

## CHIPTRE II

## SOLUTION ANALYTIQUE

L'objet de ce chapitre est de développer la solution analytique du problème de la lubrification du palier lisse (sans alvéoles) dans le cadre de l'approximation du palier infiniment court. L'équation de Reynolds qui régit le champ de pression dans le palier est obtenu par simplification des équations de Navier-Stokes.

La solution analytique servira comme repère pour la validation du modèle numérique.

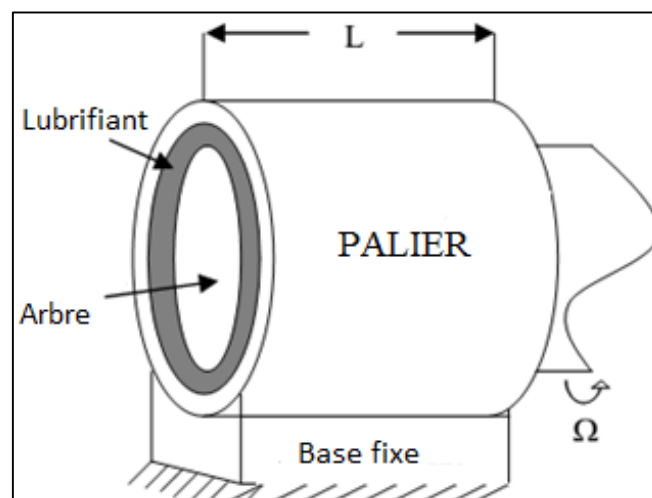
### II.1 Dérivation de l'équation Reynolds

L'intérêt de cette section est la dérivation d'une équation qui régit le champ de pression dans le fluide.

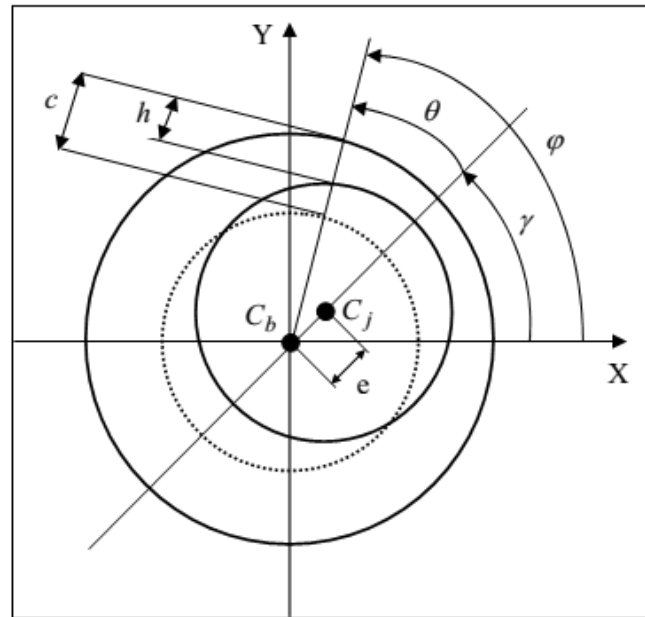
On considère un rotor composé d'un arbre, de deux paliers et d'un lubrifiant. La *figure II.1* montre le schéma du système étudié. L'arbre considéré est plein, il est animé de deux mouvements une rotation avec une vitesse angulaire  $\Omega$  autour de son axe géométrique et une autre rotation autour de l'axe géométrique du coussinet (mouvement de précession) avec vitesse angulaire  $\dot{\gamma}$ .

La *figure II.2* illustre la section transversale du palier étudié. Le centre du palier  $C_b$  est confondu avec l'origine du référentiel, et situé au milieu de sa largeur  $L$ .

On suppose que l'axe du rotor reste parallèle à l'axe du coussinet pendant les deux rotations. En d'autres termes, tous les moments découlant de l'inclinaison sont négligés.



**Figure II.1.** Arbre plein supporté par un palier [13]



**Figure II.2.** Présentation schématique de la géométrie du système étudié [13]

L'arbre est considéré non-chargé lorsque  $C_j$  et  $C_b$  coïncident. La distance radiale entre la surface d'arbre et celle du coussinet quand l'arbre est non chargé est  $C$ . La position de l'arbre est définie par l'excentricité  $e$  et l'angle  $\gamma$ .

