

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

II.1. INTRODUCTION

La mécanique des fluides numérique (MFN), plus souvent désignée par le terme anglais computational fluid dynamics (CFD), consiste à étudier les mouvements d'un fluide, ou leurs effets, par la résolution numérique des équations régissant le fluide. En fonction des approximations choisies, qui sont en général le résultat d'un compromis en termes de besoins de représentation physique par rapport aux ressources de calcul ou de modélisation disponibles, les équations résolues peuvent être les équations d'Euler, les équations de Navier-Stokes, etc.

La MFN a grandi d'une curiosité mathématique pour devenir un outil essentiel dans pratiquement toutes les branches de la dynamique des fluides, de la propulsion aérospatiale aux prédictions météorologiques en passant par le dessin des coques de bateaux. Dans le domaine de la recherche, cette approche est l'objet d'un effort important, car elle permet l'accès à toutes les informations instantanées (vitesse, pression, concentration) pour chaque point du domaine de calcul, pour un coût global généralement modique par rapport aux expériences correspondantes. [17]

II.2. PRINCIPES DES CODES CFD

Les logiciels de simulation numérique des écoulements basés sur la méthode des volumes finis peuvent maintenant être considérés comme de véritables « expériences numériques », lorsqu'elles sont faites avec soin. L'avantage des « méthodes numériques » est que toutes les quantités physiques liées à l'écoulement (champ de vitesse, champ de pression, contraintes etc.), sont immédiatement disponibles en tout point de l'écoulement.

Dans une expérimentation, l'obtention de ces quantités physiques en tout point du champ est souvent impossible ou très difficile en pratique. Les méthodes CFD (Computational Fluid Dynamics) ont l'avantage de mettre en œuvre les équations générales de la mécanique des fluides avec un minimum des hypothèses. Elles résolvent notamment les équations non-linéaires instationnaires et compressibles. La discrétisation des équations de Navier-Stokes et de conservation de la masse est faite sur des éléments quadrilatéraux ou triangulaires, réguliers ou non selon la complexité de la géométrie. [18]

Le premier travail à accomplir dans la réalisation d'une simulation numérique est la définition d'un maillage adapté à la nature de l'écoulement. En particulier, le maillage doit être fin dans les zones où l'on atteint des gradients physiques très importants

II.3. LES METHODES NUMERIQUES

II.3.1. Les méthodes principales de discrétisation

Le passage d'un problème aux dérivées partielles continu à un problème discret s'appuie sur les méthodes classiques d'analyse numérique. On distingue trois grandes méthodes pour formuler un problème continu sous forme discrète, la méthode des différences finies, des éléments finis et des volumes finis.

II.3.1.1. Différences finis

Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points sur lesquels on approche les opérateurs de dérivation des équations modèles par des développements en séries de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie.

II.3.1.2. Eléments finis

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis réside dans le découpage du domaine d'étude en domaines élémentaires de dimension finie. Sur chacun de ces domaines, appelés éléments finis, la fonction inconnue est approchée par un polynôme dont le degré peut varier d'une application à l'autre mais reste en général faible. Ces éléments, triangles ou quadrilatères, rectilignes ou curvilignes, doivent réaliser une partition du domaine d'étude (ils sont disjoints et leur union recouvre le domaine tout entier). Cette partition qui est généralement appelée découpage ou discrétisation du domaine doit respecter un certain nombre de règles qui permettent d'assurer un bon déroulement du calcul.

II.3.1.3. Volumes finis

La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar (Numerical Heat Transfer and Fluid Flow). La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC). Les différentes étapes de la méthode des volumes finis sont :

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

- La discrétisation du domaine considéré en volume de contrôle.
- L'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles.
- Ecriture des équations algébriques aux nœuds du maillage.
- Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

