

## CHAPITRE II

### Modèle mathématique

#### II.1.Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier numériquement et analytiquement les caractéristiques statistiques et dynamiques des butées hydrostatiques alimentées par des résistances hydrauliques de type capillaire, ces butées sont finies à simple effet, à différentes configurations géométriques.

Ces configurations sont :

- ✓ Butée carrée à un alvéole central, deux alvéoles puis quatre alvéoles.
- ✓ Butée rectangulaire à un alvéole central de la longueur égale à trois fois la largeur.
- ✓ Butée rectangulaire à un alvéole central de la longueur égale à six fois la largeur.

L'étude numérique se fait par la décritisation de l'équation de Reynolds et par la discrétisation des équations de Navier-stokes à l'aide du code de calcul tridimensionnel (Ansys-CFX).

#### II.2.Étude numérique

Nous allons utiliser deux méthodes de résolution numérique :

- La méthode des volumes finis sous Ansys-CFX pour la formulation basée sur les équations de Navier stokes.
- Et la méthode des différences finies, pour formulation basée sur l'équation de Reynolds.

La deuxième formulation permet de réduire considérablement le temps et l'espace mémoire de simulation, mais elle exige la connaissance de la pression dans l'alvéole.

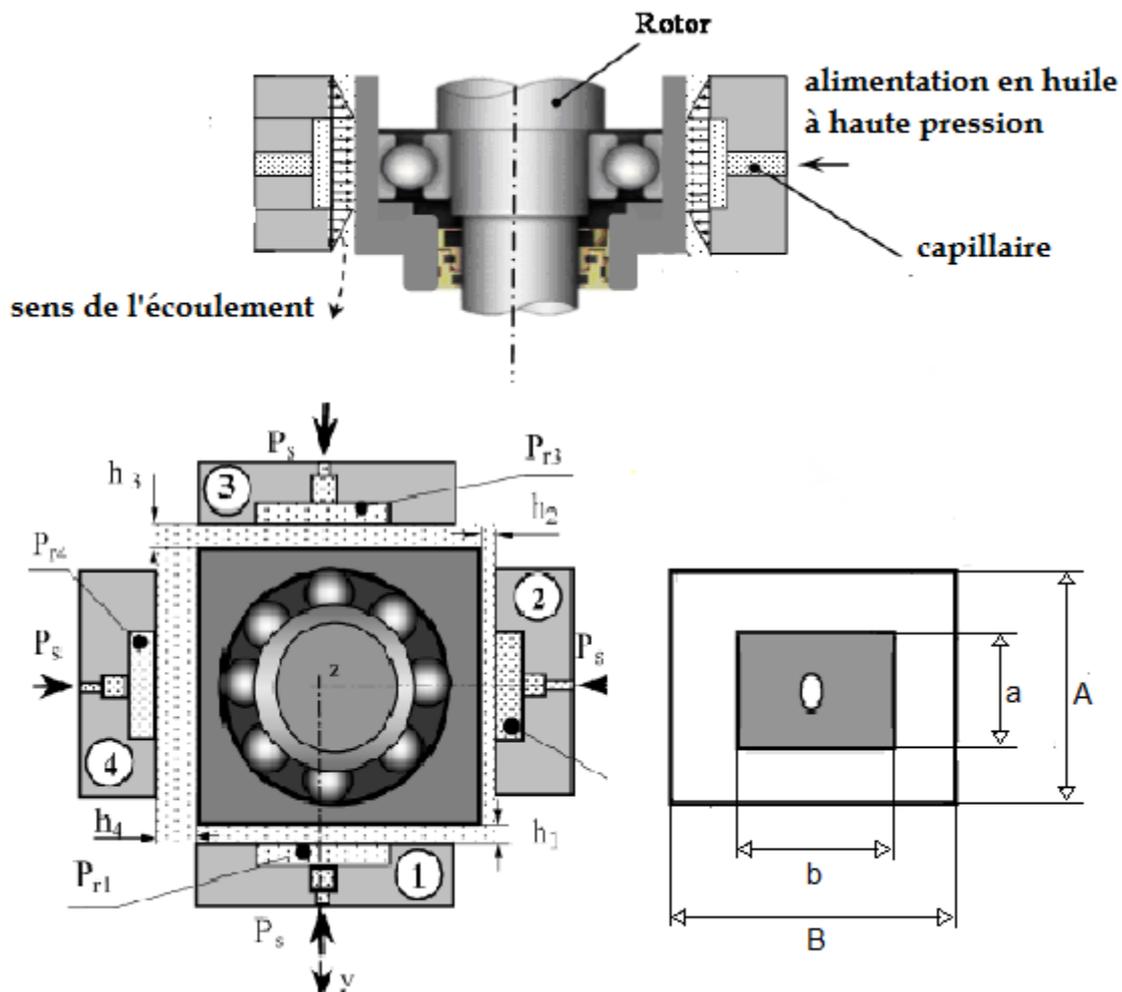
##### II.2.1.Étude numérique à l'aide de CFX

La solution analytique des équations de Navier-Stokes n'existe que pour des cas simplifiés d'écoulements dans des géométries simple est des conditions idéale (fluide parfait, fluide incompressible, ...). Pour obtenir des solutions pour des écoulements proches de la réalité, l'approche numérique s'impose. Les méthodes numériques consistent à remplacer les équations aux dérivées partielles régissant le problème physique par des approximations conduisant à un système d'équations algébriques qui peut être résolu en utilisant les méthodes numériques.

Le logiciel CFX propose un nombre important d'options pour le paramétrage des équations de Navier-Stokes. L'utilisateur a le choix entre un écoulement monophasique ou multiphasique (homogène ou non), turbulent ou laminaire, permanent ou transitoire, incompressible ou compressible, avec ou sans transfert de chaleur, avec ou sans introduction de substances polluantes chimiquement réactives ou non...

### II.2.1.1. Présentation du cas étudié

La butée étudiée fait partie d'une configuration hybride constitué d'un palier de poussé hydrostatique composé de quatre patins et un roulement standard voir **Figure II.1**. Une discussion approfondie sur les avantages et les inconvénients de cette conception peut être trouvée dans [8]

