

Modèle mathématique

II.1.Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier numériquement et analytiquement les caractéristiques statistiques et dynamiques des butées hydrostatiques alimentées par des résistances hydrauliques de type capillaire, ces butées sont finies à simple effet, à différentes configurations géométriques. Et présenter une méthode de calcul non linéaire qui permet d'obtenir à partir du champ de pression les caractéristiques du palier hydrostatique à trois patins.

Le champ de pression est déterminé à partir de la résolution de l'équation de Reynolds à l'aide d'une méthode analytique. Il est supposé ici que l'écoulement de fluide est incompressible et le régime est laminaire, isotherme et permanent.

Et étudier le comportement dynamique d'un rotor et la stabilité des machines tournantes dont le support est soumis à un mouvement déformant.

II.2. Modélisation mathématique

II.2.1. Description d'un palier hydrostatique à trois patins

Nous avons schématisé une ligne d'arbre montée verticalement dans un palier hydrostatique à trois patins. fig II.1

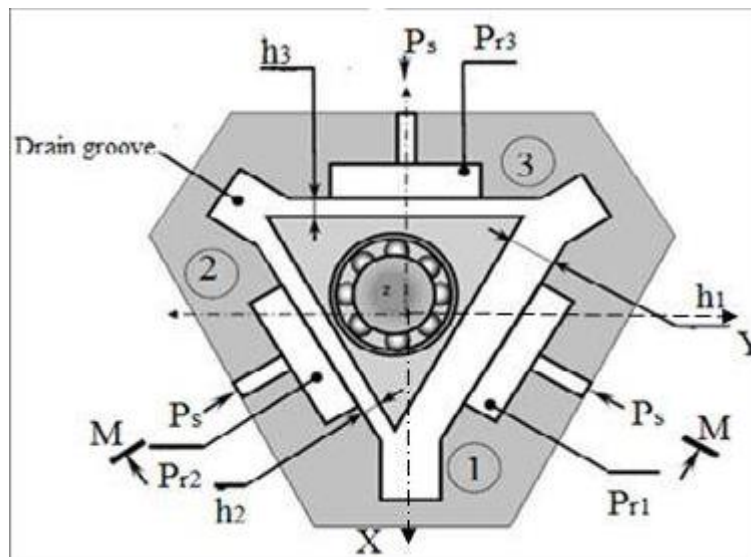


Fig. II.1. Schématisation d'un palier hydrostatique à 3 patins.

II.2.2. Les types de palier hydrostatique à trois patins

Une partie fixe : représentée par trois patins identiques, où chaque patin a un alvéole central qui est contrôlée et alimentée par une résistance hydraulique de type capillaire.

Une partie mobile : représentée par le grain mobile.

II.2.3. Caractéristiques d'un palier hydrostatiques à trois patins

Le calcul des caractéristiques de l'amortissement de film de compression hydrostatique peut être obtenu par la juxtaposition de trois patins plats hydrostatiques (Fig. II.2). Il est supposé que le fluide est incompressible et sans inertie. L'écoulement en régime laminaire et le à l'état d'équilibre et isotherme.