Pour un arbre excentrique statique l'épaisseur du film de liquide est donnée par [13].

$$h(\varphi) = c - e \cos(\varphi - \gamma) \quad (\text{II. 1})$$

Pour un arbre en déplacement elle est donnée par:

$$h(\varphi, t) = c - e(t) \cos(\varphi - \gamma(t)) \quad (\text{II. 2})$$

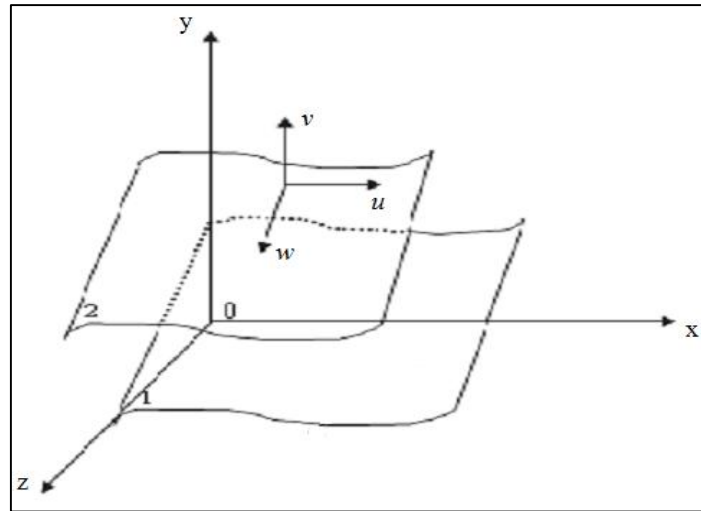
Les hypothèses simplificatrices suivantes sont faites pour la dérivation de l'équation qui définit<sup>2</sup> le champ de pression dans le fluide:

- La courbure du film fluide est négligeable.
- Le lubrifiant est sans masse et incompressible.
- Le lubrifiant est newtonien et sa viscosité est constante dans l'ensemble du fluide à film.
- L'écoulement est laminaire.
- La pression du lubrifiant est constante dans la direction radiale.
- L'épaisseur de film fluide est faible par rapport au rayon du tourillon.

Les hypothèses de la mécanique des films minces citées dans le paragraphe précédent permettent de simplifier les équations de Navier-Stokes et d'obtenir une équation aux dérivées partielles du second ordre en terme pression.

Nous utilisons l'étude de l'écoulement de fluide entre deux surfaces. En utilisant les coordonnées cartésiennes en négligeant les forces de volume, les équations de Navier-Stokes peuvent être énoncés comme;

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (\text{II. 3})$$



**Figure II.3** Système d'axe en coordonnées cartésiennes

Avec;

$\rho$  : La densité du fluide,

$\eta$ : La viscosité cinématique,

$p$ : La pression,

$(u, v, w,)$  les composantes de la vitesse de fluide dans les directions  $(x, y, z,)$ .

Le modèle de champ d'écoulement est complété par l'équation de continuité fluide incompressible.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 4})$$

Les coordonnées spatiales sont adimensionnelles

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{c}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R} \quad (\text{II. 5})$$

Les composantes de la vitesse sont aussi adimensionnelles

$$\bar{u} = \frac{u}{R\Omega}, \quad \bar{v} = \left(\frac{R}{c}\right) \frac{v}{R\Omega}, \quad \bar{w} = \frac{w}{R\Omega} \quad (\text{II. 6})$$

En utilisant les variables adimensionnelles :

$$\bar{P} = Re \left( \frac{C}{R} \right) \frac{P}{\rho(R\Omega)^2}, Re = \frac{cR\Omega}{\eta}, \bar{t} = \Omega t \quad (\text{II. 7})$$

on obtient

$$\begin{cases} Re \left( \frac{C}{R} \right) \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \left( \frac{c}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) \\ \left( \frac{c}{R} \right)^2 \left[ \frac{c^2 \Omega}{\eta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + Re \frac{c}{R} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} - \left( \frac{c}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right) \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \\ Re \left( \frac{c}{R} \right) \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \left( \frac{c}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right) \end{cases} \quad (\text{II. 8})$$

Négligeant les termes de second ordre  $(c/R)$ , dans les équations ci-dessus simplifient;

$$\begin{cases} Re \left( \frac{c}{R} \right) \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \\ Re \left( \frac{c}{R} \right) \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \end{cases} \quad (\text{II. 9})$$

Par conséquent, en raison du faible rapport  $(c/R)$ , le gradient de pression à travers le film est tout à fait négligeable

