

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

## **UNIVERSITÉ IBN-KHALDOUN DE TIARET**

**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUEES**  
**DÉPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**  
**FILIERE DE GENIE MECANIQUE**

# **MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

**Pour l'obtention du diplôme de Master**

**Domaine : Sciences & Technologie**

**Filière : Génie Mécanique**

**Parcours : Master**

**Spécialité :**

**Modélisation et simulation en génie mécanique**

## **THÈME**

**Modélisation et analyse du comportement  
dynamique d'une ligne d'arbre flexible en  
régime transitoire**

*Préparé par:*

***M. BOUTALEB Ahmed***  
***M. BEN AISSA Messaoud***

**Devant le Jury :**

<b>Nom et prénoms</b>	<b>Grade</b>	<b>Lieu d'exercice</b>	<b>Qualité</b>
Mr. K ARAS A	MCA	UIK Tiaret	Président
Mr. ABOUCHIGHIBA H	MAA	UIK Tiaret	Examinateur
Mr. BOUZIDANE A	Pr	UIK Tiaret	Encadreur
Mr. ATHMANI H	MAA	UIK Tiaret	Co encadreur

**PROMOTION 2015 /2016**

## REMERCIEMENTS

*Le présent travail a été réalisé sous la direction de monsieur Professeur Ahmed BOUZIDANE au niveau du département Génie Mécanique de l'Université D'IBN KHALDOUN – TIARET.*

*Nous remercions avant tous DIEU LE TOUT PUISSANT qui nous a donné le courage, la volonté et la patience d'arriver au terme de ce travail.*

*Nos vifs remerciements à notre encadreur M. BOUZIDANE Ahmed et M. ATHMANI Houari pour leurs conseils, leurs encouragements, et aussi pour leur disponibilité. Nous remercions également les membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'accepter de juger notre travail.*

*Nos remerciements vont également à tous les responsables, les enseignants de département de génie mécanique qui ont contribué à notre formation.*

*Enfin, nous remercions tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

## *Dédicaces*

*Après avoir rendu grâce à DIEU LE TOUT PUISSANT,*

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Mes chers parents Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.*

*Mes sœurs*

*Toute la famille BOUTALEB*

*Mes promotionnaires*

*Ainsi qu'à tous ceux qui me sont chers.*

BOUTALEB Ahmed



*Dédicace*

*A mon père mon professeur de toujours, et*

*Ma très chère mère*

*Pour leurs soutien et encouragements.*

*A mes proches et toute ma famille.*

*À mes adorables frères, ma fiancée, mes sœur pour leur  
patience.*

*A mes amis et tous les gens qui m'aiment.*

*A tous ceux qui sont proches de mon cœur*

*et dont je n'ai pas cité le nom.*

*Au bonheur des plus chers.*

*Je dédie ce modeste travail*

*BEN AISSA Messaoud*

# Table des matières

## **Introduction générale.**

## **CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

1.1	Introduction : .....	2
1.2	Dynamique des rotors : .....	2
1.2.1	Objectifs de l'analyse dynamique des rotors .....	3
1.2.2	Classifications des rotors .....	3
1.2.2.1	rotors rigides .....	3
1.2.2.2	rotors flexible .....	3
1.3	Types de contrôle des vibrations .....	4
1.3.1	Contrôle passif.....	4
1.3.2	Contrôle semi-actif .....	4
1.3.3	Contrôle actif .....	5
1.4	Principes de la lubrification hydrostatique .....	6
1.5	Les lubrifiants.....	8
1.6	Les fluides rhéologiques intelligents .....	9
1.6.1	Introduction.....	9
1.6.2	Fluide électro-rhéologique, FER.....	9
1.6.3	Fluide magnéto-rhéologique, FMR.....	10
1.6.4	Le ferrofluide .....	11
1.7	Types des paliers lubrifiants .....	12
1.7.1	Paliers hydrodynamiques .....	12
1.7.2	Paliers hydrostatiques .....	12
1.8	Méthodes numériques non linéaires .....	13

## **CHAPITRE II : ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE LIGNE D'ARBRE FLEXIBLE**

2.1	Introduction .....	15
2.2	Modélisation en élément fini .....	15
2.2.1	Procédure de discrétisation .....	15
2.2.2	Formulation des équations du mouvement .....	16
2.2.2.1	Éléments du rotor .....	16
2.2.2.2	Calcul des matrices élémentaires .....	17
2.2.2.3	Formulation matricielle des supports.....	20

2.2.2.4 Formulation vectoriel des forces d'excitations .....	21
2.2.2.5 Formulation des matrices globales .....	22
2.2.3 Résolution du système .....	23
2.2.3.1 Organigramme de résolution .....	24
2.2.3.2 Organigramme de réduction des amplitudes vibratoires .....	25
Conclusion.....	25

### **CHAPITRE III : RESULTATS ET INTERPRETATIONS**

3.1 Introduction .....	26
3.2 Caractéristiques du rotor .....	26
3.3 Fréquences propres et modes propres .....	27
3.4 Réponses vibratoires due aux forces du balourd .....	28
3.5 Résultats de l'optimisation .....	30
3.5.1 Effet de la variation de la pression et de la viscosité .....	30
3.5.2 Comparaison des Réponses vibratoires .....	32
Conclusion.....	34

**Conclusion générale.**

**Bibliographie.**

**Webographie.**

**Résumé.**

## Liste des figures

<b>Figure 1.1</b> exemple des rotors [11] .....	2
<b>Figure 1.2</b> Equilibrage de rotors par pilotage de masses-satellites :(a) dispositif d'équilibrage actif (b) masses-satellites sur la crémaillère circulaire [2].....	5
<b>Figure 1.3</b> Banc rotor sur Paliers Magnétiques Actifs (PMA) [2].....	6
<b>Figure 1.4</b> description d'une buté hydrostatique [3] .....	6
<b>Figure 1.5</b> L'alimentation à débit constant [3] .....	7
<b>Figure 1.6</b> L'alimentation à débit constante [3] .....	7
<b>Figure 1.7</b> Principe de fonctionnement hydrostatique du plier [3] .....	8
<b>Figure 1.8</b> Fluide rhéologique et fluide newtonien [5] .....	9
<b>Figure 1.9</b> Fluide avec liaison de particules à dipôle électrique [5] .....	10
<b>Figure 1.10</b> Solidification du fluide dans l'axe du champ [5] .....	10
<b>Figure 1.11</b> Fluide avec des particules à dipôle magnétique [5].....	11
<b>Figure 1.12</b> un ferrofluide [12].....	11
<b>Figure 1.13</b> Palier hydrodynamique .....	12
<b>Figure 1.14</b> Palier hydrostatique [13].....	13
<b>Figure 2.1</b> illustration du modèle de la ligne d'arbre .....	15
<b>Figure 2.2</b> schemas du model rotor discrétisé .....	16
<b>Figure 2.3</b> Élément fini type poutre .....	16
<b>Figure 2.4</b> schématisation du support.....	20
<b>Figure 2.5</b> schématisation des caractéristiques du palier hydrostatique .....	21
<b>Figure 2.6</b> schématisation des caractéristiques Du roulement.....	21
<b>Figure 2.7</b> schématisation du balourd.....	22
<b>Figure 3.1</b> description du model élément fini du rotor.....	26
<b>Figure 3.2</b> orbite de la déformé approprier aux deux vitesses critiques .....	28
<b>Figure 3.3</b> Amplitude adimensionnelle des vibrations au milieu du rotor .....	28
<b>Figure 3.4</b> Amplitudes adimensionnelles des déplacements vibratoires aux niveaux de roulement 2 et du palier hydrostatique .....	29
<b>Figure 3.5</b> Amplitudes des forces transmises via le palier hydrostatique .....	29
<b>Figure 3.6</b> Amplitudes vibratoires maximales en fonction des itérations du calcul .....	30
<b>Figure 3.7</b> effet de la variation de la pression sur les amplitudes vibratoires maximales .....	30
<b>Figure 3.8</b> effet de la variation de la viscosité sur les amplitudes vibratoires maximales .....	31
<b>Figure 3.9</b> diagramme WATERFALL des amplitudes vibratoires adimensionnelles en fonction de la vitesse de rotation et de la pression dans l'alvéole .....	32

<b>Figure 3 .10</b> comparaison des amplitudes adimensionnelles des déplacements vibratoires au milieu du rotor .....	32
<b>Figure 3.11</b> comparaison des amplitudes adimensionnelles des déplacements vibratoires au niveau du palier hydrostatique .....	33
<b>Figure 3.12</b> comparaison des amplitudes adimensionnelles des déplacements vibratoires au niveau du roulement 2 .....	33
<b>Figure 3.13</b> comparaison des amplitudes des forces transmises à travers le palier hydrostatique .....	34

### **Liste des tableaux**

<b>Tableau 2.1</b> dimensions du rotor .....	16
<b>Tableau 3.1</b> caractéristiques du système modélisé.....	26
<b>Tableau 3.2</b> différentes vitesses critiques du rotor .....	27



## Nomenclature

Symboles	Désignations	Unités
$\emptyset_i$	Diamètre du l'élément « i »	m
$L_i$	Langueur du l'élément « i »	m
$[M]$	Matrice de masse	kg
$[C]$	Matrice d'amortissement	N. s/m
$[K]$	Matrice de rigidité	N/m
$\{F\}$	Vecteur force d'excitation	N
$\{\delta\}$	Vecteur déplacement	m
$[M_t]$	Matrice de masse en translation	kg
$[M_r]$	Matrice de masse en rotation	Kg. m <sup>2</sup>
$[C_s]$	Matrice d'amortissement support	N. s/m
$\varphi$	Déplacement angulaire	rad
$[K_s]$	Matrice de rigidité support	N/m
$u_i$	Déplacement linéaire du nœud « i » suivant l'axe (ox)	m
$w_i$	Déplacement linéaire du nœud « i » suivant l'axe (oz)	m
$\theta_i$	Déplacement angulaire du nœud « i » autour de l'axe (ox)	rad
$\Psi_i$	Déplacement angulaire du nœud « i » autour de l'axe (oz)	rad
$\{F_{gr}\}$	force due à la gravite terrestre	N
$\{F_b\}$	force due au balourd	N
$\{F_{nl}\}$	force non linéaire	N
$\rho$	masse volumique du rotor	Kg/m <sup>3</sup>
$s_i$	Section du l'élément « i »	m <sup>2</sup>
$T_a$	Energie cinétique du l'élément rotor	J
$N_i(y)$	fonctions des formes	
$I$	Moment quadratique	m <sup>4</sup>
$u_i^e(y, t)$	Déplacement linéaire du l'élément « i » en un point « y » suivant l'axe (ox)	m
$t$	temps	s
$u_i^n(t)$	Déplacement linéaire du nœud « i » suivant l'axe (ox)	m
$w_i^e(y, t)$	Déplacement linéaire du l'élément « i » en un point « y » suivant l'axe (oz)	m
$w_i^n(t)$	Déplacement linéaire du nœud « i » suivant l'axe (ox)	m
$[M_1]; [M_2]$	Matrice classique de masse en translation	kg
$[M_3]; [M_4]$	Matrice classique de masse en rotation	kg
$[M_t^e]$	Matrice de masse élémentaire en translation	kg
$[M_r^e]$	Matrice de masse élémentaire en rotation	Kg. m <sup>2</sup>
$U$	Energie de déformation de l'élément rotor	J
$E$	Module de Young	N/m <sup>2</sup>
$[k_1]; [k_2]$	Matrices classiques de rigidité	N/m
$G$	Module de cisaillement	N/m <sup>2</sup>
$\nu$	Coefficient de poisson	
$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire	N/m
$[C_p]$	Matrice d'amortissement palier	N. s/m
$C_x$	Amortissement du palier suivant l'axe (ox)	N. s/m
$C_z$	Amortissement du palier suivant l'axe (oz)	N. s/m
$[k_p]$	Matrice de rigidité palier	N/m
$[k_r^{1,2}]$	Matrice de rigidité roulement 1 et 2	N. s/m
$h$	Epaisseur du film lubrifiant	m

$\mu$	Viscosité dynamique du lubrifiant	Pa.s
$F_u$	Force d'excitation nodale suivant l'axe ( $ox$ )	N
$F_\theta$	Force d'excitation nodale autour de l'axe ( $ox$ )	N
$F_w$	Force d'excitation nodale suivant l'axe ( $oz$ )	N
$F_\psi$	Force d'excitation nodale autour de l'axe ( $oz$ )	N
$T_b$	L'énergie cinétique au niveau de balourd	J
$m_b$	Masse du balourd	Kg
$r$	Excentricité du balourd	m
$[Z(\phi)]$	matrice de rigidité apparente	

## Introduction générale

Les machines tournantes sont connues comme des équipements essentiels qui sont souvent employé dans différent domaines de la technologie moderne tel que les installations industrielles (thermique, nucléaire,....etc.).

Les lignes d'arbres peuvent être le siège des phénomènes vibratoire perturbant le fonctionnement normal de la machine. Deux évènements sont particulièrement dangereux et peuvent conduire à des niveaux vibratoires inacceptables, il s'agit des vitesses de rotation critiques et les régimes linéairement instable, desquels les conséquences sont souvent catastrophiques (endommagement et rupture). Ces vibrations proviennent généralement des forces d'excitations qui sont d'origine balourd, instabilité du fluide lubrifiant, environnement, excitations aléatoire (choc, séisme)... etc.

La dynamique des rotors est un domaine très particulier et riche de la mécanique, où l'abondance des vibrations peut être responsable de l'instabilité de la structure entière. Un intérêt commun notamment de l'industrie des machines tournantes est de comprendre correctement les phénomènes vibratoires et de prédire le comportement dynamique et la flexibilité des rotors. En effet, une connaissance suffisante des comportements vibratoires est essentielle pour la conception des machines tournantes et aussi pour l'examen des moyens adéquats pour réduire ou éliminer les vibrations.