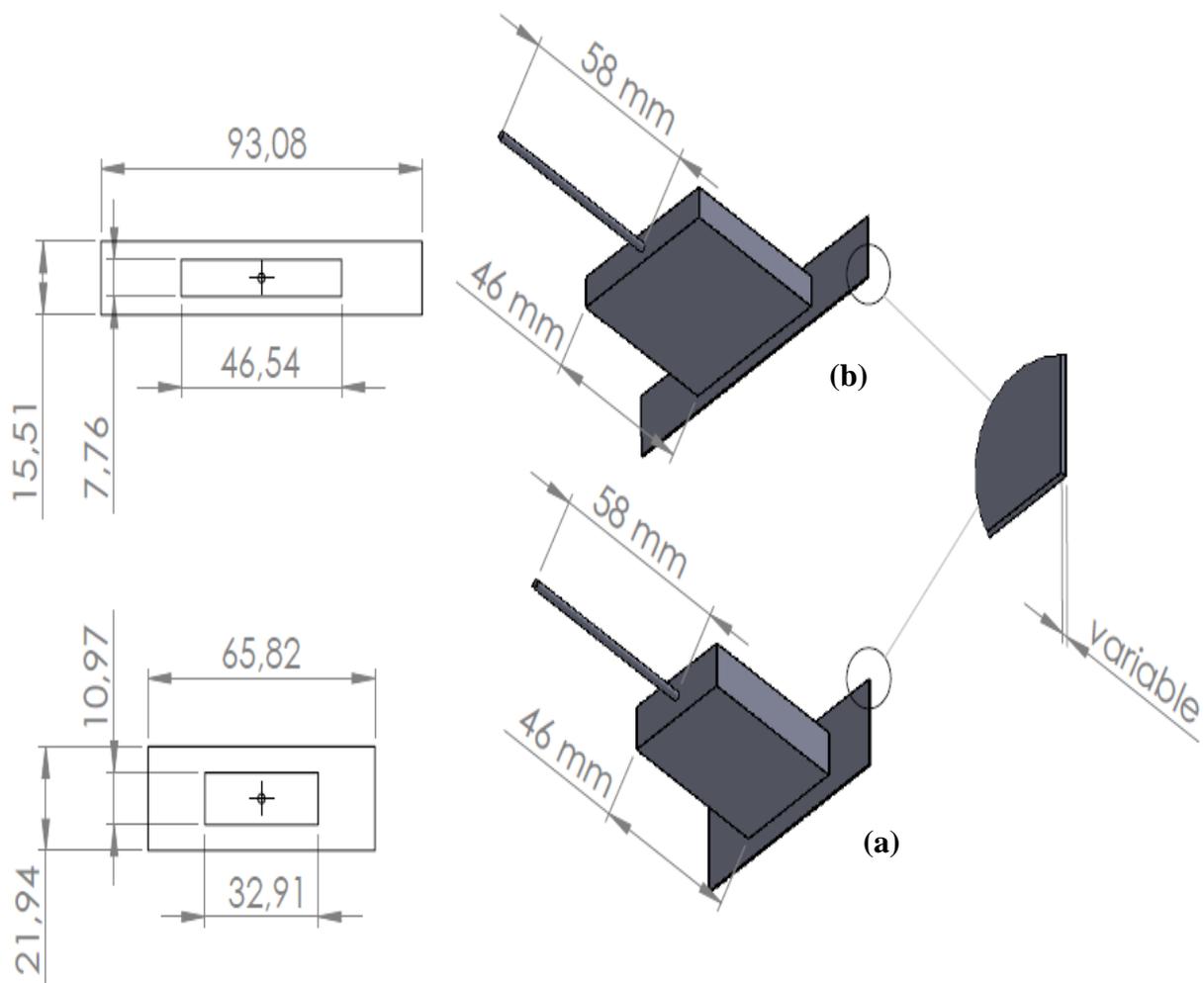


**Figure II.1 :** Schématisation d'un palier hydrostatique à quatre patins .

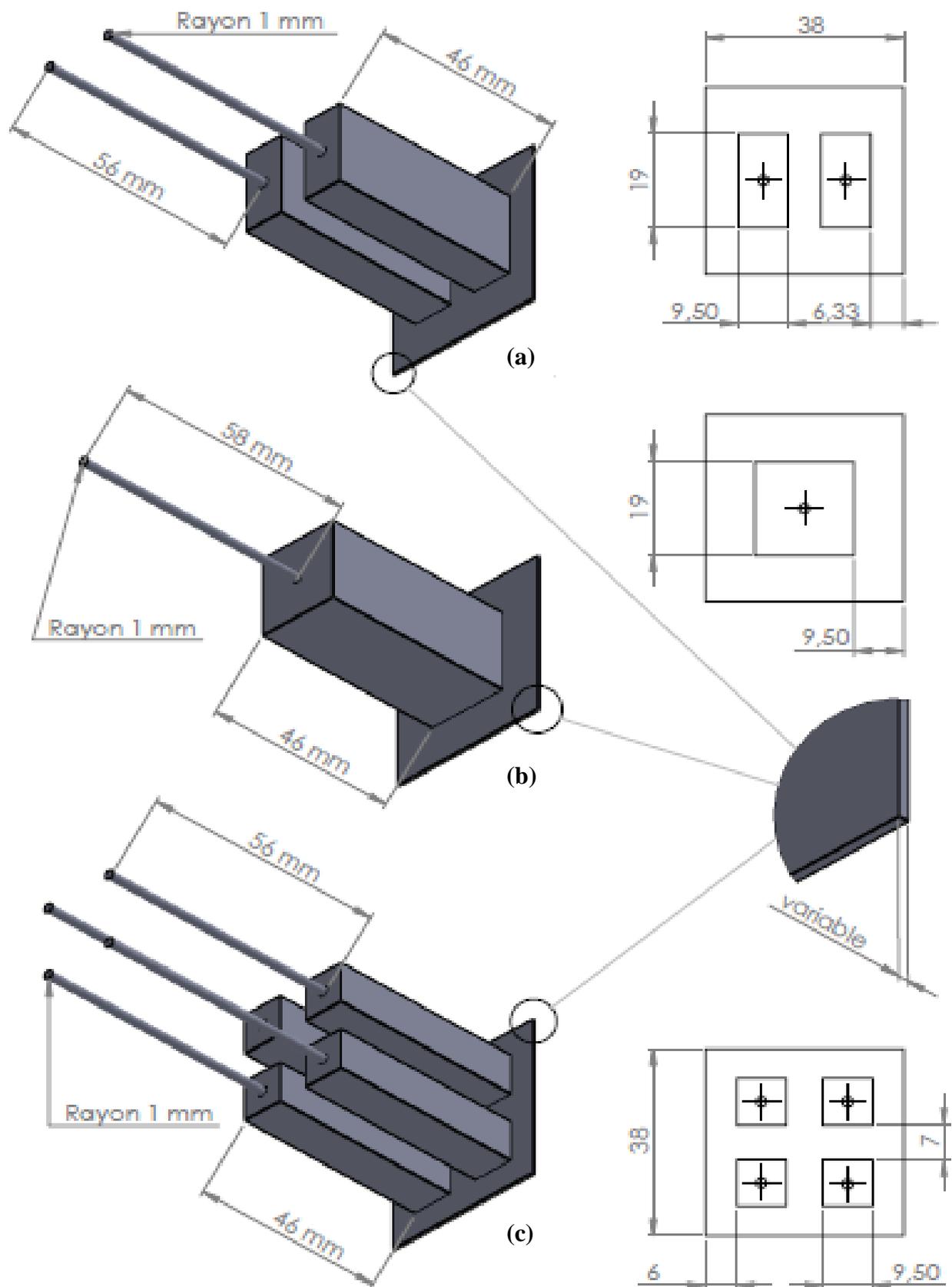
Les **Figures II.2, II.3** représentant les différentes configurations géométriques du problème étudié.

Dans les deux configurations représentées sur la **Figure II.2**, les alvéoles sont rectangulaires avec les mêmes surfaces globales  $S$ , mais elles ont des rapports de la longueur sur la largeur différente.

Quant à la **Figure II.3**, elle représente trois configurations de la butée carrée en changeant le nombre des alvéoles tout en gardant la surface globale de l'alvéole  $S$  constante : une butée carrée avec une alvéole centrale de surface  $S$ , une butée carrée avec deux alvéoles et une butée aussi carrée à quatre alvéoles, comme le montre sur les **Figures II.3(a),(b) et (c)**. La profondeur de l'alvéole est choisie égale à 152 fois l'épaisseur initiale du film mince pour assurer la validité de l'hypothèse de la pression constante (dans l'espace) dans l'alvéole.



**Figure II.2** : Les dimensions de modèle géométrique (a)  $A = 3B$  (b)  $A = 6B$ .



**Figure II.3 :** Dimensions de modèle géométrique (a) deux alvéoles (b) une alvéole (c) quatre alvéoles.

### II.2.1.2. Maillage des domaines

La génération de maillage est une phase extrêmement importante dans la simulation des phénomènes de la mécanique des fluides, vu l'influence de ce paramètre sur la solution.