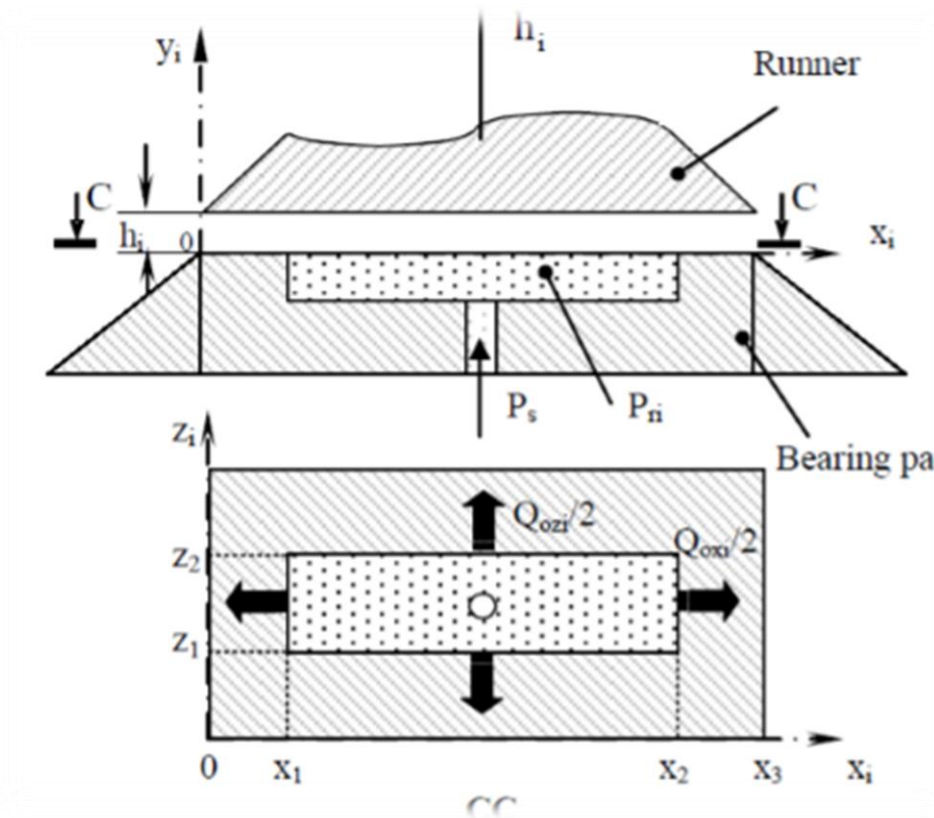


Fig. II.2 Patins de palier hydrostatique plat.

II.3. Position du problème étudié

L'objectif de notre projet étant l'étude de l'influence des paramètres géométriques sur les propriétés physiques et le comportement d'un palier hydrostatique, trois options s'offrent :

- La formulation analytique, pour les situations idéales et simples basées sur l'équation de Reynolds.
- La résolution numérique de l'équation de Reynolds, pour les films minces.
- La résolution numérique de la formulation basée sur les équations de Navier-Stokes, pour les problèmes plus complexes.

II.4. Méthodes numériques non linéaires

Dans le domaine de la dynamique, les systèmes mécaniques qui possèdent des parties tournantes sont souvent des structures complexes du point de vue technologique. Couramment, les outils de conception et d'analyse de ces machines sont souvent basés sur le Comportement linéaire du système en s'appuyant principalement sur une approche modale, qui permet de découpler les équations du mouvement en les transformant en un ensemble d'oscillateurs à un degré de liberté dont les solutions sont ensuite superposées pour construire la solution finale du problème. D'autre part, diverses techniques de réduction de la dimension du système sont disponibles, comme la réduction de Guyan, Craig et Bampton et la troncature modale (Géradin, Meirovitch). Les différents organes intervenant dans une machine tournante peuvent être classés de la façon suivante :

- Les arbres, constituent les éléments principaux des machines tournantes.
- Les éléments de support et positionnement (paliers hydrauliques, paliers à roulements, paliers magnétiques, etc.).
- Les éléments de transmission de mouvement (engrenages, courrois, joints d'accouplement, embrayages, etc.).
- Les éléments fonctionnels (roues aubagées, broches, hélices, etc.).

Ces éléments en liaison avec le rotor sont en général de nature non-linéaire. Pour bien analyser le comportement global de la machine prenant en compte la complexité amenée par ces éléments, il est nécessaire d'utiliser des techniques classiques d'intégration directe (Bathe). Le principal désavantage de ces méthodes est le temps de calcul long. Quand les efforts subis par le système peuvent être mis sous la forme « FL + FNL », où FL définit les forces dites linéaires, FNL les forces dites non linéaires supposées décrites mathématiquement par des fonctions analytiques, il est alors préférable de faire appel à des méthodes numériques, telles que la méthode de tir (Demailly, Vrande, Padmanabhan et Singh), qui est une adaptation des méthodes d'intégration directe et permet d'éviter le régime transitoire du système. Le principe de la méthode est d'imposer aux équations du mouvement des conditions initiales qui se situent sur le régime périodique de la solution. En intégrant les équations du mouvement sur une période et en imposant la périodicité, nous pouvons expliciter la dépendance du système aux conditions de départ et les déterminer à l'aide d'un solveur d'équations non-linéaires.

