de créer, pour une ligne d'arbre, différents modèles pour :

- Réaliser l'équilibrage d'un vilebrequin par exemple ;
- Connaître les fréquences propres des vibrations de torsion, de flexion ou axiales ;
- Déterminer les amplitudes en quelques points particuliers des oscillations forcées de torsion, de flexion ou axiales ;
- Donner une image de l'état de contrainte de la matière, etc.

Dans notre cas nous nous limiterons à la caractérisation des modèles traduisant les n premières pulsations propres de torsion et les amplitudes (déformées modales) des vibrations libres amorties. Les lignes d'arbres qui sont essentiellement composées par exemple de coude, d'arbres manivelles, d'arbre épaulés, d'accouplements, de réducteurs et de rotors seront limités à des modèles constitués de i disques de I_i moments d'inerties, reliés entre eux par des arbres de torsion sans masse, de rigidité torsionnelle $K_{t,i}$, comme indiqué sur la figure **I.10**.

Cependant, les éléments de ces modèles doivent répondre aux hypothèses suivantes :

- Obéit à la loi de Hooke (les déformations sont proportionnelles aux efforts) et de conservation de masse, pour que les lois de la mécanique leur soient applicables et que la résolution numérique des équations conduise à l'utilisation de schémas mathématiques classiques ;
- Les modèles doivent donner des paramètres et des degrés de liberté qui dépendent de l'expérimentation ;
- Seules les déformations de torsion sont prises en compte ;
- Le système est conservatif (moment d'inertie du disque + rigidité torsionnelle de l'arbre) ;
- Les centres de gravité des disques appartiennent à l'axe de rotation ;

- L'axe de rotation est un axe du référentiel fixe ;
- L'axe de rotation est l'axe principal d'inertie ;
- Les paliers seront considérés comme des liaisons types rotoïde (pivot) ou verrou (pivot glissant) parfaites, le moment des actions mécaniques des paliers sur l'arbre à une composante nulle sur l'axe de rotation. [4]

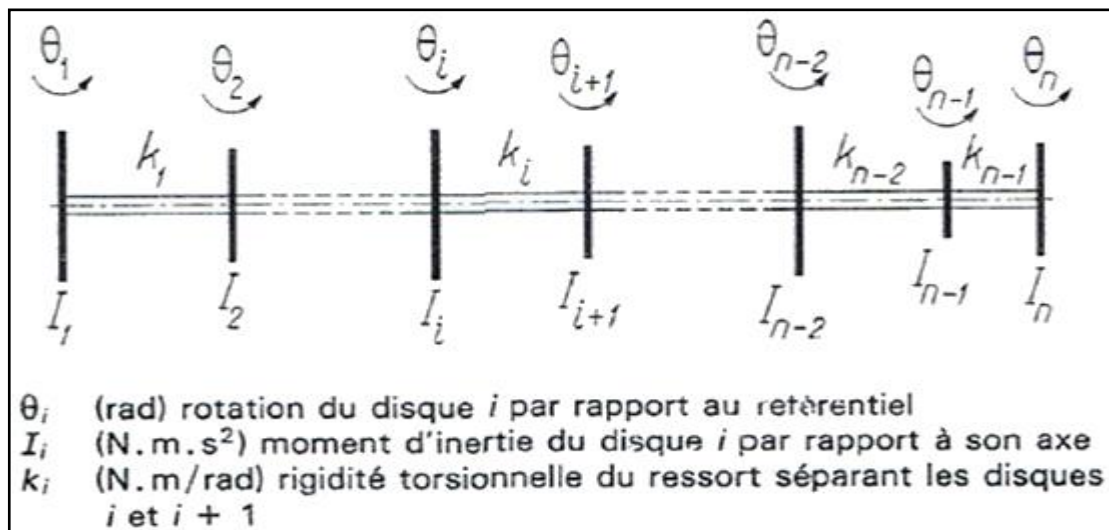


Figure I.10 : Modèle de ligne d'arbre non ramifiée à n degrés de liberté (n d.d.l)

I.4. Modélisation des différents types d'arbres

I.4.1. Modélisation des arbres coudés

On retrouve des arbres coudés généralement dans les machines à combustion interne plus précisément le vilebrequin qui constitue le rotor et qui possède des coudes, dont nous allons prendre comme exemple mais aussi dans certaines installations industrielles de transfert de mouvement.