#### a). Type de maillage utilisé

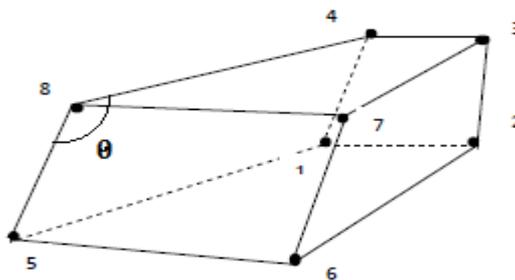
Le maillage utilisé dans notre simulation est un maillage structuré (hexaédrique), d'une densité raisonnable. Le maillage structuré assure mieux la condition de perpendicularité essentielle pour la réduction des erreurs numériques. Néanmoins, il présente quelques inconvénients :

- ✓ Il est difficile à générer dans le cas d'une géométrie complexe.
- ✓ Délicat pour une bonne qualité de maillage pour certaines géométries complexes.

#### b). Qualité de maillage

La génération d'une bonne qualité de maillage est essentielle pour l'obtention d'un résultat de calcul précis.

La qualité du maillage a beaucoup d'influence sur la convergence des résultats, sur la précision de la solution et surtout sur le temps de calcul. Pour cette raison il existe plusieurs facteurs d'estimation de la qualité du maillage, parmi lesquels on trouve la distorsion  $F_d$ . [24]. C'est un calcul basé sur la déviation angulaire. C'est une méthode applicable pour tous les types d'élément. Le critère considère que les éléments sont jugés acceptables si les valeurs de leurs distorsions sont situées dans des régions à faible gradient [24].



**Figure II.4 :** Type d'élément utilisé.

$$F_d = \max \left[ \frac{\theta_{max} - 90}{90}, \frac{\theta_{max} - 90}{90} \right] \quad (\text{II. 1})$$

**Tableau II.1** : Qualité d'élément en fonction de  $F_d$ .

$F_d$	0-0.25	0.25-0.5	0.5-0.8	0.8-0.95	0.95-0.99	0.99-1.00
<b>Qualité d'élément</b>	<i>Excellent</i>	<i>Bon</i>	<i>Acceptable</i>	<i>Pauvre</i>	<i>Très pauvre</i>	<i>Mauvais</i>

La valeur maximale de la distorsion tolérée pour un maillage volumique doit être inférieure à 0.90. La valeur maximale de la distorsion tolérée pour un maillage surfacique structuré ou non, hexaédrique ou tétraédrique doit être inférieure à 0.75 [24].

### c). Les maillages des différentes configurations géométriques étudiées

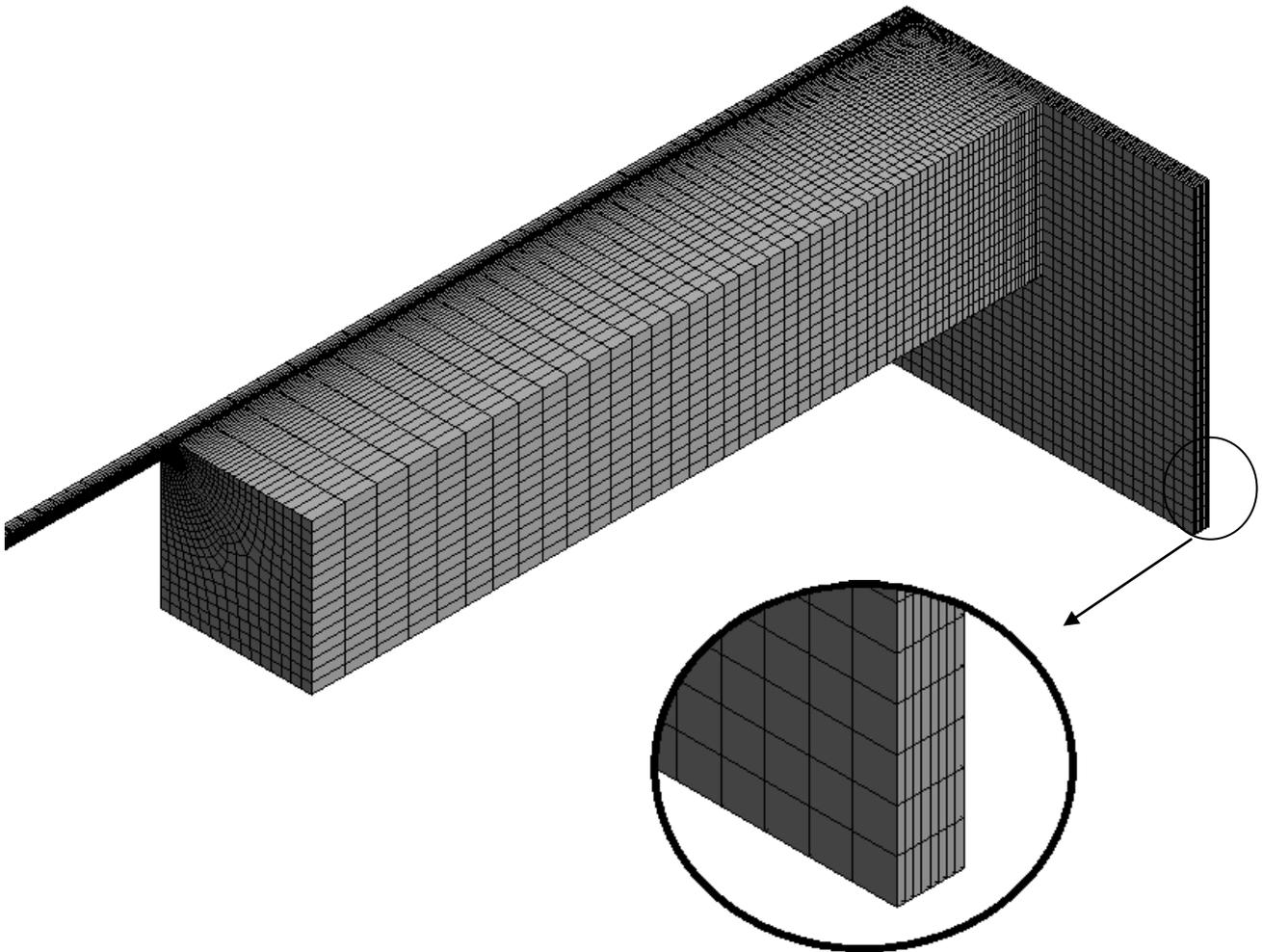
Les géométries des différentes configurations étudiées, ont été maillées avec le même type d'élément pour s'assurer l'indépendance des résultats du maillage utilisé dans la comparaison finale. Les résultats de maillage sont résumés dans les **Tableaux (II.2)** et **(II.3)**.

**Tableau II.2:** Statistiques de maillage pour (un alvéole, deux alvéoles, quatre alvéoles)

<i>Géométrie</i> <i>Maillage</i>	<i>A=B</i> <i>(Un alvéole)</i>	<i>A=B</i> <i>(Deux alvéoles)</i>	<i>A=B</i> <i>(Quatre alvéoles)</i>
<i>N<sup>0</sup> Total d'éléments</i>	172552	139500	161996
<i>N<sup>0</sup> Total des nœuds</i>	623711	498819	545239
<i>Qualité de maillage</i>	0.512	0.545	0.9

**Tableau II.3** : Statistiques de maillage pour (A=3B, A=6B).

<i>Géométrie</i> <i>Maillage</i>	<i>A=3B</i>	<i>A=6B</i>
<i>N<sup>0</sup> Total d'éléments</i>	306994	269374
<i>N<sup>0</sup> Total des nœuds</i>	997266	947220
<i>Qualité de maillage</i>	0.749	0.615



**Figure II.5** : Maillage du modèle étudié (une alvéole).

### II.2.1.3. Conditions aux limites

Grâce à la symétrie du problème, seulement le quart de la géométrie est considéré. Des conditions de type Symmetry (symétrie) sont appliquées sur les parois qui correspondent aux plans de symétrie. Cette approche permet un gain considérable en ressources de calcul.