II.5. Équation de Reynolds

L'équation de Reynolds tient compte du calcul de la distribution de pression,

$P_i(x_i, z_i, t)$. Cette équation peut être résolue numériquement en appliquant la méthode analytiquement pour des cas spécifiques tels que les roulements infiniment longs ou courts. Si nous considérons qu'il n'y a aucune glissement entre le fluide et le roulement de patin, les conditions de frontière liée à la vitesse seront comme suit .

Le patin plat: $U_{1i}=0; V_{1i} = 0$ et $W_{1i} = 0$

Le coureur: $U_{2i}=0; V_{2i}= h$ et $W_{2i} = 0$

Où $U_{1i}; V_{1i}$ et W_{1i} sont les vitesses de la surface du patin de palier hydrostatique ième, et $U_{2i}; V_{2i}$ et W_{2i} sont les vitesses de la surface du patin, h est la vitesse de compression du i-ième coussinet de palier hydrostatique ($i = 1, 2$ et 3);

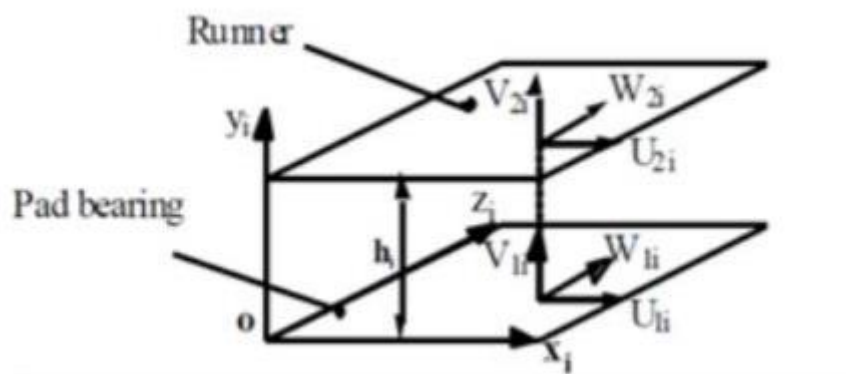


Fig. II.3 Les conditions aux limites de palier hydrostatique

On suppose que la profondeur des alvéoles est suffisante pour permettre l'hypothèse d'une pression constante dans l'alvéole.

Le grain mobile est animé d'une vitesse linéaire (Vitesse d'écrasement) caractérisée par V_{pi} .

On lie au centre de la butée le repère fixe $(O_1; \vec{X}; \vec{Y}; \vec{Z})$ représenté le centre du palier.

La position et la vitesse du centre du grain mobile sont définies respectivement en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{O_1O_2} = x_1 \vec{X} = y_1 \vec{Y} \text{ et } V(O_2) = Va \vec{X} = V_b \vec{Y}, \text{ où } O_2 \text{ représente le centre du grain mobile.}$$

La caractéristique géométrique d'un palier hydrostatique à trois patins impose donc, la définition des grandeurs suivantes :

- Le nombre de patins n ($n = 3$),
- La dimension du patin,
- Dimension extérieure du patin : A ,
- Dimension de l'alvéole du patin : a, b

- La dimension de la section du grain mobile (Fig. II.2).

La connaissance de ces grandeurs permet de définir l'épaisseur et vitesse du film relatif à chaque patin, et ces deux paramètres sont donnés respectivement dans le repère $(O_1; \vec{X}; \vec{Y}; \vec{Z})$:

Butées hydrostatique n° 1 :

$$h_1 = h_0 + x_1 \quad (\text{II.1})$$

$$V_{p1} = \frac{\partial h_1}{\partial t} = V_a \quad (\text{II.2})$$

Butées hydrostatique n° 2:

$$h_2 = h_0 - x_2 \quad (\text{II.3})$$

$$V_{p2} = \frac{\partial h_2}{\partial t} = V_b \quad (\text{II.4})$$

Butées hydrostatique n° 3:

$$h_3 = h_0 - x_3 \quad (\text{II.5})$$

$$V_{p3} = \frac{\partial h_3}{\partial t} = -V_a \quad (\text{II.6})$$

$$\begin{cases} X_1 = X \\ X_2 = X \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - y \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ X_3 = X \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \dot{x} \\ \dot{h}_2 = -\dot{x} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \dot{y} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \dot{h}_3 = -\dot{x} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \dot{y} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

