

II.1 Introduction

L'étude de la lubrification s'insère dans le domaine de la mécanique des fluides minces visqueux. La détermination de la viscosité au sein d'un film d'huile, facteur essentiel pour le calcul des grandeurs techniques, est basée sur la résolution de l'équation de Reynolds.

Ce chapitre concerne la formulation mathématique du problème hydrodynamique étudié.

II.2 Analyse cinématiques du système piston-bielle-vilebrequin

La cinématique concerne le mouvement de piston. Soit à considérer le mouvement du mécanisme bielle-manivelle-piston montré sur la figure (II.1).

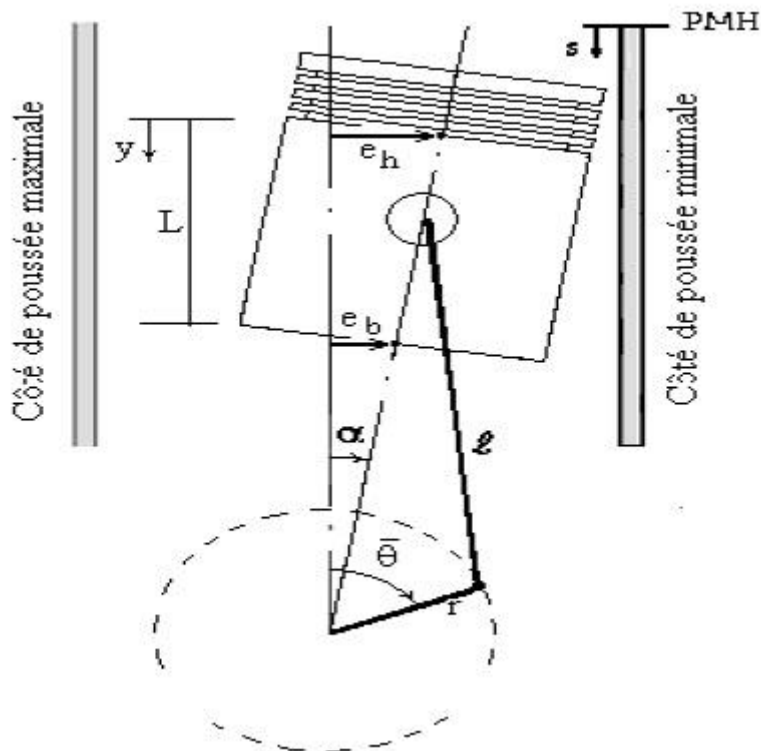
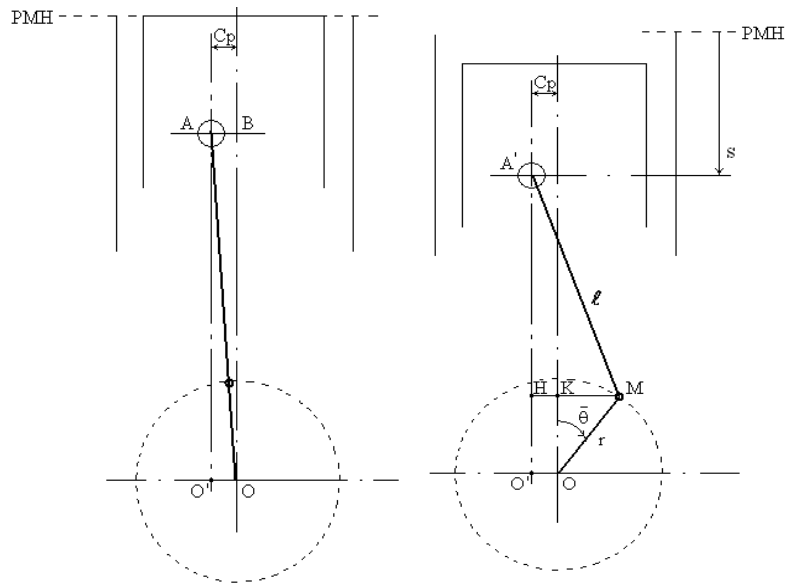


Figure II.1 : Géométrie du système piston-bielle-vilebrequin.