Le présent mémoire a pour objet la modélisation et l'analyse du comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible en régime transitoire duquel l'influence de la variation de la viscosité du fluide lubrifiant ainsi que la variation de la pression d'alimentation dans le palier hydrostatique sont abordées. La structure du travail est constituée en trois parties :

- Une étude bibliographique sur la dynamique des rotors, types de contrôle des vibrations, La lubrification hydrostatique et les Fluides lubrifiants.
- La deuxième partie est consacrée a l'élaboration d'un modèle non linaire d'une ligne d'arbre flexible monté verticalement et guides uniquement en rotation par des roulements et un palier hydrostatique, notant que ce rotor est sollicité en son milieu par des forces d'excitation de type balourd.
- En fin une présentation des résultats obtenus ainsi que leur interprétations.

# Chapitre I

---

Etude bibliographique sur la dynamique des rotors.

---

## 1.1 Introduction :

De nombreuses applications dans le domaine des machines tournantes ont à affronter des régimes transitoires, notamment lors du cycle mise en route /arrêt. Les sollicitations au niveau de la machine concerné sont importantes et il convient d'avoir un modèle précis pour prévoir son comportement.

Les machines tournantes ont un comportement dynamique spécifique vis-à-vis d'autres systèmes continus, en particulier à cause de la présence de l'effet gyroscopique. Leur modélisation est rendu complexe par les effets de rotations, les variations des caractéristiques en fonction de la vitesse de rotation (raideur, amortissement...etc.)

Dans ce chapitre, nous allons présenter une étude bibliographique sur la dynamique des rotors, types de contrôle des vibrations, La lubrification hydrostatique, les Fluides lubrifiants (ER, MR et les Ferro-fluides) ainsi que les Méthodes de résolution numériques.

## 1.2 Dynamique des rotors :

La dynamique des rotors est l'étude de la stabilité des mouvements des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans la sécurité et l'amélioration des performances systèmes.

Au fur et à mesure que la vitesse de rotation d'un objet tournant augment, son niveau de vibration traverse souvent un seuil critique. Cette évolution est généralement excitée par un déséquilibre de la structure tournante, et si l'ampleur de la vibration à ces vitesses devient excessive, une défaillance catastrophique peut se produire.

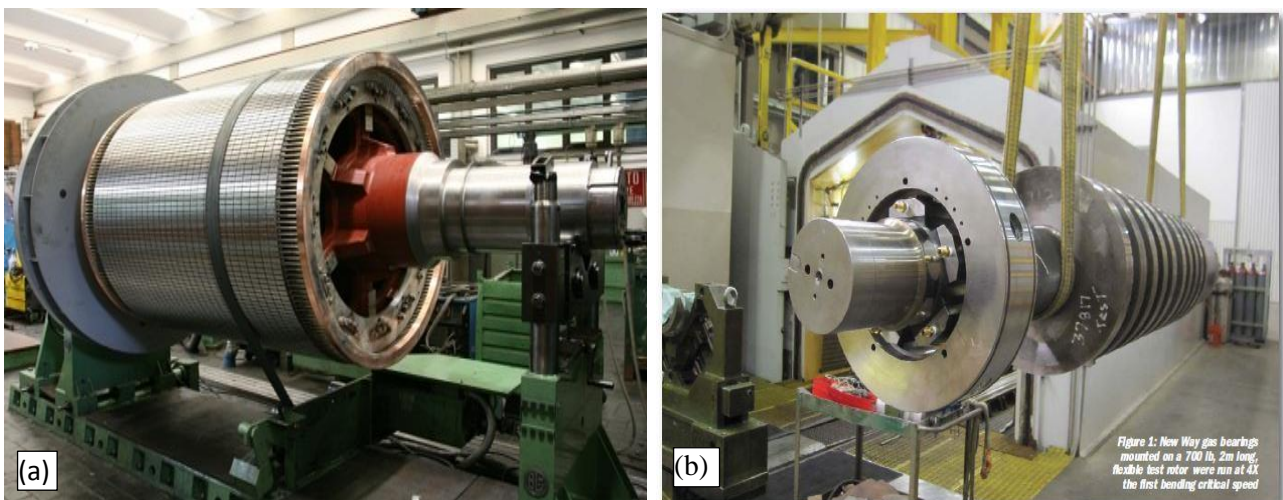


Figure 1.1 : Exemple des rotors [11]

### 1.2.1 Objectifs de l'analyse dynamique des rotors

Lors de la conception, l'exploitation de la maintenance des machines tournantes et l'analyse dynamique des rotors peuvent aider à atteindre les objectifs suivant :

- ✓ Prédire les vitesses critiques auxquelles les vibrations dues au déséquilibre du rotor est maximum. Elles peuvent être calculées à partir des données de conception, de manière à les éviter en fonctionnement normal de la machine.
- ✓ Calculer les valeurs et les positions des masses du balourd de correction à partir des données de vibration mesurées pendant l'opération d'équilibrage.
- ✓ Prévoir les amplitudes de vibration synchrone provoquées par le déséquilibre du rotor. C'est l'un des objectifs les plus difficiles à accomplir avec exactitude vu que le comportement du rotor dépend des facteurs qui sont à la fois très difficile à mesurer ( la distribution de déséquilibre le long du rotor, et l'amortissement du système rotor-palier). Cependant on peut prédire les effets relatifs du déséquilibre et de l'amortissement du système dans des endroits précis.
- ✓ Déterminer les modifications de conception pour supprimer les instabilités dynamique. Cet objectif peut être atteint plus facilement que l'objectif précédent, depuis que l'ordinateur permet de simuler et prédire l'effet relatif aux modifications matérielles différentes, même si les modèles de force de déstabilisation ne sont que des approximations.

### 1.2.2 Classifications des rotors

Un système de rotors peut être constitué de disque et d'aubages de forme complexe, dont l'analyse des vibrations requies un modèle mathématique approprié simplifié. Les rotors des machines tournantes sont classés en fonction de leurs caractéristiques, comme suit :

#### ➤ **Rotors rigides :**

Si la déformation de l'arbre de rotation est négligeable dans la plage de vitesse de fonctionnement, il est appelé un rotor rigide.

#### ➤ **Rotors flexible :**

Un rotor est généralement considéré comme étant flexible quand il fonctionne à proximité ou au-dessus de sa fréquence naturelle. Si l'arbre commence à se déformer sensiblement au début de la plage des vitesses de fonctionnement, il est appelé un rotor flexible. [1]

### 1.3 Types de contrôle des vibrations :

Plusieurs méthodes de contrôle de vibration ont été mise au point ces dernières années. Ces méthodes se différencient notamment par leur efficacité et leur technologie dont L'ensemble est classé en technique dite passives, semis-active et active.

#### 1.3.1 Contrôle passif

Les techniques passives ont été les premières à être mise au point et elles sont largement utilisées dans le domaine du contrôle de vibration, dont L'énergie mécanique est dissipée en une autre forme d'énergie thermique et/ou électrique, ces technique sont employées de par leur relative simplicité de mise en œuvre ainsi que leur compacité des composants d'apport éventuel.

La modification de l'amortissement peut être utilisée largement pour réaliser le contrôle passif. Par exemple, en utilisant des matériaux viscoélastiques possédant des propriétés amortissantes.

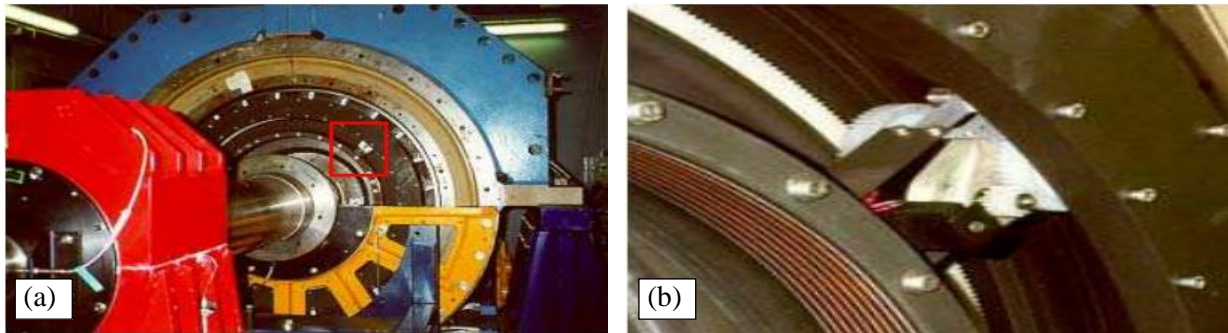
Les approches passives s'avèrent efficaces à moyennes et hautes fréquences. En revanche, elles se révèlent peu performantes aux basses fréquences. La capacité de conversion du contrôle passif est déterminée par les propriétés des matériaux. Cependant, les caractéristiques choisies de ces matériaux sont figées. Par conséquent, ces approches ne sont pas suffisamment efficaces dans le cas des structures évolutives qui nécessitent une adaptabilité pour chaque point de fonctionnement.[2]

#### 1.3.2 Contrôle semi-actif

Pour dépasser les inconvénients du contrôle passif, d'autre méthode telles que le contrôle semi-actif ont été développées. Compte tenu de l'arrivée de nouveaux matériaux intelligents dont les propriétés sont modifiables. Ainsi, selon les conditions opératives, les caractéristiques des structures (amortissement, répartition de masse, raideur) sont modifiées.

La modification d'amortissement dans un amortisseur magnéto-rhéologique, quant à elle, met en évidence un comportement variable visqueux duquel une énergie de commande est nécessaire pour créer un champ magnétique permettant l'évolution de la viscosité du fluide.

Un autre exemple intéressant concerne l'équilibrage automatique des rotors souples. La distribution de la masse est modifiée par pilotage de deux balourds mobiles dans le temps **Figure 1.2** Plus précisément, les masses-satellites situées dans un plan d'équilibrage évoluent sur une crémaillère circulaire coaxiale. Il n'y a pas d'actionneur au sens «action ou force» s'opposant au déséquilibre, mais une modification de la répartition de masse pilotée conduisant au rééquilibrage.[2]



**Figure 1.2 :** Equilibrage de rotors par pilotage de masses-satellites :

- (a) dispositif d'équilibrage actif
- (b) masses-satellites sur la crémaillère circulaire [2]

### 1.3.3 Contrôle actif

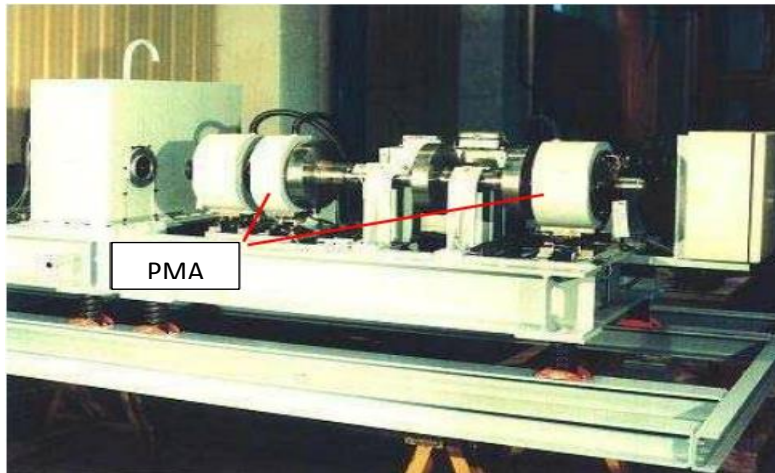
Le contrôle actif quant à lui est largement utilisé dans les applications industrielles lorsque le niveau de vibration est fort. Par opposition au contrôle passif et semi-actif, le contrôle actif a besoin d'énergie d'actionnement extérieur. Deux types de contrôle actif peuvent être distingués :

- le contrôle par anticipation (feedforward) génère une action basée sur la perturbation, il est donc causal, La disponibilité d'une information sur la perturbation appliquée au système est donc nécessaire.
- le contrôle rétroaction (feedback) se distingue du contrôle par anticipation car il traite non pas la perturbation mais la réponse de la structure elle-même. Il n'a pas besoins d'information sur la perturbation qui peut être quelconque.

En utilisant le contrôle actif, la performance peut être poussée à de très bons niveaux, étant lié à un algorithme il peut apporter suffisamment de robustesse et être totalement adaptable et applicable à de nombreux type de structures continues ou discrètes, linéaire ou non linéaires....

Par exemple les paliers Magnétique Actif (PMA) qui sustentent un rotor **figure 1.3** jouent le rôle d'actionneurs.[2]

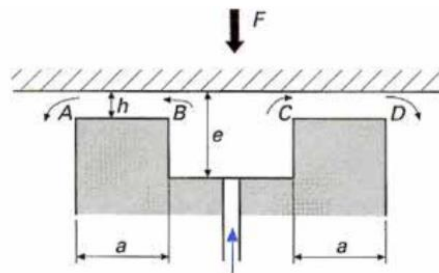




**Figure1.3** : Banc rotor sur Paliers Magnétiques Actifs (PMA) [2]

#### 1.4 Principes de la lubrification hydrostatatique

Dans tout dispositif hydrostatatique, une des deux surfaces en regard est lisse tandis que l'autre comporte une ou plusieurs cavités (alvéoles) reliées à un générateur de pression **figure1.4**.