II.6. Calcul d'un palier hydrostatique à trois patins

Dans notre étude nous allons utiliser la méthode analytique car elle est couramment utilisée. Elle nous permet de réduire les dimensions des programmes du calcul, mais impose la connaissance de la pression dans l'alvéole et les pressions aux extrémités libres au niveau de chaque butée à simple effet. Le calcul des caractéristiques d'un palier hydrostatique à trois patins revient donc, au calcul des caractéristiques de trois butées hydrostatiques dont l'étude est analogue à celle d'une butée hydrostatique à simple effet.

II.7. Le modèle de palie rigide

Dans ce modèle, nous avons été amenés à faire plusieurs hypothèses simplificatrices afin d'obtenir l'expression analytique des forces aérodynamiques et inertielles développées par le rotor, ainsi que le mouvement des pales. En particulier, une analyse simplifiée conduit à

ignorer les effets de décrochage, de compressibilité, de non-uniformité de répartition des vitesses induites, ainsi que les divers couplages inertiels. Les solutions obtenues avec ces hypothèses simplificatrices fournissent une bonne connaissance du comportement du rotor dans la plupart des conditions opérationnelles. Cependant, dans des conditions extrêmes de vol, comme les vols à grandes vitesses avec des nombres de Mach périphériques élevés, ou encore les vols aux forts facteurs de charge, au moins une des hypothèses ci-dessus ne s'applique plus et les résultats deviennent beaucoup moins bons.

II.8. La transformation de Fourier rapide

II.8.1. Bref historique

Nous devons nos connaissances du traitement du signal en majeure partie au Baron Joseph FOURIER (Auxerre 1768 - Paris 1830) qui, en étudiant la propagation de la chaleur, découvrit les séries trigonométriques dites séries de FOURIER. Il améliora ce puissant outil mathématique pour l'appliquer à tout type de signal. Depuis une vingtaine d'années seulement, les outils électroniques ont permis de mettre en application ces formules mathématiques, grâce notamment aux américains COOLEY et TUKEY. Ils ont donné naissance à l'algorithme de calcul FFT (Fast Fourier Transform) que l'on retrouve dans la plupart des analyseurs du marché

II.8.2. Définition de FFT :

(sigle anglais : *FFT* ou *fast Fourier transform*) est un algorithme de calcul de la transformation de Fourier discrète (TFD).

L'analyse FFT est utilisée pour la description du signal temporel dans le domaine fréquentiel avec une résolution fréquentielle constante sur une échelle linéaire de fréquence. La résolution peut être très fine pour chercher avec précision les composantes périodiques des signaux acoustiques ou vibratoires. L'analyse FFT est une opération par bloc temporel qui nécessite des compromis permanents (choix de la résolution, de la fenêtre d'observation,.....). Les lectures de niveau sont généralement dépendantes de la fenêtre d'observation. L'aspect temps réel de l'analyse va dépendre de la vitesse des processeurs par rapport à la fréquence d'échantillonnage et le nombre de voies à traiter. Les paramètres suivants sont à retenir:

II.8.3. Fonctionnement théorique de la FFT

Théorème de Fourier : Toute fonction continue est décomposable en série de FOURIER. Si de plus cette fonction est périodique de période T , le nombre de termes de la décomposition est fini. Peut alors écrire la fonction comme une somme de sinus (ou de cosinus)

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(2 \pi t / T) + A_2 \sin(2 \pi t / T) \dots + A_n \sin(2 \pi t / nT)$$

