

II.1 Bilan énergétique des échangeurs concentriques :

Un échangeur de chaleur est un système qui permet de transférer un flux d'un fluide chaud à un fluide froid à travers une paroi sans contact direct entre les deux fluides.

Exemples : radiateur d'automobile, évaporateur de climatiseur...

- Dans notre étude nous allons traiter le type le plus simple des échangeurs tubulaires c'est l'échangeur à tube coaxial [1].

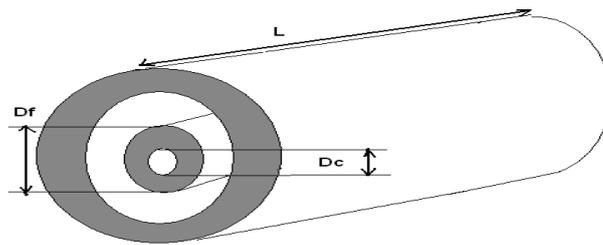


Figure. II.1.Echangeur à tube coaxial (concentrique).

II.1.1. Description :

Un échangeur tubulaire simple est constitué de deux cylindriques coaxiaux.

Un fluide (généralement le chaud) circule dans le tube intérieur, l'autre dans l'espace compris entre les deux tubes. Le transfert de chaleur du fluide chaud au fluide froid s'effectue à travers la paroi que constitue le tube intérieur [1].

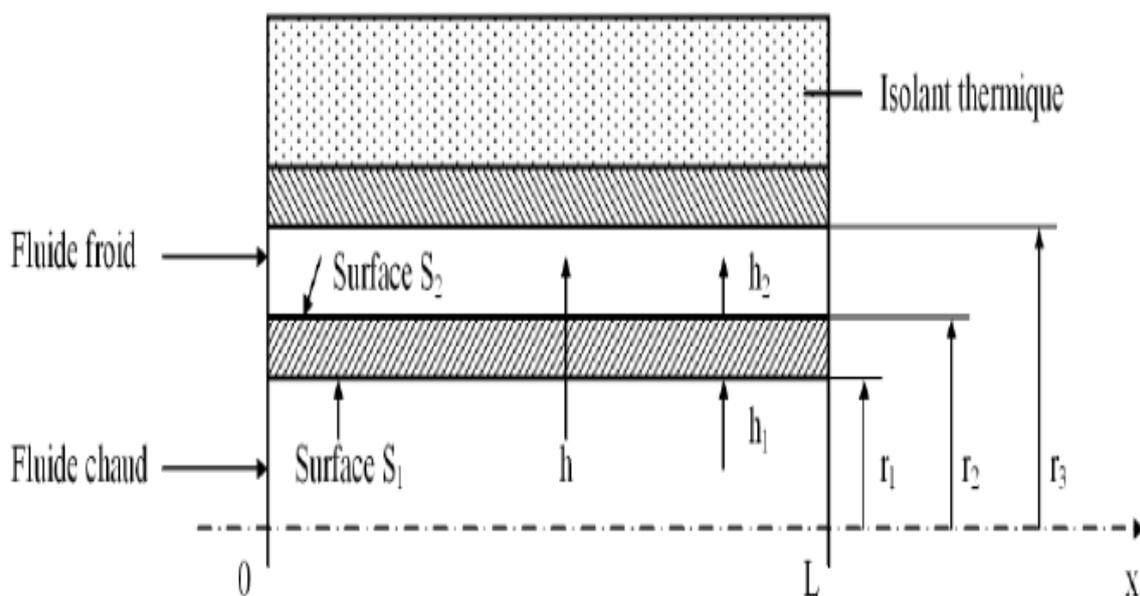


Figure II.2.Description d'un dispositif d'échangeur.

Conventions :

Le fluide chaud entre dans l'échangeur à la température T_{ce} et en sort à T_{cs} , Le fluide froid entre à T_{fe} et sort à T_{fs} .

Deux modes de fonctionnement sont réalisables :

$$\int_{x=0}^x \frac{d(T_c - T_f)}{(T_c - T_f)} = \ln \frac{T_c(x) - T_f(x)}{T_{ce} - T_{fe}} = -U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(X) \quad (II.1)$$

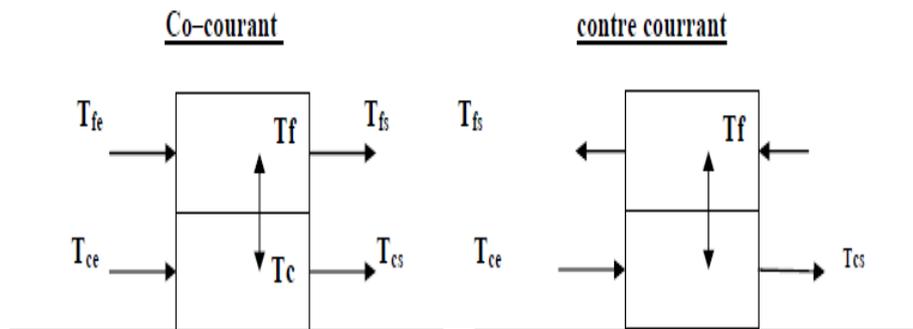


Figure II.3. Les deux modes de fonctionnement couramment utilisés.

II.1.2. Coefficient d'échange global de transfert :

Le transfert thermique qui a lieu au sein d'un échangeur fait intervenir le mode conductif au travers de la paroi séparant les deux fluides et le mode convectif dans chacun de ces derniers. généralement, le rayonnement intervient peu et sera, de toute façon, négligé [8].

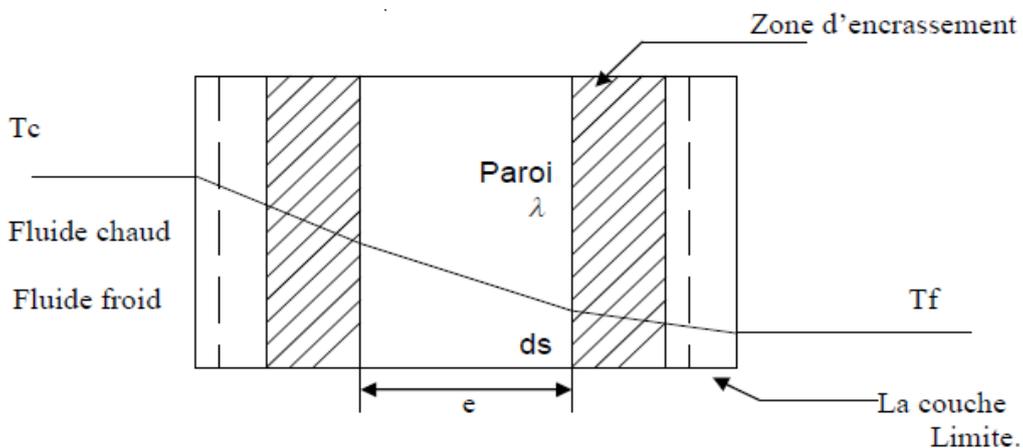


Figure II.4. Représentation schématique du transfert thermique au travers des différents milieux composant un échangeur de chaleur.

λ ; Conductivité thermique

Le fluide chaud à T_c subit une première diminution de température due à la convection avec la paroi par le biais d'un coefficient h_c . Vient ensuite une inévitable zone d'encrassement due, soit à l'accumulation de particules apportées par le fluide en circulation, soit par dépôt de tartre ou bien de micro-organismes d'origine biologique, soit encore par apparition de corrosion sur la surface d'échange. Ce phénomène se caractérise alors par une résistance thermique supplémentaire (par unité de surface) due à cet encrassement et que l'on notera ici r_{ec} . la température diminue ensuite par conduction (conductivité λ) au travers de la paroi d'échange e .

Au-delà et en direction du fluide froid à T_f , on retrouve à nouveau une résistance thermique D'encrassement notée r_{ef} et un transfert convectif caractérisé par h_f [8].

II.1.3. Analogie électrique :

La représentation analogique équivalente est faite dans la figure où sont insérées en série les 5 résistances thermiques.

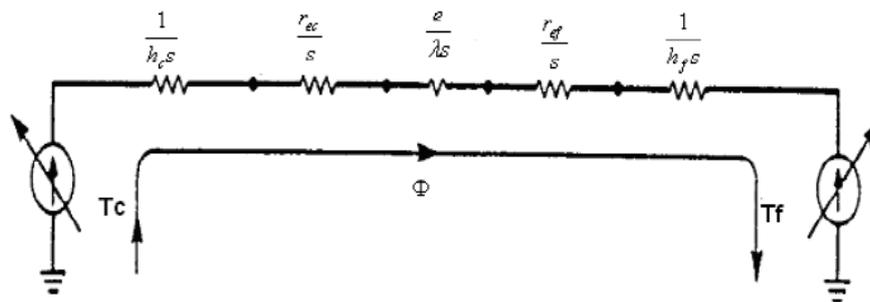


Figure. II.5. Circuit thermique du transfert thermique dans un échangeur thermique.