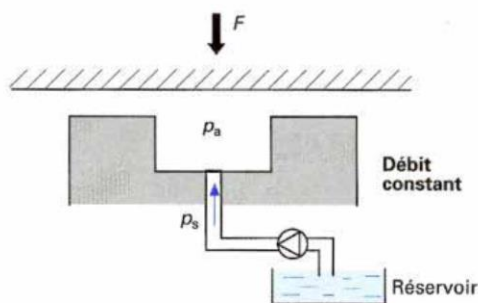
**Figure 1.4** : description d'une buté hydrostatatique [3]

On distingue deux régions :

- ❖ une zone représentée par les portées AB et CD de largeur « a » où l'épaisseur « h » du film lubrifiant est mince ; l'évolution de la pression dans cette région est décrite par l'équation de Reynolds. On suppose que la pression ne varie pas selon l'épaisseur du film.
- ❖ une zone BC constituée par la cavité où l'épaisseur du film lubrifiante est grande :  $e/h > 20$ , dans cette région, la pression est supposée être constante :  $p = P_a$  ; cette hypothèse est très souvent Vérifiée expérimentalement.

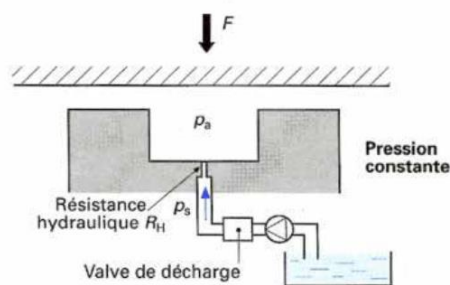
Les deux principales méthodes utilisées pour introduire le liquide à l'intérieur de la butée sont l'alimentation à débit constant et celle à pression constante **figure 1.5**.

Dans les systèmes à débit constant, on place une pompe à débit constant entre le réservoir et l'alvéole. Ce système est peu employé car, lorsque le mécanisme comporte plusieurs alvéoles (ce qui est pratiquement toujours le cas), il faut soit alimenter chacun d'entre eux par une pompe individuelle, soit utiliser des régulateurs à débit constant. Cette solution, qui assure une grande raideur, est complexe et coûteuse. On lui préfère le système à pression constante.



**Figure 1.5 :** L'alimentation à débit constant [3]

Dans les mécanismes à pression constante, on place une résistance hydraulique immédiatement en amont de l'alvéole. Le rôle de cette résistance est de créer une perte de charge, c'est-à-dire d'asservir le débit à la chute de pression. Ce système, simple à mettre en œuvre, permet d'alimenter plusieurs alvéoles avec une seule pompe à condition, bien évidemment, que le débit de celle-ci soit suffisant.



**Figure 1.6 :** L'alimentation à pression constante [3]

Dans la pratique, le système hydraulique est plus complexe. La **figure 1.7** donne le schéma du circuit pour l'alimentation à pression constante d'un palier à quatre alvéoles. Une pompe alimente le palier à un débit supérieur d'environ 30 % à celui nécessaire ; le surplus de liquide retourne au réservoir par l'intermédiaire d'un régulateur de pression. Un capteur de pression permet d'arrêter l'entraînement du rotor si la pression atteint une valeur trop faible. Le clapet anti-retour et l'accumulateur hydraulique assurent l'alimentation du palier jusqu'à l'arrêt complet de l'arbre (on peut aussi prévoir une pompe de secours). L'écoulement est ensuite dérivé vers chaque alvéole.

Sur chaque portion de circuit, on peut prévoir un clapet anti-retour en cas de surpression. La résistance hydraulique  $R_H$  doit être placée au plus près de l'alvéole afin d'éviter les instabilités de type pneumatique dues à la compressibilité du lubrifiant. Une pompe peut être nécessaire pour assurer le retour du lubrifiant vers le réservoir. Une prise de température  $T$  permet de contrôler la température du liquide à la sortie du palier et déclencher l'arrêt si la température devient trop importante. Enfin, un système de refroidissement assure une température constante au niveau de l'alimentation. [3]

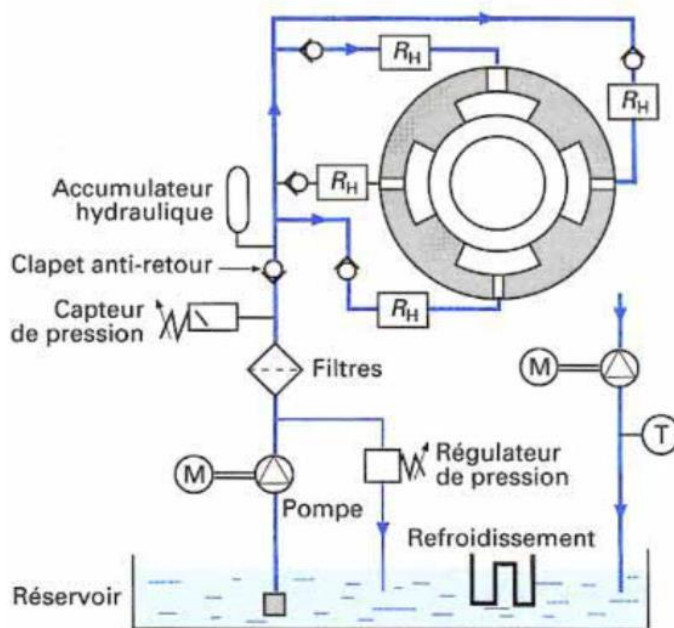


Figure 1.7 : Principe de fonctionnement hydrostatique du palier [3]

## 1.5 Les lubrifiants

Il existe deux bases pour les huiles lubrifiantes qui sont soit d'origine minérale ou synthétique.

**Les huiles à base minérale:** on distingue deux types de structure, la structure paraffinée formée d'hydrocarbures saturés à chaîne droite (très stable à l'oxydation, bonne résistance à haute température), et les structures naphthéniques formés de noyaux cycliques (grande aptitudes à la gélification) ;

**Les huiles à base synthétique:** les familles sont très nombreuses citant à titre d'exemple: les polypropylènes glycols, les phosphoriques, aliphatiques, appréciés pour leur faible viscosité à basse température et leur bas point de congélation.

Les principaux avantages des huiles sont :

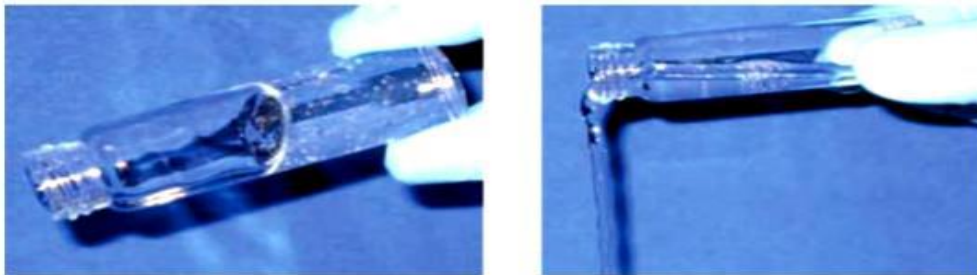
- La réduction des frottements.
- La réduction de l'usure.
- L'amélioration de l'étanchéité et l'évacuation des impuretés. [4]

## 1.6 Les fluides rhéologiques intelligents

### 1.6.1 Introduction

A la différence de l'eau (fluide dit newtonien), le fluide rhéologique ne s'égoutte pas ou tombe facilement sous l'influence de la gravitation newtonienne. Il manifeste donc une résistance minimale à l'écoulement, **figure 1.8**. En général, il est caractérisé par une contrainte ou seuil d'écoulement  $\tau_0$ , supérieure à celle de l'eau.

Plus la valeur de  $\tau_0$  d'un fluide est proche de zéro, plus sa viscosité est très faible et par conséquent, elle est similaire à celle d'un liquide newtonien, à l'inverse, plus la contrainte  $\tau_0$  est élevée, plus son état est proche de celui des plastiques rigides, dits plastiques de Bingham.



**Figure 1.8** : Fluide rhéologique et fluide newtonien [5]

Bien que les premiers brevets sur les fluides électro-rhéologique et magnéto-rhéologiques (FMR) furent déposés respectivement par W. Winslow et J. Rabinow dans les années quarante. Leurs exploitations techniques et industrielles n'ont été développées que durant les deux dernières décennies.

### 1.6.2 Fluide électro-rhéologique, FER

Ce type de fluide, lorsque 'il est soumis à l'action d'un champ électrique d'une intensité suffisante perpendiculaire à la direction de son mouvement, ses particules se polarisent et s'alignent en fibre le long des lignes de champ, créant une résistance à l'intérieur du fluide où un changement de viscosité apparaît **figure 1.9**.

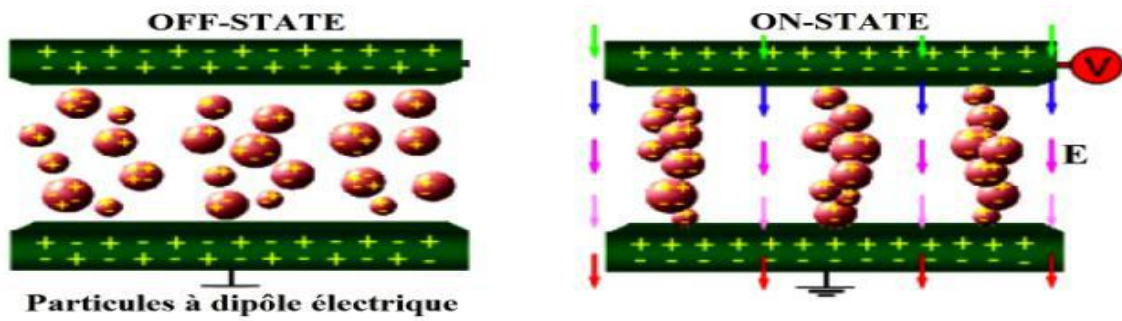


Figure 1.9: Fluide avec liaison de particules à dipôle électrique [5]

Le fluide devient rigide dans l'axe du champ, avec une contrainte d'écoulement élevée, et présente alors des propriétés visco-élastique. Cette modification n'a pas la même intensité dans toutes les directions, c'est-à-dire, elle est anisotropique. La solidification du fluide ER dans l'axe du champ électrique est rapide et quasi proportionnelle au carré de l'intensité du champ appliquée **figure 1.14**

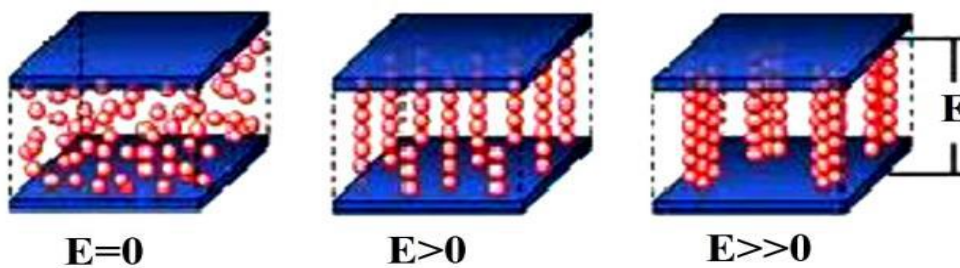


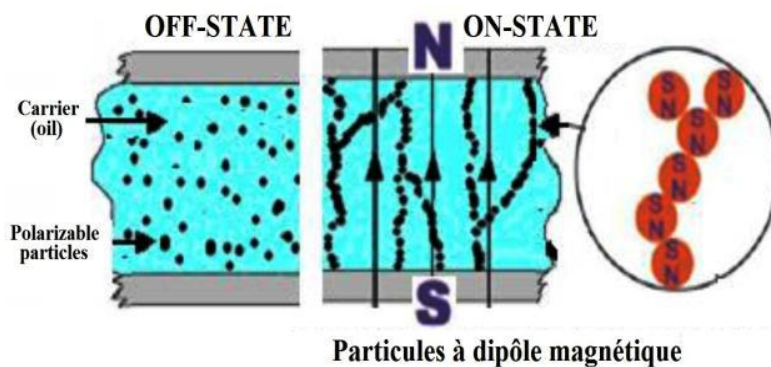
Figure 1.10 : Solidification du fluide dans l'axe du champ [5]

Le phénomène est totalement réversible, c'est-à-dire le fluide regagne sa viscosité initiale, dès l'annulation du champ électrique appliqué. Perpendiculairement au champ, l'application sur le fluide ER d'une contrainte de cisaillement génère une force de rappel comme dans le cas du frottement d'un balai, et on constate là encore l'apparition d'une viscoélasticité. Théoriquement, cette viscosité peut varier d'un facteur de  $10^5$  en moins de  $1\text{ ms}$ . Les fluides ER ont alors la possibilité de commuter entre les états, rigide et liquide, avec une vitesse très supérieure à celle obtenue à ce jour par les plus rapides valves électromécaniques employées dans les systèmes de commande.

### 1.6.3 Fluide magnéto-rhéologique, FMR

Comme dans le cas du fluide ER, lorsqu'on applique un champ magnétique d'une intensité suffisante à un fluide MR, les particules ferreuses (dipôles magnétiques) de ce dernier se rangent en fibres le long des lignes du champ et augmentent ainsi la viscosité de fluide.

Ce dernier devient ainsi un corps plastique rigide avec une contrainte de seuil d'écoulement très élevée qui peut atteindre 50 à 100 kPa pour des intensités de champ allant de 150 à 250 kA/m. Le fluide MR a la propriété de revenir plus rapidement à sa viscosité initiale que le fluide ER si l'effet du champ appliqué cesse, **figure 1.11**.