L'axe donnant la course du piston, orienté positivement vers le bas, a son origine confondue avec le point mort haut du piston. La position, la vitesse et l'accélération du piston, se mouvant axialement à l'intérieur du cylindre, sont déterminées à partir du mécanisme bielle-manivelle donné par la figure (II.2). Ces grandeurs sont fonction de l'angle θ de rotation du vilebrequin



a- Position instantanée

b- Position au point mort haut

Figure II.2 : Cinématique du système bielle manivelle

II.2.1 Position du piston

La position instantanée du piston est donnée par :

$$S = O'A - O'A'$$

$$O'A' = O'H + HA'$$

$$OA = r + l$$

$$O'A = (OA^2 - O'O^2)^{0.5} = [(l + r)^2 - Cp^2]^{0.5}$$

$$O'H = OK = r \cos \bar{\theta}$$

$$HA' = (A'M^2 - HM^2)^{0.5}$$

$$HM = HK + KM = Cp + r \sin \bar{\theta}$$

Et $A'M = l$

D'où $S = [(l + r)^2 - Cp^2]^{0.5} - \{r \cos \bar{\theta} + [l^2 - (Cp + r \sin \bar{\theta})^2]^{0.5}\}$

On pose :

$$HM = B = Cp + r \sin \bar{\theta}$$

La position du piston s'écrit alors :

$$s = [(l + r)^2 - Cp^2]^{0.5} - [r \cos \bar{\theta} + (l^2 - B^2)^{0.5}] \quad (\text{II.1})$$

II.2.2 Vitesse axiale

La dérivation de l'expression (II.1) par rapport au temps permet de calculer la vitesse :

$$V = \frac{ds}{dt} = r \sin \bar{\theta} \frac{d\bar{\theta}}{dt} + Br \frac{d\bar{\theta}}{dt} \cos \bar{\theta} (l^2 - B^2)^{-0.5}$$

Sachant que la vitesse de rotation du vilebrequin est $\omega = \frac{d\bar{\theta}}{dt}$

La vitesse axiale s'écrit alors

$$V = r \sin \bar{\theta} \omega + \frac{Br\omega \cos \bar{\theta}}{(l^2 - B^2)^{0.5}} \quad (\text{II.2})$$

Utilisant la relation ci-dessus la vitesse adimensionnée s'écrit :

$$\bar{V} = r \sin \bar{\theta} + \frac{Br \cos \bar{\theta}}{(l^2 - B^2)^{0.5}} \quad (\text{II.3})$$

II.2.3 Accélération axiale

La dérivation de l'expression (II.2) par rapport au temps permet de calculer l'accélération γ :

$$\gamma = r\omega^2 \cos \bar{\theta} + \frac{(Br\omega \cos \bar{\theta})^2}{(l^2 - B^2)^{3/2}} + \frac{(r\omega \cos \bar{\theta})^2 - Br\omega^2 \sin \bar{\theta}}{(l^2 - B^2)^{1/2}} \quad (\text{II.4})$$

L'axe y est introduit pour le calcul hydrodynamique du piston. Il représente la coordonnée axiale du film lubrifiant. Puisque le film lubrifiant suit à chaque instant le piston, l'axe y est fixé avec le piston et se déplace en même temps que le piston. Dans un plan normal à l'axe du piston et contenant les côtés de poussée maximale et minimale, il existe un déséquilibre (contre balancement) des forces et des moments agissant sur le piston. Comme résultat, le piston exécute de petites oscillations latérales dans le confinement du jeu piston cylindre. Ces oscillations, dont l'intensité est égale ou inférieure au jeu radial piston-cylindre, sont représentées par les excentricités $e_h(t)$ et $e_b(t)$. La rotation du piston autour de son axe, est définie par l'angle de basculement α . Les angles θ_1 et θ_2 sont les angles fluide de pression de la jupe quand le piston bascule du côté de poussée maximale et du côté de poussée minimale respectivement. Dans notre étude, les angles θ_1 et θ_2 sont égaux et ont pour valeur empirique 15° .