II.1.4. Expression du flux échangé :

Une première expression du flux de chaleur transféré dans un échangeur peut être déterminée en écrivant qu'il est égal au flux de chaleur perdu par le fluide chaud et au flux de chaleur gagné par le fluide froid pendant leur traversée de l'échangeur :

$$\Phi = \dot{m}_c C_{p_c} (T_{cs} - T_{ce}) = \dot{m}_f C_{p_f} (T_{fe} - T_{fs}) \tag{II.2}$$

Les produits $C_c = \dot{m}_c C_{p_c}$ et $C_f = \dot{m}_f C_{p_f}$ sont appelés les débits calorifiques des deux fluides.

Le flux de chaleur peut donc finalement s'écrire [1].

$$\Phi = C_c (T_{ce} - T_{cs}) = C_f (T_{fs} - T_{fe}) \tag{II.3}$$

Par ailleurs, le flux de chaleur Φ transmis d'un fluide 2 à la paroi d'un tube cylindrique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = U.S(T_c - T_f) \\ \Phi = \frac{T_c - T_f}{\frac{1}{h_c S} + \frac{r_{ec}}{s} + \frac{e}{\lambda.S} + \frac{r_{ef}}{s} + \frac{1}{h_f S}} \end{array} \right. \iff \frac{1}{h_c} + r_{ec} + \frac{e}{\lambda} + r_{ef} + \frac{1}{h_f} \quad (II.4)$$

Ou' U est appelé Coefficient d'échange global.

Dans l'expression $\Phi = U.S(T_c - T_f)$ le Coefficient d'échange global U est rapporté à la surface d'échange S , Dans le cas de la plaque plane cette surface est identique de chaque coté de la paroi. Pour le cas d'une paroi cylindrique U doit être rapporté à l'une des deux surfaces.

Ainsi si on suppose un écoulement de deux fluides (chaud au centre et froid dans l'espace annulaire) le flux échangé entre les deux fluides est de la forme :

Avec:

D_c : Diamètre chaud.

D_f : Diamètre froid.

Selon le choix de l'une ou l'autre des surfaces choisies comme référence, le flux s'écrit :

$$\Phi = U_c S_c (T_c - T_f) = \frac{S_c (T_c - T_f)}{\frac{1}{h_c} + r_{ec} + \frac{D_c}{2\lambda} \ln \frac{D_f}{D_c} + r_{ef} \frac{D_c}{D_f} + \frac{1}{h_f} \frac{D_c}{D_f}} \quad (II.5)$$

avec : $S_c = \pi D_c L$

Ou bien :

$$\Phi = U_f S_f (T_c - T_f) = \frac{S_f (T_c - T_f)}{\frac{1}{h_c} \frac{D_f}{D_c} + r_{ec} \frac{D_f}{D_c} + \frac{D_f}{2\lambda} \ln \frac{D_f}{D_c} + r_{ef} + \frac{1}{h_f}} \quad (II.6)$$

avec :

$$S_f = \pi D_f L \quad (II.7)$$

Quel que soit ce choix, U_c et U_f satisfont de toute façon à $U_c S_c = U_f S_f$ dont le flux de chaleur est indifféremment donné par : [8]

$$\Phi = U_c S_c (T_c - T_f) = U_f S_f (T_c - T_f) \quad (II.8)$$

Généralement dans les échangeurs de chaleur, on choisit de rapporter le flux de chaleur échangé à la surface $S_f = \pi D_f L$, soit d'écrire . Le coefficient global de transfert h d'un échangeur de chaleur s'écrit donc :

$$h = \left(\frac{D_f}{2h_c \frac{D_c}{2}} + \frac{D_f \ln\left(\frac{D_f}{D_c}\right)}{2\lambda L} + \frac{1}{h_f} + r_{en} \right)^{-1} \quad (II.9)$$

$$\Rightarrow h = \left(\frac{D_f}{h_c D_c} + \frac{D_f \ln\left(\frac{D_f}{D_c}\right)}{2\lambda L} + \frac{1}{h_f} + R_{en} \right)^{-1} \quad (W.m^{-2}.^{\circ}C^{-1}) \quad (II.10)$$

R_{en} Est une résistance thermique due à l'encrassement des surfaces d'échange dont il faut tenir compte après quelques mois de fonctionnement (entartrage, dépôts, corrosion) [1].

Type d'échangeur	Coefficient global de transfert $h(W .m^{-2}.^{\circ}C^{-1})$
Liquide-liquide	100-2000
Liquide-gaz	30-300
condenseur	500-5000

Tableau II.1. Ordres de grandeurs du coefficient global de divers échangeurs [1].

II.2. Calcul des performances d'un échangeur de chaleur :

Pour ce faire on pose quelques hypothèses :

❖ Hypothèses :

Dans les calculs qui suivent, nous avons retenu les hypothèses suivantes :

- Le régime est permanent : tous les paramètres, toutes les variables sont constantes dans le temps $\frac{\partial}{\partial t} = 0$,
- L'échangeur est adiabatique : il n'échange pas de chaleur avec l'extérieur (pas de pertes thermiques : la surface de séparation est la seule surface d'échange).
- Les propriétés thermo physique des fluides restent constantes dans les intervalles de températures envisagées (pas de changement de phase au cours du transfert).
- Les températures ne varient que dans la seule direction de l'écoulement, le problème est monodimensionnel, Il n'y a pas de pertes de charge (de pression) au cours de l'écoulement [8].

II.2.1. Fonctionnement à Co- courant :

Dans ce type d'échangeur, que l'on dénomme aussi à courant parallèles, les deux fluides circulent dans le même sens [8].

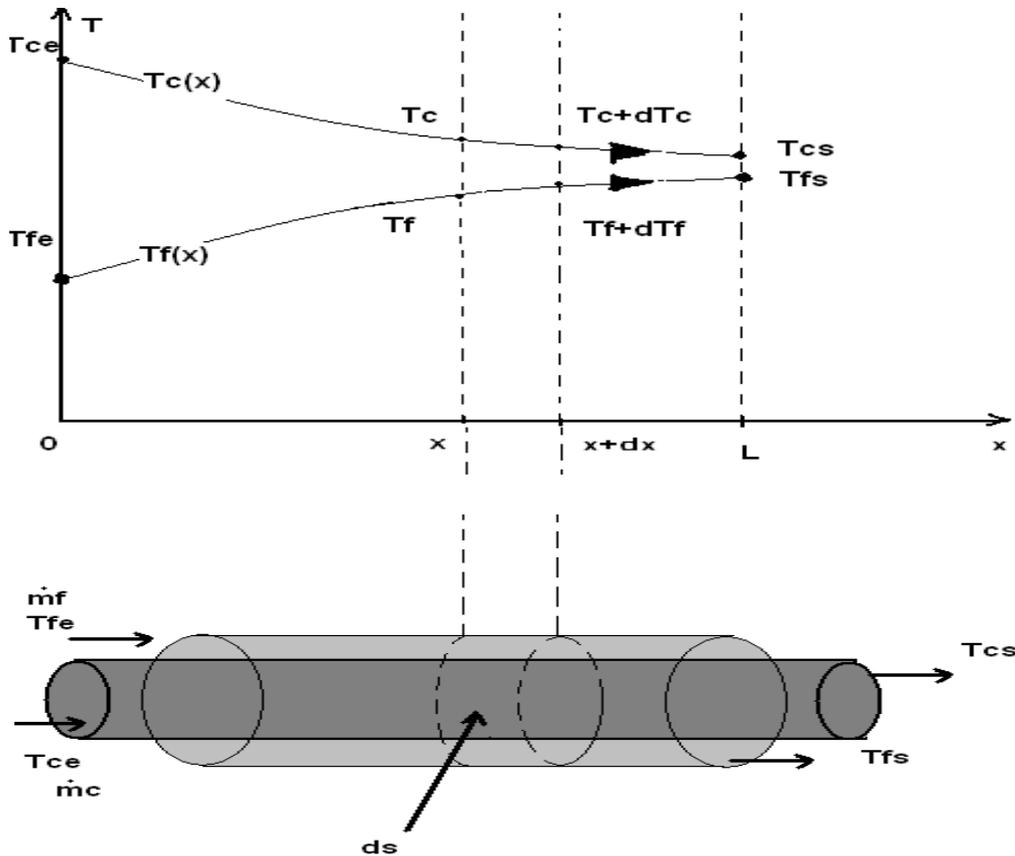


Figure II.6- Evolution des températures du fluide chaud et du fluide froid le long d'un échangeur Co-courant.

Sont supposé connus :

- Les débits des fluides chaud et froid \dot{m}_c et, \dot{m}_f
- Les températures d'entrée des fluides chaud et froid T_{ce} et T_{fe}
- Le coefficient d'échange global U .