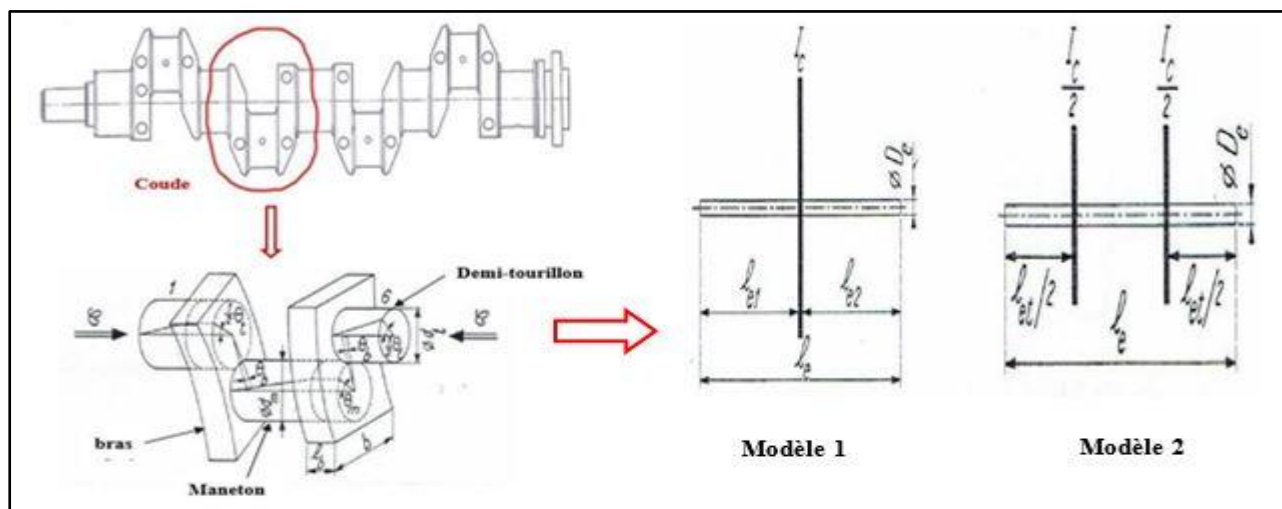


Figure I.11 : Coude d'un vilebrequin modélisé en poutre-disque (à droite)

Il faut noter que la représentation d'un coude de vilebrequin à une suite de poutre-disque (figure **I.11**), passe par le calcul de la longueur équivalente (\mathbf{l}_e), du diamètre équivalent (\mathbf{D}_e) de la poutre à considérer, de la rigidité torsionnelle (\mathbf{K}) équivalente du coude et du moment d'inertie (\mathbf{I}_c) du disque ou des disques considérés.

❖ *Calcul de la rigidité torsionnelle \mathbf{K} du coude*

La rigidité torsionnelle \mathbf{K} d'un coude est :

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{C}}{\theta_{1,6}} \quad \mathbf{I.1}$$

Avec : \mathbf{C} (en N.m) : couple porté par l'axe des tourillons et appliqués à chaque extrémité,
 $\theta_{1,6}$ (en rad) : angle de rotation relative des deux sections extrêmes 1 et 6 du coude.

Ou encore :

$$\frac{1}{\mathbf{K}} = \frac{2}{\mathbf{K}_t} + \frac{2}{\mathbf{K}_b} + \frac{1}{\mathbf{K}_m} \quad \mathbf{I.2}$$

Avec : \mathbf{K}_t (N.m / rad) : rigidité torsionnelle d'un demi-tourillon,

\mathbf{K}_m (N.m / rad) : rigidité torsionnelle du maneton,

\mathbf{K}_b (N.m / rad) : rigidité torsionnelle d'un bras.

❖ *Calcul du moment d'inertie (\mathbf{I}_c) du disque(s) considéré d'un coude*

On a
$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_t + \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_{b1} + \mathbf{I}_{b2} \quad \mathbf{I.3}$$

Avec : \mathbf{I}_t : moment d'inertie d'un demi-tourillon par rapport à l'axe du vilebrequin,

\mathbf{I}_m : moment d'inertie du maneton par rapport à l'axe du vilebrequin,

\mathbf{I}_{b1} et \mathbf{I}_{b2} : moment d'inertie des bras 1 et 2 par rapport à l'axe du vilebrequin.

❖ *Calcul de la longueur équivalente (\mathbf{l}_e) d'un coude ^[4]*

On a
$$\mathbf{l}_e = \mathbf{D}_e^4 \left[\frac{l_t}{d_t^4 - d_{it}^4} + \frac{l_m}{d_m^4 - d_{im}^4} + 2.35 \frac{GR}{El_b \cdot b^3} \right] \quad \mathbf{I.4}$$

Avec : \mathbf{E} (N/m² ou Pa) : module d'élasticité,

\mathbf{G} (N/m² ou Pa) : module de glissement,

\mathbf{R} (m) : rayon de la manivelle,

\mathbf{D}_e (m) : diamètre équivalent, souvent on prend $\mathbf{D}_e = \mathbf{d}_t$,

\mathbf{d}_{it} , \mathbf{d}_{im} (m) : diamètre des alésages dans les tourillons et les manetons s'ils existent,

\mathbf{d}_m , \mathbf{d}_t (m) : diamètre respectifs des manetons et tourillons,

\mathbf{l}_b , \mathbf{b} (m) : dimensions de la sections du bras.

Il faut noter à ce niveau, du fait qu'un coude est un système complexe seule la prise en compte des formes réelles permet de déterminer avec précision la longueur équivalente. Mais plusieurs auteurs ont proposé des formules de calcul de la longueur équivalente semi-expérimentale.