II.3 Les équations de base du mouvement dynamique d'un système chemise-piston

Les équations de base sont données par le modèle de lubrification hydrodynamique de piston de moteur à combustion interne présenté par Li et al en 1983 [7]. Les équations du mouvement secondaire, défini par le couple d'excentricités du haut et du bas de la jupe e_h et e_b , sont obtenues à partir de l'équilibre des forces et moments agissant sur le piston isolé.

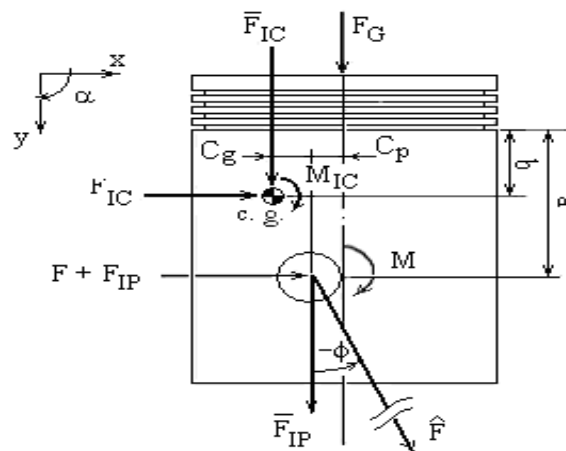


Figure II.3 : Forces et moments agissant sur le piston

Les forces et moments agissant sur le piston sont :

- F_G : Force due à la combustion des gaz.
- \hat{F} : Force de connexion agissant constamment le long de la bielle.
- F, M Force et moment résultant de la pression hydrodynamique développée dans le film d'huile.
- F_{IC}, M_{IC} : Force et moment résultant de l'inertie du piston lors de son mouvement secondaire.
- F_{IP} : Force résultant de l'inertie de l'axe du piston lors de son mouvement secondaire.

Il est supposé que l'axe du piston ne tourne pas, par conséquent son inertie de rotation n'est pas considérée ($M_{IP} = 0$)

- \bar{F}_{IC} et \bar{F}_{IP} : forces dues à l'inertie du piston et de son axe respectivement lors du mouvement axial du piston.

A l'équilibre des forces et des moments dans le repère (x, y), on obtient le système d'équation suivant :

$$\sum F_y = F_g + \bar{F}_{IP} + \bar{F}_{IC} + \hat{F} \cdot \cos \phi = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\sum F_x = F + F_{IP} + F_{IC} - \hat{F} \cdot \sin \phi = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\sum M_{axe} = M + F_{IC}(a - b) + M_{IC} - \bar{F}_{IC}C_g + F_gC_p = 0 \quad (\text{II.7})$$

L'élimination de \hat{F} des équations donne :

$$-F_{IP} - F_{IC} = F + F_S \quad (\text{II.8})$$

Où F_S est la force latérale de paroi, définie comme :

$$F_S = (F_G + \bar{F}_{IP} + \bar{F}_{IC}) \operatorname{tg} \phi \quad (\text{II.9})$$

De manière similaire, on obtient l'équation des moments

$$-M_{IC} - F_{IC}(a - b) = M + M_S \quad (\text{II.10})$$

Où M_S est le moment de basculement du piston selon l'angle α est défini par :

$$M_S = F_G C_P - \bar{F}_{IC} C_g \quad (\text{II.11})$$

F_S et M_S dépendent de l'accélération axiale, la pression des gaz de combustion et de l'angle ϕ .

Pour un moteur tournant à vitesse de rotation stationnaire ω du vilebrequin, la position du piston, la vitesse et l'accélération de long du cylindre peut être déterminés par les équations : (II.1), (II.2) et (II.4).

Les forces d'inertie sont :

$$\bar{F}_{IP} = -m_{axe} \cdot \gamma_a \quad (\text{II.12})$$

$$\bar{F}_{IC} = -m_{pist} \cdot \gamma_a \quad (\text{II.13})$$

L'angle de connexion ϕ de la bielle est donné par :

$$\phi = \text{arc tg} \frac{B}{(l^2 - B^2)^{1/2}} \quad (\text{II.14})$$

Sachant que la force des gaz de combustion est connue ($F_G = P_G \cdot A$, A : aire du fond du piston, P_G pression des gaz) ; F_S et M_S peuvent être aisément déterminées à partir des équations (II, 9) et (II.11).