L'objectif est alors de déterminer les performances de l'échangeur, c'est-à-dire de calculer :

- Les températures de sortie des fluides chaud et froid T_{cs} et T_{fs} ,
- Le flux de chaleur échangé Φ

L'éventuelle répartition spatiale des températures de fluide chaud $T_c(x)$, et froid $T_f(x)$ le long de l'échangeur [8].

Nous allons établir la relation liant le flux de chaleur transmis dans l'échangeur au Coefficient global de transfert h et à la surface extérieure s_2 d'échange coefficient global de transfert h . Cette relation est fondamentale car elle permet de dimensionner un échangeur, c'est-à-dire de calculer la surface d'échange nécessaire pour transférer un flux imposé.

Pour cela, effectuons un bilan thermique de la partie d'échangeur comprise entre les distances x et $x+dx$ de l'entrée de l'échangeur :

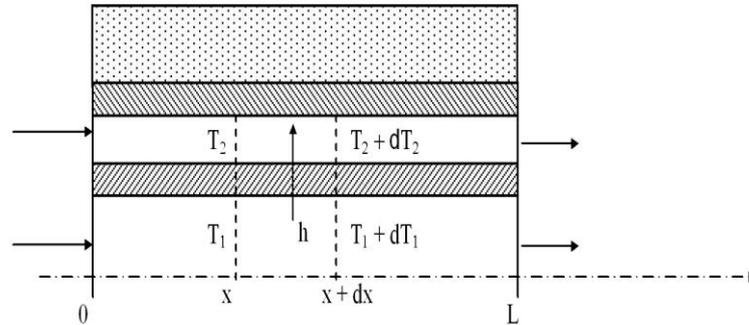


Figure II.7- représentation des surfaces d'échanges.

- Le bilan thermique consiste à écrire que le flux de chaleur perdu par le fluide chaud lors de son passage entre les plans d'abscisse x et $x + dx$ est passé intégralement à travers la paroi de séparation des deux fluides.
- Aussi T_c dépend de T_f donc avant d'intégrer il faut établir la relation liant ces deux grandeurs. Pour cela effectue le bilan thermique de l'échangeur entre l'entrée de l'échangeur et l'abscisse x en écrivant que le flux de chaleur perdu par le fluide chaud a été intégralement récupérés par le fluide froid [1].

Calcul du bilan :

Compte tenu des hypothèses plus haut, l'application du premier principe de la thermodynamique à la tranche de fluide chaud d'épaisseur dx échangeant la quantité de chaleur élémentaire $d\Phi_c$ conduit à :

$$\frac{du_c}{dt} = 0 = d\Phi_c + \dot{m}_c \left[\bar{h}_c - (\bar{h}_c + d\bar{h}_c) \right] \tag{II.11}$$

Où \bar{h}_c représente l'enthalpie spécifique (massique) du fluide chaud et $\frac{\partial u_c}{\partial t}$ la variation de son énergie interne au cours du temps.

Si l'enthalpie varie avec la température selon $d\bar{h}_c = C_{p_c} dT_c$, ou C_{p_c} représente la capacité calorifique à pression constante du fluide chaud et si on considère que le régime est établi, alors l'expression du premier principe devient

$$0 = d\Phi_c + \dot{m}_c C_{p_c} [T_c - (T_c + dT_c)], \text{ soit encore :}$$

$$d\Phi_c + \dot{m}_c C_{p_c} dT_c \tag{II.12}$$

Le même raisonnement, assortie des mêmes hypothèses concernant le fluide froid, conduit alors à :

$$d\Phi_f + \dot{m}_f C_{p_f} dT_f \tag{II.13}$$

Or, les deux quantités $d\Phi_c$ et $d\Phi_f$ sont égales et de signes opposés, si bien que l'on peut convenir de la définition de $d\Phi = d\Phi_c = -d\Phi_f > 0$

Compte tenu de l'expression du flux élémentaire que l'on dérive de l'équation :

$$\Phi = US(T_c - T_f) \tag{II.14}$$

Le système d'équations à résoudre devient :

$$\begin{cases} d\Phi = -\dot{m}_c C_{p_c} dT_c \dots\dots\dots (\alpha) \\ d\Phi = \dot{m}_f C_{p_f} dT_f \dots\dots\dots (b) \\ d\Phi = UdS(T_c - T_f) \dots\dots\dots (c) \end{cases} \tag{II.15}$$

⇒ On va calculer T_c et T_f

On tire tout d'abord, des équations (α) et (b) : $dT_c = -\frac{d\Phi}{\dot{m}_c C_{p_c}}$ et

$dT_f = \frac{d\Phi}{\dot{m}_f C_{p_f}}$ On combine ces deux équations tirées :

$$dT_c - dT_f = d(T_c - T_f) = -d\Phi \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) \tag{II.16}$$

Ou encore:

$$\frac{d(T_c - T_f)}{(T_c - T_f)} = -U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) dS \tag{II.17}$$

Si on suppose que le coefficient d'échange global U et les deux capacités calorifiques Cp_c et Cp_f demeurent constantes le long de l'échangeur, on peut intégrer l'équation suivante de 0 à x pour obtenir:

$$\int_{x=0}^x \frac{d(T_c - T_f)}{(T_c - T_f)} = \ln \frac{T_c(x) - T_f(x)}{T_{ce} - T_{fe}} = -U \left(\frac{1}{\dot{m}_c Cp_c} + \frac{1}{\dot{m}_f Cp_f} \right) S(x) \quad (II.18)$$

$$\frac{T_c(x) - T_f(x)}{T_{ce} - T_{fe}} = e^{-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c Cp_c} + \frac{1}{\dot{m}_f Cp_f} \right) S} \quad (II.19)$$

avec :

$$T_c(0) = T_{ce} \text{ et } T_f(0) = T_{fe} \quad (II.20)$$

Cette équation montre que l'écart de température entre les deux fluides est une évolution exponentielle décroissante de l'aire d'échange $S(x)$. Cet écart tend d'ailleurs vers 0 lorsque $S \rightarrow \infty$

$$\frac{T_c(x) - T_f(x)}{T_{ce} - T_{fe}} \rightarrow 0 \text{ Si } S(x) \rightarrow \infty$$

L'intégral est valable quel que soit x , elle l'est donc pour la valeur $x = L$ et pour laquelle

$T_c(L) = T_{cs}$, $T_f(L) = T_{fs}$, $S(L) = S$ (La surface totale), Ce que revient à :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= -\dot{m}_c Cp_c (T_{cs} - T_{ce}) \\ \Phi &= \dot{m}_f Cp_f (T_{fs} - T_{fe}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

On obtient alors :

$$\ln \frac{T_{cs} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fe}} = -US \left(\frac{1}{\dot{m}_c Cp_c} + \frac{1}{\dot{m}_f Cp_f} \right) = -\frac{US}{\Phi} [(T_{cs} - T_{cs}) + (T_{fs} - T_{fe})] = \frac{US}{\Phi} [(T_{cs} - T_{fs}) + (T_{ce} - T_{fe})]$$

Que l'on écrit plus commodément :

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi &= US \frac{(T_{cs} - T_{fs}) - (T_{ce} - T_{fe})}{\ln \frac{T_{cs} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fe}}} \\ \Phi &= -\dot{m}_c Cp_c (T_{cs} - T_{ce}) \\ \Phi &= -\dot{m}_f Cp_f (T_{fs} - T_{fe}) \end{aligned} \right. \quad (II.21)$$

Où ΔTLM représente la différence de température logarithmique moyenne (ΔTLM) entre les deux fluides. Ainsi le calcul du flux de chaleur dépend du produit US que nous avons introduit en première partie et de cet écart de température.

Si cette expression s'avère simple à utiliser, elle n'en reste pas moins dépendante des températures de sortie qui sont, dans une majorité de cas pratiques, à priori inconnues. Lever indétermination suppose la résolution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = US \frac{(T_{cs} - T_{fs}) - (T_{ce} - T_{fe})}{\ln \frac{(T_{cs} - T_{fs})}{(T_{ce} - T_{fe})}} \\ \Phi = -\dot{m}_c Cp_c (T_{cs} - T_{ce}) \\ \Phi = -\dot{m}_f Cp_f (T_{fs} - T_{fe}) \end{array} \right. \quad (II.22)$$

La première étape consiste à exprimer le flux de chaleur indépendamment des températures de sortie.