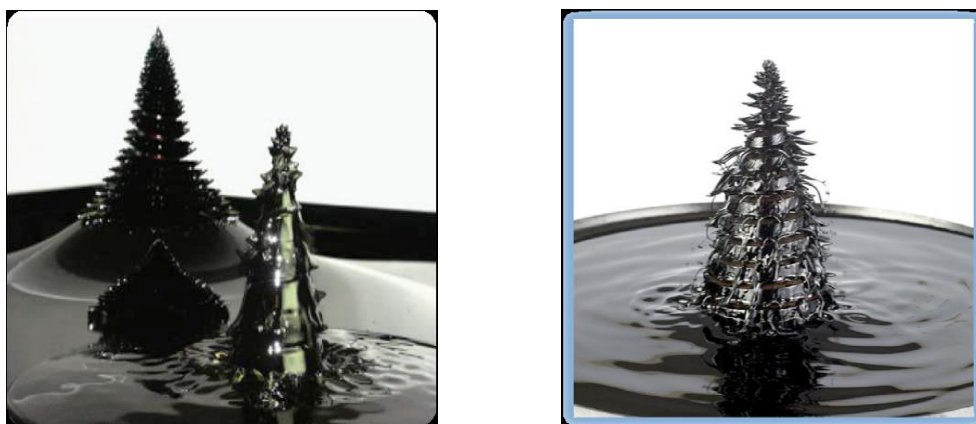


**Figure 1.11** : Fluide avec des particules à dipôle magnétique [5]

Par ailleurs, il est à souligner que le fluide MR est complètement différent des fluides dits magnétiques FM (ferrofluides) qui sont formés en général de particules ferreuses nanométriques et ne développant pas de résistance mécanique particulière sous l'action d'un champ magnétique. [5]

#### 1.6.4 Le ferrofluide

Un ferrofluide ou liquide magnétique est une suspension de particules ferromagnétiques de taille nanométrique dans un liquide porteur. [6]



**Figure 1.12** : un ferrofluide [12]

## 1.7 Types des paliers lubrifiants

### 1.7.1 Paliers hydrodynamiques

Les paliers hydrodynamiques sont fréquemment utilisés pour supporter des charges radiales et pour le guidage des rotors de dimensions importantes.

Ces paliers sont conçus pour fonctionner dans des conditions sévères (charges et fréquences de rotations élevées). Par conséquent, pour remplir leur fonction dans de parfaites conditions, les paliers hydrodynamiques doivent être soigneusement conçus. [7]

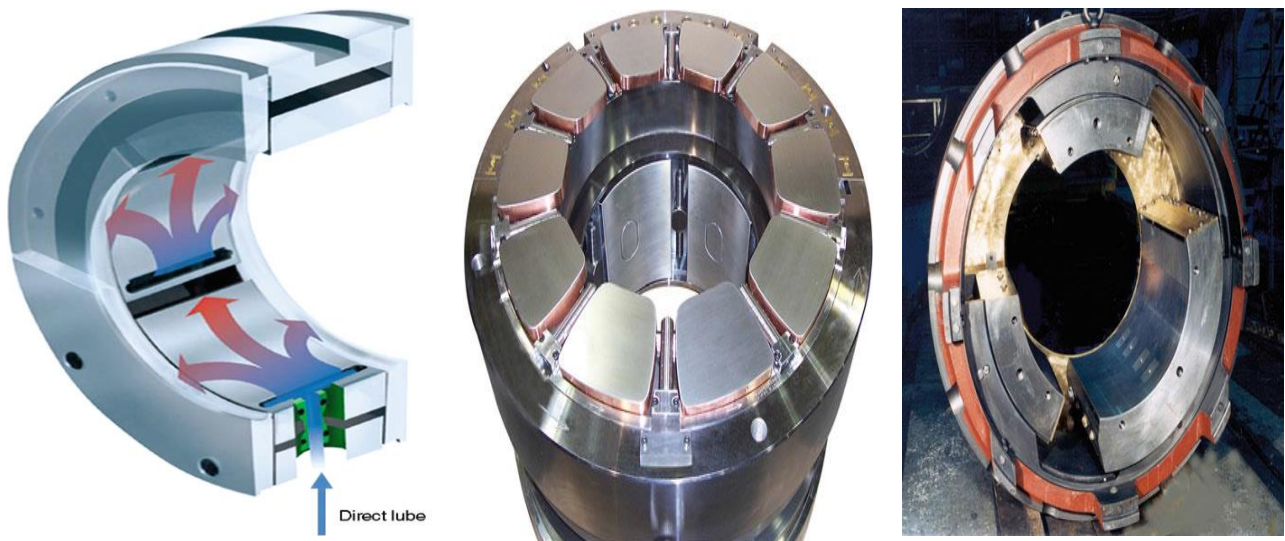


Figure 1.13 : Palier hydrodynamique

### 1.7.2 Paliers hydrostatiques

Les paliers hydrostatiques sont utilisés en conception de façon régulière dans le cas de machine ayant à supporter de lourdes charges axiales ou radiales où les vitesses de rotation sont très importantes (ex : turbines, turbopompes) ou ayant une grande raideur (ex : machine outils de grande précision tels que les aléseuses ou les rectifieuses).

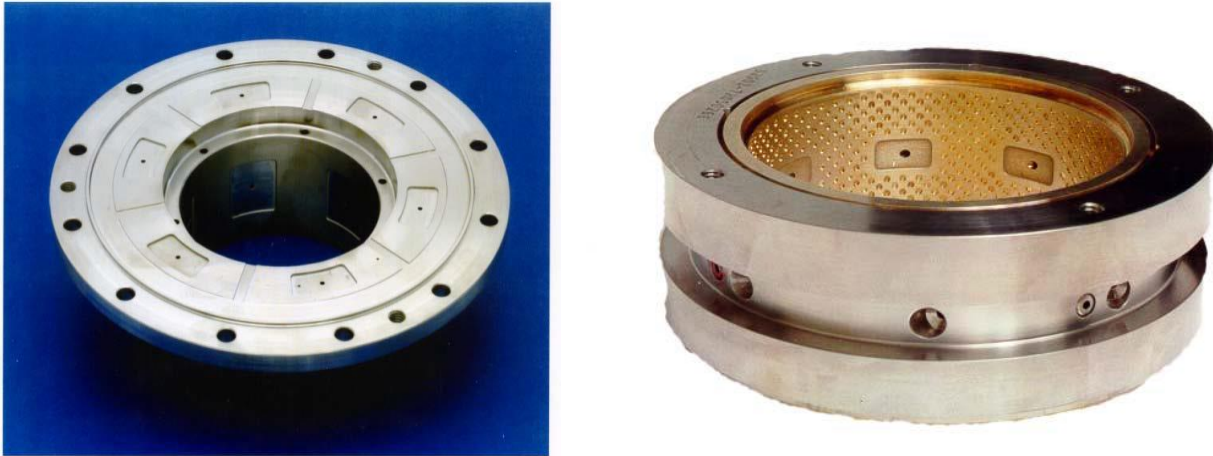


Figure 1.14 : Palier hydrostatique [13]

### ➤ Avantages et inconvénient des systèmes hydrostatique

L'inconvénient principal est le coût et l'encombrement. Cependant, dans de très nombreux cas, il est possible d'utiliser une source de pression existante pour faire fonctionner le palier ce qui réduit sensiblement le coût.

Les paliers hydrostatiques, particulièrement ceux qui fonctionnent avec des liquides, Possèdent de nombreux avantages :

- les deux surfaces sont toujours séparées par un film fluide, même lorsqu'elles sont Immobiles, ce qui théoriquement rend l'usure nulle et assure ainsi une très grande durée de vie. Le phénomène de frottement saccadé (stick-slip) au démarrage et à faible vitesse est Supprimé.
- La pression est distribuée sur une grande surface, il n'y a pas de concentration de pression et pas de fatigue des surfaces.
- Comme la portance ne résulte pas du mouvement des surfaces, l'effet des imprécisions d'usinage est très atténué surtout dans le cas des liquides. [7]

## 1.8 Méthodes numériques non linéaires

Dans le domaine de la dynamique, les systèmes mécaniques qui possèdent des parties tournantes sont souvent des structures complexes du point de vue technologique. Couramment, les outils de conception et d'analyse de ces machines sont souvent basés sur le Comportement linéaire du



système en s'appuyant principalement sur une approche modale, qui permet de découpler les équations du mouvement en les transformant en un ensemble d'oscillateurs à un degré de liberté dont les solutions sont ensuite superposées pour construire la solution finale du problème . D'autre part, diverses techniques de réduction de la dimension du système sont disponibles, comme la réduction de Guyan, Craig et Bampton et la troncature modale (Géradin, Meirovitch).

Les différents organes intervenant dans une machine tournante peuvent être classés de la façon suivante :

- les arbres, constituent les éléments principaux des machines tournantes.
- les éléments de support et positionnement (paliers hydrauliques, paliers à roulements, paliers magnétiques, etc.).
- les éléments de transmission de mouvement (engrenages, courrois, joints d'accouplement, embrayages, etc.).
- Les éléments fonctionnels (roues aubagées, broches, hélices, etc.).

Ces éléments en liaison avec le rotor sont en général de nature non-linéaire. Pour bien analyser le comportement global de la machine prenant en compte la complexité amenée par ces éléments, il est nécessaire d'utiliser des techniques classiques d'intégration directe (Bathe). Le principal désavantage de ces méthodes est le temps de calcul long. Quand les efforts subis par le système peuvent être mis sous la forme « FL + FNL », où FL définit les forces dites linéaires, FNL les forces dites non linéaires supposées décrites mathématiquement par des fonctions analytiques, il est alors préférable de faire appel à des méthodes numériques, telles que la méthode de tir (Demailly, Vrande, Padmanabhan et Singh), qui est une adaptation des méthodes d'intégration directe et permet d'éviter le régime transitoire du système. Le principe de la méthode est d'imposer aux équations du mouvement des conditions initiales qui se situent sur le régime périodique de la solution. En intégrant les équations du mouvement sur une période et en imposant la périodicité, nous pouvons expliciter la dépendance du système aux conditions de départ et les déterminer à l'aide d'un solveur d'équations non-linéaires. [8]

# Chapitre II

---

Etude dynamique d'une ligne d'arbre flexible en régime transitoire.

---

## 2.1. Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'étudier le comportement d'une ligne d'arbre flexible en régime transitoire (passage par des fréquences critiques lors de la variation des vitesses de rotation), les effets gyroscopiques sont pris en compte. Le système modélisé est représenté par la figure 2.1, il est constitué d'un rotor vertical de diamètre élémentaire multiple supporté par des butées et guidé uniquement en rotation à l'aide de deux roulements en une extrémité et un palier hydrostatique à l'autre extrémité.

Dans le but de simuler ce comportement vibratoire et de déterminer l'influence des charges due au balourd ainsi que les effets de la variation de viscosité et de la pression, une approche numérique basée sur les éléments fini a été adaptée.

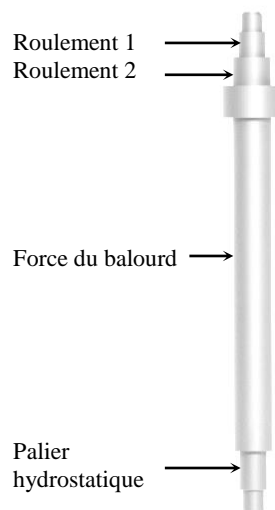


Figure 2.1 : illustration du modèle de la ligne d'arbre

## 2.2. Modélisation en élément fini

### 2.2.1. Procédure de discrétisation

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement de manière approximée des équations aux dérivées partielles. Dans notre cas celle représentant le comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible. La procédure de discrétisation consiste à découper le rotor en un ensemble d'éléments de type « poutre » raccordés par des nœuds tel qu'il est représenté par la figure 2.2.

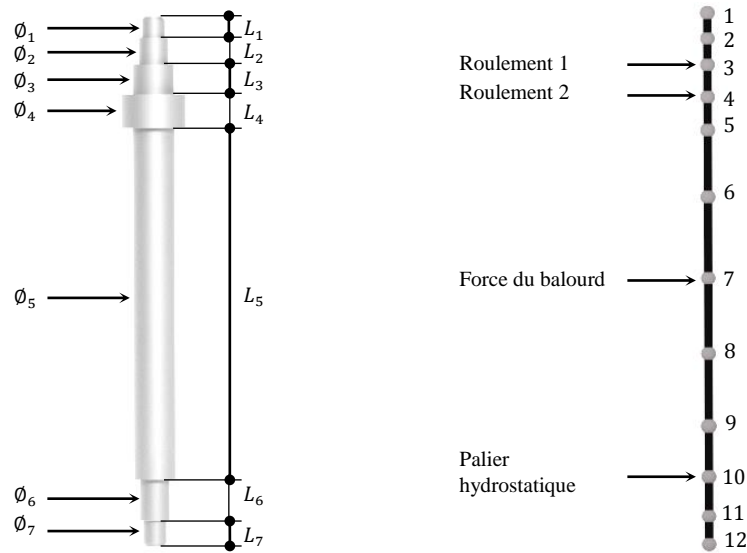


Figure 2.2: schemas du model rotor discrétisé

Diamètre (m)	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$	$\phi_5$	$\phi_6$	$\phi_7$
	0.040	0.050	0.060	0.064	0.060	0.040	0.032
Longueur (m)	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$L_7$
	0.018	0.038	0.0460	0.034	0.750	0.052	0.058

Tableau 2.1: dimensions du rotor

Le model de l'arbre est découpé en 11 éléments poutre reliés par 12 nœuds dont les dimensions de chaque élément sont indiquées dans le tableau ci-dessus. La charge du balourd est concentrée au nœud N°7, les deux roulements de guidage et le palier hydrostatique sont positionnés respectivement aux nœuds N° 3, 4 et 10.

### 2.2.2. Formulation des équations du mouvement

#### 2.2.2.1. Éléments du rotor

Les éléments de poutre dont le rotor est constitué sont dotés chacun de 8 degrés de liberté (2 translations et 2 rotations on chaque nœud de l'élément).