Les parois fixes sont simulées par la condition de type Wall (Mur) : on peut citer la paroi extérieure de la résistance hydraulique, la partie inférieure de l'alvéole, et le grain mobile.

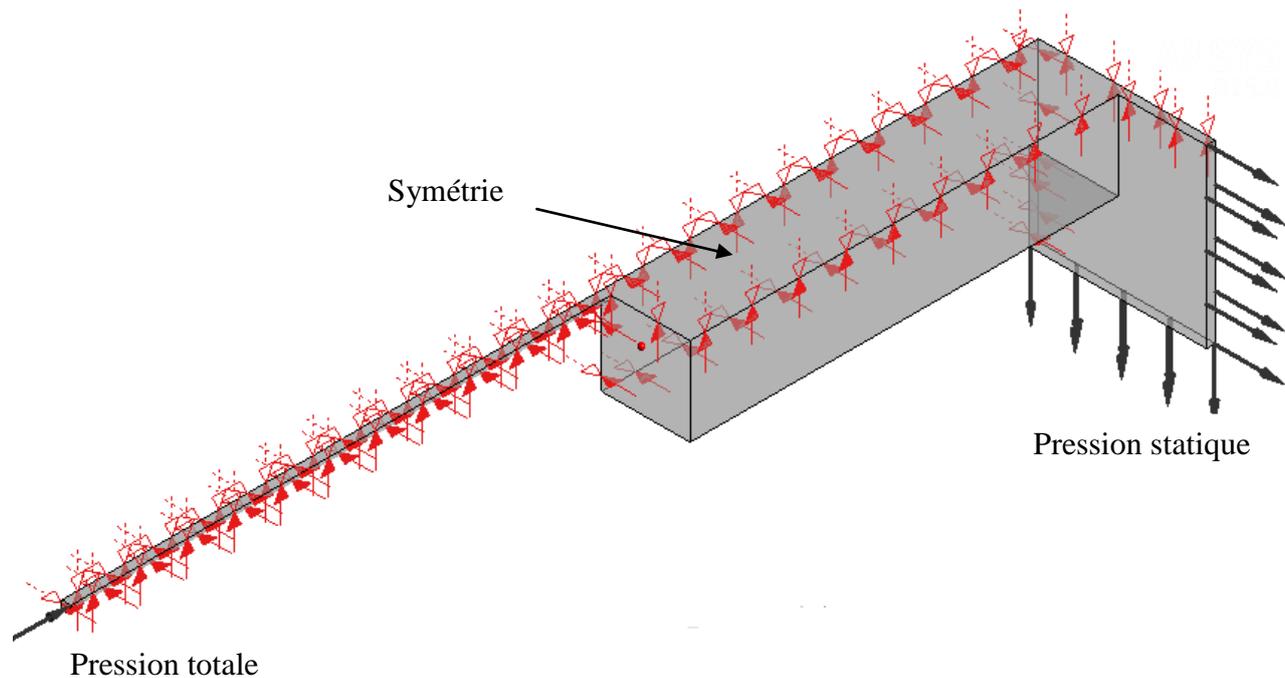
Pour l'entrée et les sorties, Ansys-CFX propose trois combinaisons de conditions aux limites :

- Choix 1 : la pression totale à l'entrée - la pression statique en sortie.
- Choix 2 : la pression totale à l'entrée - le débit massique à la sortie.
- Choix 3 : le débit massique à l'entrée - la pression statique à la sortie.

Nous avons choisi le premier choix. La pression totale est spécifiée comme une condition à l'entrée de la résistance capillaire, et elle prend les trois valeurs testes suivantes  $P_{ent} = 1, 2$  et  $3$  Bar.

La sortie du palier qui est la fin de la zone de film mince, est ouverte à la pression atmosphérique, ainsi, la pression de sortie est égale à zéro par rapport à celle atmosphérique.

La **Figure II.6** représente les différentes conditions aux limites imposées sur le domaine de calcul d'une butée finie à une alvéole.



**Figure II.6** : Conditions aux limites.

#### II.2.1.4. Les propriétés du lubrifiant

Dans cette étude nous allons étudier l'influence des paramètres du lubrifiant sur le champ de pression dans l'alvéole. Tout d'abord la viscosité dynamique est supposée constante et la densité variable. Ensuite la densité sera supposée constante et la viscosité dynamique variable. Tenant compte de la variation de la pression d'alimentation, cela donne 09 cas à étudier. Le **Tableau II.4** montre les différentes valeurs étudiées.

**Tableau II.4** : Différentes valeurs des paramètres étudiées.

$\rho$ [ $Kg/m^3$ ]			$\mu$ [ $Pa. s$ ]			$p_s$ [ $Bar$ ]		
879.5	979.5	1079.5	0.01	0.05	0.075347	1	2	3

### II.2.1.5. Formulation mathématique

De façon générale, le solveur de CFX résout les équations de Navier-Stokes ainsi que les équations de conservation de la masse et de l'énergie. Ces équations sont résolues en coordonnées cartésiennes à trois dimensions (quatre dimensions si on compte le temps). L'équation de conservation de la masse s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = S_m \quad (\text{II. 2})$$

Où  $\vec{U}$  est le vecteur vitesse du fluide et  $S_m$  est le terme source de masse. Dans le cas où la masse du fluide est constante,  $S_m$  prend une valeur nulle.

L'équation de Navier-Stokes peut être exprimée sous une forme générale (celle utilisée par CFX) par :

$$\frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{S}_M \quad (\text{II. 3})$$

Où

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U_x U_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho U_y U_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho U_z U_x) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\rho U_x U_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho U_y U_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho U_z U_y) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\rho U_x U_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho U_y U_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho U_z U_z) \end{pmatrix} \quad (\text{II. 4})$$

Est le tenseur de stress visqueux.

$$\vec{\tau} = \mu \left( \vec{\nabla} \vec{U} + (\vec{\nabla} \vec{U})^T - \frac{2}{3} \delta \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right) \quad (\text{II. 5})$$

Où  $\mu$  est la viscosité dynamique (en Pa. s) et  $\delta$  est la matrice identité.

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II. 6})$$

Et  $\vec{S}_M$  est le terme source de l'impulsion (momentum).  $U_x$  est la composante de la vitesse dans la direction x, et ainsi de suite pour  $U_y$  et  $U_z$ . Cette équation vectorielle nous donne trois équations

scalaires, une pour chaque direction spatiale. Le solveur de CFX résout donc les trois équations aux dérivées partielles ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho U_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_x U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y U_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z U_x)}{\partial z} = \\ & - \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + S_{M_x} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho U_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_x U_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z U_y)}{\partial z} = \\ & - \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) + S_{M_x} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho U_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_x U_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y U_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z U_z)}{\partial z} = \\ & - \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + S_{M_x} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Le solveur de CFX est basé sur la pression. Les équations sont donc discrétisées de façon à résoudre les équations en fonction de la pression. Les équations présentées plus haut sont discrétisées de façon implicite, c'est-à-dire que le passage d'un pas de temps à un autre se fait de façon itérative sur des équations non-linéaires.

