

## 2.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons faire l'étude du comportement vibratoire d'une ligne d'arbre verticale supportée par des paliers hydrostatiques soumise à des excitations de type balourd. Les caractéristiques des différents éléments qui constituent le rotor sont présentées : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un arbre, énergie cinétique d'un disque, travail des forces extérieure dues aux paliers, énergie cinétique d'un balourd. Les équations du mouvement sont obtenues par l'application des équations de Lagrange. Et enfin en utilisant la méthode de compliance pour la résolution.

## 2.2. Caractéristiques des éléments du rotor

Ce paragraphe expose les éléments utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation [12]. La démarche utilisée est inspirée de celle développée dans les éléments de base d'un rotor sont : disque, arbre et palier. Le balourd qui ne peut pas être complètement évité doit aussi être pris en compte. Les expressions de l'énergie cinétique sont nécessaires pour caractériser disque, arbre et balourd. L'énergie de déformation (potentielle) est nécessaire pour caractériser l'arbre. Le travail virtuel est calculé pour les forces dues aux paliers. Les équations générales du mouvement du rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

- l'énergie cinétique  $T$ , l'énergie de déformation  $U$  et le travail virtuel des forces extérieures  $\delta W$  sont calculés pour tous les éléments du système ;
- une méthode numérique est choisie : la méthode de compliance.
- les équations de Lagrange sont appliquées sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.1)$$

Où ( $1 \leq i \leq N$ ) le nombre de degrés de liberté,  $q_i$  sont les coordonnées généralisées indépendantes,  $Q_i$  sont les forces généralisées et où (°) désigne une dérivée par rapport au temps.

2.3. Disque

Le disque est supposé rigide et donc caractérisé par son énergie cinétique. Soient  $R_0(X, Y, Z)$  un repère fixe et  $R(x, y, z)$  un repère tournant lié au disque (figure 1.1). Le système de coordonnées  $x, y$  et  $z$  est relié au système de coordonnées  $X, Y$  et  $Z$  par l'intermédiaire des angles  $\theta_x, \theta_y$ , et  $\theta_z$ . Pour déterminer la position du disque, on tourne initialement d'un angle  $\theta_z$  autour de l'axe  $Z$ , puis d'un angle  $q_x$  autour du nouvel axe  $x$ , noté  $x_1$ , enfin d'un angle  $q_y$  autour de l'axe de rotation propre du disque  $y$ .

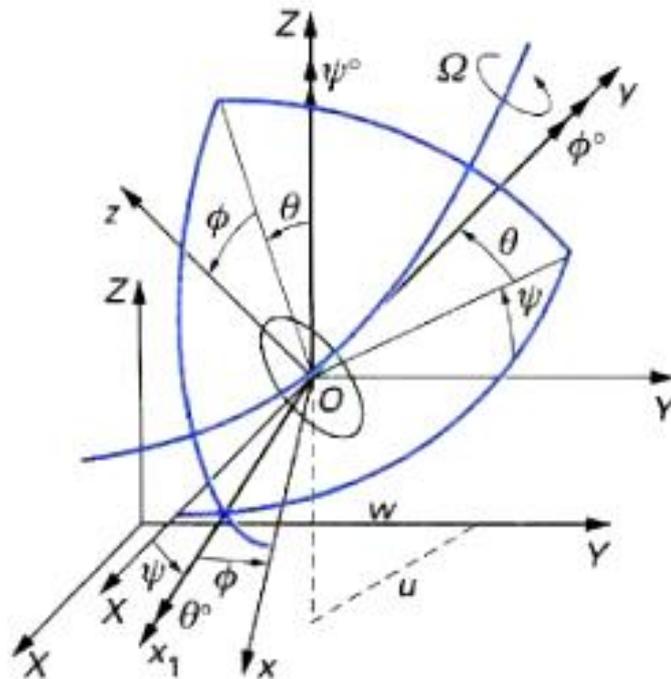


Figure 2.1 : Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible [10]

La vectrice rotation instantanée traduisant la position du repère  $R(x, y, z)$  s'écrit :

$$\omega_{R/R_0}^R = \theta_z^{\circ} \vec{Z} + \theta_x^{\circ} \vec{x}_1 + \theta_y^{\circ} \vec{y} \tag{2.2}$$

Où  $\vec{Z}$ ,  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}$  sont les vecteurs unitaires des axes  $\vec{OZ}$ ,  $\vec{Ox}_1$  et  $Oy$ .