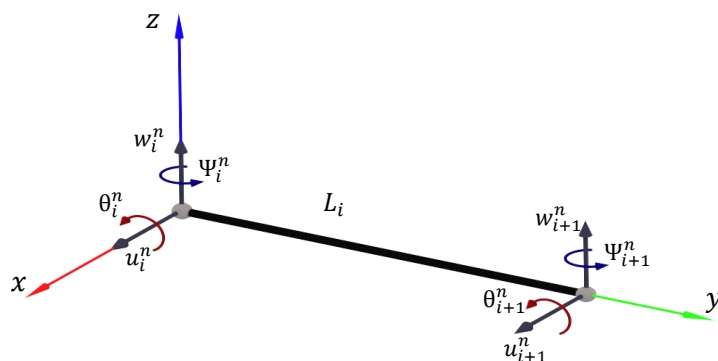


Figure 2.3 : Éléments fini type poutre

L'équation du mouvement gouvernant le système est de type [9] :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\} \quad (1)$$

Dont :

[M]: Représente la matrice de masse combinant la matrice de masse en translation avec celle en rotation :

$$\triangleright [M] = [M_t] + [M_r] \quad (2)$$

[C]: Représente la matrice d'amortissement tenant compte des amortissements supports et de l'effet gyroscopique :

$$\triangleright [C] = [C_s] + \dot{\varphi} [G] \quad (3)$$

- [C<sub>s</sub>] : Matrice d'amortissement support
- $\dot{\varphi}$  : vitesse de rotation (rad/s)
- [G] : Matrice gyroscopique.

[K]: Représente la matrice de rigidité.

$$\triangleright [K] = [K_s] + \ddot{\varphi} [G] \quad (4)$$

- [K<sub>s</sub>] : Matrice de rigidité support
- $\ddot{\varphi}$  : Accélération angulaire (rad/s<sup>2</sup>)

{δ}: Vecteur colonne représentant les degrés de liberté.

$$\triangleright \{\delta\} = [u_i \ w_i \ \theta_i \ \Psi_i \ u_{i+1} \ w_{i+1} \ \theta_{i+1} \ \Psi_{i+1}]^t$$

{F(t)}: Vecteur colonne représentant les force d'excitations.

$$\triangleright \{F(t)\} = \{F_{gr}\} + \{F_b\} + \{F_{nl}\}. \quad (5)$$

- {F<sub>gr</sub>} : force due à la gravite.
- {F<sub>b</sub>} : force due au balourd.
- {F<sub>nl</sub>} : force non linéaire.

### 2.2.2.2. Calcule des matrices élémentaires

L'expression de l'énergie cinétique d'un élément arbre de masse volumique " $\rho$ ", de longueur "L" et de section "s" est exprimée comme suit [10] :

$$\begin{aligned} T_a = & \frac{\rho s L}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^t N_1^t N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t N_2^t N_2 \delta \dot{w}] dy \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[ \delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t \frac{dN_2^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy \\ & + \rho I L \dot{\varphi}^2 - 2 \rho I \dot{\varphi} \int_0^L \delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Dont  $N_1$  et  $N_2$  représentent les fonctions de formes.

Le déplacement de l'élément en un endroit  $y$ ,  $u_i^e(y, t)$  dans le plan (oxy) peut être exprimé en relation avec le déplacement des nœuds de l'élément considéré  $u_i^n(t)$ . [10]

$$u_i^e(y, t) = N_1(y)u_i^n(t) \quad ; \quad u_i^n = [u_i \ \theta_i \ u_{i+1} \ \theta_{i+1}]^t \quad (7)$$

La matrice de forme  $N_1(y)$  peut être calculée via une interpolation polynomiale du déplacement :

$$u_i^e(y, t) = C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4 \quad (8)$$

Introduisant les conditions aux limites

$u_i^e(0, t) = u_i(t)$	$\frac{du_i^e(0, t)}{dy} = \theta_i(t)$
$u_i^e(L, t) = u_{i+1}(t)$	$\frac{du_i^e(L, t)}{dy} = \theta_{i+1}(t)$

$$\text{Alors : } [N_1(y)] = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \quad -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \quad \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (9)$$

Le calcul de  $N_2(y)$  est analogue :

$$w_i^e(y, t) = N_2(y)w_i^n(t) \quad ; \quad w_i^n = [w_i \ \Psi_i \ w_{i+1} \ \Psi_{i+1}]^t \quad (10)$$

$$[N_2(y)] = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \quad y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \quad -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (11)$$

L'expression de l'énergie cinétique deviendra alors :

$$T_a = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_3 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t M_4 \delta \dot{w} + \delta \dot{u}^t M_5 \delta \dot{w} + \rho I l \dot{\phi}^2 \quad (12)$$

Dont  $\{M_1; M_2\}, \{M_3; M_4\}$  représentent respectivement les matrices classiques de masse en translation et en rotation tandis que  $M_5$  représente l'effet gyroscopique.

Avec :

$$[M_1] = \rho s L \int_0^L N_1^t N_1 dy = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ \text{sym} & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[M_2] = \rho s L \int_0^L N_2^t N_2 dy = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ \text{sym} & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ & & 156 & 22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[M_3] = \rho I \int_0^L \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} dy = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ \text{sym} & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ & & 36 & -3L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[M_4] = \rho I \int_0^L \frac{dN_2^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} dy = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ \text{sym} & & 36 & 3L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[M_5] = -2\rho I \dot{\varphi} \int_0^L \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} dy = \frac{\rho I \dot{\varphi}}{15L} \begin{bmatrix} -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

avec :  $I$ , le moment quadratique de l'élément,  $I_i = \frac{\pi \phi_i^4}{64}$  (18)

Les matrices élémentaires  $\{[M_t^e]; [M_r^e]; [G^e]\}$  sont d'ordre 8x8, elles sont déduites respectivement de  $\{[M_1]; [M_2]\}$ ,  $\{[M_3]; [M_4]\}$  et  $[M_5]$ .

$$[M_t^e] = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ \text{sym} & & & & 156 & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & 156 & -22L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[M_r^e] = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 36 & 3L & 0 & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 \\ & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & 0 & -L^2 \\ \text{sym} & & & 36 & 0 & 0 & 0 & 3L \\ & & & & 36 & -3L & 0 & 0 \\ & & & & & 4L^2 & 0 & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[G^e] = \frac{\rho I \dot{\varphi}}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

L'énergie de déformation de l'élément est donnée par l'expression : [10]

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \delta u^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^t \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \quad (22)$$

$$U = \frac{1}{2} \delta u^t k_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t k_2 \delta w \quad (23)$$

Dont  $\{k_1; k_2\}$  représentent les matrices classiques de rigidité.

Avec :

$$[k_1] = EI \int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} dy = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{sym} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[k_2] = EI \int_0^L \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ \text{sym} & & 12 & 6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

En tenant compte de la présence du cisaillement caractérisé par la quantité  $a = \frac{12EI}{GSL^2}$  avec  $G$  est le module de cisaillement  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . la matrice élémentaire de raideur est alors : [10]

$$[K^e] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ \text{sym} & & & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & (4+a)L^2 & 0 \\ & & & & & & & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

### 2.2.2.3. Formulation matricielle des supports

Les supports de guidage sont positionnés aux niveaux des nœuds, les matrices caractérisant l'amortisseur et la rigidité de ces supports sont alors d'ordre  $4 \times 4$  ;  $\{\delta\} = [u \ \theta \ w \ \Psi]^t$ .

Il est à noter que les rotations aux niveaux de ces nœuds sont sauve négligées, cela est due au fait que la largeur des supports est extrêmement grande par rapport à l'épaisseur du film d'huile figure 2-4. Les matrices élémentaires  $\{[M_t^e]; [M_r^e]; [G^e]; [K^e]\}$  appropriées à ces nœuds sont aussi réduites.

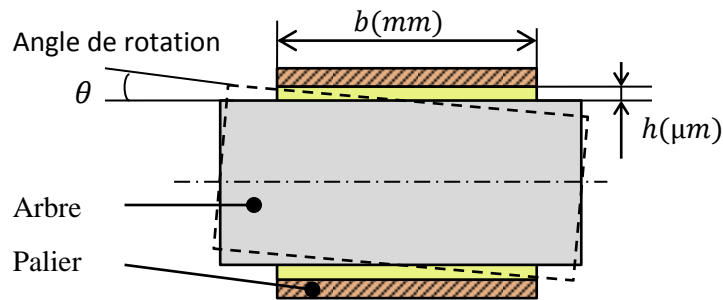


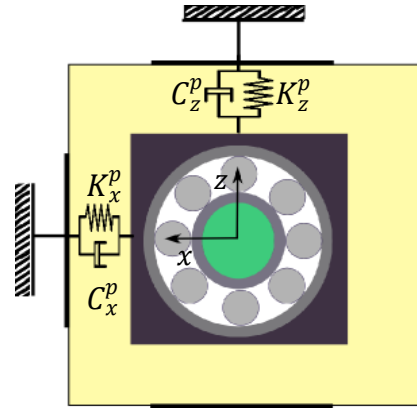
Figure 2.4 : schématisation du support



Les matrices caractérisant les supports sont alors :

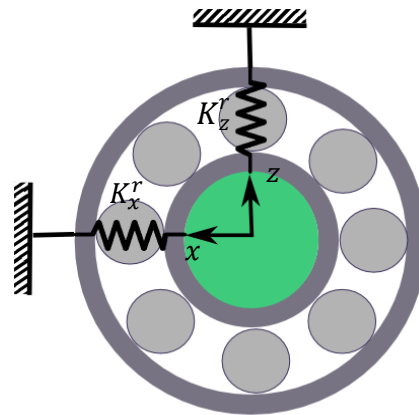
$$[C_p] = \begin{bmatrix} C_x^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_z^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$[k_p] = \begin{bmatrix} K_x^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$



**Figure 2.5:** schématisation des caractéristiques du Palier hydrostatique à quatre patins

$$[k_r^{1,2}] = \begin{bmatrix} K_x^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$



**Figure 2.6:** schématisation des caractéristiques du roulement

#### 2.2.2.4. Formulation vectoriel des forces d'excitations

La ligne d'arbre est excitée au niveau des nœuds par des forces d'ordre 4X1 ;  $[F_u \ F_\theta \ F_w \ F_\psi]^t$ , étant donné que le rotor est en position verticale, les forces dues à la gravité sont nulles et seules les charges de type balourd sont considérées.

L'énergie cinétique au niveau de balourd est exprimée par : [10]

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + 2r\dot{\varphi}(\dot{u} \cos(\varphi) - \dot{w} \sin(\varphi))) \approx m_b r \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (30)$$



### 2.2.3. Résolution du système

Le rotor est régi par un système d'équation de mouvement constituée de n équations différentielles couplées dont la résolution est faite avec la méthode de compliance.

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\} \quad (33)$$

Le vecteur force  $\{F(t)\}$  est une fonction trigonometrique dont les fonctions sinus et cosinus sont respectivement la partie imaginaire et la partie réelle de la fonction exponentielle d'argument imaginaire pur :

$$\{F(t)\} = \{A_1\}\cos(\varphi) + \{A_2\}\sin(\varphi) \quad (34)$$

$$\{F(t)\} = Fe^{i(\varphi+\alpha)} \quad (35)$$

Par conséquent les solutions du système d'équation sont de la forme suivante :

$$\{\delta\} = Xe^{i(\varphi+\alpha)} \quad (36)$$

Le système d'équation deviendra alors la combinaison de deux systèmes d'équations :

$$(-\dot{\varphi}^2[M] + i\dot{\varphi}[C] + [K])\{X\} = \{F\} \quad (37)$$

Avec :

$\{X\}$  et  $\{F\}$  Représentent respectivement les vecteurs des amplitudes complexes des vibrations et des forces d'excitations.

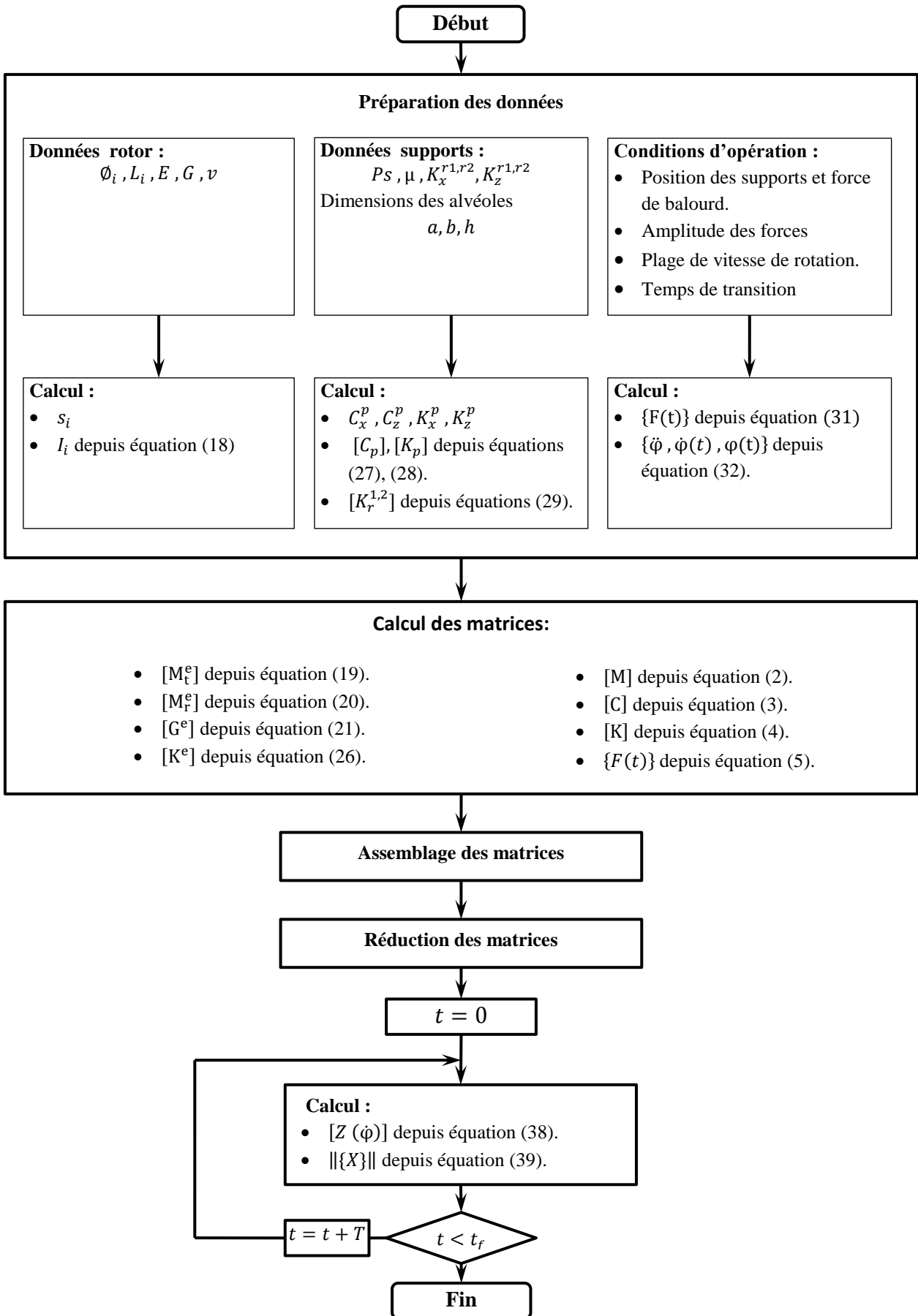
Après avoir formé la matrice de rigidité apparente  $[Z(\dot{\varphi})]$  ou  $\dot{\varphi}$  est la pulsation d'excitation (rad/s):

$$[Z(\dot{\varphi})] = -\dot{\varphi}^2[M] + i\dot{\varphi}[C] + [K] \quad (38)$$