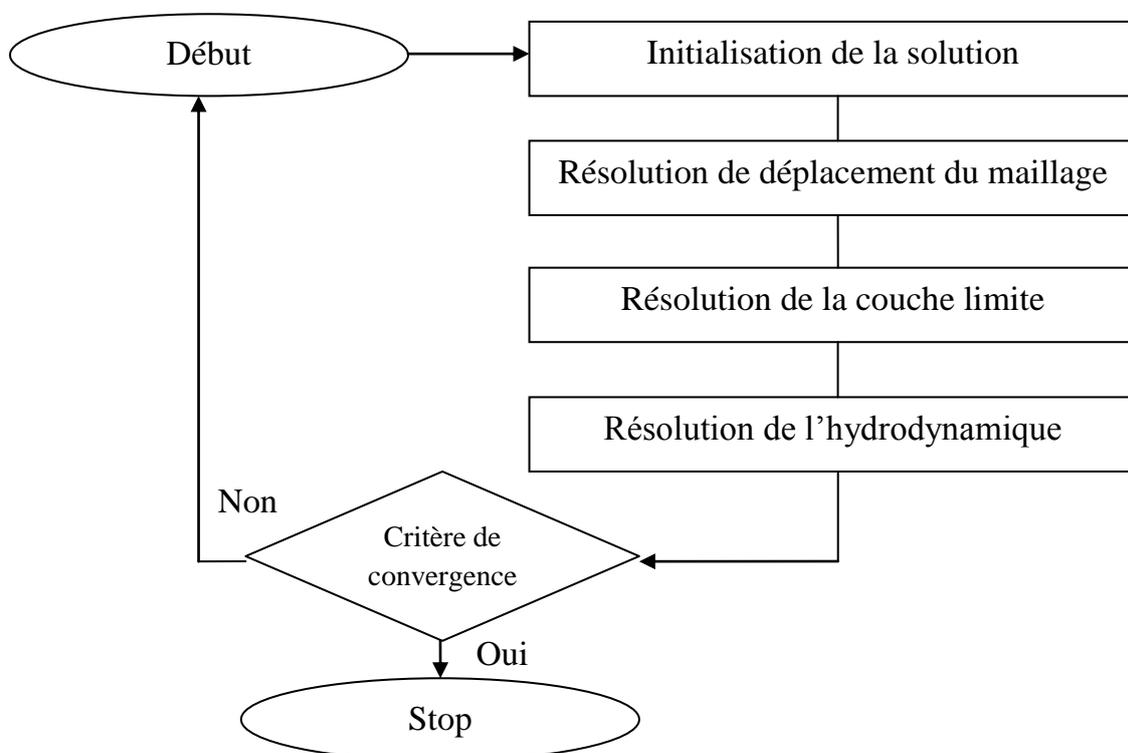
Pour le schéma d'advection dans le CFX, trois options sont possibles. Le schéma "**Upwind**" et Le schéma "**Specified Blend Factor**", mais nous dans notre étude nous allons choisir le schéma "**High**

**Resolution**" qui calcule pour chaque nœud le facteur le plus approprié, compris entre 0 et 1, qui doit multiplier le terme de correction de la diffusion numérique. Le calcul de ce facteur est basé sur les gradients autour du nœud.

Lorsque nous déclarons dans CFX l'écoulement du fluide à travers la butée hydrostatique comme incompressible et le régime comme laminaire, isotherme et permanent, ces équations seront simplifiées automatiquement.

### II.2.1.6. Stratégie de la résolution

Les méthodes classiques, utilisent des algorithmes de solution où les équations de quantité de mouvement sont d'abord résolues en estimant une valeur de pression initiale  $p$ , ensuite une équation pour la correction de la pression est obtenue. A chaque niveau d'itération les équations de transport sont résolues en utilisant les composantes de vitesses  $u$  et  $v$  résultant des itérations précédentes (Algorithme SIMPLE). Cet algorithme présente l'inconvénient de nécessiter un nombre itératif élevé pour atteindre la convergence. Le code de calcul CFX, utilise une méthode couplée où les équations hydrodynamiques ( $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $p$ ) sont résolues en même temps comme une équation unique. Cette approche utilise une méthode entièrement implicite pour chaque pas de temps. La **figure II.7** ci-dessous représente l'organigramme général adopté sous CFX.



**Figure II.7** : Stratégie de la résolution en CFX.

Pour la résolution de chaque ensemble d'équations, l'organigramme de calcul se compose de deux opérations numériques :

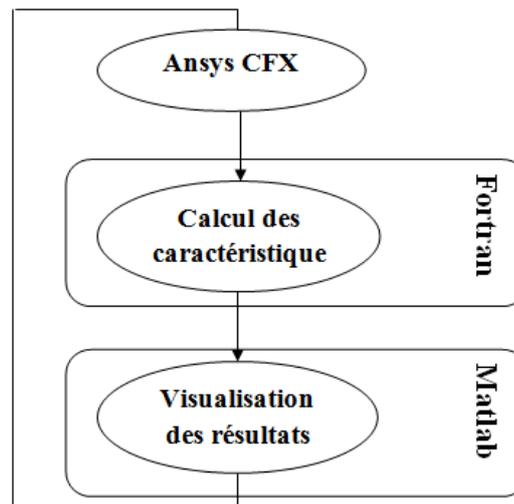
- ✓ La linéarisation des équations non linéaires avant d'être insérées dans la matrice de solution.
- ✓ La résolution des équations linéaires avec un procédé itératif en utilisant une méthode algébrique.

### II.2.1.7. Critères de convergence

Une procédure est convergente si toute erreur tend à décroître au cours des itérations. Elle converge lorsque les itérations ne produisent plus de changements significatifs sur les variables selon un critère qui doit être inférieure à **10E-4** pour stopper le processus itératif lorsqu'il est satisfait.

### II.2.1.8. Calcul des caractéristiques

Le calcul des caractéristiques statiques et dynamiques (telles que la charge portante, le débit de lubrifiant, le coefficient de raideur) de butée hydrostatique finie se fait dans le programme FORTRAN qu'on a développé. Le programme en question effectue l'intégration champ de pression dans le film lubrifiant déterminé par la résolution des équations de Navier-Stokes effectuée avec le solveur de CFX. La **Figure II.8** montre cette idée sous forme d'un organigramme.



**Figure II.8** : La stratégie développée pour le calcul des caractéristiques de la butée hydrostatique.

**a). Calcul du champ de pression**

La résolution des équations de Navier-Stokes permet de donner le champ de pression  $P$  dans le film mince sans la connaissance préalable de la pression dans l'alvéole.

**b). Calcul de la charge portante**

La valeur de la charge  $W_p$  qui peut supporter le grain mobile est obtenue par l'intégration du champ de pression dans le film mince sur toute la surface de contact, la charge portante relative à la butée hydrostatique plane s'écrit :

$$W_p = \int_s P ds \quad (\text{II. 10})$$

Avec :

$S$  : Surface de contact.

$ds$ : Élément de surface.

$W_p$ : Charge portante relative à la butée.

**c). Calcul du débit**

Puisque le fluide est considéré incompressible on peut utiliser le débit volumique. Il est donné par le flux du vecteur vitesse à travers la surface perpendiculaire au film.

On a:

$$Q_i = \int_{s_i} u_i ds \quad (\text{II. 11})$$

Avec :

$Q_i$  : Le débit volumique dans la direction  $i$ .

$s_i$  : La section normale à l'axe  $i$ .

$u_i$ : La composante de la vitesse dans la direction  $i$ .