L'énergie cinétique du disque correspondant à son mouvement autour du centre de masse  $O$  est calculée en utilisant le repère  $R$ . Dans ce repère, le vecteur rotation instantanée est :

$$\omega_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_z^\circ \cos \theta_x \sin \theta_y + \theta_x^\circ \cos \theta_y \\ \theta_y^\circ + \theta_z^\circ \sin \theta_x \\ -\theta_z^\circ \cos \theta_x \cos \theta_y + \theta_x^\circ \sin \theta_y \end{bmatrix}_R \quad (2.3)$$

$\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  étant les composantes du vecteur de rotation instantanée suivant x, y et z. Soient u et w les coordonnées suivant X, Z de O (centre du disque) dans  $R_0$ , la coordonnée suivant Y est constante. Par ailleurs, la masse du disque est  $M_d$  et son tenseur d'inertie en O, comme xyz sont les directions principales d'inertie, a comme expression :

$$I/O = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix}_R \quad (2.4)$$

$I_{dx}$ ,  $I_{dy}$  et  $I_{dz}$  sont les moments d'inertie du disque suivant x, y et z.

L'expression générale de l'énergie cinétique du disque s'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad (2.5)$$

Et peut-être simplifiée car le disque est symétrique  $I_{dx}=I_{dz}$ , les angles  $\theta_x$  et  $\theta_y$  petits et la vitesse angulaire constante ( $\dot{\theta}_y=\Omega$ ), L'équation (1.5) devient alors :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) + \frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2 \quad (2.6)$$

Où le terme  $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$ , qui est constant, n'a pas d'influence sur les équations du mouvement et représente l'énergie cinétique du disque tournant à la vitesse  $\omega$ , dans le cas où tous les autres déplacements sont nuls. Le dernier terme,  $I_{dy} \Omega \dot{\theta}_x \theta_x$  représente l'effet gyroscopique, (Coriolis).

## 2.4. Arbre

L'arbre est assimilé à une poutre de section circulaire et caractérisé par ses énergies cinétique et de déformation (potentielle).

### 2.4.1. L'énergie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque en considérant une section d'arbre de section S, de masse volumique  $\rho$ . l'expression de l'énergie cinétique est :

$$T_a = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I_{dx}}{2} \int_0^L (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) dy + \rho I_{dy} L \Omega^2 + 2 \rho I_{dy} \Omega \int_0^L \dot{\theta}_x \theta_x dy \quad (2.7)$$

2.4.2. L'énergie potentielle

L'énergie potentielle à pour expression :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left( I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \tag{2.8}$$

2.5. Palier

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement sont supposées connues. Le travail virtuel  $\delta W$  des forces extérieures agissant sur l'arbre se met sous la forme (voir figure 2.3) :

$$\delta W_p = -K_{xx}u\delta_u - K_{xz}u\delta_w - K_{zz}w\delta_w - K_{zx}w\delta_u - C_{xx}\dot{u}\delta_u - C_{xz}\dot{w}\delta_u - C_{zz}\dot{w}\delta_w - C_{zx}\dot{u}\delta_w$$