La transformation du système (7) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = US \frac{(T_{cs} - T_{ce}) - (T_{fs} - T_{fe})}{\ln \frac{(T_{cs} - T_{fs})}{(T_{ce} - T_{fe})}} \dots\dots\dots (a') \\ T_{cs} = T_{ce} - \frac{\Phi}{\dot{m}_c Cp_c} \dots\dots\dots (b') \\ T_{fs} = T_{fe} - \frac{\Phi}{\dot{m}_f Cp_f} \dots\dots\dots (c') \end{array} \right. \quad (II.23)$$

(à) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = -US \frac{\Phi \left[\frac{1}{\dot{m}_c Cp_c} + \frac{1}{\dot{m}_f Cp_f} \right]}{\ln \frac{T_{ce} - T_{fe} - \Phi \left[\frac{1}{\dot{m}_c Cp_c} + \frac{1}{\dot{m}_f Cp_f} \right]}{T_{ce} - T_{fe}}} \end{array} \right. \quad (II.24)$$

Soit encore :

L'expression du flux devient :

$$\Phi = \frac{T_{ce} - T_{fe}}{\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}}} \left(1 - e^{-US \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right)} \right) \quad (II.25)$$

Soit encore :

$$\Phi = \frac{\dot{m}_c C_{p_c} \dot{m}_f C_{p_f} (T_{ce} - T_{fe})}{\dot{m}_c C_{p_c} + \dot{m}_f C_{p_f}} \left(1 - e^{-US \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right)} \right) \quad (II.26)$$

On combine l'équation (8) avec (b') et (c') on obtient les expressions finales des températures de sortie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(T_{cs} - T_{ce})}{(T_{ce} - T_{fe})} = \frac{\dot{m}_f C_{p_f}}{\dot{m}_c C_{p_c} + \dot{m}_f C_{p_f}} \left[1 - e^{-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(x)} \right] \\ \frac{(T_{fs} - T_{fe})}{(T_{ce} - T_{fe})} = \frac{\dot{m}_c C_{p_c}}{\dot{m}_c C_{p_c} + \dot{m}_f C_{p_f}} \left[1 - e^{-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(x)} \right] \end{array} \right. \quad (II.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(T_{cs} - T_{ce})}{(T_{ce} - T_{fe})} = \frac{\dot{m}_f C_{p_f}}{\dot{m}_c C_{p_c} + \dot{m}_f C_{p_f}} \left[1 - e^{-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(x)} \right] \\ \frac{(T_{fs} - T_{fe})}{(T_{ce} - T_{fe})} = \frac{\dot{m}_c C_{p_c}}{\dot{m}_c C_{p_c} + \dot{m}_f C_{p_f}} \left[1 - e^{-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(x)} \right] \end{array} \right. \quad (II.28)$$

De même manière on a :

$$\frac{dT_c}{(T_c - T_f)} = \frac{UdS}{\dot{m}_c C_{p_c}} \quad (II.29)$$

La multiplication de cette expression membre à membre avec l'expression (5) donne:

$$\frac{dT_c}{(T_{ce} - T_{fe})} = \frac{U}{\dot{m}_c C_{p_c}} e^{-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(x)} \quad (II.30)$$

De la même manière on obtient l'expression de $T_f(x)$ du fluide froid:

$$\frac{T_f(x) - T_{fe}}{(T_{ce} - T_{fe})} = \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right)} \left[e^{-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(x)} \right] \quad (II.31)$$

Finalement on obtient les deux températures de sortie chaude et froide:

$$\begin{cases} T_{cs} = T_{ce} \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right)} \left[e^{-u \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(x)} \right] \\ T_{fs} = T_{fe} + (T_{ce} - T_{fe}) \frac{\dot{m}_c C_{p_c}}{\dot{m}_c C_{p_c} + \dot{m}_f C_{p_f}} \left[1 - e^{-u \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(x)} \right] \end{cases} \quad (\text{II.32 et 33})$$

Dans le cas ou cet échange à courant parallèle serait infiniment long ($x \rightarrow \infty$), les températures de sortie se rejoignent pour avoir une seule et unique valeur dont l'expression est :

$$T_{\infty} = \frac{\dot{m}_c C_{p_c} T_{ce} + \dot{m}_f C_{p_f} T_{fe}}{\dot{m}_c C_{p_c} + \dot{m}_f C_{p_f}} \quad (\text{II.34})$$

Cette valeur limite correspond en fait à la température issue du mélange des deux fluides pris dans les mêmes conditions d'écoulement et aux mêmes températures d'entrée [1,30].

II.2.2. Fonctionnement à contre-courant :

Dans ce type d'échangeur, les deux fluides circulent dans le sens contraire, l'entrée de l'un des fluides étant à l'opposé de l'autre.

On attribue par exemple l'abscisse $x = 0$ l'entrée du fluide chaud et $x = L$ à celle du fluide froid.

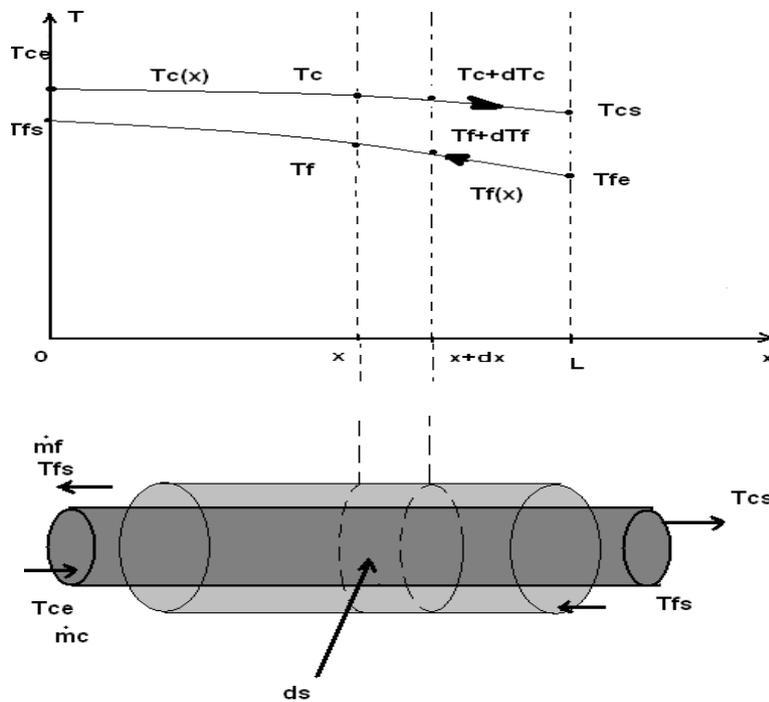


Figure II.8. Evolution des températures du fluide chaud et du fluide froid d'un échangeur contre-courant.

Calcul du bilan :

En conservant les mêmes hypothèses que lors de l'étude de l'échangeur co-courant et en notant cette fois ci que $dT_f < 0$ (compte tenu de l'écoulement opposé à celui de l'axe des x) on peut écrire :

$$\begin{cases} d\Phi = -\dot{m}_c Cp_c dT_c \dots\dots\dots (\alpha'') \\ d\Phi = -\dot{m}_f Cp_f dT_f \dots\dots\dots (b'') \\ d\Phi = Ud(T_c - T_f) \dots\dots\dots (c'') \end{cases} \quad (II.35)$$

Une démarche similaire à celle adoptée dans le cas du Co-courant conduit alors à :

$$\frac{d(T_c - T_f)}{T_c - T_f} = -U \left(\frac{1}{\dot{m}_c Cp_c} - \frac{1}{\dot{m}_f Cp_f} \right) ds ,$$

Après intégration entre les bornes $x = 0$ et $x = L$ on aura :

$$\frac{T_c(x) - T_f(x)}{T_{ce} - T_{fs}} = e^{-US \left(\frac{1}{\dot{m}_c Cp_c} + \frac{1}{\dot{m}_f Cp_f} \right)} \quad (II.36)$$

Lorsqu'on $x = L$ on a:

$$\begin{cases} T_c(L) = T_{cs} \\ T_f(L) = T_{fs} \\ S(L) = S \end{cases}$$

S : (Surface totale)

$$\Phi = -\dot{m}_c Cp_c (T_{cs} - T_{ce}) \text{ et } \Phi = -\dot{m}_f Cp_f (T_{fs} - T_{fe}) \quad (II.37)$$

$$\ln \frac{T_{cs} - T_{fe}}{T_{cs} - T_{fs}} = -US \left(\frac{1}{\dot{m}_c Cp_c} - \frac{1}{\dot{m}_f Cp_f} \right) = -\frac{US}{\Phi} [(T_{ce} - T_{cs}) - (T_{fs} - T_{fe})] = \frac{US}{\Phi} [(T_{cs} - T_{fe}) - (T_{ce} - T_{fs})]$$

Que l'on écrit plus commodément :

$$\Phi = US \frac{(T_{cs} - T_{fe}) - (T_{ce} - T_{fs})}{\ln \frac{(T_{cs} - T_{fe})}{(T_{ce} - T_{fs})}} = US \Delta TLM \quad (II.38)$$

La détermination des lois d'évolution des deux températures le long de l'échangeur $T_c(x)$ Et $T_f(x)$:

La combinaison de (α'') et (c'') nous donne :

$$\frac{dT_c}{(T_c - T_f)} = -\frac{UdS}{\dot{m}_c Cp_c} \quad (II.39)$$

On multiplie 39 membre à membre avec 36 on obtient :

$$\frac{dT_c}{(T_{ce} - T_{fe})} = -\frac{UdS}{\dot{m}_c C_{p_c}} e^{\left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}}\right)S(x)} dS \tag{II.40}$$

Après intégration entre $x = 0$ et $x = L$ on obtient :

$$\frac{T_c(x) - T_{ce}}{T_{ce} - T_{fs}} = -\frac{\dot{m}_f C_{p_f}}{\dot{m}_f C_{p_f} - \dot{m}_c C_{p_c}} \left[1 - e^{\left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}}\right)S(x)} \right] \tag{II.41}$$

On obtiendrait de la même manière pour $T_f(x)$

$$\frac{T_f(x) - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} = -\frac{\dot{m}_c C_{p_c}}{\dot{m}_f C_{p_f} - \dot{m}_c C_{p_c}} \left[1 - e^{-\left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}}\right)S(x)} \right] \tag{II.42}$$

Ces deux expressions donnent donc les lois d'évolution de $T_c(x)$ et $T_f(x)$, c'est-à-dire le long de l'échangeur.