**d). Débits sortant de l'alvéole**

$Q_s$  désigne le débit volumique sortant de l'alvéole relatif à la butée hydrostatique. Dans le cas de la butée à une alvéole, le débit volumique  $Q_s$ , **Figure II.9**, s'écrit comme suit :

$$Q_s = Q_x^+ + Q_x^- + Q_z^+ + Q_z^- \quad (\text{II.12})$$

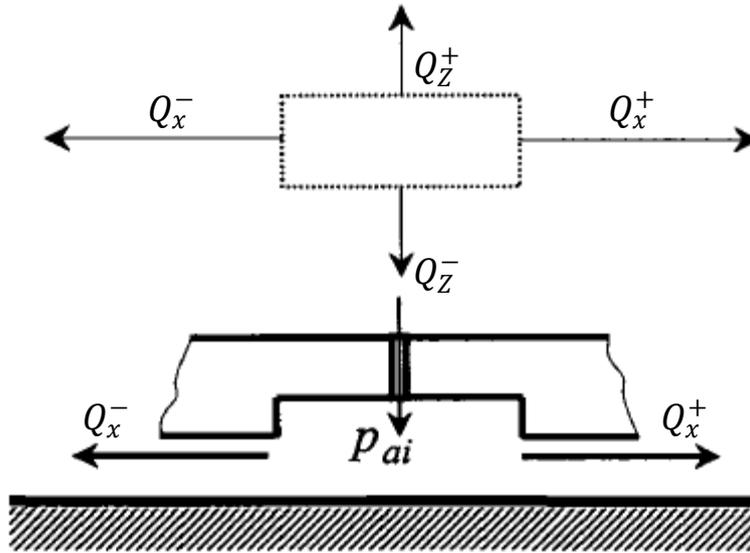


Figure II.9 : Débit sortant de l'alvéole pour une butée hydrostatique à un alvéole [8].

En raison de la symétrie :

$$Q_s = 2(Q_x^+ + Q_z^+) \tag{II.13}$$

Le cas de la butée à deux alvéoles, Figure II.10 :

$$Q_s = Q_{x1}^+ + Q_{x1}^- + Q_{z1}^+ + Q_{z1}^- + Q_{x2}^+ + Q_{x2}^- + Q_{z2}^+ + Q_{z2}^- \tag{II.14}$$

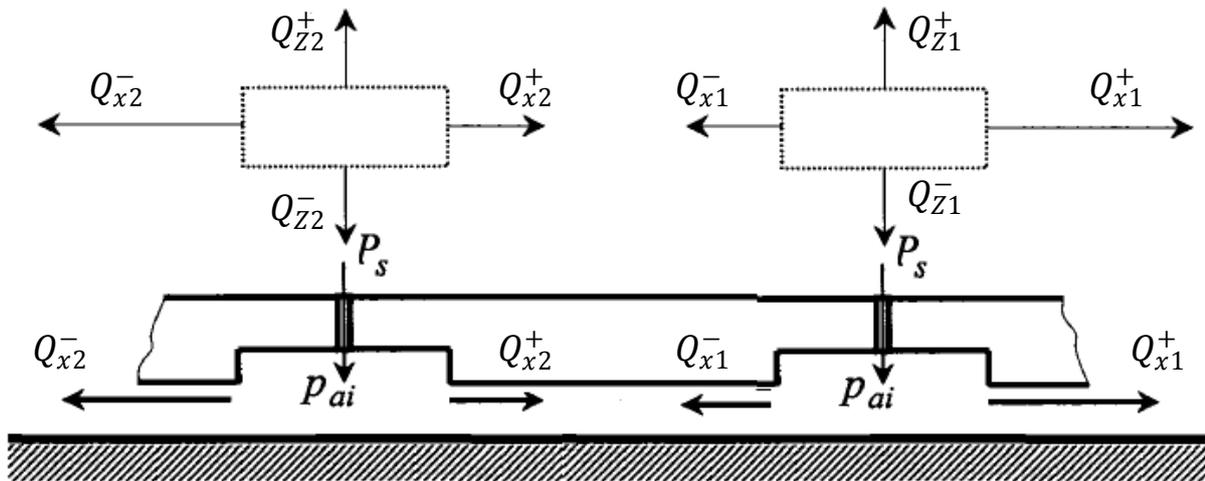


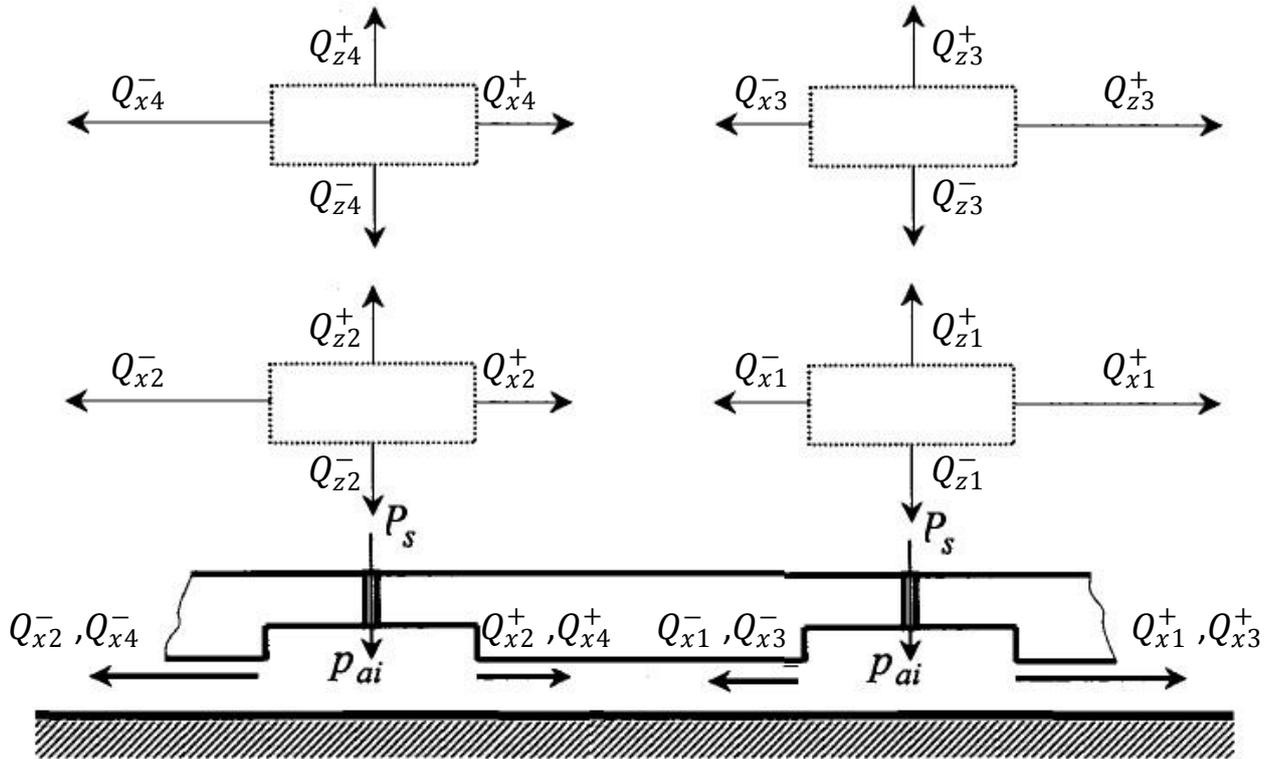
Figure II.10 : Débit sortant de l'alvéole pour une butée hydrostatique à deux alvéoles.