Dans l'analyse des paliers hydrodynamiques, les termes temporels et d'accélération sur la gauche de Equation (II. 9) sont négligés pour  $Re(c/R)$  est inférieur à un. Par conséquent, les équations de gouvernance dimensions deviennent

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \end{cases} \quad (\text{II. 10})$$

$$\begin{cases} u = 0, w = 0 \text{ à } y = 0 \\ u = U, w = 0 \text{ à } y = h \end{cases} \quad (\text{II. 11})$$

Intégration des équations. (II. 10) par rapport à  $y$  et en appliquant les conditions aux limites ci-dessus, on obtient

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \frac{U}{h} y \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy) \end{cases} \quad (\text{II. 12})$$

Nous notons que  $u$  est égale à la somme de l'écoulement circonferentielle de gradient de pression  $\partial p/\partial x$  et le débit en raison des conditions aux limites sans glissement. Notez en outre que les gradients de pression  $\partial p/\partial x$  et  $\partial p/\partial z$  sont indépendants de  $y$  Remplacement de équation. (II. 12) dans l'équation de continuité(II. 4).

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \frac{U}{h} y \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy) \right] \quad (\text{II. 13})$$

L'intervalle d'intégration par rapport à  $y$ , est  $y=0$ ,  $y = h$  respectivement.

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} = -\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 + hy) + \frac{U}{h} y \right] dy - \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 + hy) \right] dy \quad (\text{II. 14})$$

Dans l'équation ci-dessus, nous considérons que  $v = \partial h/\partial t$  à la surface de l'arbre. Par L'application de la loi de Leibniz ce que nous donne.

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} [f(y, x)] dy = \int_0^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(y, x) dy - f(y, x) dy \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{II. 15})$$

Pour la première intégrale de l'équation. (II. 14), on obtient

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \frac{U}{h} y \right] dy - U \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy) \right] dy \quad (\text{II. 16})$$

On note que  $\mu$ ,  $\partial p/\partial x$  et,  $\partial p/\partial z$  sont indépendants de  $y$ , les intégrations indiquées peuvent être effectuées pour obtenir l'écoulement laminaire ; on obtient l'équation de Reynolds pour un fluide incompressible isovisqueux :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial y}{\partial x} + 12 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{II. 17})$$

C'est l'équation de Reynolds (II. 3)

## II.2 Résolution analytique de l'équation de Reynolds

L'équation de Reynolds dérivée dans la section précédente est généralement résolue sur ordinateur à l'aide des méthodes numériques comme la méthode des différences finies ou des éléments finies.

Néanmoins, il existe deux approximations de l'équation (II.17) qui la rendent analytiquement résoluble[14], qui sont:

- l'approximation du palier infiniment court
- et l'approximation du palier infiniment long

Pour les paliers infiniment courts (dans la direction axiale), la variation de la pression dans la direction circonférentielle est négligé.

Pour les paliers infiniment longs, la variation de la pression dans la direction axiale est négligée.

Dans ce travail, nous adoptons l'approximation su palier infiniment court pour la résolution de l'équation de Reynolds(II. 17).

Par conséquent, nous éliminons le premier terme sur la gauche de l'équation (II. 17) c'est à dire  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ,

L'équation (II. 17) devient

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial y}{\partial x} + 12 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{II. 18})$$

Pour le problème traité il convient mieu d'utiliser les coordonnées cylindriques.

En considerant  $x = R\varphi$ ,  $h(\varphi, t)$  et l'equatin (II.2) on peut écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{R} e(t) \sin(\varphi - \gamma(t)) \quad (\text{II. 19})$$

On simplifie la notation:  $e = e(t)$  et  $\gamma = \gamma(t)$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -e \frac{\partial \gamma}{\partial t} \sin(\varphi - \gamma) - \frac{\partial e}{\partial t} \cos(\varphi - \gamma)$$

On remplace l'équation (II. 5) dans (II. 4) avec  $\theta = \varphi - \gamma$  on obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{6\mu}{h^3} [( \Omega - 2\dot{\gamma} ) \sin \theta - 2\dot{e} \cos \theta] \quad (\text{II. 20})$$

Où la dérivée par rapport au temps est indiquée par le point. Ici, nous tenons à souligner que  $\dot{e}$  et  $\dot{\gamma}$  correspondent respectivement aux vitesses radiales et tangentielles de l'arbre.