$$\delta W_p = F_u\delta_u + F_w\delta_w \tag{2.9}$$

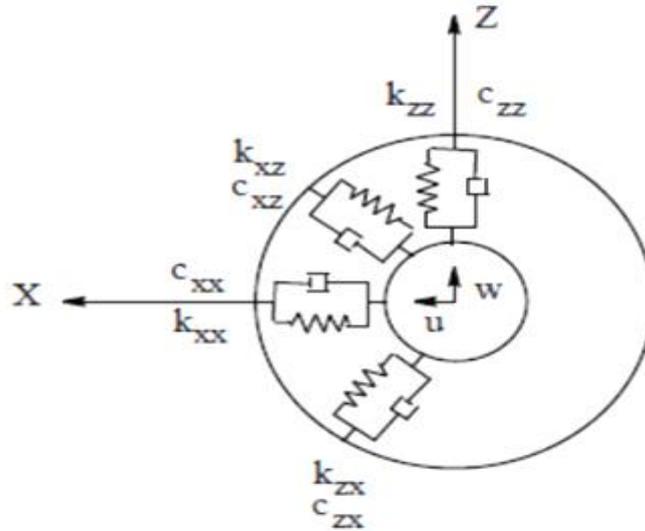


Figure 2.2 : Amortissement et raideur d'un palier [11]

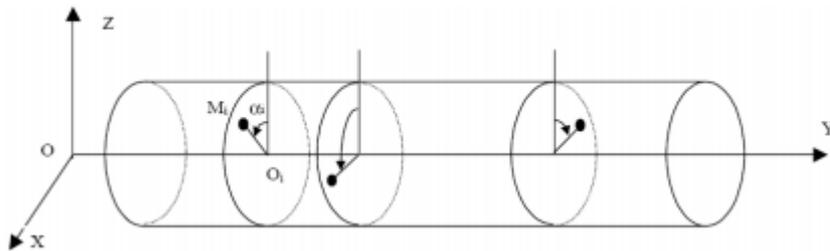
$F_u$  et  $F_w$  sont les composantes de la force généralisée et s'expriment En utilisant l'équation (2.9) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xz} \\ K_{zx} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

## 2.6. Balourd

Le balourd est un terme de mécanique classique caractérisant une masse non parfaitement répartie sur un volume de révolution entraînant un déséquilibre. L'axe d'inertie n'est plus confondu avec l'axe de rotation. Les déséquilibres (balourds) proviennent en général de défauts d'usinage, d'assemblage des rotors ou de montage. En fonctionnement, les rotors peuvent alors aussi se déformer sous l'effet d'échauffements dissymétriques.

Il existe plusieurs types de balourd : balourd statique, balourd de couple et balourd dynamique.



**Figure 2.3** : Modélisation de la répartition du balourd sur le rotor

$$\begin{cases} W_x = Me_b \dot{\theta}^2 \cos(\theta) + Me_b \ddot{\theta} \sin(\theta) \\ W_y = Me_b \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - Me_b \ddot{\theta} \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.11)$$