I.4.2. Modélisation des arbres longs de diamètre constant

Lorsque le moment d'inertie d'un arbre par rapport à son axe n'est pas négligeable vis-à-vis des autres inerties de la ligne d'arbres, on remplace cet arbre par une série de tronçon, sans masse, séparés pas des disques de moment d'inertie I' (figure I.12). [4]

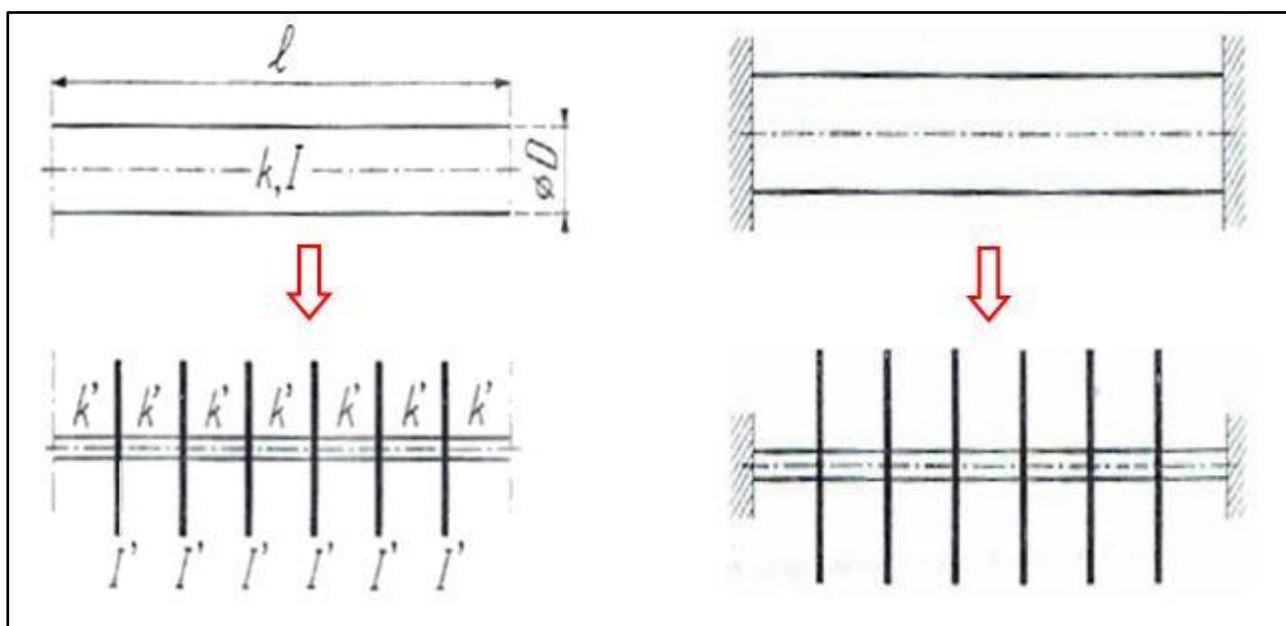


Figure I.12 : Modélisation d'un arbre long (cas libre-libre et encastré-encastré)

Le moment d'inertie I' de chacun des N disques du modèle est égal à : $\frac{I}{N}$.

La rigidité torsionnelle K' des $(N + 1)$ tronçons est égale à : $(N + 1) K$.

Avec : I : moment d'inertie de l'arbre par rapport à son axe,

K : rigidité torsionnelle de l'arbre (figure I.12).

On a

$$K = \frac{GJ}{L} \quad \text{I.5}$$

Avec : K (N.m/rad) : rigidité torsionnelle de l'arbre,

G (Pa) : module de glissement du matériau de l'arbre,

L (m) : longueur de l'arbre,

$J = \pi D^4/32$ (m⁴) : moment quadratique de la section par rapport à l'axe de l'arbre,

D (m) : diamètre de l'arbre.

I.4.3. Arbres épaulés

La longueur l_e de l'arbre équivalent, de même raideur et de diamètre D_e (figure I.13) est donnée par l'expression :

$$l_e = l_1 \left(\frac{D_e}{D_1} \right)^4 + l_2 \left(\frac{D_e}{D_2} \right)^4 \quad \text{I.6}$$

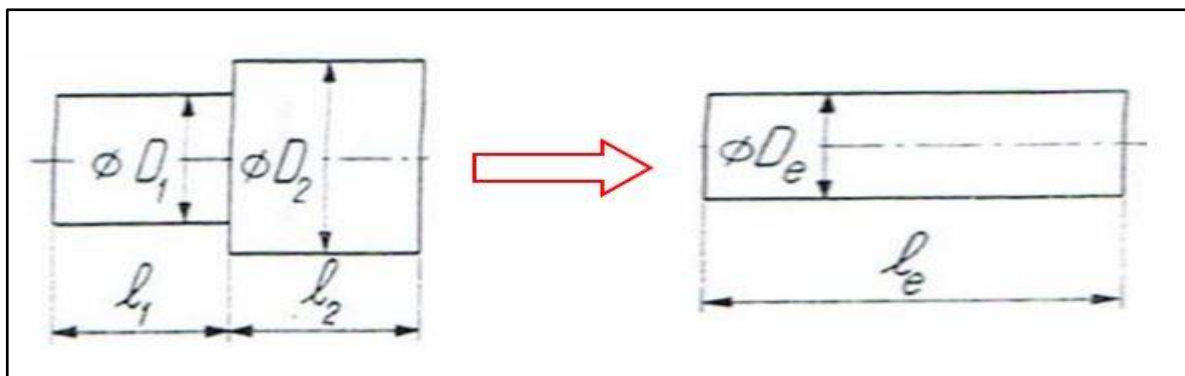


Figure I.13 : Modèle (à droite) d'un arbre épaulé

Lorsqu'on a un arbre épaulé dont les tronçons de diamètre D_1 et D_2 sont raccordés par un congé torique de rayon r , il est parfois important de tenir compte de ce congé de raccordement pour calculer la longueur équivalente. La longueur Δl est à ajouter à l_1 (figure I.14).^[4]