Toutefois, elles restent encore dépendantes de la température $T_f(x)$ à priori inconnue. Lever cette indétermination passe, comme nous l'avons effectué dans le cas du Co-courant, par la résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} \Phi = US \frac{(T_{cs} - T_{fe}) - (T_{ce} - T_{fs})}{\ln \frac{(T_{cs} - T_{fe})}{(T_{ce} - T_{fs})}} \\ \Phi = -\dot{m}_c C_{p_c} (T_{cs} - T_{ce}) \\ \Phi = \dot{m}_f C_{p_f} (T_{fs} - T_{fe}) \end{cases} \tag{II.43}$$

Ces expressions sont tout d'abord transformées en :

$$\begin{cases} \Phi = US \frac{(T_{cs} - T_{fe}) - (T_{ce} - T_{fs})}{\ln \frac{(T_{cs} - T_{fe})}{(T_{ce} - T_{fs})}} \dots\dots\dots (\alpha''') \\ \Phi = T_{ce} - \frac{\Phi}{\dot{m}_c C_{p_c}} \dots\dots\dots (b''') \\ \Phi = T_{fe} + \frac{\Phi}{\dot{m}_f C_{p_f}} \dots\dots\dots (c''') \end{cases} \tag{II.44}$$

$$\Phi = US \frac{-\frac{\Phi}{\dot{m}_c C_{p_c}} + \frac{\Phi}{\dot{m}_f C_{p_f}}}{\ln \frac{T_{ce} - \frac{\Phi}{\dot{m}_c C_{p_c}} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe} - \frac{\Phi}{\dot{m}_f C_{p_f}}}}, \text{ soit encore}$$

$$\ln \frac{T_{ce} - \frac{\Phi}{\dot{m}_c C_{p_c}} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe} - \frac{\Phi}{\dot{m}_f C_{p_f}}} = -US \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) \quad (\text{II.45})$$

L'expression du flux de chaleur est alors donné par :

$$\Phi = (T_{ce} - T_{fe}) \frac{\left(1 - e^{-US \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right)} \right)}{\left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} e^{-US \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right)} \right)} \quad (\text{II.46})$$

La combinaison de cette dernière expression avec celles de (b''') et (c''') permettent alors de déterminer les deux températures de sortie chaude et froide :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{cs} = T_{ce} - \frac{(T_{ce} - T_{fe})}{\dot{m}_c C_{p_c}} \frac{\left(1 - e^{-US \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right)} \right)}{\left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} e^{-US \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right)} \right)} \\ T_{fs} = T_{cfe} - \frac{(T_{ce} - T_{fe})}{\dot{m}_f C_{p_f}} \frac{\left(1 - e^{-US \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right)} \right)}{\left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} e^{-US \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right)} \right)} \end{array} \right. \quad (\text{II.47 et 48})$$

L'échangeur contre-courant a comme particularité les profils de température ne présentent pas toujours une même allure, selon les valeurs relatives des produits $\dot{m}_f C_{p_f}$ et $\dot{m}_c C_{p_c}$ que l'on note généralement C_f et C_c . [1,30]

Selon les cas, on obtient 3 comportements différents qui sont :

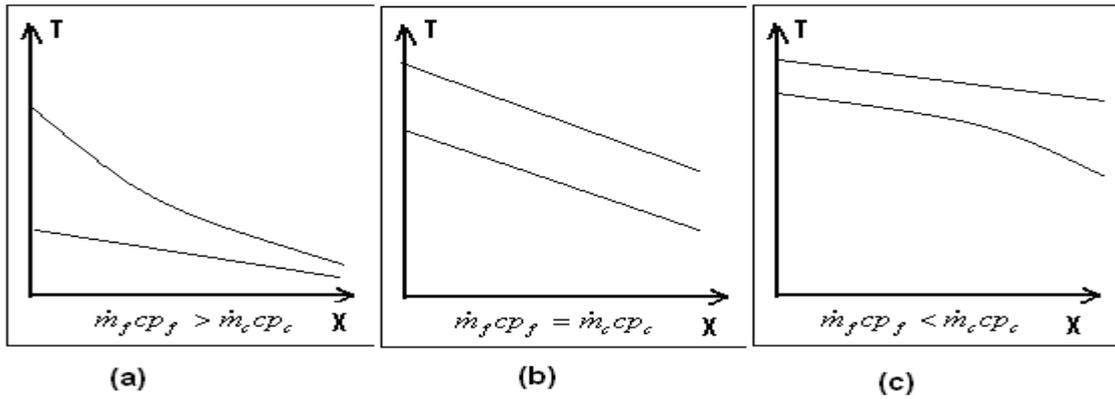


Figure II.9. Profile de température dans un échangeur à contre-courant en fonction des valeurs prises par les débits de capacité thermique.

L'expression des dérivées secondes $\frac{d^2T_c}{dS^2(x)}$ et $\frac{d^2T_f}{dS^2(x)}$, issue des équations (44) et (46) sont données dans le tableau. Leurs signes définissent alors les concavités des évolutions de $T_c(x)$ et $T_f(x)$ qui s'avèrent en fait les mêmes que celui de l'écart $\dot{m}_f C_{p_f} - \dot{m}_c C_{p_c}$. [8].

Tableau : incidences remarquables des valeurs relatives de C_c et C_f sur les concavités des courbes $T_c(x)$ et $T_f(x)$ ainsi que sur les valeurs de températures limites atteintes dans le cas d'un échangeur infiniment long.

	$C_f > C_c$	$C_f < C_c$
Expression de $\frac{d^2T_c}{dS^2(x)}$ et $\frac{d^2T_f}{dS^2(x)}$	$\frac{d^2T_c}{dS^2(x)} = -(T_{ce} - T_{fs}) \frac{\dot{m}_f C_{p_f}}{\dot{m}_f C_{p_f} - \dot{m}_c C_{p_c}} \left[- \left[-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) \right]^2 e^{-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(x)} \right]$ $\frac{d^2T_f}{dS^2(x)} = -(T_{ce} - T_{fs}) \frac{\dot{m}_c C_{p_c}}{\dot{m}_f C_{p_f} - \dot{m}_c C_{p_c}} \left[- \left[-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) \right]^2 e^{-U \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_{p_c}} - \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) S(x)} \right]$	
Signe, concavité	< 0, vers le bas	> 0, vers le haut
T_∞	$T_\infty = \frac{\dot{m}_f C_{p_f} T_{fs} - \dot{m}_c C_{p_c} T_{ce}}{\dot{m}_f C_{p_f} - \dot{m}_c C_{p_c}} = \frac{C_f T_{fs} - C_c T_{ce}}{C_f - C_c}$	

Tableau II.1 : incidences remarquables des valeurs relatives de C_c et C_f sur les concavités des courbes et ainsi que sur les valeurs de températures limites dans le cas d'un échangeur infiniment long [8].

De la figure précédente on constate que : c'est le fluide qui possède la plus faible capacité thermique C , qui subit la contrainte thermique imposée par le fluide disposant la plus forte valeur de C . par conséquent, le calcul des températures limites dans le cas d'échangeurs infiniment longs se réalise pour $S = +\infty$ dans le cas ou $C_f > C_c$ et pour $S = -\infty$ dans le cas ou $C_f < C_c$. Les expressions obtenues sont reportées dans le tableau 1.

Lorsque l'on est dans le cas précis ou $C_f = C_c$ l'équation (21) montre que $\frac{T_c(x) - T_f(x)}{T_{ce} - T_{fs}} = 1$

, soit encore que $T_c(x) - T_f(x) = T_{ce} - T_{fs} = cte$.