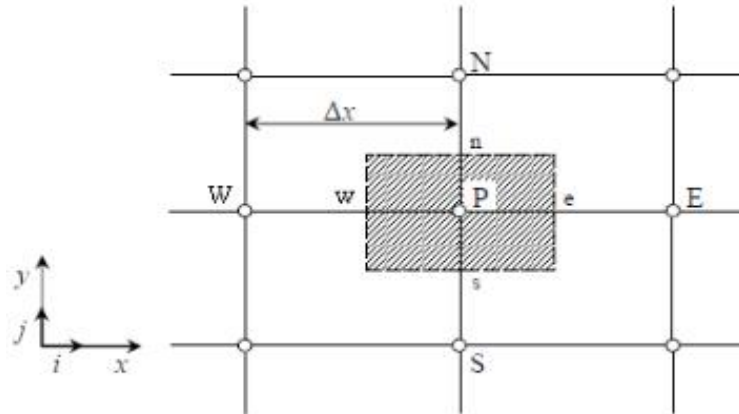


Figure II.1 : Fonctionnement de méthode volume fini

Le volume de contrôle est montré par la Figure (II.1), Pour un nœud principal P, les points E et W (Est et Ouest) sont des voisins dans la direction x, tandis que N et S (Nord et Sud) sont ceux dans la direction y. Le volume de contrôle entourant P est montré par les lignes discontinues. Les faces du volume de contrôle sont localisées aux points et w dans la direction x, n et s dans la direction y.

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire ϕ :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_{\mathbf{T}} + \underbrace{\sum_{j=1} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi)}_{\mathbf{C}} = \underbrace{\sum_{j=1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)}_{\mathbf{D}} + \underbrace{S_\phi}_{\mathbf{S}} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

T : Terme transitoire.

D : Terme de diffusion.

C : Terme convectif.

S : Terme source.

Nous venons de voir que, pour chaque variable ϕ , l'équation de transport s'écrit dans le cas stationnaire bidimensionnel :

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S_\phi \quad (\text{II.2})$$

Où : ϕ est la propriété transportée, Γ indique le coefficient de diffusion et S_ϕ le terme source. La discrétisation doit se faire au nœud P, ce qui donnera

$$\text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) + s_\phi = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + s_\phi = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$\int_{\Delta v} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_{\Delta v} \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dV + \int_{\Delta v} S dV = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx dy + \int_s^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dx dy + \bar{S}_\phi \Delta x \Delta y = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma A_y \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx + \int_s^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma A_x \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dy + \bar{S}_\phi \Delta x \Delta y = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w\right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s\right] + \bar{S}_\phi \Delta x \Delta y = 0 \quad (\text{II.8})$$

Les quantités à e, w, n et s des faces de contrôle sont évaluées en fonction des valeurs des nœuds au milieu des volumes de contrôle. Donc il faut considérer une variation linéaire des variables d'un nœud à un autre pour assurer la continuité du phénomène physique ce qui est plus réaliste. C'est une approximation linéaire.

Pour une grille uniforme on aura :

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_p}{2}; \quad \Gamma_n = \frac{\Gamma_n + \Gamma_p}{2}$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_p + \Gamma_E}{2}; \quad \Gamma_s = \frac{\Gamma_p + \Gamma_S}{2}$$

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

Ce qui donnera par le flux de diffusion :

$$\begin{aligned}\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e &= \Gamma_e A_e \left(\frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta x_{PE}} \right); & \Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n &= \Gamma_n A_n \left(\frac{\varphi_N - \varphi_P}{\delta y_{PN}} \right) \\ \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_w &= \Gamma_w A_w \left(\frac{\varphi_P - \varphi_W}{\delta x_{WP}} \right); & \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= \Gamma_s A_s \left(\frac{\varphi_P - \varphi_S}{\delta x_{SP}} \right)\end{aligned}$$

En remplaçant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma_e A_e \left(\frac{\varphi_E - \varphi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\varphi_P - \varphi_W}{\delta x_{WP}} \right) + \Gamma_n A_n \left(\frac{\varphi_N - \varphi_P}{\delta y_{PN}} \right) \\ - \Gamma_s A_s \left(\frac{\varphi_P - \varphi_S}{\delta x_{SP}} \right) + \bar{S}_\varphi \Delta x \Delta y = 0\end{aligned}\quad (\text{II.9})$$

S_φ Est la valeur moyenne du terme source sur le volume de contrôle, Quand le terme source dépend de la variable dépendante. Cette dépendance doit être exprimée par une relation linéaire, ceci permettra d'utiliser les méthodes de résolution des systèmes linéaires.

La linéarisation est l'évolution de la valeur moyenne qui peut être fonction de la variable dépendante, leur valeur est donc calculée à chaque itération à partir des nouvelles des variables S_φ dépendantes.

Le terme source sera linéarisé de façon à forcer la convergence, de sorte que :

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \varphi_P \quad (\text{II.10})$$

Où S_u est la partie constante qui ne dépend pas explicitement de S_p est la pente de ϕ_p .