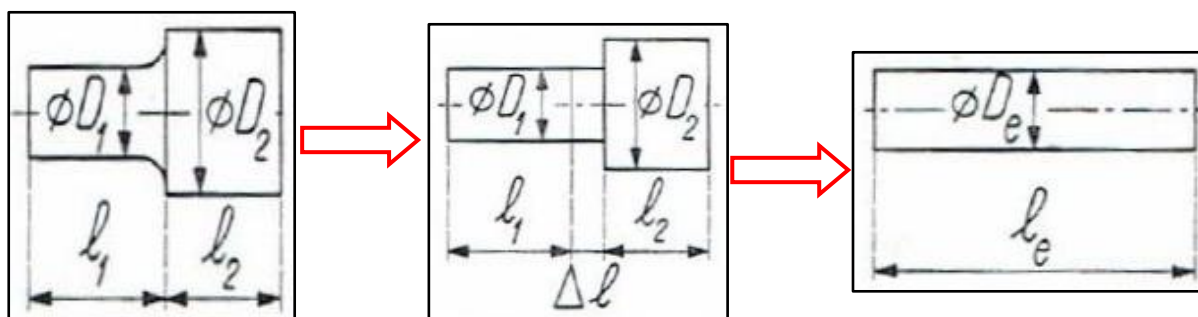


Figure I.14 : Modélisation d'un arbre épaulé avec congé torique

I.4.4. Arbres coniques

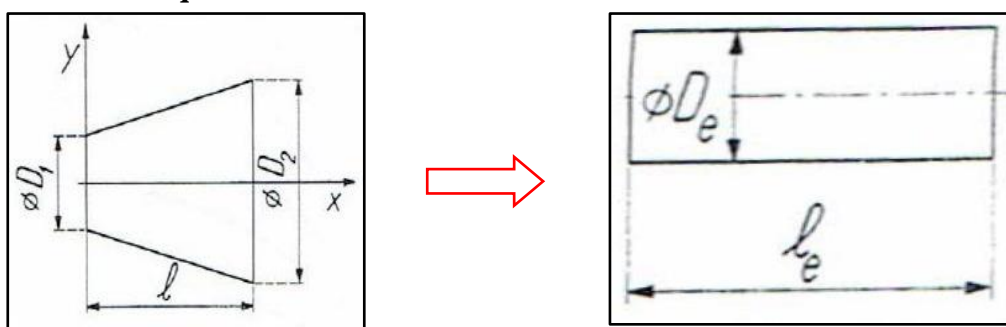


Figure I.15 : Modélisation d'un Arbre conique

❖ *Calcul de la rigidité torsionnelle K du tronçon tronconique de longueur l*

$$K = \frac{G \pi}{32 l} \int_0^l \left[D_1 + (D_2 - D_1) \frac{x}{l} \right]^4 dx \quad \text{I.7}$$

Avec, D_1 et D_2 les diamètres extrêmes du tronçon tronconique de longueur l (figure I.15).

❖ *Calcul de la longueur équivalente l_e*

La longueur équivalente de l'arbre de diamètre équivalent constant D_e est :

$$l_e = \frac{1}{3} \frac{D_e^4}{D_2 - D_1} \left[\frac{1}{D_1^3} - \frac{1}{D_2^3} \right] \quad \text{I.8}$$

I.5. Modélisation des autres éléments d'une ligne d'arbre

I.5.1. Modélisation des accouplements élastiques

En s'est qui concerne les accouplements il faut attacher beaucoup d'importance lorsqu'ils ont une grande souplesse en torsion, car, dans ces cas-là, les nœuds de vibrations se situent à leur niveau. Nous verrons que toute modification de la raideur de l'accouplement à une influence notable sur certains modes de vibrations et que du choix d'un accouplement, peut dépendre de la bonne tenue d'une ligne arbre.

Le modèle d'un accouplement est constitué généralement de deux (2) disques, de moment d'inertie I_1 et I_2 , séparés par un arbre de rigidité torsionnelle K (figure I.16).^[4]