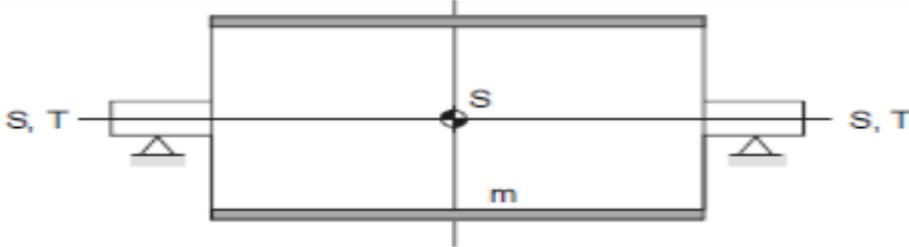
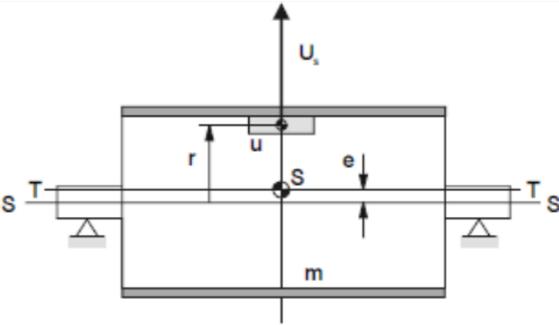
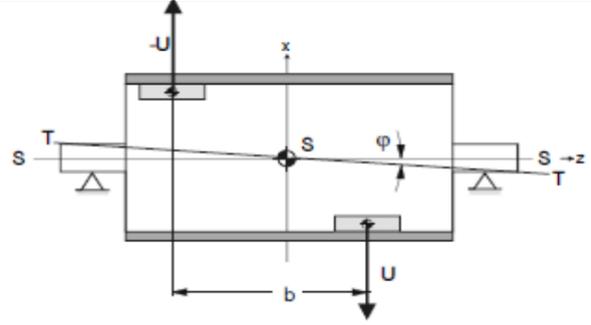
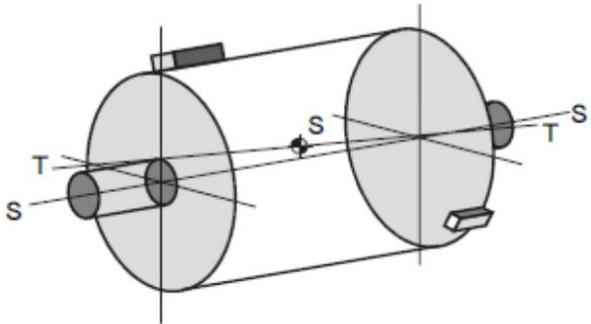
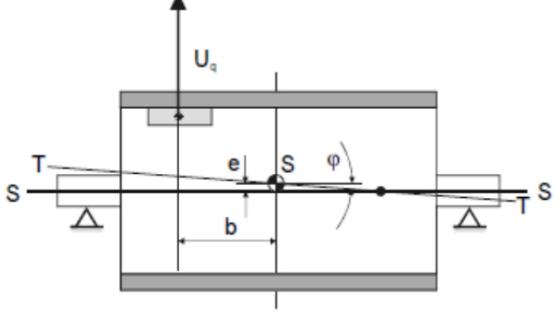
	
<p>Pour un rotor parfaitement équilibré, l'axe d'inertie <b>T-T</b> correspond à l'axe d'arbre <b>S-S</b></p>	
	
<p>Un balourd statique entraîne un déplacement de l'axe d'inertie qui se retrouve parallèle à l'axe de l'arbre à une distance égale à l'excentricité du centre de gravité <b>e</b></p>	<p>Un moment de balourd – représenté par un couple de balourds (<math>U, -U</math>) à une distance du plan <math>b</math> – fait tourner l'axe d'inertie d'un angle <math>\varphi</math> à partir de l'axe de l'arbre ; le centre de gravité reste sur l'axe de l'arbre.</p>
	
<p>Pour un balourd dynamique, l'axe d'inertie et l'axe de l'arbre ne se coupe pas (cas général)</p>	<p>Un balourd quasi statique à la distance <math>b</math> du centre de gravité déplace ce dernier de la distance <math>e</math> et fait tourner l'axe d'inertie de l'angle <math>\varphi</math> par rapport à l'axe de l'arbre. Il existe toujours un point d'intersection avec l'axe de l'arbre.</p>

Tableau 2.1 : Représentation d'un balourd [13]