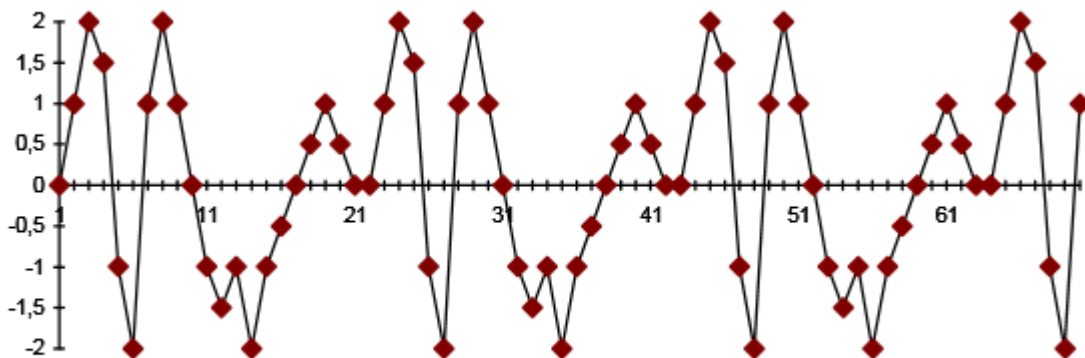
où A_i est le coefficient de la série de FOURIER à la fréquence $f_i = 1/iT$.

Dans la pratique cela veut dire que l'on peut décomposer notre fonction comme une somme de sinus (cosinus) de périodes multiples de la période de base de notre fonction. Les coefficients représentent alors (si on se débrouille bien dans notre calcul) le niveau "énergétique de chacune des fréquences élémentaires".

Cet algorithme est couramment utilisé en traitement numérique du signal pour transformer des données discrètes du domaine temporel dans le domaine fréquentiel, en particulier dans les analyseurs de spectre. Son efficacité permet de réaliser des filtrages en modifiant le spectre et en utilisant la transformation inverse (filtre à réponse impulsionnelle finie). Il est également à la base des algorithmes de multiplication rapide (Schönhage et Strassen, 1971), et des techniques de compression numérique ayant mené au format d'image JPEG (1991).

II.8.4. Numérisation (Echantillonnage)

Le signal physique complet n'est pas étudié en pratique. En fait, seule la représentation numérique du signal est utilisée pour réaliser les calculs voulus. La numérisation du signal est une transformation discrète du signal physique considéré comme continu dans le sens mathématique du terme.



Exemple de signal numérisé.

Fig. II.4 exemple de signal numérisé.

II.9. Méthode analytique

La méthode analytique est appliquée, pour le calcul d'un palier hydrostatique à trois patins, dans le cas d'hypothèse particulière comme la butée hydrostatique infiniment long. C'est ce cas que nous allons appliquer.

II.10. Calcul du champ de pression

Lorsque le rapport A/B de la longueur A ($A=L$) à la largeur B de la butée à simple effet n° i est grand, on peut négliger le débit sortant suivant la longueur A devant le débit sortant suivant la largeur b , l'écoulement se fait purement suivant la largeur b (Fig. II.4).

$$Q_{xi} \ll Q_{zi} \Rightarrow \frac{dPi}{dx} = 0 \tag{II.9}$$

Avec :

$$\begin{cases} Q_{xi} = Q + Xi + Q - Xi \\ Q_{zi} = Q + Zi + Q - Zi \end{cases} \tag{II.10}$$

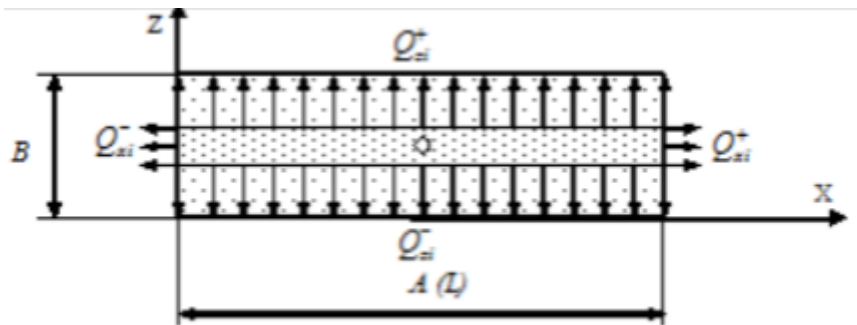


Fig. II.5 Débit sortant de l'alvéole d'une butée

Où Q_{xi} est le débit volumique sortant suivant l'axe X relatif à la butée à simple effet n° i , Q_{zi} le débit volumique sortant suivant l'axe Z relatif à la butée à simple effet n° i .