Les forces et moments d'inertie transversaux dépendent de l'accélération du mouvement secondaire du piston. Elles sont données par :

$$F_{IP} = -m_{axe} \cdot \left[\ddot{e}_h + \frac{a}{L} \cdot (\ddot{e}_b - \ddot{e}_h) \right] \quad (\text{II.15})$$

$$F_{IC} = -m_{pist} \cdot \left[\ddot{e}_h + \frac{b}{L} \cdot (\ddot{e}_b - \ddot{e}_h) \right] \quad (\text{II.16})$$

$$M_{IC} = \frac{-I_{pist} \cdot (\ddot{e}_h - \ddot{e}_b)}{L} \quad (\text{II.17})$$

Finalement, une substitution des équations ci-dessus dans les équations (II.8) et (II.10) donne les équations de mouvement :

$$\begin{bmatrix} m_{piston} \left(1 - \frac{b}{L}\right) + m_{axe} \left(1 - \frac{a}{L}\right) & m_{piston} \frac{b}{L} + m_{axe} \frac{a}{L} \\ \frac{I_{piston}}{L} + m_{piston} (a-b) \left(1 - \frac{b}{L}\right) & -\frac{I_{piston}}{L} + m_{piston} (a-b) \frac{b}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{e}_h \\ \ddot{e}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F + F_s \\ M + M_s \end{Bmatrix} \quad (II.18)$$

Les équations (II.18) constituent les équations de base du mouvement dynamique secondaire du piston. Ces équations sont couplées simultanément avec l'effet hydrodynamique décrit par les charges de portance F et M du film fluide.

II.4 Equations de Reynolds

La lubrification des parois du système piston cylindre peut être décrite comme un ensemble de surfaces lubrifiées. Les charges hydrodynamiques supportant les charges dynamiques latérales résultent de l'intégration du champ de pression né dans les zones actives du film d'huile. La pression hydrodynamique est régie par l'équation de Reynolds.

Issue des équations de Navier-Stokes pour les écoulements dans les films minces, l'équation de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3(x,y,t)}{\mu} \frac{\partial p(x,y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3(x,y,t)}{\mu} \frac{\partial p(x,y)}{\partial y} \right) = 6V \left(\frac{\partial h(x,y,t)}{\partial y} \right) + 12 \left(\frac{\partial h(x,y,t)}{\partial t} \right) \quad (II.19)$$

La géométrie cylindrique du piston fait qu'il est plus intéressant d'utiliser une forme polaire plutôt qu'une coordonnée curviligne :

$$x = R\theta \quad (II.20)$$

L'utilisation des valeurs adimensionnelles pour la pression, l'épaisseur du film d'huile et pour les coordonnées spatiales, se fait en introduisant une forme paramétrée au sens de Sommerfeld définie comme :

$$\bar{P} = P \frac{c^2}{6\mu.r.v.R}, \bar{h} = \frac{h}{c}, \bar{y} = \frac{y}{R}, \varepsilon_b = \frac{e_b}{c}, \varepsilon_h = \frac{e_h}{c} \quad (\text{II.21})$$

Avec c est le jeu radial.

Il est aisé de montrer que l'utilisation des variables adimensionnelles permet d'aboutir à une forme beaucoup plus compacte pour l'équation de Reynolds :

$$F \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial D}{\partial y} \right) + F \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial D}{\partial \theta} \right) = V \frac{\partial h}{\partial y} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} + (1 - F) \left(V \frac{\partial D}{\partial y} + 2 \frac{\partial D}{\partial t} \right) \quad (\text{II.22})$$