Ainsi l'écart de température entre les deux fluides reste constant, quelle que soit

$$(\Delta T_\alpha)(\Delta T_b) \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{T_f(x) - T_{fs}}{T_{ce}, T_{fe}, T_{cs}, T_{fs}} \approx \Phi = US \cdot \Delta TLM = US \frac{\Delta T_\alpha - \Delta T_b}{\ln \frac{\Delta T_\alpha}{\Delta T_b}} \quad (II.49)$$

La position dans l'échangeur. Les définitions de $T_c(x)$ et $T_f(x)$ des équations

(49) a et (49) b se révèlent alors indéterminées. Le développement de $e^{-\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}$ au premier ordre

et au voisinage de 0, permet toutefois de déterminer les expressions de $T_c(x)$ et $T_f(x)$ selon :

$$\frac{T_c(x) - T_{ce}}{T_{ce} - T_{fs}} \approx -\frac{U}{C} S(x), \text{ et ou } C_f = C_c = C$$

$$\frac{T_f(x) - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fs}} \approx -\frac{U}{C} S(x) \quad (II.50)$$

Les profils de températures sont donc des fonctions linéaires de $S(x)$ et même de x dans notre cas (tubes cylindriques) puisque $S(x)$ est elle-même une fonction linéaires de x .

Les expressions du flux de chaleur échangé qui ont été obtenue dans les équations(19) pour le cas Co-courant et 32 pour le cas contre-courant s'écrivent de façon similaire $\Phi = US \cdot \Delta TLM$, même si jusqu'ici, l'écart de température logarithmique moyen s'exprime différemment en fonction des 4 températures T_{ce}, T_{fe}, T_{cs} et T_{fs} .

Il est toutefois possible de conserver une seule expression de ΔT_{LM} en fonction des écarts de température à gauche (ΔT_a) et à droite (ΔT_b) de l'échangeur. En adoptant cette convention,

l'expression générale $\Phi = US.\Delta T_{LM} = US \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\ln \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b}}$ reste alors valable dans tous les cas. [8]

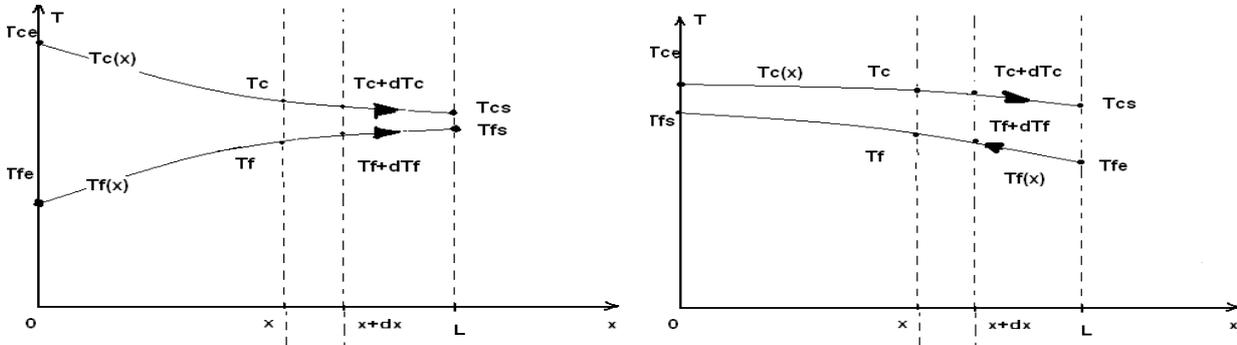


Figure II.10. Schématisation de la convention permettant une seule expression donc le cas de l'échangeur co-courant et contre-courant.

Elle offre de plus, l'avantage de pouvoir traiter le cas particulier où l'un des fluides conserve une température quasi uniforme tout au long de l'échangeur. On observe notamment le cas lorsque le débit de capacité thermique de l'un des fluides est très nettement supérieur à celui de l'autre $\dot{m}_f C_{p_f} \gg \dot{m}_c C_{p_c}$ ou $\dot{m}_f C_{p_f} \ll \dot{m}_c C_{p_c}$ ou encore lorsque le transfert de chaleur s'effectue de façon isotherme comme c'est le cas de la condensation ou l'évaporation d'un fluide pur.

Ainsi, lorsqu'il y a plus de différence entre les températures de sortie et d'entrée de l'un des fluides, la distinction co-courant ou contre-courant disparaît. Les profils que l'on obtient sont alors ceux que l'on peut voir sur la figure 1 pour le cas où $T_c = cte$ (cas du condenseur) et pour le cas où $T_f = cte$ (cas de l'évaporateur). [8]

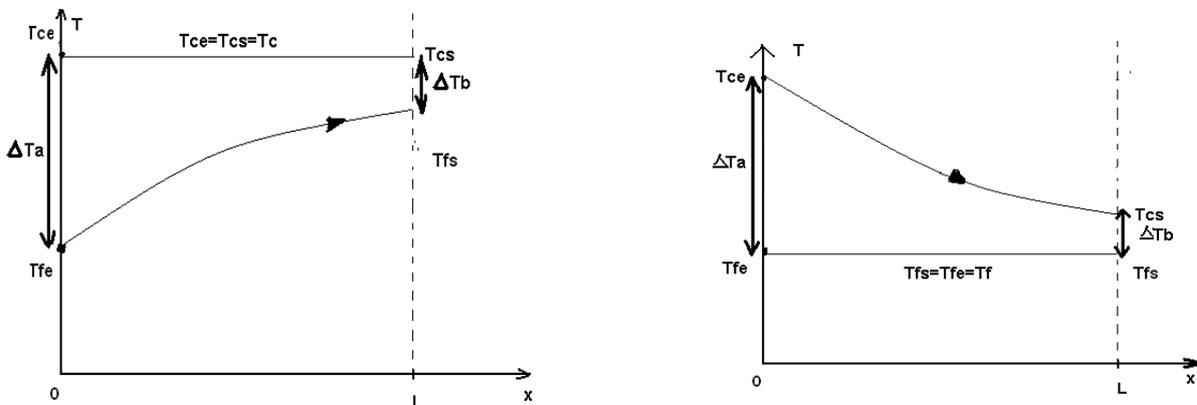


Figure II.11. Représentation des allures de températures dans le cas d'un condenseur (à gauche) et d'un évaporateur (à droite).

L'application de l'équation (21) ou (16) au cas du condenseur par exemple conduit à :

$$\phi = US \cdot \Delta T_{LM} = US \frac{(T_c - T_{fe}) - (T_c - T_{fs})}{\ln \frac{T_c - T_{fe}}{T_c - T_{fs}}} = US \frac{(T_{fs} - T_{fe})}{\ln \frac{T_c - T_{fe}}{T_c - T_{fs}}} \quad (II.51)$$

Compte tenu du fait que le flux s'exprime aussi par $\phi = \dot{m}_f C_{p_f} (T_{fs} - T_{fe})$, on obtient alors

$$\frac{T_{fs} - T_c}{T_{fe} - T_c} = e^{-\frac{US}{\dot{m}_f C_{p_f}}}, \text{ expression qui donne directement la température de sortie du fluide froid. On}$$

parvient à un résultat similaire dans le cas de l'évaporateur avec $\frac{T_{cs} - T_f}{T_{ce} - T_f} = e^{-\frac{US}{\dot{m}_c C_{p_c}}}$ [8].

II.3. Efficacité d'un échangeur :

II.3.1. Définition :

On définit l'efficacité d'un échangeur comme le rapport du flux de chaleur effectivement transféré dans l'échangeur au flux de chaleur maximal qui serait transféré dans les mêmes conditions de températures d'entrée des deux fluides dans un échangeur tubulaire de longueur infinie fonctionnant à contre-courant.

$$E = \frac{\Phi_{\text{réel}}}{\Phi_{\text{maximum}}} \quad (II.52)$$

II.3.2. Flux thermique maximum d'un échangeur :

- la puissance maximum d'échange est obtenue lorsque l'un des fluides subit un changement de température égal au gradient de température maximum existant dans l'appareil, qui est la différence entre les températures d'entrée des fluides chaud et froid $\Delta T_{\text{max}} = T_{ce} - T_{fe}$.