En raison de la symétrie toujours :

$$Q_s = 2(Q_{x1}^+ + Q_{x1}^- + Q_{z1}^+ + Q_{z1}^-) \tag{II.15}$$

Le cas de la butée à quatre alvéoles, **Figure II.11** :

$$\begin{aligned}
 Q_s = & Q_{x1}^+ + Q_{x1}^- + Q_{z1}^+ + Q_{z1}^- + Q_{x2}^+ + Q_{x2}^- + Q_{z2}^+ + Q_{z2}^- + Q_{x3}^+ \\
 & + Q_{x3}^- + Q_{z3}^+ + Q_{z3}^- + Q_{x4}^+ + Q_{x4}^- + Q_{z4}^+ + Q_{z4}^- \quad (II.16)
 \end{aligned}$$



**Figure II.11** : Débit sortant de l'alvéole pour une butée hydrostatique à quatre alvéoles.

Toujours en raison de la symétrie du patin :

$$Q_s = 4(Q_{x1}^+ + Q_{x1}^- + Q_{z1}^+ + Q_{z1}^-) \quad (II.17)$$

### II.2.1.9. Calcul des coefficients dynamiques

Le calcul des coefficients dynamiques se fait par la méthode des petits déplacements set vitesses de déplacement [25]. Dans notre cas on n'a pas une vitesse de déplacement, donc seuls les calculs des paramètres liés au déplacement (c'est-à-dire les raideurs) seront pertinents. On adopte la démarche suivante :

Si on impose un petit déplacement  $\Delta h$  colinéaire à l'axe (OY) au voisinage de la position d'équilibre statique  $h_x, h_y$ , on peut écrire :

$$W_p(h_x, h_y + \Delta h, h_x = 0, h_y = 0) = W_p(h_x, h_y, 0, 0) + \Delta h \left( \frac{\partial W_p}{\partial h} \right)_0 \quad (\text{II.18})$$

En se limitant au premier ordre, la relation précédente peut se mettre sous la forme :

$$W_p(h_x, h_y + \Delta h, h_x = 0, h_y = 0) - W_p(h_x, h_y, 0, 0) = -K_p \Delta h \quad (\text{II.19})$$

Le coefficient  $K_p$  correspond à la raideur, dus à l'existence du film lubrifiant de la butée hydrostatique à simple effet au voisinage du point d'équilibre statique.

Il est donc obtenu par identification des équations (II.18) et (II.19) :

$$K_p = - \left( \frac{\partial W_p}{\partial h} \right)_0 \quad (\text{II.20})$$

L'intégration du champ de pression permet de calculer la composante  $W_p$  de la force hydrostatique correspondante à cette position. On en déduit donc :

$$\frac{\partial W_p}{\partial h} = \frac{W_p(h_x, h_y + \Delta h, h_x = 0, h_y = 0) - W_p(h_x, h_y, 0, 0)}{\Delta h} \quad (\text{II.21})$$

## II.2.2. Étude numérique par la discrétisation de l'équation de Reynolds

Les caractéristiques statique et dynamique des butées hydrostatiques ils sont déterminés par l'intégration du champ de pression obtenu en résolvant l'équation de Reynolds qui résolue selon différentes méthodes numériques comme celle de la méthode des différences finies centrées qui consiste à discrétiser le domaine d'intégration.

### II.2.2.1. Hypothèses simplificatrices

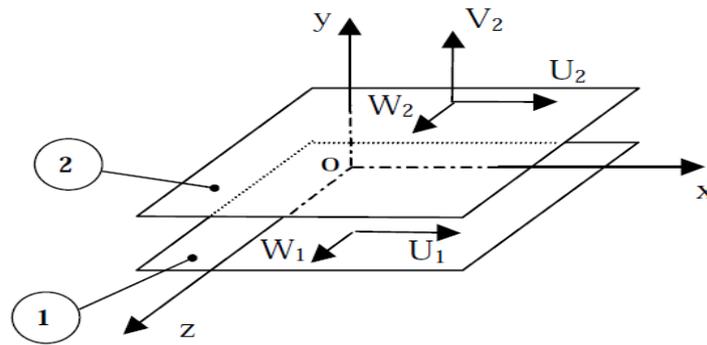
L'équation généralisée de la mécanique des films minces visqueux s'obtient en considérant que :

- Le milieu est continu
- Le fluide est Newtonien
- L'écoulement est laminaire.
- Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact. La vitesse du fluide à la paroi est égale à celle-ci.
- Les surfaces du contact sont parfaitement planes.

- L'épaisseur du film mesurée dans la direction OZ est toujours très faible devant les autres dimensions de la butée.
- La viscosité et la masse volumique du fluide sont constantes.
- La pression ne varie pas à travers l'épaisseur du film (son gradient est nul).

### II.2.2.2. Equations générales du problème

Considérons deux surfaces (1) et (2) séparées par un film fluide de faible épaisseur et un système d'axes de référence orthogonal, avec comme origine le point O positionné sur l'une des surfaces. Les axes  $Ox$  et  $Oz$  de ce système de référence sont situés sur la même surface **Figure II.12**



**Figure II.12 :** Système d'axe

L'équation de base utilisée en lubrification est l'équation des films minces visqueux. Elle est déduite de la théorie des milieux continus, en tenant compte des hypothèses précédentes.

Soit  $(U_1, V_1, W_1)$  et  $(U_2, V_2, W_2)$  les composantes de la vitesse respectivement des surfaces (1) et (2) dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Les composantes de la vitesse dans les directions  $x$  et  $z$  sont :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y - h) + U_1 \frac{h-y}{h} + U_2 \frac{y}{h} \quad (\text{II.22})$$

$$W = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y - h) + W_1 \frac{h-y}{h} + W_2 \frac{y}{h} \quad (\text{II.23})$$

En considérant les hypothèses précédentes avec un régime isotherme, l'équation généralisée de la mécanique des films minces visqueux se réduit à l'équation de Reynolds qui, dans un repère cartésien, prend la forme suivante [26]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 6\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ + 6h \frac{\partial}{\partial x} [\rho(U_1 - U_2)] + 6h \frac{\partial}{\partial z} [\rho(W_1 - W_2)] + 12\rho V_2 + 12h \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Dans le cas de notre étude, l'origine O du repère est placée sur la surface inférieure (1). Cette surface est immobile tandis, que même la surface supérieure (2) est immobile. Les conditions aux limites sur la vitesse du fluide sont :

- Sur la frontière de (1) ( $y = 0$ ) nous avons :  $U_1 = V_1 = W_1 = 0$ .
- Sur la frontière (2) ( $y = h$ ) nous avons :  $U_2 = W_2 = 0$  et  $V_2 = 0$ .

En introduisant les conditions aux limites sur la vitesse, l'équation de Reynolds simplifiée devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{II.25})$$

L'épaisseur du film mince  $h$  ainsi que la viscosité dynamique du fluide sont constantes dans l'espace, ce qui simplifie l'équation(II.25):

$$\frac{h^3}{\mu} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (\text{II.26})$$

Ou même 
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.27})$$

(II.27c'est l'équation de Laplace en 2D)

Avec :

$p$  : Pression en un point quelconque relative à la butée à simple effet.

$0 \leq X \leq A$  et  $0 \leq Z \leq B$  (Dimensions du patin de la butée)

### II.2.2.3. Discrétisation de l'équation de Reynolds

L'emploi de la méthode des différences finies pour résoudre l'équation de Reynolds (II.26) (ou celle de Laplace (II.27)) nécessite la discrétisation du domaine d'intérêt en un nombre fini d'éléments. Le domaine d'intégration est découpé en un certain nombre de rectangles élémentaires et les variables continues  $X$  et  $Z$  sont remplacés par des variables discrètes  $I$  et  $J$ , **Figure II.13**.

En utilisant le développement de Taylor au premier ordre et au second ordre, la valeur de la pression  $P$  au point de coordonnées  $I$  et  $J$  est fonction de la valeur de la pression aux points situés au voisinage de ce même point, on a les relations :

$$\frac{\partial p(I,J)}{\partial x} = \frac{p(I+1,J) - p(I-1,J)}{2\Delta x} \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{\partial p(I,J)}{\partial z} = \frac{p(I,J+1) - p(I,J-1)}{2\Delta z} \quad (\text{II.29})$$

$$\frac{\partial^2 p(I,J)}{\partial x^2} = \frac{p(I+1,J) - 2p(I,J) + p(I-1,J)}{2\Delta x^2} \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{\partial^2 p(I,J)}{\partial z^2} = \frac{p(I,J+1) - 2p(I,J) + p(I,J-1)}{2\Delta z^2} \quad (\text{II.31})$$

Avec  $\Delta x$  et  $\Delta z$  étant les pas, c'est à dire les distances séparant deux points consécutifs, respectivement suivant X et suivant Z.