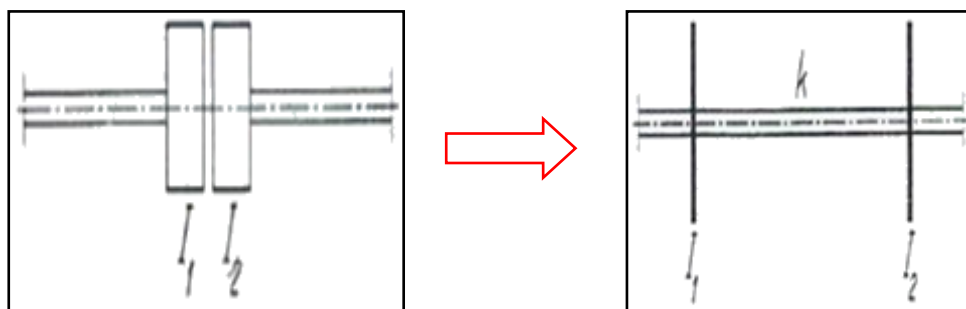


Figure I.16 : Modélisation d'un accouplement

La longueur équivalente de l'accouplement pour un diamètre équivalent D_e est :

$$l_e = \frac{G \pi D_e^4}{32 K} \quad \text{I.9}$$

I.5.2. Modélisation d'une hélice

Une hélice est modélisée par un disque I_h , égale à la somme des termes $r^2 d_M$ (figure I.17) majorée de 25% dans le cas d'une hélice marine, pour tenir compte du déplacement de l'eau. d_M représentant la masse de l'élément situé à la distance r de l'axe.^[4]

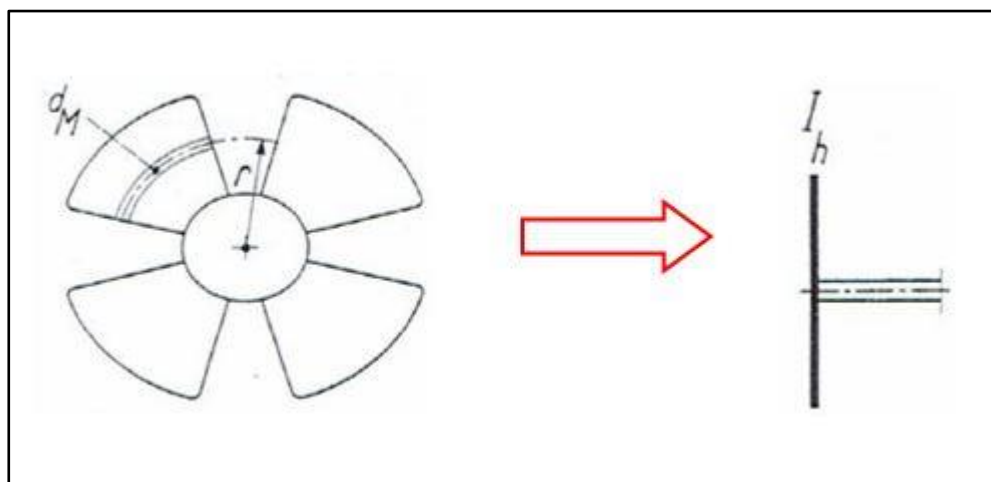


Figure I.17 : Modélisation d'une hélice

I.5.3. Modélisation des réducteurs et multiplicateurs

I.5.3.1. Réducteurs et multiplicateurs à transmission interne rigide

Nous entendons par réducteurs ou multiplicateurs à transmission interne, les réducteurs ou multiplicateurs constitués par des trains d'engrenages, des pignons et des chaînes dont l'élasticité des dents ou des maillons est négligeable.^[4]

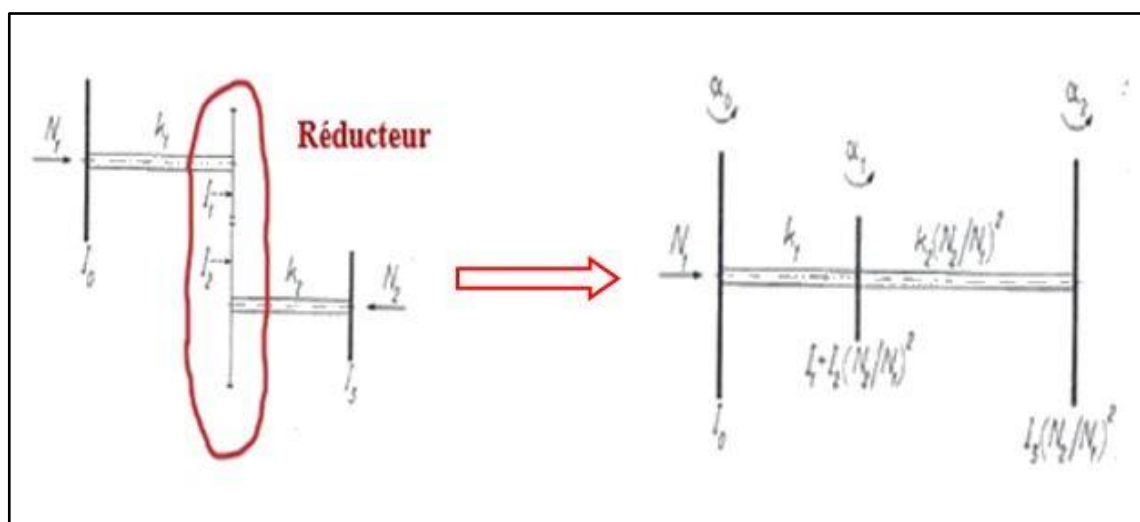


Figure I.18 : Modélisation d'une installation comportant un réducteur

Le système obtenu est appelé système équivalent (figure **I.18**) ramené à la ligne d'arbres tournant à la vitesse de rotation N_1 . Ce système, plus simple, a le même comportement dynamique que l'installation étudiée lorsque le contact entre les dents d'engrenage n'est pas rompu.