Il est nécessaire que le coefficient S_p soit inférieur à zéro pour que la solution soit numériquement stable et que la convergence soit plus rapide. En arrangeant les termes on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) \varphi_P \\ = \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \varphi_W + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \varphi_E + \left(\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) \varphi_S + \left(\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) \varphi_N + S_u\end{aligned}\quad (\text{II.11})$$

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

Cette équation est sous la forme :

$$a_P \varphi_P = a_W \varphi_W + a_E \varphi_E + a_S \varphi_S + a_N \varphi_N + S_u \quad (\text{II.12})$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - S_P \quad (\text{II.13})$$

Avec

$$A_W = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} ; \quad A_E = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$$

$$A_S = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} ; \quad A_N = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$$

L'équation est appliquée pour chaque nœud du domaine de calcul. Pour le domaine adjacent au domaine limite, l'équation est modifiée pour incorporer les conditions aux limites. Le système d'équations algébriques linéaire résultant est résolu pour obtenir la distribution de la Propriété ϵ à tous les points.

II.4. LES MODELES DE FERMETURE

II.4.1. Modèle k - ϵ Standard

Le modèle K- ϵ est l'un des modèles de turbulence les plus courantes, bien que ça ne fonctionne pas bien dans les cas de forts gradients de pression indésirables. Il est un modèle à deux équations, ce qui signifie, il comprend deux équations de transport supplémentaires pour représenter les propriétés turbulentes de l'écoulement. Cela permet à un modèle à deux équations pour tenir compte des effets de l'histoire comme la convection et la diffusion de l'énergie turbulente. [19]

La première variable transportée est l'énergie cinétique turbulente k. La deuxième variable transportée dans ce cas est la dissipation turbulente ϵ . Il est la variable qui détermine l'échelle de la turbulence, alors que la première variable k, détermine l'énergie de la turbulence.

Il existe deux grandes formulations de modèles K- ϵ . Celle de Blanchir et Sharma est généralement appelé le "Standard" K- ϵ Modèle. L'impulsion initiale pour le modèle K- ϵ était

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

d'améliorer le modèle de mélange de longueur, ainsi que de trouver une alternative à la prescription algébriquement échelles de longueur turbulente modérée à flux haute complexité. Le modèle K- ϵ a été montré comme étant utile pour une connexion à cisaillement couche de flux relativement faibles gradients de pression. De même, pour les flux avec parois et internes, le modèle donne de bons résultats que dans les cas où signifient des gradients de pression sont de petite taille ; la précision a été démontrée expérimentalement pour être réduite pour les flux contenant des gradients de pression indésirables. On pourrait en déduire ensuite, que le modèle K- ϵ serait un choix inapproprié pour des problèmes tels que les entrées et les compresseurs.

- Equations de transport pour le modèle k- ϵ : [20]

Modélisation de viscosité turbulente :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + P_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \quad (\text{II.14})$$

Pour la dissipation ϵ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P_k + C_{3\epsilon} P_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon \quad (\text{II.15})$$

- Pour l'énergie cinétique turbulente :

Viscosité Turbulent est modélisée comme :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (\text{II.16})$$

Production de k

$$P_k = -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (\text{II.17})$$

$$P_k = \mu_t S^2 \quad (\text{II.18})$$

Où S est le module du tenseur moyen de vitesse de déformation, définie comme suit :

$$S \equiv \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \quad (\text{II.19})$$

Effet de la flottabilité

$$P_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{\rho r_t} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (\text{II.20})$$

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

Où Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent pour l'énergie et g_i est la composante du vecteur gravitationnel dans le sens $i^{\text{ème}}$. Pour les standards et réalisables - modèles, la valeur par défaut de Pr_t est de 0,85. Le coefficient de dilatation thermique, β , est défini comme étant :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{II.21})$$

Constantes de modèle :

$$C_{1\epsilon} = 1.44; \quad C_{2\epsilon} = 1.92; \quad C_{\mu} = 0.09; \quad \sigma_k = 1.0; \quad \sigma_{\epsilon} = 1.3$$

Note : $C_{3\epsilon}$ dépend de la littérature suivie et est destiné à être utilisé uniquement avec le terme P_b . Les valeurs possibles, en fonction de la référence de la littérature.