D'après l'équation (II.10), la variation de la pression suivant l'axe X n'existe pas, donc l'équation de Reynolds relative à la butée à simple effet n° i est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{h_I^3}{\mu} \left(\frac{\partial Pi}{\partial X} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{h_I^3}{\mu} \left(\frac{\partial Pi}{\partial Z} \right) \right] = 12V_{PI} \tag{II.11}$$

Est devient :

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{h_I^3}{\mu} \left(\frac{\partial Pi}{\partial Z} \right) \right] = 12V_{PI} \tag{II.12}$$

Avec :
$$\dot{h}_i = V_{PI} = \frac{\partial h_i}{\partial t} \tag{II.13}$$

L'intégration de l'équation (II.13) et l'application des conditions aux limites sur la pression :

$Pi = Pai$ Pour $Z = 0$

$Pi = 0$ Pour $Z = b_1$

La pression atmosphérique est prise comme pression de référence ce qui permet d'avoir :

L'équation (II.14) pour :

$$0 \leq Z \leq b_1$$

$$P_i = \frac{6\mu h_i}{h_i^3} Z^2 - \left[\frac{P_{ai}}{b_1} + \frac{6\mu h_i}{h_i^3} b_1 \right] Z + P_{ai} \quad (\text{II.14})$$

L'équation (II.15) pour : $-(b_1 + b) \leq Z \leq -b$

$$P_i = \frac{6\mu h_i}{h_i^3} Z^2 - \left[\frac{P_{ai}}{b_1} + \frac{6\mu h_i}{h_i^3} (b_1 + 2b) \right] Z + \left[\frac{P_{ai}}{b_1} + \frac{6\mu h_i}{h_i^3} b \right] (b_1 + b) \quad (\text{II.15})$$

II.11 Calcul des caractéristiques

II.11.1. Charge portante

La charge portante pour une longueur L relative à la butée à simple effet n° i s'écrit :

$$W P_i = \int_S P_i ds = \int_{S_1} P_{ai} ds + 2 \int_{S_2} P_i ds \quad (\text{II.16})$$

Où S représente la surface totale du patin de la butée à simple effet, S₁ la surface de l'alvéole et S₂ la surface des portées de largeur b₁.

Après intégration, on obtient :

$$W P_i = P_{ai} L (b_1 + b) - \frac{2\mu h_i}{h_i^3} b_1^3 L \quad (\text{II.17})$$

On peut écrire cette relation sous une forme plus générale :

$$W P_i = P_{ai} S K W - \frac{2\mu h_i}{h_i^3} b_1^3 L \quad (\text{II.18})$$

Où KW est un coefficient de la charge compris entre 0 et 1 : tel que $K_w = 1 - \left(\frac{b_1}{B}\right)$ La relation (II.18) peut également s'écrire :

$$W P_i = \beta_i P_s S K W - \frac{2\mu h_i}{h_i^3} b_1^3 L \quad (\text{II.19})$$

Où $\beta_i = P_{ai}/P_s$ représente le rapport de la pression dans l'alvéole à la pression fournie par la pompe relative à la butée à simple effet.

b) Débit du lubrifiant

Débit du lubrifiant sortant de l'alvéole suivant l'axe Z

La vitesse du fluide est donnée par la relation :

$$u_{zi} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P_{ai}}{\partial Z} (y - h_i) \quad (\text{II.20})$$

Le débit volumique Q_{si} du fluide qui sort de la butée n° i est obtenu par intégration de la vitesse :

$$Q_{si} = L \int_0^{h_i} u_{zi}(Z = b_1) dy - L \int_0^{h_i} u_{zi}(Z = -b_1 - b) dy \quad (\text{II.21})$$

$$Q_{Si} = \frac{Lhi^3 [P_{ai} - \frac{6\mu hi}{hi^3} b1^2]}{6\mu b1} \quad (II.22)$$

Soit en introduisant le coefficient du débit K_Q :

$$K_Q = \frac{L}{6b1} \quad (II.23)$$

La relation (II.26) devient :

$$Q_{Si} = hi^3 \frac{[P_{ai} - \frac{6\mu hi}{hi^3} b1^2]}{\mu} K_Q \quad (II.24)$$

D'où on peut déduire que le débit relatif à la butée à simple effet n° i est donné par :

$$Q_{Si} = \frac{hi^3 [\beta_i P_S - \frac{6\mu hi}{hi^3} b1^2]}{\mu} K_Q \quad (II.25)$$

II.11.2. Débit de la variation du volume dans l'alvéole

Le débit dû à la variation du volume dans l'alvéole relatif à la butée à simple effet n° i est donné par :

$$Q_{voli} = \frac{\partial Vi}{\partial t} \quad (II.26)$$

Avec :

$$V_i = S_1 \times e_i \quad (II.27)$$

$$e_i = hi + ea$$

Où : V_i est le volume de l'alvéole relatif à la butée à simple effet n° i.