I.5.3.2. Réducteurs et multiplicateurs à transmission interne souple

La figure **I.19** représente le modèle (à droite) d'une transmission par courroies multiplicateur constituée d'une roue de rayon R_1 , et d'un pignon de rayon R_2 , reliés entre eux par une courroie de longueur du lien tendu L_c et de section transversale S_c .

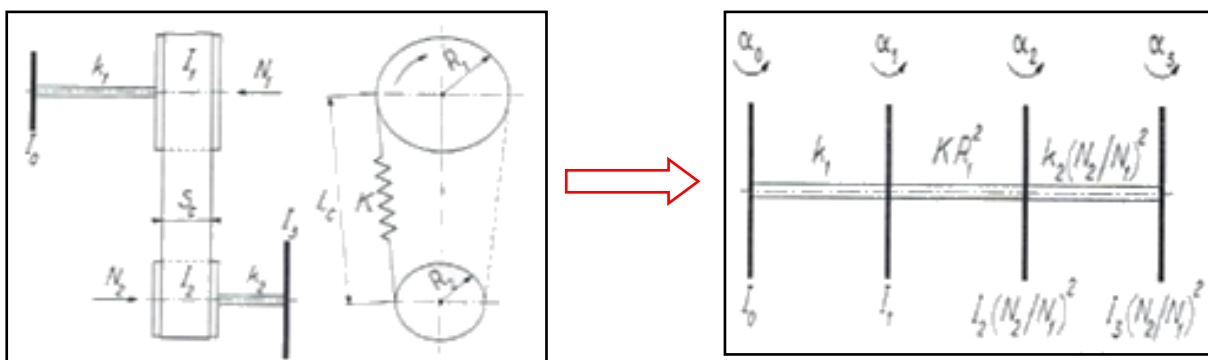


Figure I.19 : Modélisation d'une transmission par courroie

I.6. Exemple de modélisation d'une installation industrielle

I.6.1. Modèle d'une ligne arbre non ramifiée

La ligne d'arbres de la figure **I.20** représente un groupe compresseur composé : d'un moteur électrique **M**, d'un accouplement à grande vitesse **AGV** d'un réducteur **R**, d'un accouplement petite vitesse **APV**, d'un volant **V** et d'un compresseur bi-étagé **C**. Le moteur tourne à la vitesse N_2 et le compresseur à la vitesse N_1 .^[4]

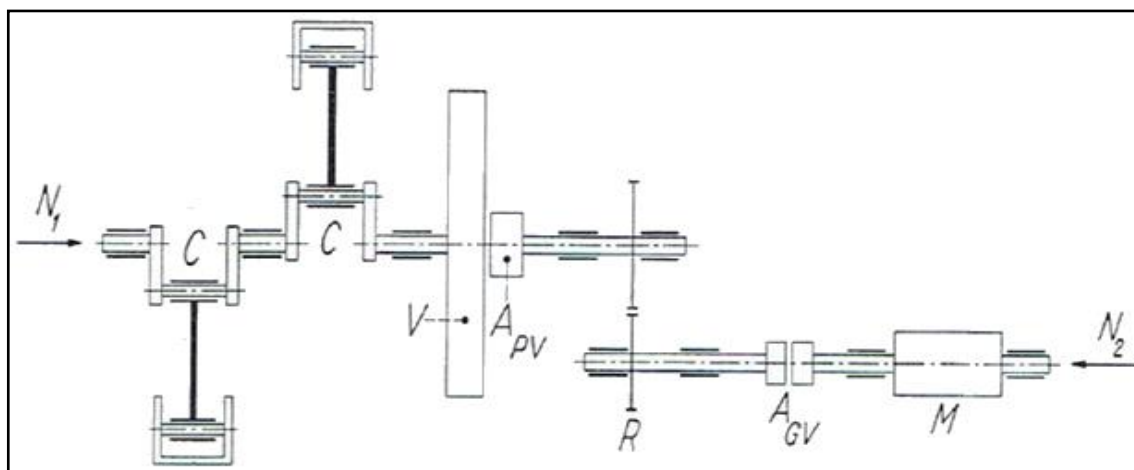


Figure I.20 : Ligne d'arbre non ramifiée

La modélisation de cette installation peut se faire en deux étapes (schéma et modèle final) pour faire apparaître clairement les inerties et les rigidités des différents éléments.