constante : $C_{3\epsilon} = -0.33$

II.4.2. Le modèle k- ϵ réalisable

Shih et ses collègues ont proposé un nouveau modèle k- ϵ afin d'améliorer la performance du modèle standard (Shih et al. 1995). Dans le nouveau modèle, la formulation de viscosité turbulente satisfait la contrainte mathématique de la positivité de la normale Reynolds souligné. Ceci est réalisé en faisant C variable et la sensibilisation à l'écoulement moyen (à savoir dire la déformation) et la turbulence (à savoir k et ϵ). En outre, le modèle k- ϵ de réalisation adopte une nouvelle équation de transport pour le taux de dissipation qui est basé sur l'équation dynamique de la fluctuation du tourbillon quadratique moyenne. La nouvelle équation du taux de dissipation est :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = C_{1\epsilon} S \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_{\epsilon}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{v \epsilon}} \quad (\text{II.22})$$

Les constantes de modèle σ_{ϵ} et $C_{2\epsilon}$ ont des valeurs de 1,2 et 1,9 respectivement, tandis que $C_{1\epsilon}$ est calculée à partir de :

$$C_{1\epsilon} = \max \left[0.43 \frac{\left(\frac{s^k}{\epsilon} \right)}{\left(\frac{s^k}{\epsilon} \right) + 5} \right] \quad (\text{II.23})$$

Où

$$C_{\mu} = \frac{1}{A_0 + A_s U^* \frac{k}{\epsilon}} \quad (\text{II.24})$$

Toutefois, afin d'assurer la positivité de Reynolds est normale insiste sur C_{μ} plus une constante et elle est calculée à partir de : $A_0 = 4.0$;

$$U^* = \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (\text{II.25})$$

$$A_s = \sqrt{6} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6} W) \right) \quad (\text{II.26})$$

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

$$W = \frac{\sqrt{8}S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{S^3} \quad (\text{II.27})$$

Où

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (\text{II.28})$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II.29})$$

Et le tenseur de verticité

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.30})$$

II.4.3. Le modèle k- ω standard

Contrairement au modèle k- ω (Standard), ce modèle n'a pas besoin de l'incorporation de fonctions non-linéaires pour la simulation à faibles nombres de Reynolds. Néanmoins, l'implémentation de ce modèle exige une taille de maille près des parois très fine, pas facilement réalisable dans la plupart des cas. Pour résoudre cela, une fonction de proximité des parois est incorporée. Elle garantit une transition lissée à partir de la formulation à bas nombre de Reynolds vers la loi de parois [22]. Les équations générales de ce modèle :

- Cinématique Eddy Viscosité

$$\nu_T = \frac{k}{\omega} \quad (\text{II.31})$$

- Energie cinétique de la turbulence

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma^* \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (\text{II.32})$$

- Dissipation spécifique Taux

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (\text{II.33})$$

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

Coefficients de fermeture et relations auxiliaires :

$$A=5/9 ; \quad b= 3/40 ; \quad b^*= 9/100 ; \quad c=1/2 ; \quad c^*=1/2 ; \quad e=b^* \cdot w \cdot k$$

II.4.4. Le modèle de stress Reynolds

Le modèle de stress Reynolds implique le calcul de l'individu Reynolds souligne $U'iU'j$ en utilisant des équations de transport différentiel (Gibson et Launder, 1978) et (Launder, 1989). Les tensions de Reynolds individuels sont ensuite utilisées pour obtenir la fermeture de l'équation de mouvement Reynolds moyenne, évitant ainsi l'utilisation de l'approximation de la viscosité turbulente qui a été prouvé pour effectuer mal dans de nombreux types de flux. La forme exacte des équations de transport de stress Reynolds peut être obtenue en prenant des moments de l'équation de la dynamique exacte. Ceci est un processus dans lequel les équations cinétiques exactes sont multipliées par une propriété fluctuante, le produit étant alors le stress Reynolds en moyenne. Malheureusement, plusieurs des termes de l'équation exacte sont inconnus et les hypothèses de modélisation sont nécessaires afin de fermer les équations [21]. Les équations de transport exactes pour le transport des tensions de Reynolds, sont :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u'_i u'_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u_k u'_i u'_j}) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} + \overline{p (\delta_{kj} u'_i + \delta_{ik} u'_j)} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j}) \right] - \rho \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \rho \beta (\overline{g_i u'_j \theta} + \overline{g_j u'_i \theta}) \\ &+ p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} 2\rho \Omega_k \left(\overline{u'_j u'_m} \varepsilon_{ikm} + \overline{u'_i u'_m} \varepsilon_{jkm} \right) \end{aligned} \quad (II.34)$$

Certains termes de ces équations exactes, à savoir la convection, diffusion moléculaire, la production de stress, et de la production par la rotation du système ne nécessitent pas de modélisation. Toutefois, la diffusion turbulente, la production de la flottabilité, la contrainte de pression et dissipation doivent être modélisée pour fermer les équations. De nombreuses approximations ont été faites pour fermer ces équations.