2.7. Présentation du système

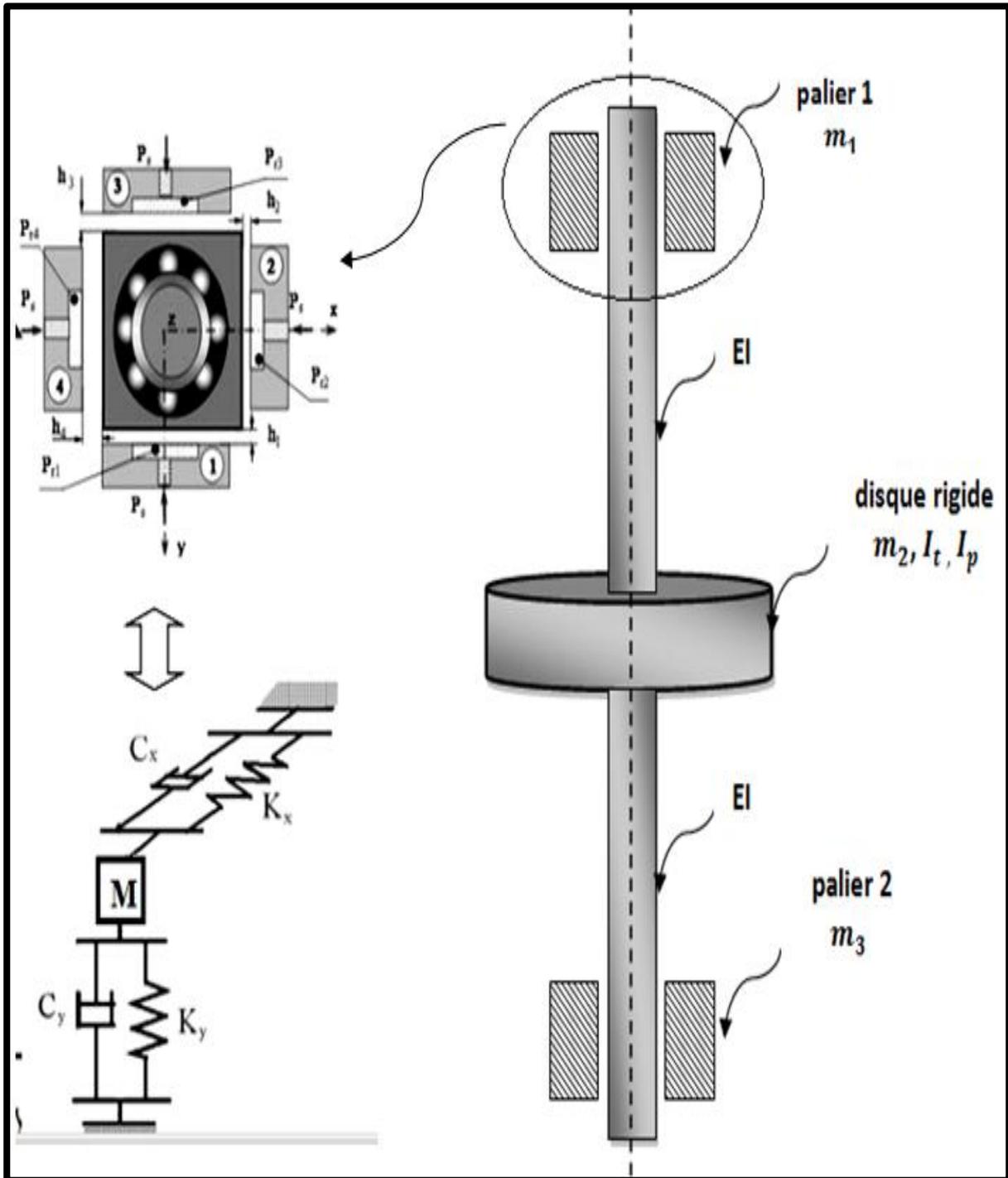


Figure 2.4 : Arbre verticale supporté par deux paliers symétrie [7]

## 2.8. Méthode de calcul

### 2.8.1. Méthode linéaire

La méthode linéaire est une méthode au cours de laquelle les équations du mouvement sont issues du principe fondamental de la dynamique.

### 2.8.2. Configuration du calcul

Le système mécanique qui a été choisi est le suivant :

- L'arbre est considéré flexible et symétrique.
- La pression est variable.
- La viscosité est constante.
- La vitesse de rotation est variable.

## 2.9. Formulation du système d'équations

Les équations de mouvement basées sur le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'arbre .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.1)$$

Les équations de mouvement ; sous forme matricielle, s'écrivent :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (2.11)$$

M, C et K sont respectivement les matrices de : masse, l'amortissement (avec l'effet gyroscopique) et raideur.