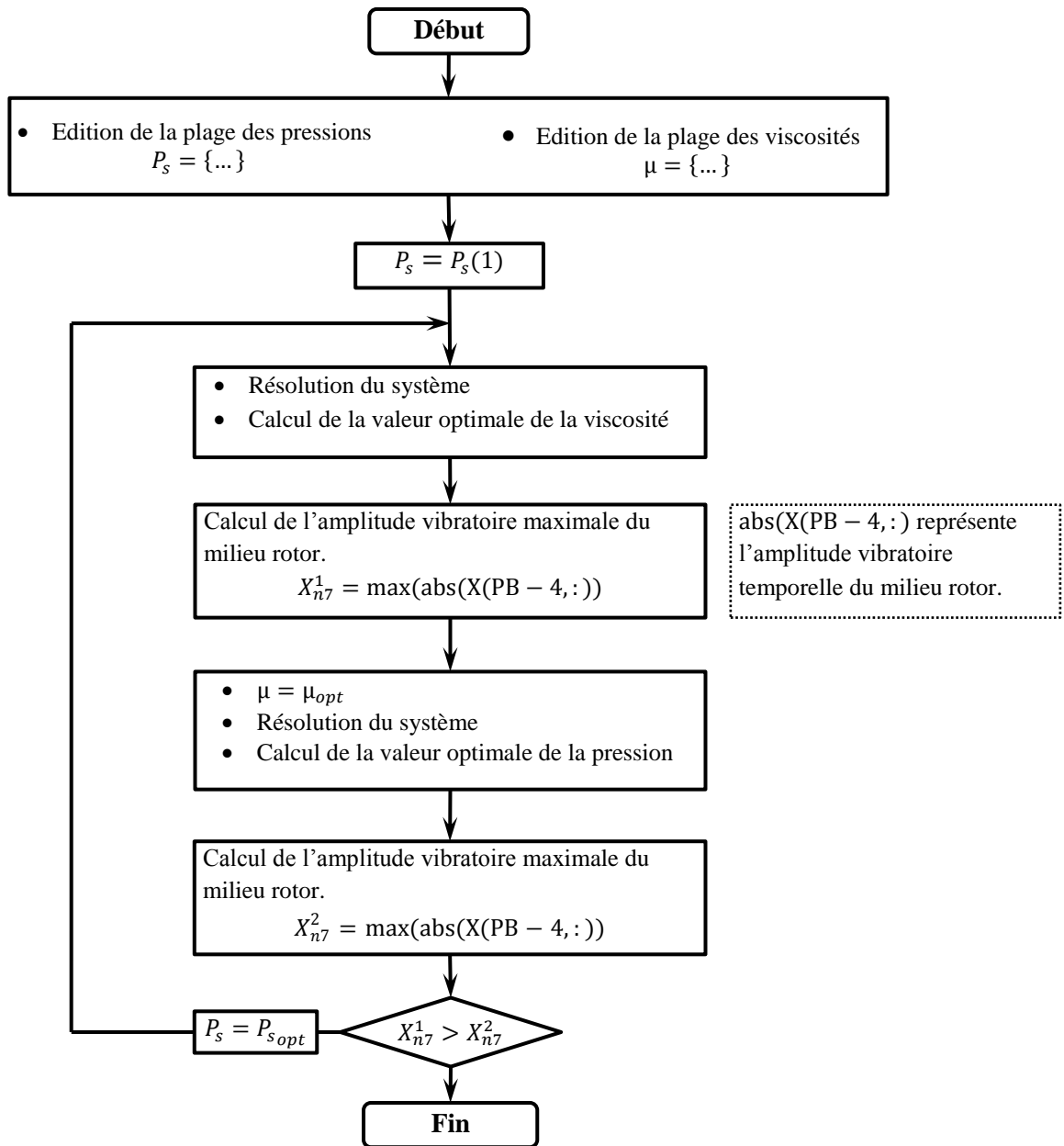
Les amplitudes des repenses vibratoires peuvent alors être déterminé comme suit :

$$\|\{X\}\| = \|[Z(\dot{\varphi})]^{-1}\{F\}\| \quad (39)$$

2.2.3.1. Organigramme de résolution



## 2.2.3.2. Organigramme de réduction des amplitudes vibratoires



### Conclusion

La méthode des éléments finis, très utilisée pour le calcul des structures complexes, elle est également efficace en dynamique des rotors duquel l'objet de ce chapitre est de l'utiliser pour étudier le comportement vibratoire d'une ligne d'arbre flexible en régime transitoire.

En se basant sur les propriétés de l'élément poutre, les matrices élémentaires ainsi que les matrices globales de masse, de rigidité et d'amortissement définissant le model rotor ont été déterminées. Le système d'équation régissant ce rotor étant constitué de « n » équations différentielles couplées, des algorithmes de résolution basés sur la méthode de compliance ont été développés.

# Chapitre III

---

## Résultats et interprétations

---

### 3.1. Introduction :

Ce chapitre a pour objectif de présenter les interprétations des résultats de la modélisation d'une ligne d'arbre flexible tenant compte des effets gyroscopiques en régime transitoire, le rotor est en position verticale guider en rotation avec un ensemble de roulements et de palier hydrostatatique. Ce rotor est sollicité en son milieu par une force de type balourd d'amplitude  $80.10^{-6} \text{ kg.m}$  et supposé varier linéairement sa vitesse de rotation de 8000 à 85000 rpm pendant un intervalle de 20 s.

L'étude du comportement dynamique de la ligne d'arbre a été faite selon une méthode linéaire basée sur les éléments finis dont un programme MATLAB a été élaboré afin de déterminer l'effet du balourd sur les amplitudes vibratoires et les forces transmises ainsi que l'influence de la variation de la viscosité et de la pression sur ces amplitudes.

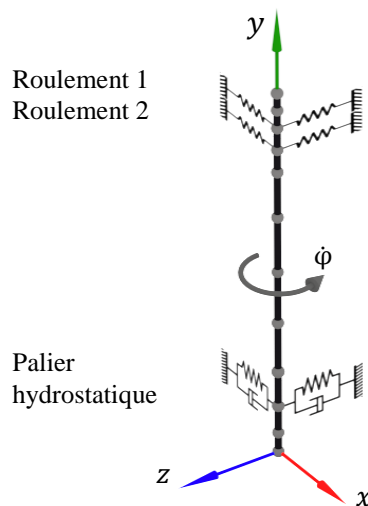


Figure 3.1: description du model élément fini du rotor

### 3.2. Caractéristiques du rotor :

L'étude du comportement vibratoire de la ligne d'arbre a été effectuée sur un modèle dont les caractéristiques sont indiquées dans le tableau suivant :

ELEMENTS	PROPRIETES	VALEURS (SI)
Arbre	dimensions géométriques	voir tableau (2.1)
	Module de Young	$E = 200.10^9$
	Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
	Module de cisaillement	$G = E/(1 + \nu) * 2 = 3.0769.10^{11}$
Roulement 1 et 2	raideur	$K_x^r = K_z^r = 4.10^8$
Palier hydrostatatique	Viscosité dynamique	$\mu = \{0.5, 0.045\}$

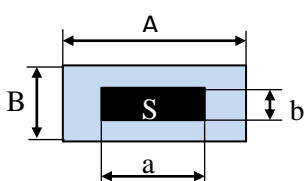
	Pression d'opération	$P_s = 1.10^5, 19.10^5$	
	Raideur $K_x^p = K_z^p$	$P_s = 1.10^5$	$K_x^p = 2.0510.10^6$
		$P_s = 19.10^5$	$K_x^p = 3.8969.10^6$
	Amortisseur $C_x^p = C_z^p$	$\mu = 0.5$	$C_x^p = 2.0059.10^5$
		$\mu = 0.045$	$C_x^p = 1.8053.10^4$
	Dimensions géométriques	A	0.09
		B	0.015
		A	0.045
		B	0.0075
		H	$0.07.10^{-3}$
S		0.0013	
Type des sollicitations	balourd	$\ F\  = 80.10^{-6}$	

Tableau 3.2 : caractéristiques du système modélisé

### 3.3. Fréquences propres et modes propres :

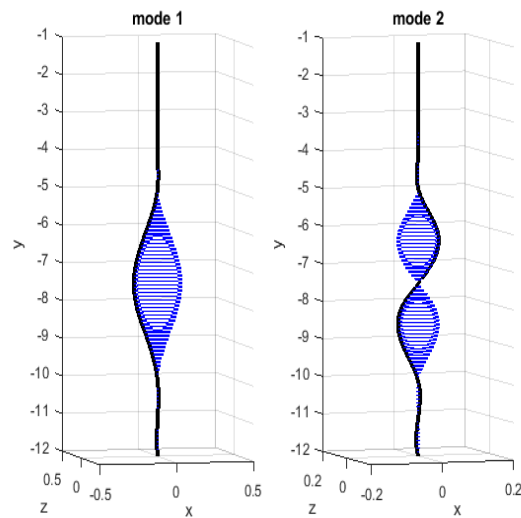
Dans le but de mieux comprendre le phénomène vibratoire et de prévoir la forme de la déformation de la ligne d'arbre un code MATLAB a été développé afin de déterminer les différents vecteurs et valeurs propres. Il est à noter que pendant cette analyse le rotor est modélisé sans les paliers, Les caractéristiques de raideur et d'amortissement de ces derniers ne sont pas pris en compte. Le tableau suivant présente les différentes vitesses critiques obtenues.

vitesses critiques (rpm)					
1	26623,9482198537	13	517284,826655175	25	2069658,11024995
2	26623,9482198547	14	517284,826655176	26	2069658,11024995
3	72482,5376634827	15	665884,341489667	27	2214634,18895996
4	72482,5376634834	16	665884,341489674	28	2214634,18895996
5	140488,417374245	17	677233,075716753	29	2373216,16203305
6	140488,417374247	18	677233,075716754	30	2373216,16203305
7	161490,657372339	19	705179,638531787	31	3806681,14145879
8	161490,657372345	20	705179,638531787	32	3806681,14145879
9	229008,090203986	21	927858,399399946	33	5658596,76791261
10	229008,090203986	22	927858,399399946	34	5658596,76791262
11	373465,740492644	23	1168479,77457696	35	9420618,41707994
12	373465,740492644	24	1168479,77457696	36	9420618,41707995

Tableau 3.3 : différentes vitesses critiques du rotor

Les résultats indiquent que à la plage de vitesse de rotation allons de 8000 à 85000 rpm le rotor devra passer à travers deux vitesse critiques 26623,948 et 72482,537 rpm , par conséquence les repenses vibratoire et les forces transmises au bâti à travers les paliers vont être amplifiées. La figure 3.2 illustre les deux modes appropriés à ces deux fréquences de résonance.