En integrant l'équation (II. 20) deux fois on obtient l'expression de la pression fonction des coordonnées spatiales  $\theta, z$  et temporelle  $t$ :

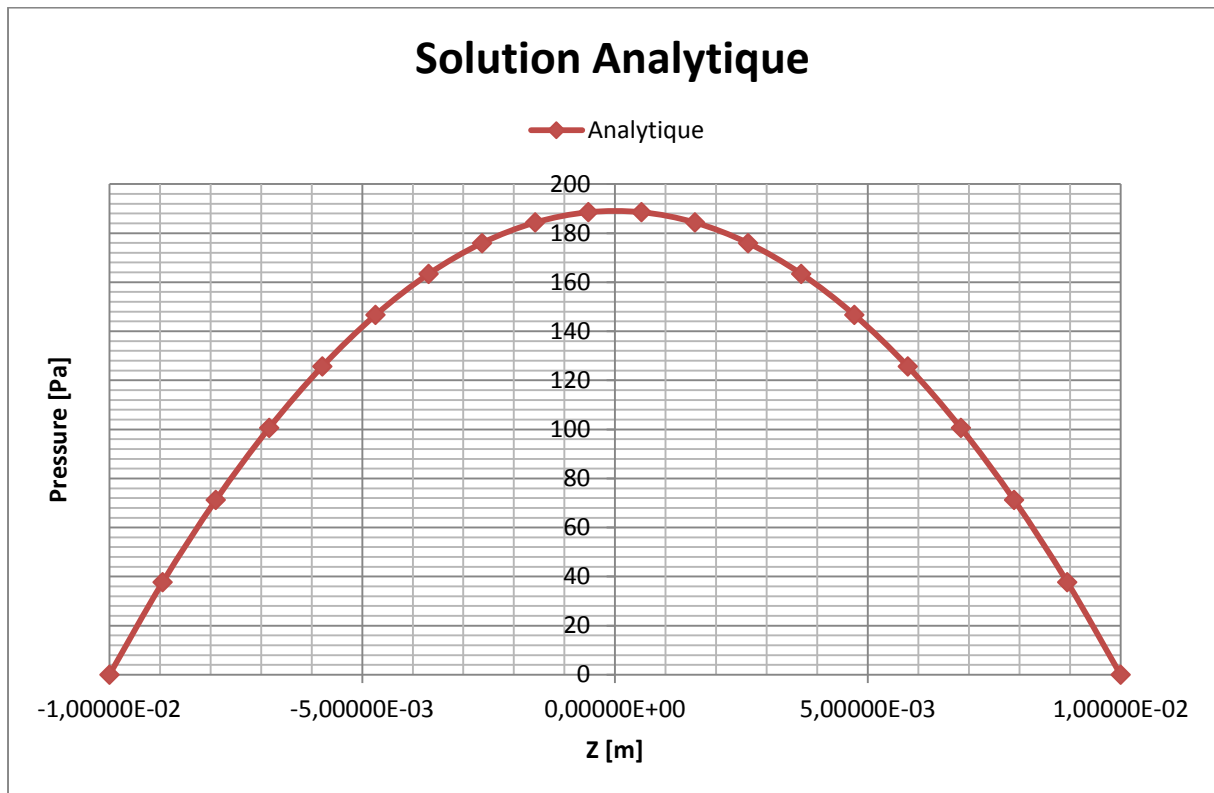
$$p(\theta, z, t) = \frac{3\mu}{h^3} [e(\Omega - 2\dot{\gamma}) \sin \theta - 2\dot{e} \cos \theta] z^2 + \tilde{C} z + \tilde{D} \quad (\text{II. 21})$$

Où  $\tilde{C}$  et  $\tilde{D}$  sont les constantes d'intégration. Elles sont déterminées en appliquant les conditions aux limites  $p=0$  à  $z= \pm L/2$  :

$$p(\theta, z, t) = \frac{3\mu}{h^3} \left( z^2 - \frac{L^2}{4} \right) [e(\Omega - 2\dot{\gamma}) \sin \theta - 2\dot{\epsilon} \cos \theta] \quad (\text{II.22})$$

Le tracé de l'expression de la pression à un instant donné est une parabole ayant l'axe des  $y$  comme axe de symétrie:

Les données utilisées pour tracer la courbe de la figure ci-dessous sont données



**Figure II.4** Distribution de la pression dans la direction axiale pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$