Le Flux thermique maximum transférable par un échangeur est atteint dans un échangeur contre-courant infiniment long. Dans une telle configuration l'un des fluides subit le changement de température le plus élevé (le fluide qui a le plus petit débit thermique unitaire accuse le changement de température le plus important).

$$\Phi_{\text{max}} = C_{\text{min}} \cdot \Delta T_{\text{max}} = (\dot{m} C_{p_p})_{\text{min}} \cdot (T_{ce} - T_{fe}) \quad (II.53)$$

- si on est dans le cas où $C_c < C_f$, cet écart de température est atteint par le fluide chaud qui voit sa température évoluer de T_{fe} vers T_{ce} . Le Flux thermique maximal est alors donné par :

$$\Phi_{\max} = \dot{m}_c C_{p_c} (T_{ce} - T_{fe}) = C_c (T_{ce} - T_{fe}) \quad (\text{II.54})$$

- si au contraire on se trouve dans le cas où $C_f < C_c$ c'est dans ce cas le fluide froid qui subit le plus grand écart de température de T_{fe} vers T_{ce} , conduisant au flux de chaleur maximal :

$$\Phi_{\max} = \dot{m}_f C_{p_f} (T_{ce} - T_{fe}) = C_f (T_{ce} - T_{fe}) \quad (\text{II.55})$$

Ainsi, de façon générique, Le Flux maximal s'exprime dans tous les cas par :

$$\Phi_{\max} = \dot{m}_{\min} \cdot C_{p_{\min}} (T_{ce} - T_{fe}) = C_{\min} (T_{ce} - T_{fe}) \quad (\text{II.56})$$

$$\Phi_{\max} = C_{p_{\min}} (T_{ce} - T_{fe}) \quad (\text{II.57})$$

- la notion d'efficacité découle de cette dernière valeur puisqu'elle caractérise le rapport entre le flux effectivement transmis, au flux maximum transférable et s'écrit :

$$E = \frac{\Phi}{\Phi_{\max}} = \frac{\dot{m}_c C_{p_c} (T_{ce} - T_{cs})}{\dot{m}_{\min} C_{p_{\min}} (T_{ce} - T_{fe})} = \frac{\dot{m}_f C_{p_f} (T_{fe} - T_{fs})}{\dot{m}_{\min} C_{p_{\min}} (T_{ce} - T_{fe})} \quad (\text{II.58})$$

$$- \Phi_{\max} = \dot{m}_{\min} \cdot C_{p_{\min}} (T_{ce} - T_{fe}) = C_{\min} (T_{ce} - T_{fe}) \quad (\text{II.59})$$

avec :

$$\text{Si } \dot{m}_c C_{p_c} < \dot{m}_f C_{p_f} \Rightarrow C_{\min} = \dot{m}_c C_{p_c} \text{ et } E = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fs}}$$

$$\text{Si } \dot{m}_c C_{p_c} > \dot{m}_f C_{p_f} \Rightarrow C_{\min} = \dot{m}_f C_{p_f} \text{ et } E = \frac{T_{fe} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fe}} \quad (\text{II.60})$$

1- Cas où $C_c < C_f$: on dit que le fluide chaud commande le transfert

$$\text{Si } L \rightarrow \infty \text{ alors } T_{cs} \rightarrow T_{fe} \text{ d'où } \begin{cases} \Phi_{\max} = C_c (T_{ce} - T_{fe}) \\ \Phi = C_c (T_{ce} - T_{cs}) \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

On définit alors une efficacité de refroidissement :

$$E_r = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fs}}$$

2- Cas où $C_f < C_c$ on dit que le fluide froid commande le transfert :

$$\text{Si } L \rightarrow \infty \text{ } T_{fe} \rightarrow T_{ce} \text{ d'où } \begin{cases} \Phi_{\max} = C_f (T_{ce} - T_{fe}) \\ \Phi = C_f (T_{fs} - T_{fe}) \end{cases}$$

On définit alors une efficacité de chauffage :

$$E_c = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}}$$

- De manière générale : les figures 4.12 et 4.13 montrent qu'avec un échangeur à contre-courant infiniment long et sans pertes T_{fs} tend vers T_{ce} si $\dot{m}_f C_{p_f} < \dot{m}_c C_{p_c}$, tandis que c'est T_{cs} qui tend vers T_{fe} lorsqu'on a $\dot{m}_c C_{p_c} < \dot{m}_f C_{p_f}$ avec un gradient de température maximum dans l'appareil, $T_{ce} - T_{fe}$. Dans tous les cas, quelque soit le modèle d'échangeur on voit aisément qu'aucun des fluides ne peut subir une variation de température supérieure à $T_{ce} - T_{fe}$, car alors il faudrait que le fluide froid sorte à une température supérieure à T_{ce} , ou que le fluide chaud sorte à une température inférieure à T_{fe} , ce qui est physiquement impossible.

- Ainsi, à condition de connaître l'efficacité de l'échangeur, on peut déduire la puissance réellement échangée par la relation :

$$\Phi = EC_f (T_{cs} - T_{fe}) \text{ Avec : } C_{\min} = (\dot{m}cp)_{\min}$$

Tout en faisant intervenir que les températures d'entrée des fluides

II.3.3.Cas de l'échangeur Co-courant :

- Nous avons vu précédemment que

$$\ln \frac{T_{cs} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fe}} = -us \left(\frac{1}{\dot{m}_c c_{p_c}} + \frac{1}{\dot{m}_f C_{p_f}} \right) = -\frac{us}{C_c} \left(1 + \frac{C_c}{C_f} \right) \tag{II.62}$$

Que l'on peut encore écrire:

$$\frac{T_{cs} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fe}} = e^{-\frac{us}{C_c} \left(1 + \frac{C_c}{C_f} \right)} \dots\dots\dots (*)$$

Si on se place dans le cas où $C_{\min} = C_c$ l'efficacité s'écrit :

$$E = \frac{(T_{cs} - T_{fs})}{(T_{ce} - T_{fe})}$$

Le principe de conservation de l'énergie nous donne quand à lui

$$\Phi = C_c (T_{ce} - T_{cs}) = C_f (T_{fs} - T_{fe}) \text{ D'où on tire } T_{fs} = T_{fe} + \frac{C_c}{C_f} (T_{ce} - T_{cs}) \tag{II.63}$$

Ainsi, le nombre de gauche de l'équation (*) s'écrit encore:

$$\frac{T_{cs} - T_{fe} - \frac{C_c}{C_f}(T_{ce} - T_{cs})}{(T_{ce} - T_{fe})} = \frac{T_{cs} - T_{ce} + T_{ce} - T_{fe} - \frac{C_c}{C_f}(T_{ce} - T_{cs})}{(T_{ce} - T_{fe})} = 1 - \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}} \left(1 + \frac{C_c}{C_f}\right) = 1 - E \left(1 + \frac{C_c}{C_f}\right)$$

L'équation (*) devient alors $1 - E \left(1 + \frac{C_c}{C_f}\right) = e^{-\frac{us}{C_c} \left(1 + \frac{C_c}{C_f}\right)}$ (II.64)

D'où on tire la valeur de l'efficacité $E = \frac{e^{-\frac{us}{C_c} \left(1 + \frac{C_c}{C_f}\right)}}{1 + \frac{C_c}{C_f}}$ (II.65)

De façon générale les deux expressions peuvent être regroupées en une seule équation:

$$E = \frac{1 - e^{-\frac{us}{C_{\min}} \left(1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)}}{1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}}} \quad (II.66)$$

II.3.4. Cas de l'échangeur contre-courant :

Comme précédemment, nous allons partir d'un résultat déjà acquis qui est donné par :

$$\ln \frac{T_{cs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} = -us \left(\frac{1}{C_c} - \frac{1}{C_f} \right) \quad (II.67)$$

Sachant que le bilan énergétique de l'échangeur nous donne

$C_c (T_{ce} - T_{cs}) = C_f (T_{fs} - T_{fe})$, On en déduit que

$$T_{cs} - T_{fe} = (T_{ce} - T_{fs}) + (T_{fs} - T_{fe}) \left(1 - \frac{C_f}{C_c}\right) \quad (II.68)$$

La combinaison précédente conduit alors à :

$$\frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}} = 1 + \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} \left(1 - \frac{C_f}{C_c}\right) = 1 + \frac{\frac{C_c}{C_f} T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fs}} \left(1 - \frac{C_f}{C_c}\right) = e^{-us \left(\frac{1}{C_c} - \frac{1}{C_f}\right)}$$

Ou encore $\frac{T_{ce} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{cs}} = \frac{\frac{C_c}{C_f} - 1}{e^{-\frac{us}{C_c} \left(1 - \frac{C_c}{C_f}\right)} - 1}$ (II.69)

$$\frac{T_{ce} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{cs}} = \frac{T_{ce} - T_{fe} + T_{fe} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{cs}} = \frac{T_{ce} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{cs}} = \frac{1}{E} - \frac{C_c}{C_f}$$

Lorsque $C_{\min} = C_c$

On obtient enfin:

$$\frac{1}{E} - \frac{C_c}{C_f} = \frac{\frac{C_c}{C_f} - 1}{e^{\frac{-us}{C_c} \left(1 - \frac{C_c}{C_f}\right) - 1}} \quad (\text{II.70})$$

Qui nous donne alors:

$$E = \frac{e^{\frac{-us}{C_c} \left(1 - \frac{C_c}{C_f}\right) - 1}}{\frac{C_c}{C_f} e^{\frac{-us}{C_c} \left(1 - \frac{C_c}{C_f}\right) - 1}} \quad (\text{II.71})$$

Généralement, la quantité adimensionnelle $\frac{us}{C_{\min}}$, appelé Nombre d'unité de transfert est noté *Nut* et

la quantité $\frac{C_{\min}}{C_{\max}}$; rapport des débits de capacités thermiques ; et noté C_r ,

II.4. Nombre d'unité de transfert :

II.4.1. Définition : On appelle nombre d'unité de transfert noté le rapport adimensionnel $\frac{hS}{C_c}$ qui est

aussi égal à $\frac{T_{ce} - T_{fe}}{\Delta T_m}$ pour le fluide chaud dans le cas d'un échangeur tubulaire simple :

$$Nu_c = \frac{hS}{C_c} = \frac{T_{ce} - T_{fe}}{\Delta T_m} \quad (\text{II.72})$$

Le NUT est représentatif du pouvoir d'échange de l'échangeur .nous allons monter dans ce qui suit qu'il est lié à l'efficacité de l'échangeur et que son utilisation permet de simplifier les calculs de dimensionnement des échangeurs.