II.5 Les condition aux limites

Les conditions aux limites utilisées pour la résolution de l'équation de Reynolds sont basées sur la séparation des zones actives et inactives. C'est dans la zone active que la pression monte et que l'équilibre avec la charge appliquée se réalise. La zone inactive est caractérisée par une pression nulle. En conséquence, les conditions aux limites sur la valeur de la pression sont :

- $0 = p$ dans la zone inactive,
- $0 > p$ dans la zone active,

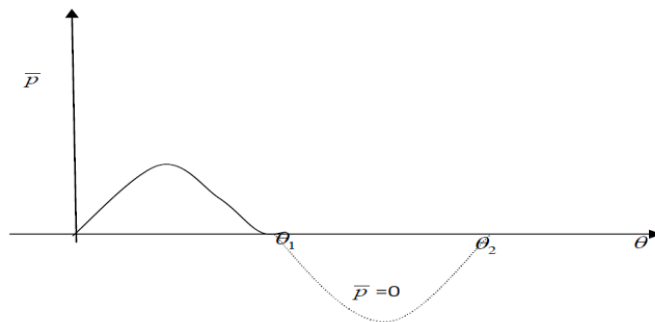


Figure II.4 : Condition de pression dans la zone inactive

$$\bar{p}(\bar{y}, \theta^*) = 0 \quad \theta_1 < \theta^* < \theta_2 \quad (\text{zone inactive}) \quad (\text{II.23})$$

La condition de Reynolds sur la dérivée de la pression à la frontière de rupture du film complet s'énonce comme suit :

$$\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi} = 0 \quad (\text{II.24})$$

La condition de symétrie de pression dans le film est donnée par :

$$\bar{p}(\bar{y}, -\theta) = \bar{p}(\bar{y}, \theta) \quad (\text{II.25})$$

La pression est nulle sur le haut et le bas de la jupe :

$$\bar{p}(0, \theta) = \bar{p}(L, \theta) = 0 \quad (\text{II.26})$$

II.6 Équation de l'épaisseur du film

Le film d'huile séparant les surfaces du piston et du cylindre est montré sur la figure II.5. Les excentricités du haut et du bas de la jupe étant différentes à chaque instant, nous permettent d'obtenir un désalignement du piston dans le cylindre. L'équation du film lubrifiant donnant l'épaisseur du film est obtenue dans le repère cylindrique (r, θ, y) , r étant compris entre le rayon du piston R et le rayon du cylindre.

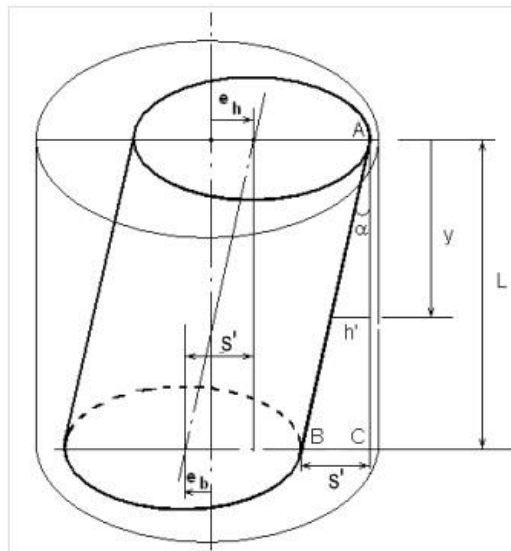


Figure II.5 : Géométrie du film lubrifiant.

II.6.1 Equation du film selon la direction circonférentielle

Considérons la section droite du haut de la jupe (figure II.6). Pour une configuration donnée, définie par une excentricité e_h dans cette section, correspond un film dont l'épaisseur h varie d'un point circonférentiel à un autre. Ce point peut être repéré par la coordonnée angulaire θ ce point l'épaisseur est donnée par :