II.4.5. Simulation des Grandes Echelles (LES)

LES peut être considéré comme une technique intermédiaire entre DNS et RANS. L'ancien consiste à résoudre toutes les échelles de la turbulence, même les plus petits. Ceci est accompli en utilisant des schémas numériques conçus pour minimiser les erreurs de dispersion et de dissipation

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

numérique. Dans ce dernier l'effet des fluctuations de turbulence apparaît dans le terme de stress Reynolds. Pour fermer le système d'équations, cet inconnu Reynolds terme de stress est fermée à l'aide des approximations de fermeture et des constantes déterminées expérimentalement. À LES, cependant, les grandes échelles sont calculées, et les petites échelles sont modélisés. Étant donné que les petites échelles ont tendance à être isotrope et problème indépendant, il y a un plus grand potentiel pour développer des modèles universels pour ces échelles que pour les équations RANS. [21]

II.4.6. Eddy simulation détaché (DES)

LES semble être un outil fiable et prometteur pour prédire les écoulements turbulents, en particulier ceux qui sont dominés par des structures anisotropes tourbillonnaires à grande échelle. Toutefois, les dépenses informatiques empêchent LES d'être largement adopté par la communauté industrielle. Ces dépenses de calcul résident dans l'exigence d'une grille très fine et un pas de temps petit dans l'ordre des tourbillons résolus plus petits. La stratégie de couplage LES avec RANS statistique vise à réduire le coût de calcul de la simulation numérique, ce qui rend LES calculs plus possible pour un plus large éventail de flux complexes industriels. L'insuffisance de la mise en œuvre des ERP pour les flux de cisaillement induite murales est une autre motivation pour le couplage LES / RANS. Fermé aux murs, le débit est dominé par les petits tourbillons. Ceci requiert la taille de la grille doit être réduite de façon considérable afin d'avoir un calcul ERP réussie. En outre, comme le nombre de Reynolds augmente, l'effort de calcul devient dépendant du nombre de Reynolds d'une manière similaire au DNS. Par conséquent, l'idée d'utiliser un modèle RANS près du mur permettra de réduire le coût de calcul de manière significative et de faire le calcul indépendant du nombre de Reynolds. L'approche DES combine une version instable RANS avec une version filtrée du même modèle pour créer deux régions distinctes à l'intérieur du domaine de flux : celui qui est basé-LES et un autre qui est proche de la paroi où la modélisation est dominée par la base RANS-the approche (Shur et al. 1999). La région LES est normalement associée à la région turbulente haute Re noyau où de grandes échelles de turbulence jouent un rôle dominant. Dans cette région, le modèle DES récupère le modèle LES pur. Près de la paroi, où les effets visqueux prévalent, le modèle RANS standard est récupéré. Le commutateur entre les deux approches est réalisé par un critère automatisé et soulage l'utilisateur de sa spécification. [21]

II.5. PROPRIETES DES FLUIDES PHYSIQUES :

II.5.1. La pression

La pression est une notion physique fondamentale. Elle correspond à la force par unité de surface qu'exerce un fluide ou un solide sur celle-ci. Il s'agit d'une grandeur scalaire dont l'unité dans le système international d'unités (SI) est le pascal (Pa), lequel correspond à une force de un newton par mètre carré. [4]

En tant que paramètre physique, la pression, tout comme la température, joue un rôle extrêmement important dans la plupart des domaines.

II.5.2. La température

La température est une grandeur physique mesurée à l'aide d'un thermomètre et étudiée en thermométrie. Dans la vie courante, elle est reliée aux sensations de froid et de chaud, provenant du transfert thermique entre le corps humain et son environnement. En physique, elle se définit de plusieurs manières : comme fonction croissante du degré d'agitation thermique des particules (en théorie cinétique des gaz), par l'équilibre des transferts thermiques entre plusieurs systèmes ou à partir de l'entropie (en thermodynamique et en physique statistique). La température est une variable importante dans d'autres disciplines : météorologie et climatologie, médecine, et chimie. [5]

L'échelle de température la plus répandue est le degré Celsius (°C), L'unité légale de température dans le système international est le **kelvin** de symbole (**K**) (noter l'absence du symbole , car ce n'est pas une échelle de mesure). Il existe d'autres systèmes de mesures antérieurs et toujours utilisés : les échelles Celsius, centigrade, Fahrenheit et Rankine.