II.4.2. Relation entre NUT et efficacité :

Considérons le cas d'un échangeur tubulaire simple fonctionnant à contre-courant et supposons que le fluide chaud commande le transfert $C_c < C_f$ donc :

$$E_r = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}}$$

Posons $C_r = \frac{C_c}{C_f} < 1$ et $\Delta T_{max} = T_{ce} - T_{fe}$

$$NuT_c = \frac{hs_f}{C_c} = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{\Delta T_s - \Delta T_e} \tag{II.73}$$

Exprimant ΔT_e et ΔT_s en fonction de ΔT_{max} et E_r , nous pouvons écrire :

$$\Delta T_s = T_{cs} - T_{fe} = T_{cs} - T_{ce} + T_{ce} - T_{fe} = -E_r \Delta T_{max} + \Delta T_{max} = \Delta T_{max} (1 - E_r)$$

$$\Delta T_e = T_{ce} - T_{fs} = T_{ce} - T_{fe} + T_{fe} - T_{fs} = \Delta T_{max} - C_r (T_{ce} - T_{cs}) = \Delta T_{max} (1 - C_r E_r)$$

Nous en déduisons l'expression du NuT en fonction de ΔT_{max} et de E_r

$$NuT_c = \frac{\Delta T_{max} E_r}{\Delta T_{max} (1 - E_r) - \Delta T_{max} ((1 - C_r E_r))} \ln \left[\frac{\Delta T_{max} (1 - E_r)}{\Delta T_{max} (1 - C_r E_r)} \right] = \frac{1}{1 - C_r} \ln \left(\frac{1 - C_r E_r}{1 - E_r} \right) \tag{II.74}$$

En reprenant ce calcul dans le cas où le fluide froid commande le transfert puis pour un fonctionnement à contre-courant nous obtenons les relations générales suivantes :

Co-courant	Contre -courant
$NUT_{max} = \frac{-\ln(1 - (1 + C_r)E)}{1 + C_r}$	$NUT_{max} = \frac{1}{C_r - 1} \ln \left(\frac{E - 1}{C_r E - 1} \right)$
$1 - e^{(NuT_{max}(1 + C_r))}$	$1 - e^{(-NuT_{max}(1 + C_r))}$

avec : $NUT_{max} = \frac{hS}{C_{cmin}}$ et $C_r = \frac{C_{cmin}}{C_{cmax}}$

-pour tous les types d'échangeurs

Et $NUT_{max} = -\ln(1 - E)$ si $C_r = 0$ $E = 1 - e^{(-NuT_{max})}$

-pour l'échangeur à contre-courant : $E = \frac{NUT_{\max}}{NUT_{\max} + 1}$ et $NUT_{\max} = \frac{E}{1-E}$ si $C_r = 1$

L'utilisation de ces formules a permis d'établir des abaques.

Donc :

Les formules pour la méthode de l'efficacité sont :

Co-courant
$$E = \frac{1 - e(-NUT_{\max} (1 + C_r))}{1 + C_r}$$

Contre-courant
$$E = \frac{1 - e(-NUT_{\max} (1 - C_r))}{1 - C_r e^{-[NUT_{\max} (1 - C_r)]}}$$

avec: $NUT_{\max} = \frac{us}{C_{\min}}$ $C_r = \frac{C_{\min}}{C_{\max}}$

Donc pour caractériser les performances thermiques d'un échangeur:

$$E = \frac{C_c (T_{ce} - T_{cs})}{C_{\min} (T_{ce} - T_{fe})} = \frac{C_f (T_{fs} - T_{fe})}{C_{\min} (T_{ce} - T_{fe})} \tag{II.75}$$

Avec : $0 \leq E \leq 1$ E est sans dimensions

- il est à noter que sous l'une ou l'autre forme, la définition de E ne prend en compte que trois des quatre températures concernées. En d'autres termes, trois quelconques des températures d'entrée-sortie suffisent à caractériser E .par ailleurs, $E_{\max} = 1$ atteint si l'échangeur est à contre courant infiniment long et sans pertes.

Introduisons deux nouvelles grandeurs sans dimension :

$E_c = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}}$ Efficacité relative cotée fluide chaude

$E_f = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}}$ Efficacité relative cotée fluide froide.

Il existe une relation simple entre E_c et E_f soit R le rapport des débits thermiques unitaires, que l'on appelle encore « facteur de déséquilibre ».

$$R = \frac{C_{\min}}{C_{\max}}$$

L'ensemble des cas possibles se subdivise en deux :

Ou bien $C_{\min} = C_c$. Alors, d'après la relation s on a :

$$E = E_c = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{1}{R} E_f \tag{II.76}$$

$$R = \frac{E_f}{E_c} = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{cs}} \tag{II.77}$$

Ou bien $C_{\min} = C_f$ et l'efficacité vaut:

$$E = E_f = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{1}{R} E_c < R = \frac{E_c}{E_f} = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{fse} - T_{fe}}$$

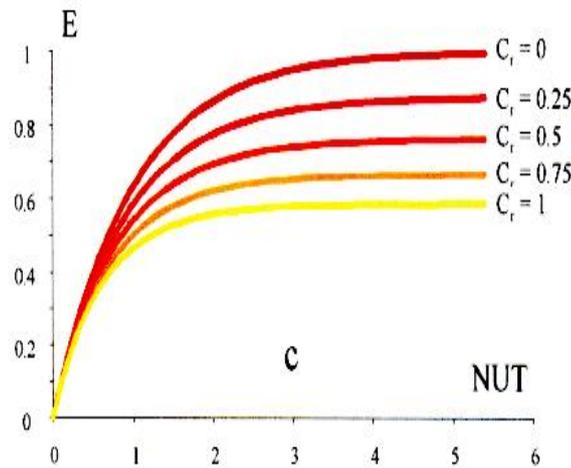
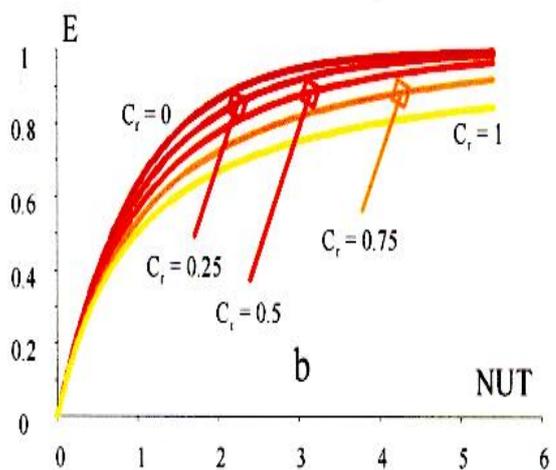
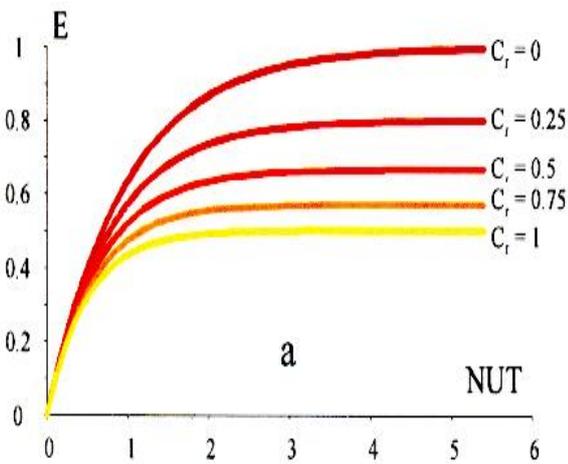


Figure II.11. Evolution de l'efficacité en fonction du NUT et pour différent de Cr dans cas :
 a) d'un échangeur co-courant.
 b) d'un échangeur contre-courant.
 c) d'un échangeur à une calandre et a un multiple de 2 passes de tubes.