$$h(\theta) = O_cM - O_cM' \quad (\text{II.27})$$

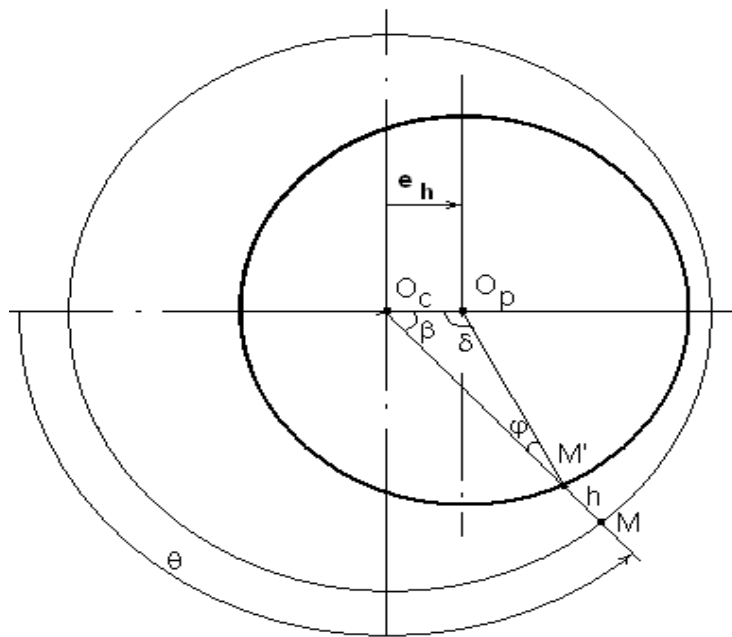


Figure II.6 : Géométrie du film dans la section du haut de la jupe.

Le premier terme est donné par

$$O_cM = R + c \quad (\text{II.28})$$

Appliquant la règle des sinus dans le triangle O_cO_pM' , on détermine le second terme :

$$\frac{O_cM'}{\sin \delta} = \frac{e_h}{\sin \varphi} = \frac{R}{\sin \beta} \quad (\text{II.29})$$

Les différents angles apparaissant dans cette expression peuvent être facilement déterminés.

La propriété de l'angle alterne externe donne :

$$\theta = \delta + \varphi$$

Soit :

$$\delta = \theta - \varphi \quad (\text{II.30})$$

$$\beta = \pi - \theta \quad \text{où :} \quad \sin \beta = \sin \theta$$

L'équation (II.29) donne :

$$\sin \varphi = \frac{e_h}{R} \sin \theta$$

Soit :

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{e_h}{R} \sin \theta \right)$$

L'équation (II.30) s'écrit :

$$\delta = \theta - \arcsin \left(\frac{e_h}{R} \sin \theta \right)$$

D'où :

$$O_c M' = \frac{R}{\sin \theta} \sin \left[\theta - \arcsin \left(\frac{e_h}{R} \sin \theta \right) \right]$$

En développant le sinus, on obtient :

$$O_c M' = R \sqrt{1 - \left(\frac{e_h}{R} \sin \theta \right)^2} - e_h \cos \theta$$

Soit :

$$O_c M' \approx R - e_h \cos \theta$$

D'où :

$$h(\theta) = R + c - (R - e_h \cos \theta)$$

Sachant que :

$$e_h = \varepsilon_h c$$

On obtient alors l'épaisseur du film dans la section transversale :

$$h(\theta) = c(1 + \varepsilon_h \cos \theta) \quad (\text{II.31})$$

Ou sous forme adimensionnelle :

$$\bar{h}(\theta) = 1 + \varepsilon_h \cos \theta \quad (\text{II.32})$$

II.6.2 Equation globale du film

Soit une section droite repérée par la coordonnée y (figure II.6). L'augmentation de l'épaisseur du film dans le plan perpendiculaire à l'axe du piston (plan contenant les lignes de poussée maximale et minimale) est représentée par la variable h' . En un point M' de cette section de coordonnée angulaire θ l'augmentation d'épaisseur est égale à $h' \cos \theta$ comme il est montré ci-dessus.