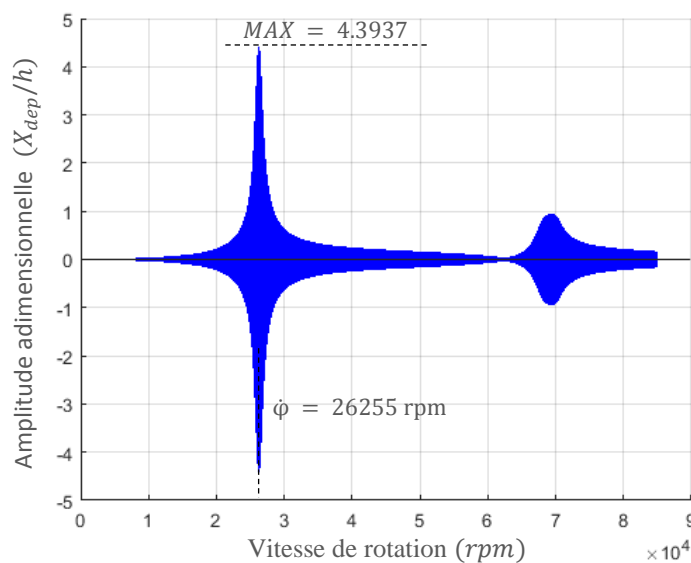




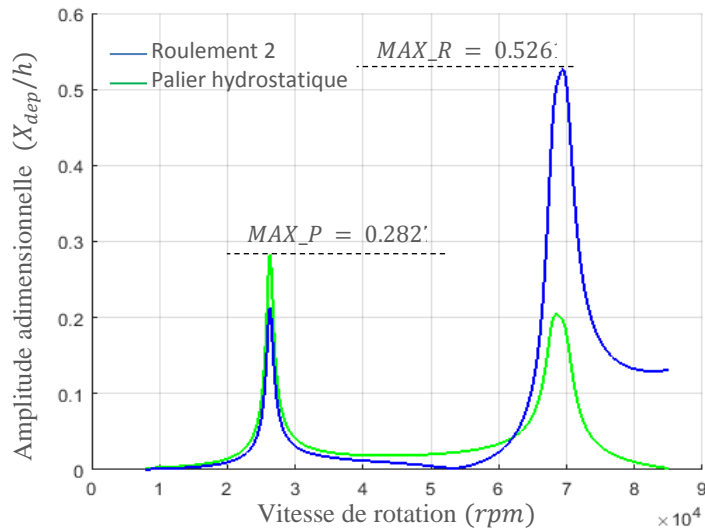
**Figure 3.2:** orbites de la déformé appropriées aux deux vitesses critiques

### 3.4. Réponses vibratoires due aux forces du balourd :

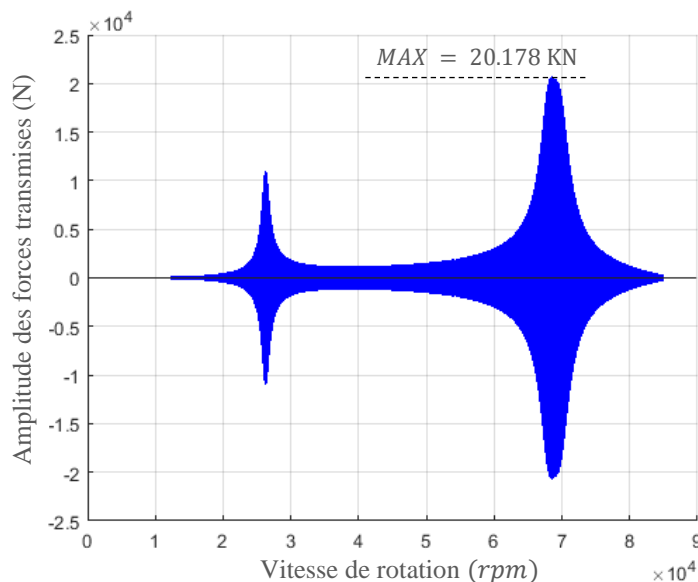
Les figures (3, 4,5) représentent les Amplitudes adimensionnelles des repenses vibratoires suivant l'axe ( $O_x$ ) au niveau du milieu arbre, roulements et palier hydrostatique ainsi que les forces transmises au bâti à travers le palier hydrostatique en fonction de la vitesse de rotation. Il est à noter que ces repenses vibratoires sont obtenues pour une pression de 1 bar, une viscosité de 0.5 Pa.s et un balourd d'amplitude de  $80 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}$ .



**Figure 3.3:** Amplitude adimensionnelle des déplacements vibratoires au milieu du rotor



**Figure 3.4:** Amplitudes adimensionnelles des déplacements vibratoires aux niveaux de roulement 2 et du palier hydrostatique.



**Figure 3.5:** Amplitudes des forces transmises via le palier hydrostatique

Les résultats montrent que les amplitudes des déplacements vibratoires (Figure 3.3) et les forces transmises au bâti à travers le palier hydrostatique (Figure 3.5) sont amplifiées l'ors du passage par les deux vitesses critiques dont le déplacement maximal est constaté au milieu de l'arbre  $X_{n7} = 307 \mu m$  relevé pour une vitesse de rotation  $\dot{\varphi} = 26 \text{ Krpm}$ . La **figure 3.4** indique que les déplacements vibratoires maximaux au niveau du palier hydrostatique sont inférieure par rapport à ceux des roulements ( $0.2827 < 0.5261 \mu m$ ).

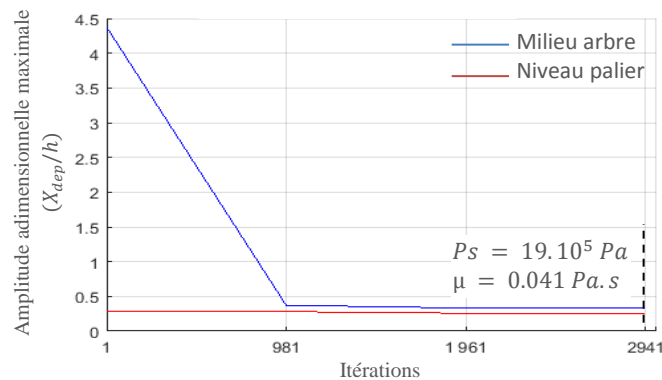
Les résultats obtenus sont similaires à celles calculées par M. BOUZIDANE Ahmed, publiées dans l'article « non-linear behaviour of a flexible shaft controlled by electro-rheological hydrostatic journal bearing (2007) ».

### 3.5. Résultats de l'optimisation

La **Figure 3.3** montre que les forces dues aux balourd peuvent conduire à des niveaux vibratoires élevés lors du passage par les vitesses critiques causant l'instabilité dynamique du rotor, dans le but d'abaisser ces niveaux, les amplitudes maximales des repenses vibratoires au milieu du rotor ont été calculé pour des différentes valeurs de pression et de viscosité.

$$P_s = [0.5 ; 40] \text{ bar} \quad ; \quad \mu = [0.001 ; 0.9] \text{ Pa.s}$$

La **figure 3.6** illustre les résultats obtenus.

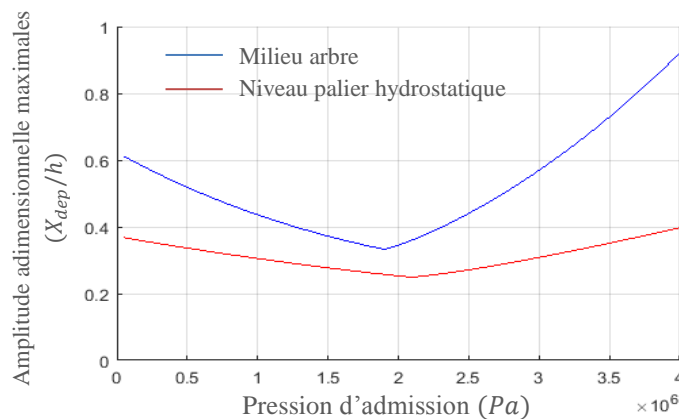


**Figure 3.6:** Amplitudes vibratoires maximales en fonction des itérations du calcul

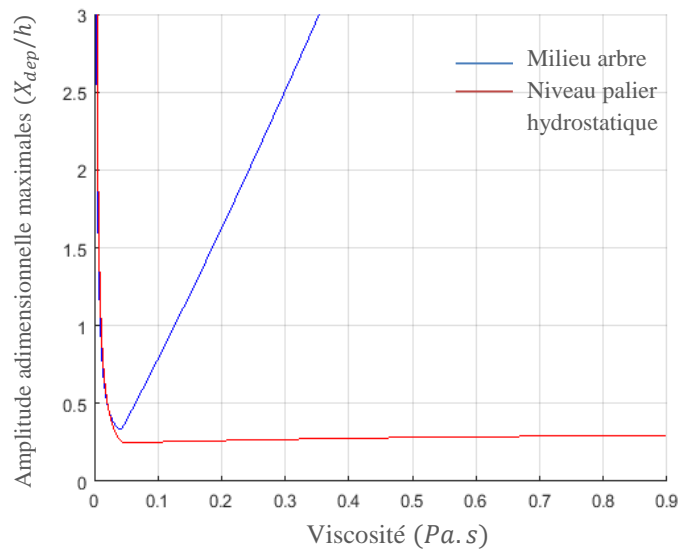
Les résultats montrent que les déplacements maximaux au milieu de l'arbre peuvent être considérablement diminués pour une pression de  $19.10^5$  Pa et une viscosité de  $0.041$  Pa.s .

#### 3.5.1. Effet de la variation de la pression et de la viscosité:

Les figures (7, 8) illustrent respectivement l'effet de la variation de la pression d'admission et de la viscosité sur les amplitudes vibratoires maximales au milieu de l'arbre et au niveau du palier hydrostatique.



**Figure 3.7:** effet de la variation de la pression sur les amplitudes vibratoires maximales



**Figure 3.8:** effet de la variation de la viscosité sur les amplitudes vibratoires maximales

Les courbes montrent que la variation de la pression et de la viscosité a une grande influence sur les amplitudes des réponses vibratoires, cela est expliqué par le fait que la pression dans l'alvéole et la viscosité du fluide lubrifiant sont respectivement en fonction linéaire avec la rigidité et l'amortissement du palier hydrostatique:

$$\text{Si : } \begin{cases} P_s < P_{\text{optimale}} \\ \mu < \mu_{\text{optimale}} \end{cases}$$

Une augmentation de la pression et de la viscosité s'accompagne avec une diminution des amplitudes vibratoires.

$$\begin{cases} P_s > P_{\text{optimale}} \\ \mu > \mu_{\text{optimale}} \end{cases}$$

Une augmentation de la pression et de la viscosité engendre une augmentation des amplitudes vibratoires.

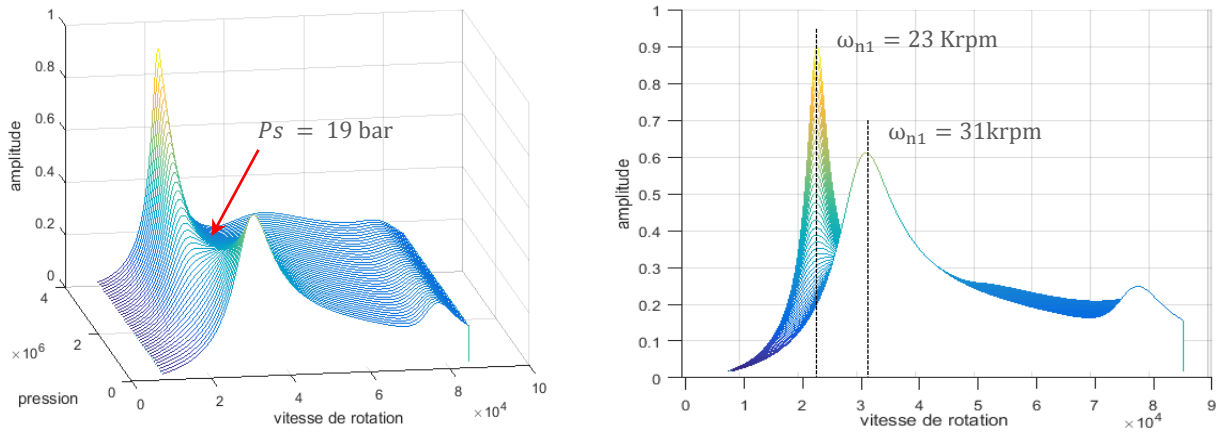
La **figure 3.8** montre qu'à cette plage la viscosité a peu d'influence sur les amplitudes vibratoires au niveau du palier hydrostatique.

Il est à noter aussi que contrairement à la viscosité, la variation de la pression dans l'alvéole influence également sur les valeurs de la fréquence de résonance ( $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ). Dans le but de mieux visualiser les effets de cette variation, la **figure 3.9** illustre un diagramme de WATERFALL présentant l'évolution des amplitudes adimensionnelles des déplacements vibratoires au milieu de la ligne d'arbre en fonction de la vitesse de rotation et pour différentes valeurs de pression.

$$P_s = [0.5 ; 40] \text{ bar}$$

Le diagramme montre que :

- ✓ la pression a plus d'effet lors du passage par la première vitesse critique.
- ✓ La meilleure amplitude des déplacements vibratoires est bien pour une pression de 19 bar .
- ✓ La plage de vitesse critique pour la première fréquence de résonance varie de 23000 à 31000 rpm.

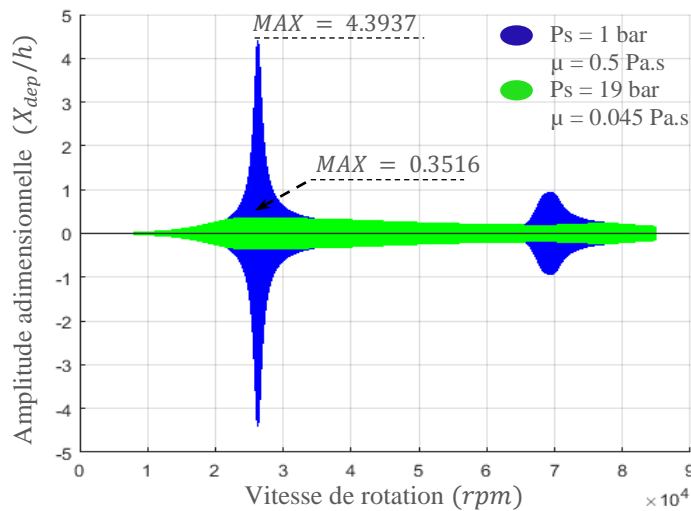


**Figure 3.9:** diagramme WATERFALL des amplitudes vibratoires adimensionnelles en fonction de la vitesse de rotation et de la pression dans l'alvéole

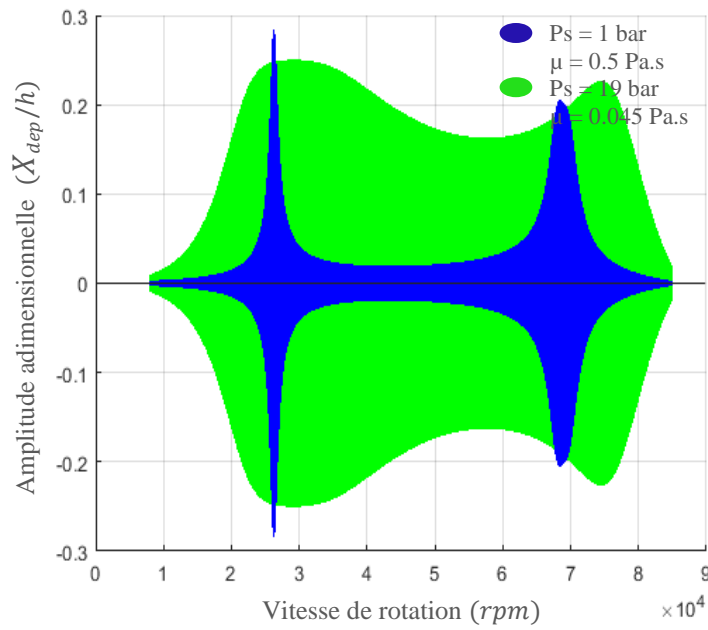
### 3.5.2. Comparaison des Réponses vibratoires :

Les différentes amplitudes adimensionnelles des reponses vibratoires au milieu de l'arbre, roulement N°2 et palier hydrostatique ainsi que les force transmissent au bâtis via ce palier en fonction de la variation de la vitesse de rotation ont été illustrées respectivement par Les figures (10, 11, 12,13).