▪ **Premier modèle**

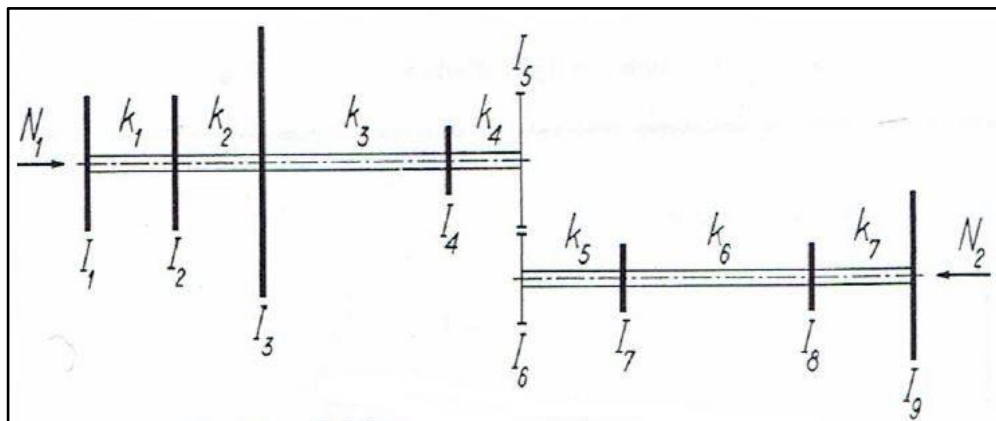


Figure I.21 : Schéma de l'installation

La figure I.21 représente un premier modèle (schéma) du groupe compresseur sous formes de disques et d'arbres, avec :

I_1 (N.m.S²) : moment d'inertie de la première manivelle et de l'équipage mobile associé,

I_2 (N.m.S²) : moment d'inertie de la seconde manivelle et de l'équipage mobile associé,

I_3 (N.m.S²) : moment d'inertie du volant et du demi-accouplement lié à ce volant,

I_4 (N.m.S²) : moment d'inertie du demi-accouplement lié à l'arbre de sortie du réducteur,

I_5 (N.m.S²) : moment d'inertie de la roue du réducteur,

I_6 (N.m.S²) : moment d'inertie du pignon du réducteur,

I_7 et I_8 (N.m.S²) : moment d'inertie des deux parties de l'accouplement grand vitesse,

I_9 (N.m.S²) : moment d'inertie du rotor du moteur électrique,

K_1 (N.m/rad) : rigidité torsionnelle du demi-coude de la première manivelle et du demi-coude la seconde manivelle,

K_2 (N.m/rad) : rigidité torsionnelle du demi-coude de la seconde manivelle et du tronçon d'arbre entre le milieu du palier et le volant,

K_3 (N.m/rad) : rigidité torsionnelle de l'accouplement petite vitesse,

K_4 (N.m/rad) : rigidité torsionnelle de l'arbre de sortie du réducteur,

K_5 (N.m/rad) : rigidité torsionnelle de l'arbre d'entrée du réducteur,

K_6 (N.m/rad) : rigidité torsionnelle de l'accouplement grande vitesse,

K_7 (N.m/rad) : rigidité torsionnelle de l'arbre moteur.

▪ Second modèle ou modèle final

Le modèle final établissant clairement les inerties et les rigidités des différents éléments est donné à la figure I.22. [4]

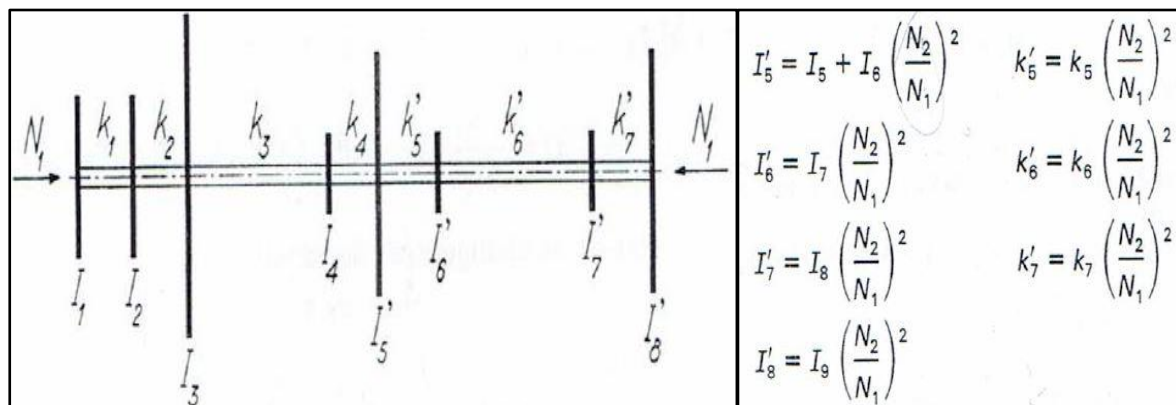


Figure I.22 : Modèle final de l'installation avec les inerties et les rigidités des différents éléments

I.6.2. Modèle d'une ligne arbre ramifiée

La figure I.23 est l'exemple d'une installation de ligne d'arbres ramifiée constituée d'un moteur 12 cylindres en V, entraîné, par l'intermédiaire d'un réducteur à deux sorties, un alternateur R₂ et une pompe R₁. [4]