S_1 : Surface de l'alvéole.

e_i : Est l'épaisseur de film de l'alvéole relative à la butée à simple effet n° i.

ea : La profondeur de l'alvéole.

hi : L'épaisseur de film dans la zone de surface de la portée relative à la butée à simple effet n° i.

$$\text{Ainsi :} \quad Q_{voli} = S_1 \frac{dhi}{dt} \quad (II.28)$$

II.11.3. Débit des résistances hydrauliques de type capillaire

Parmi les types de résistances hydrauliques les plus fréquemment utilisés, on cite les types capillaires. Un capillaire est un tube relativement long dont le rapport de la longueur lc au rayon rc est grand ($lc/rc > 50$); lorsque l'écoulement est laminaire (C'est à dire pour des nombres de Reynolds inférieurs à 1000) le débit est donné par la loi de Hagen-Poiseuille :

$$Q_{ri} = \pi dc^4 \frac{128\mu lc (PS - Pai)}{\mu} \quad (II.29)$$

Le calcul de la pression dans l'alvéole relative à la butée à simple effet n° i est effectué en écrivant la conservation du débit volumique, en tenant compte de la variation du volume de fluide dans l'alvéole due au déplacement du grain mobile.

L'équation de conservation du débit volumique s'écrit :

$$Q_{ri} = Q_{si} + Q_{voli} \quad (\text{II.30})$$

Où :

Q_{ri} : Débit à travers une résistance hydraulique relatif à la butée à simple effet n° i.

Q_{si} : Débit sortant de l'alvéole relatif à la butée à simple effet n° i.

Q_{voli} : Débit dû à la variation du volume d'alvéole relatif à la butée à simple effet n°i.

L'équation (II.30) peut s'écrire comme suit :

$$Q_{ri} = \frac{\pi d c^4}{128 \mu l c} (P_s - P_{ai}) = Q_{si} + Q_{voli} \quad (\text{II.31})$$

Le calcul de la pression dans l'alvéole relative à la butée à simple effet n° i est déterminé à partir de la résolution de l'équation linéaire de la conservation du débit volumique (II.31).

II.12. Palier hydrostatique infiniment long à trois patins

II.12.1. Calcul des caractéristiques

a) Charge totale

La charge totale de palier hydrostatique infiniment long à trois patins est obtenue en faisant la somme des charges portantes correspondantes aux trois butées à simple effet. La charge totale de palier hydrostatique infiniment long à trois patins est donnée dans le repère $(O_1; \vec{X}; \vec{Y}; \vec{Z})$ par :

$$F_X = W_{p3} - (W_{p1} + W_{p2}) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{II.32})$$

$$F_Y = (W_{p2} - W_{p1}) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{II.33})$$

Cas particulier

Pour : $h_i = 0$ (Cas statique)

Et : $F_Y = 0 \Rightarrow (W_{p2} = W_{p1})$

La charge totale de la butée hydrostatique infiniment longue à double effet est donnée dans le repère $(O_1; \vec{X}; \vec{Y}; \vec{Z})$ par :

$$F_X = P_s S K_w (\beta_3 - 2\beta_1) \quad (\text{II.34})$$

La charge totale s'écrit :

$$F_t = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = F_X = P_s S K_w (\beta_3 - 2\beta_1) \quad (\text{II.35})$$

b) Débit du lubrifiant total

Le débit du lubrifiant total de palier hydrostatique infiniment long à trois patins est obtenu en faisant la somme des débits correspondants aux trois butées à simple effet.

Ainsi,

$$Q = \sum_{i=1}^3 [h_i^3 \frac{[\beta i P S - 6 \mu h_i h^3 b_1 2] K Q}{\mu} + S_1 h_i] \quad (\text{II.36})$$