En reportant ces expressions dans l'équation (II.27), on obtient au point I, J la relation :

$$\begin{aligned} -2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) p(I,J) + \frac{1}{\Delta x^2} (p(I+1,J) - p(I-1,J)) \\ + \frac{1}{\Delta z^2} (p(I,J+1) - p(I,J-1)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

#### II.2.2.4. Maillage

La relation (II.31) est réécrite pour chaque nœud du domaine. On obtient alors un système de  $M3 \cdot N3$  équations, ( $N3$  et  $M3$  sont les nombres des nœuds suivant X et Z). Les équations restantes sont obtenues en écrivant les conditions aux limites sur la pression en chaque point de la frontière. Le maillage que nous avons choisi pour résoudre ces équations se présente comme suit :

Selon la direction axiale X, la variable X est repérée par l'indice I défini par :

I=1: M3            M3=105, M2=89, M1=27 points

Selon la direction axiale Z, la variable Z est repérée par l'indice J défini par :

J=1 : N3            N3=105, N2=89, N1=27 points

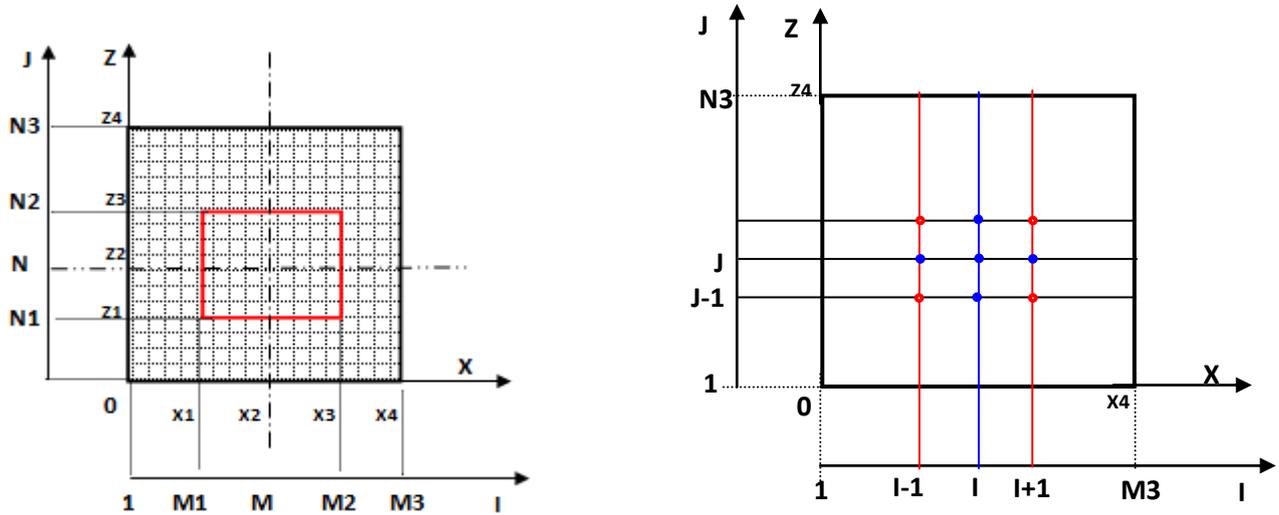


Figure II.13 : domaine de calcul.

### II.2.2.5. Résolution numérique

Le système de  $M3 \times N3$  équations n'est pas résolu par une méthode directe, puisque la taille de ce système peut être très importante, on choisit donc une méthode itérative. On utilise généralement la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation. Pour appliquer cette méthode, il suffit d'écrire l'équation aux différences finies sous forme :

$$p(I, J)^{(K+1)} = (1 - \Omega)p(I, J)^{(K)} + \Omega[AJ(p(I + 1, J)^{(K)} + p(I - 1, J)^{(K+1)}) + AI(p(I, J + 1)^{(K)} + p(I, J - 1)^{(K+1)})] \quad (II.33)$$

Avec  $\Omega$  coefficient de sur-relaxation (compris entre 1.4 et 1.8), AJ et AI coefficients des équations des différences finies obtenus par identification, et  $K$  nombre d'itération

On a les relations :

$$AA = \frac{\Delta x^2 \times \Delta z^2}{2(\Delta x^2 + \Delta z^2)} , \quad AJ = \frac{AA}{\Delta x^2} , \quad AI = \frac{AA}{\Delta z^2}$$

### II-2.2.6. Conditions aux limites

Pour compléter le système d'équation (II.32), il faut ajouter les équations liées aux conditions aux limites. Comme le film lubrifiant aux bords des deux plaques (sortie de la zone mince) est exposé à la pression atmosphérique, la pression absolue à la sortie du film est égale à la pression ambiante  $P_{atm}$ . En ce qui concerne la pression dans l'alvéole, elle est supposée constante  $P_a$ .

Avec :

$$P_a = P_S \times \beta \quad (\text{II.34})$$

### II.3.Solution analytique

La solution analytique ne peut être obtenue que pour les situations idéales et simples basées sur l'équation de Reynolds (II.26). Dans cette étude, la solution analytique est obtenue par une technique d'analogie électrique. Cette solution fera l'objet de la validation des modèles numériques (Reynolds et Navier-stokes).

#### II.3.1. Calcul de la charge

La charge statique est donnée par l'équation suivante :

$$W = a_f S \beta P_S \quad (\text{II. 35})$$

Avec :

$a_f$  Le coefficient de charge.

$S$  La surface de la butée.

$\beta$  Le rapport de pression.

$P_S$  La pression d'alimentation.

#### II-3.2. Le débit sortant de l'alvéole

Le débit est donné par l'équation suivante :

$$Q = \frac{q_f W h^3}{S \mu} \quad (\text{II. 36})$$

La substitution de l'équation (II-33) dans (II-34) rapporte l'équation suivant :

$$Q = \frac{q_f a_f S \beta P_S h^3}{S \mu} \quad (\text{II. 37})$$

#### II.3.3. Calcul de l'épaisseur $h$

L'épaisseur du film dans le cas capillaire est donnée par la relation suivante :

$$h = \left[ \left( \frac{1 - \beta}{\beta} \right) \left( \frac{K_c}{q_f a_f} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (\text{II. 38})$$

Avec :

$$K_c = \frac{\pi d_c^4}{128 l_c} \quad (\text{II. 39})$$

### II.3.4. Calcul de la raideur $K_p$

Pour le cas du capillaire, la raideur est donnée par la relation suivante :

$$K_p = \frac{3 W}{h} (1 - \beta) \quad (\text{II. 40})$$

Après la substitution de l'équation (II-33) dans (II-38) on a :

$$K_p = \frac{3 a_f S \beta P_S}{h} (1 - \beta) \quad (\text{II. 41})$$

Et d'après la relation (II-36) on a :

$$\beta = \frac{1}{\frac{q_f a_f}{K_c} h^3 + 1} \quad (\text{II. 42})$$

Pour une discussion approfondie sur les coefficients  $q_f a_f$  le lecteur pourra consulter la référence [27] (citée dans [28])

## II .4 Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié deux formulations mathématiques des différentes configurations géométriques et celle de la pression d'alimentation de la butée hydrostatique finie. La première formulation est basée sur les équations de Navier-Stokes. La deuxième est basée sur l'équation de la lubrification, connue sous le nom de l'équation de Reynolds. On a aussi discuté les différentes techniques de résolution analytiques et numériques, à savoir : la méthode d'analogie électrique, la méthode des volumes finis et la méthode des différences finis.

Le modèle numérique, étant validé analytiquement, a fait l'objet d'une étude paramétrique portant sur la pression d'alimentation, la densité ainsi que la viscosité dynamique du fluide lubrifiant et en fin les cinq configurations géométriques de la butée.

Le chapitre suivant sera consacré à la présentation des résultats obtenus ainsi qu'à leur discussion.