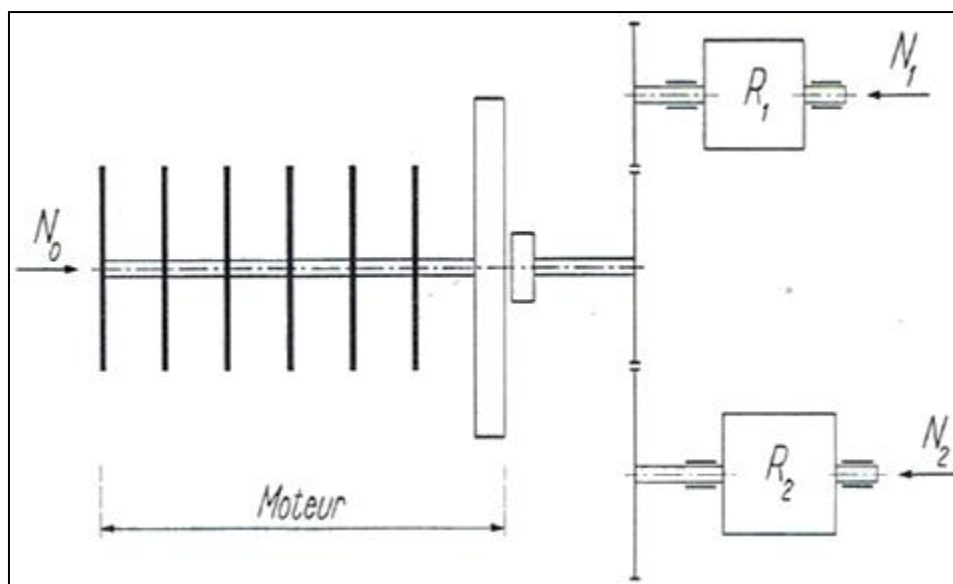


Figure I.23 : Ligne d'arbres ramifiée

Cette installation peut être modélisée en passant par deux étapes successives, le schéma simpliste (a) puis le modèle final (b) de la figure I.24. [4]

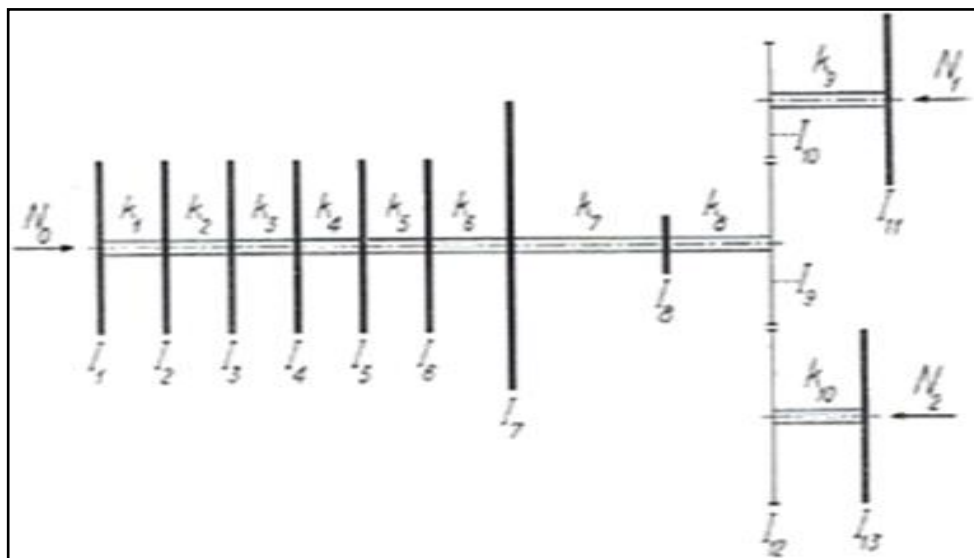
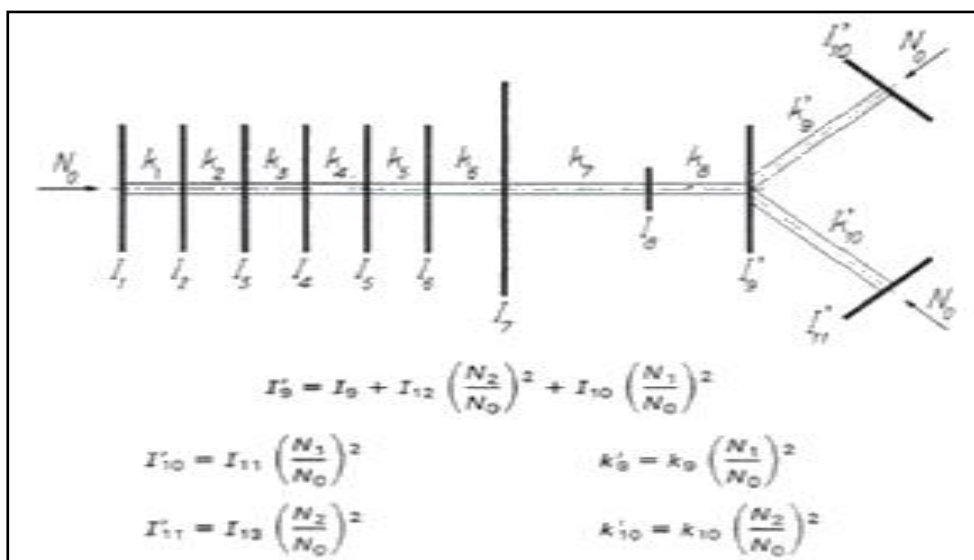


Schéma (a)



Modèle final (b)

Figure I.24 : Schéma (a) et modèle final (b) d'une ligne arbres ramifiée