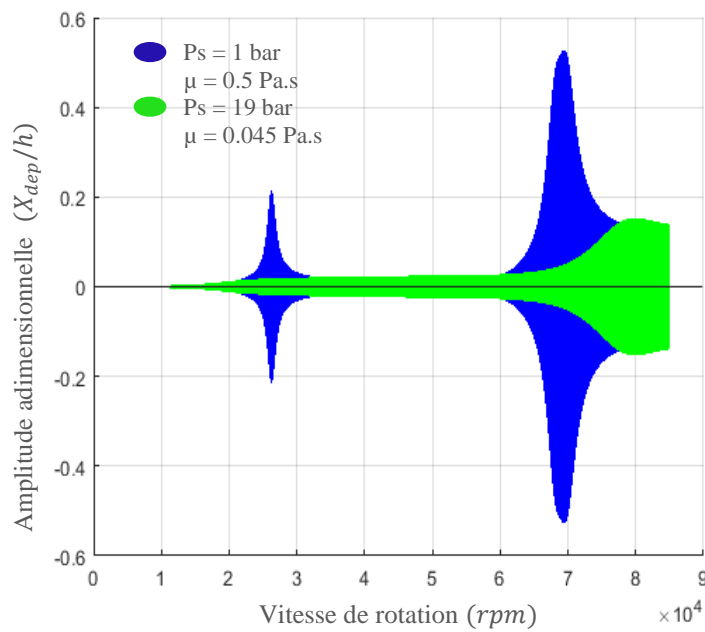
Il est à noter que les valeurs de la pression et de la viscosité choisis sont  $P_s = 19 \text{ bar}$  et  $\mu = 0.045 \text{ Pa.s}$



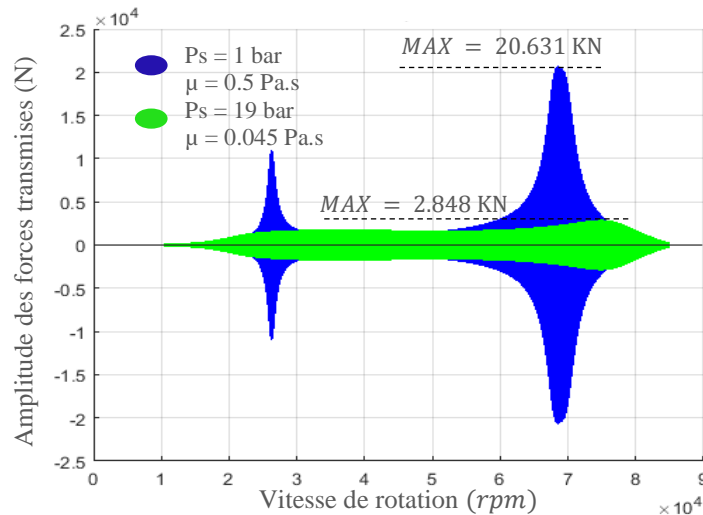
**Figure 3.10:** comparaison des amplitudes adimensionnelles des déplacements vibratoires au milieu du rotor



**Figure 3.11:** comparaison des amplitudes adimensionnelles des déplacements vibratoires au niveau du palier hydrostatique



**Figure 3.12:** comparaison des amplitudes adimensionnelles des déplacements vibratoires au niveau du roulement 2



**Figure 3.13:** comparaison des amplitudes des forces transmises à travers le palier hydrostatique

Les résultats montrent que :

- Les amplitudes des déplacements vibratoires au milieu de l'arbre tel qu'elles sont représentées par la **Figure 3.10** ont été considérablement réduites par rapport à la première configuration (diminution de 91%).
- Les déplacements vibratoires au niveau du palier hydrostatique ont été augmentés mais les amplitudes maximales proches des vitesses critiques ont la tendance à diminuer (Figure 3.11).
- La **Figure 3.12** montre que les variations de la pression et de la viscosité dans le palier hydrostatique ont une influence positive sur les réponses vibratoires au niveau des roulements, cela est expliqué par la diminution des déplacements au milieu du rotor.
- Les forces transmises à travers le palier hydrostatique ont été réduites de 86% (Figure 3.13).

## Conclusion

Le modèle numérique généré précédemment a permis de développer une série de programmes de calcul écrits en MATLAB, les fréquences de résonance obtenus suite à une analyse modale, correspond précisément aux vitesses critiques appropriées aux amplitudes importantes des déplacements vibratoires, résultants de la réponse temporelle calculée par la méthode de campilience.

Les résultats ont montré aussi que les forces dues au balourd peuvent conduire à des niveaux vibratoires élevés perturbant le fonctionnement normal du rotor, de ce fait une approche de contrôle vibratoire semi-actif basée sur la variation de la pression et de la viscosité du fluide lubrifiant a été adaptée, par conséquent les amplitudes des déplacements vibratoires du système ont la tendance de diminuer, en particulier celle au milieu du rotor qui sont largement réduites.

## Conclusion générale

L'objet de ce présent travail était d'étudier le comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible en régime transitoire, le système modélisé est constitué d'un rotor vertical guidé uniquement en rotation à l'aide de deux roulements et un palier hydrostatique.

En se basant sur la méthode des éléments finis, un modèle numérique représentant le rotor a été généré. Les matrices élémentaires ainsi que les matrices globales de masse, de rigidité et d'amortissement ont été déterminées, notant que l'effet gyroscopique a été pris en considération. Afin de résoudre le système d'équation gouvernant ce rotor, un programme MATLAB basé sur la méthode de compliance a été développé. Les résultats obtenus ont montré que les forces dues au balourd peuvent conduire à des niveaux vibratoires élevés, de ce fait une approche de contrôle vibratoire semi-actif basée sur la variation de la pression et de la viscosité du fluide lubrifiant a été abordée.

Les résultats obtenus montrent que :

- les fréquences de résonances obtenues suite à une analyse modale indépendante, correspondent précisément aux vitesses critiques appropriées aux amplitudes importantes des déplacements vibratoires calculés par la méthode de compliance.
- Pour le régime transitoire où la vitesse de rotation augmente, les amplitudes temporelles des forces due au balourd sont strictement croissantes, cela est due au fait que ces dernières sont en faction de la vitesse de rotation.
- Les allures représentant les amplitudes des déplacements vibratoires maximum au milieu de l'arbre en fonction de la variation de la pression dans les alvéoles et la viscosité du lubrifiant sont de forme parabolique, cela indique qu'il existe des valeurs uniques de pression et de viscosité pour lesquelles les amplitudes vibratoires à la résonance sont minimales.
- Pour les valeurs optimales de pression et de viscosité les déplacements vibratoires au niveau du palier hydrostatique ont été augmenté mais les amplitudes maximales proches des vitesses critiques ont la tendance à diminués.
- Les forces transmises à travers le palier hydrostatique ont été considérablement réduites pour ces valeurs optimales de pression et de viscosité.



## **Bibliographies**

- [1] SAIMI, A. (2013). Comportement vibratoire des roues aubagées (Doctoral dissertation).
- [2] Deng, F. (2012). Contrôle modal autoadaptatif de vibrations de structures évolutives (Doctoral dissertation, INSA de Lyon).
- [3] Nicolas, D. (1995). Butées et paliers hydrostatiques. Ed. Techniques Ingénieur.
- [4] Abdelkader, S. A. H. L. I. (2011). ETUDE EXPERIMENTALE D'UN PALIER LUBRIFIE MESALIGNÉ (Doctoral dissertation, Université Hassiba Ben Bouali de Chlef).
- [5] Louam, N. (2013). Les fluides rhéologiques intelligents et leurs applications énergétiques et technico-industrielles. *Revue des Energies Renouvelables*, 16(4), 641-656.
- [6] STEPHANE LAMPERT. ferrofluide un liquide attirant .
- [7] Zerrouni, N. (2009). Etude de l'interaction fluide visqueux-structure d'un palier fluide soumis à des sollicitations temporelles (Doctoral dissertation).
- [8] Villa, C. V. S. (2005). Dynamique non linéaire des rotors: Applications numériques et expérimentales à un rotor flexible (Doctoral dissertation).
- [9] Bouzidane, A., & Thomas, M. (2007). Non-linear behaviour of a flexible shaft controlled by electro-rheological hydrostatic journal bearing.
- [10] LALANNE, M., & FERRARIS, G. (1996). Dynamique des rotors en flexion. Ed. Techniques Ingénieur.
- [12] LALLET GUILLAUME ET VERDIER PAUL. introduction aux ferrofluides & suspensions magnetorheologiques.
- [13] DR. LUIS SAN ANDRÉS. hydrostatic journal bearings .

## **Webographies**

- [11(a)] <http://www.kelvin.it/fran/img/galleriafoto/galleria-equilibraturarotorebig.htm> (consulté le 19/06/2016)
- [11(b)] <https://www.turbomachinerymag.com/get-your-bearings-straight/> (consulté le 19/06/2016)

## **Résumé**

La dynamique des rotors est l'étude du comportement dynamique et de stabilité des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans la sécurité et l'amélioration des performances des machines qui sont employées dans diverses applications industrielles: machines-outils, centrales électriques, aéronautique ...etc. Deux phénomènes en dynamique des rotors sont particulièrement dangereux et peuvent conduire à des niveaux vibratoires inacceptables. Il s'agit des vitesses de rotation critiques et les régimes transitoires, dont les conséquences sont souvent catastrophiques.

Cette étude s'intéresse au comportement dynamique des rotors flexible comportant des organes tels que les roulements et les paliers, dont le fonctionnement est décrit par des lois non linéaires. Le premier objectif de ces travaux est de mettre en œuvre des méthodes de calcul non linéaire afin de résoudre les équations du mouvement de tels systèmes tournants. Dans notre cas le rotor est en position verticale, guidé en rotation avec un ensemble de roulements et de palier hydrostatique. Ce rotor est sollicité en son milieu par une force de type balourd. Le second objectif consiste à réduire les amplitudes vibratoires lors de passage par des vitesses critiques à l'aide de la variation de la pression et de la viscosité du fluide injecté aux niveaux du palier hydrostatique.

## **Summary**

Rotor dynamics is the study of the dynamics and stability of rotating machines. It plays an important role in the security and improving performance of the machines which are used in various industrial applications: machine tools, power stations, aeronautics... etc. Two phenomena in rotor dynamics are particularly dangerous and can lead to unacceptable vibratory levels. These critical speeds and the transitional arrangements, whose consequences are often disastrous.

This study focuses on the dynamic behavior of flexible rotors, comprising members such as rolling bearings and journal bearings whose operation is described by non-linear laws. The first objective of this research is to implement nonlinear analysis methods to solve the equations of motion of such rotating systems. In our case the rotor is vertically guided in rotation with a whole of rolling bearings and hydrostatic journal bearing. This rotor is biased in the middle by an unbalanced type of force. The second objective is to reduce the vibration amplitudes during passage through critical speeds with the change in pressure and the viscosity of the injected fluid levels of the hydrostatic journal bearing.

## ملخص

ديناميك الدوار هو دراسة حركات واستقرار الآلات الدوارة. انها تلعب دورا هاما في تحسين أمن وأداء هذه الانظمة. تطبيقات الآلات الدوارة متنوعة للغاية في مجال الصناعة: أدوات الآلات، محطات، توربينات الطائرات ... الخ ان في ديناميك الدوار ظاهرتان خطيرتان للغاية يمكن أن تؤدي إلى مستويات اهتزاز غير مقبولة. انها السرعات الحرجة والاطوار الانتقالية، اذ إن العواقب تكون في كثير من الأحيان كارثية.

هذه الدراسة تركز على السلوك الديناميكي للدورات المرنة التي تضم أعضاء مثل المتدحرجات و المحامل التي تتميز بالقوانين الغير خطية. الهدف الأول من هذا البحث هو تطبيق طرق التحليل الغير الخطية في حل معادلات الحركة لمثل هذه الأنظمة الدوارة. في حالتنا يتم توجيه العمود الدوار عموديا بواسطة مجموعة من المتدحرجات اضافة ال محمل هيدروستاتيكي. الهدف الثاني هو الحد من سعة الاهتزاز أثناء مروره من خلال السرعات الحرجة بواسطة تغيير في ضغط ولزوجة السوائل المحقونة في المحمل هيدروستاتيكي.