### 2.9.1. L'énergie potentielle

L'énergie potentielle de ce système conduit à [7] :

$$V = \frac{2EI}{L^3} (x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1\theta_y L - 2x_3\theta_y L + 2\theta_y^2 L^2 + y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3 - 2y_1\theta_x L + 2y_3\theta_x L + 2\theta_x^2 L^2) \quad (2.12)$$

### 2.9.2. L'énergie cinétique

L'énergie cinétique de ce système conduit à [7] :

$$T = \frac{1}{2} [I_t(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_3(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2)] \quad (2.13)$$

En intégrant les énergies cinétiques et les énergies potentielles dans les équations de Lagrange en utilisant l'équation avec forces dynamiques et l'effet gyroscopique, l'équation totale du système pour le spectacle de modèle dans la figure est donnée dans l'équation matricielle suivante qui comprend les forces de déséquilibre statiques et dynamiques sur la masse centrale [7].

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L^3} + k_x & 0 & -\frac{4EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L^3} + k_y & 0 & -\frac{4EI}{L^3} & -\frac{4EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4EI}{L^3} & 0 & \frac{8EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4EI}{L^3} & 0 \\ 0 & -\frac{4EI}{L^3} & 0 & \frac{8EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4EI}{L^3} \\ 0 & -\frac{4EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{8EI}{L} & 0 & \frac{4EI}{L^2} & 0 \\ \frac{4EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4EI}{L^3} & -\frac{4EI}{L^3} & \frac{4EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L^3} & \frac{4EI}{L^3} + k_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4EI}{L^3} & \frac{4EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L^3} + k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \\ F_0 \\ M_0 \\ M_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2.10. Méthode de compliance

La méthode de compliance (ou impédance ou admittance) est une méthode directe. Par le biais de cette méthode, l'on ne procède pas au préalable à une analyse modale. Le grand désavantage en est que les n équations à résoudre ne sont plus indépendants [9].

Toutefois, l'avantage réside en ce qu'il n'y ait plus de restrictions en regard de la matrice d'amortissement et est parfaite pour résoudre les systèmes présentant peu de degrés de liberté.

### 2.11. La stratégie de la Méthode

L'équation générale d'ordre n, à résoudre, est la suivante :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \tag{2.11}$$

Tout comme dans le cas des systèmes à 1 degré de liberté, l'excitation harmonique dont il est tenu compte, se traduit comme suit :

Où  $\{F\}$  représente le vecteur de l'amplitude des forces pour chaque degré de liberté et  $\omega$  la pulsation de l'excitation (rad/s) et qui s'appliquent à tout le système.

La force harmonique peut être représentée sous forme de nombres complexes, dont on prendra, soit la partie réelle, soit la partie imaginaire :

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (2.15)$$

Il en va de même de la réponse qui peut être représentée sous forme de nombres complexes, par l'équation suivante :

$$\{\tilde{x}(t)\} = \{\tilde{X}\}e^{i\omega t} \quad (2.16)$$

Où  $\{\tilde{X}\}$  représente le vecteur d'amplitude complexe.

En introduisant (2.15) et (2.16) dans l'équation (2.12), l'on obtient :

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{\tilde{X}\} = \{F\} \quad (2.17)$$

La rigidité apparente est rendue comme suit, en tenant compte de la matrice complexe  $[Z(\omega)]$  qui dépend de la fréquence d'excitation  $\omega$

$$[\tilde{Z}(\omega)] = (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]) \quad (2.18)$$

Chaque terme complexe de la matrice de rigidité apparente se traduit comme suit :

$$z_{ij} = k_{ij} - \omega^2 m_{ij} + i\omega c_{ij} \quad (2.19)$$

On désigne par  $[Z(\omega)]^{-1}$ , la matrice complexe de compliance. Elle est l'inverse de la matrice de rigidité apparente et, la réponse de la structure se calcule comme suit :

$$\{\tilde{X}\} = [\tilde{Z}(\omega)]^{-1}\{F\} \quad (2.20)$$