Dans le triangle ABC (figure II.5) on a :

$$\frac{h'}{y} = \frac{S}{L}$$

Sachant que

$$s = e_b - e_h$$

Il vient

$$h' = \frac{y}{L}(e_b - e_h)$$

L'épaisseur du film en un point M' de coordonnée θ située sur une section de coordonnée y est donc :

$$h(y, \theta) = c + e_h \cos \theta + \frac{y}{L}(e_b - e_h) \cos \theta \quad (\text{II.33})$$

II.7 Force de frottement :

II.7.1 Pression de contact de rugosité :

La pression de contact de rugosité est calculée selon Greenwood et Tripp [8]. La figure suivante montre deux surfaces approximatives avec les divers paramètres de rugosité qui sont :

- δ_i : Amplitudes aléatoires de rugosité avec la distribution gaussienne et la valeur moyenne nulle,
- σ_i : Écart type de δ_1, δ_2 respectivement,
- σ : Écart type de la rugosité combinée $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$,
- h : Hauteur de l'écart.

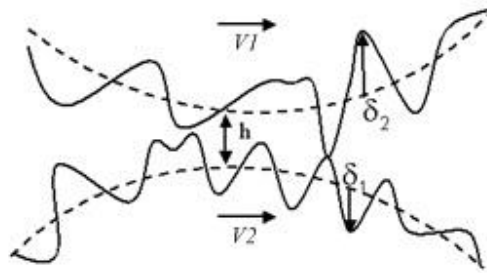


Figure II.7 : Contact rugueux.

Le calcul de la pression de contact de rugosité, P_C , selon Greenwood et Tripp [8] s'obtient par la relation ci-après.

$$P_C = K \cdot E' \cdot F(h/\sigma) \quad (\text{II.34})$$

Avec :

$$K = \left(8 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{15} \right) \cdot (N \cdot \beta \cdot \sigma)^2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} \quad \text{et} \quad E' = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 \cdot (1 - \nu_2^2) + E_2 \cdot (1 - \nu_1^2)}$$

Où :

- N : nombre d'aspérités par unité de superficie
- B : rayon de courbure moyen des aspérités

- σ : écart type de la rugosité combinée
- E_i : module de Young des pièces de contact
- H : hauteur de l'espace dans le contact
- $F(h/\sigma)$: fonction de pression de contact de rugosité

Pour la plupart des surfaces on a : $3.014^{-4} \leq K \leq 3.010^{-3}$

La fonction de pression de contact de rugosité peut être approximée par la relation suivante :

$$F(h/\sigma) = 1.0 \cdot (W - h/\sigma)^n \quad \text{pour } h/\sigma < W$$

$$F(h/\sigma) = 0 \quad \text{pour } h/\sigma \geq W$$

Où :

- W : paramètre de la limite basse de la fonction (valeur par défaut = 3.0)
- H : exposant de fonction (valeur par défaut = 3.0)

La force de friction totale sur la jupe de piston, est donnée par la somme des deux composantes, du frottement hydrodynamique, et du frottement de contact :

$$F_f = F_{fh} + F_{fc} \quad (\text{II.35})$$

La force de frottement due à la lubrification hydrodynamique, est donnée par :

$$F_{fh} = 2R \cdot \int_0^\pi \int_0^L \tau \cdot d\theta dx \quad (\text{II.36})$$

Où :

$$\tau = -\frac{\mu V}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p_h}{\partial x}$$

Et la force de friction due à la lubrification de frontière, est donnée par :

$$F_{fc} = -2C_f \frac{|V|}{V} R \cdot \int_0^\pi \int_0^L p_c d\theta dx \quad (\text{II.37})$$

Où le τ est l'effort de cisaillement agissant sur la surface de jupe de piston et le C_f est le coefficient de frottement de frontière.

II.8 Analyse de la température et de viscosité :

Afin de calculer le changement de la viscosité en fonction de la température, le profil de température doit d'abord être déterminé. La température d'huile varie tout à fait sensiblement aux positions centrales entre les points morts PMH et PMB.

La dépendance de la viscosité à l'égard la température est estimée en employant l'équation de Vogel [9].

$$\mu(T) = \mu_0 e^{a/(T-b)} = \rho_0 \nu_0 e^{a/(T-b)} \quad (\text{II.38})$$

Pour étudier l'influence de la viscosité sur les paramètres de contact, nous utilisons différentes vitesses de rotation du vilebrequin.