II.5.3. Masse volumique

La masse volumique (ρ) d'un fluide influe sur le débit, car un fluide plus dense exige une charge supérieure pour maintenir le débit désiré. Le fait que les gaz soient compressibles, alors que les liquides ne le sont pas par essence, exige en outre souvent l'utilisation de méthodes différentes pour mesurer des débits de liquides, de gaz ou de liquides contenant des gaz [6]. Elle est donnée par la relation :

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ÉCOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

$$\rho = \frac{m}{v} \quad (\text{II.35})$$

II.5.4. Viscosité

C'est la résistance d'un fluide à son écoulement uniforme et sans turbulence. En fonction de la viscosité du fluide, la répartition de la vitesse du fluide n'est pas la même sur toute la surface [6].

La viscosité dynamique (μ), ou friction moléculaire à l'intérieur d'un fluide, a un effet négatif sur le débit des fluides. La viscosité et le frottement de la conduite réduisent le débit du fluide près des parois de la conduite. La viscosité augmente ou diminue en fonction des variations de température, mais pas toujours comme on pourrait s'y attendre. La viscosité des liquides diminue habituellement à mesure que la température augmente selon la relation :

$$\mu = \frac{\tau_t}{\frac{dV}{dZ}} \quad (\text{II.36})$$

Dans certains fluides, cependant, la viscosité peut se mettre à augmenter au-dessus de certaines températures. En général, plus la viscosité d'un fluide est élevée et plus le débit est faible (les autres facteurs restant constants). Un autre type de viscosité, appelé viscosité cinématique, elle est donnée par le rapport de la viscosité dynamique et la masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{II.37})$$

II.5.5. Le coefficient de compressibilité

La compressibilité est une caractéristique d'un corps, définissant sa variation relative de volume sous l'effet d'une pression appliquée. C'est une valeur très grande pour les gaz, faible pour les liquides et très faible pour les solides usuels [7].

Elle se définit comme :

$$x = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dP} \quad (\text{II.38})$$

Où v est le volume du corps et P la pression appliquée. Il s'exprime donc en Pa^{-1} .

La variation de volume avec la pression étant le plus souvent négative, cette définition rend la compressibilité x positive.

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

Cette définition est le plus souvent insuffisante : sous l'effet d'une compression, les corps ont tendance à s'échauffer, et donc on définit une compressibilité isotherme pour un corps restant à température constante :

$$\alpha_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \quad (\text{II.39})$$

II.6. EQUATIONS DE BASE DE LA MECANIQUE DES FLUIDES (EQUATIONS GOUVERNANTES)

II.6.1. Equation de conservation de masse

L'équation de conservation de masse est donnée par la relation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.40})$$

Pour un écoulement permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) et un fluide incompressible ($\rho = \text{constante}$),

l'équation de conservation de masse s'écrit :

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.41})$$

Cette équation est dite équation de continuité.

II.6.2. Equations de mouvement

L'application de la deuxième loi fondamentale de la dynamique à une particule fluide en mouvement mène aux équations de conservation de quantité de mouvement (Navier – Stokes).

Pour un écoulement incompressible ($\rho = \text{Constante}$) à viscosité constante ($\mu = \text{Constante}$), les équations de Navier- Stokes s'écrivent comme suit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{II.42})$$

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ÉCOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

Où l'opérateur mathématique $\frac{d}{dt}$ est la dérivée Lagrangienne, ∇_p la résultante de la force de pression, $\mu\nabla^2\vec{V}$ la résultante des forces visqueuses et $\rho\vec{g}$ la résultante des forces volumiques.

II.6.3. Equation de l'énergie

Elle se déduit de la relation traduisant le premier principe de la thermodynamique, elle est donnée par :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \nabla[\lambda\nabla T] + T\bar{\beta} \frac{dP}{dt} + \varphi + P_s \quad (\text{II.43})$$

φ Est donnée par :

$$\varphi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{II.44})$$

Pour un écoulement à dissipation négligeable ou à vitesse modérée pour les gaz (négligeable), à conductivité thermique λ constante, sans source interne ($P_s = 0$) [8].

II.6.4. Equation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli exprime la conservation de l'énergie mécanique totale le long d'une veine de courant [9], elle est donnée par :

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + Z = \text{const} \quad (\text{II.45})$$

Avec $\frac{1}{2}\rho V^2$ l'énergie cinétique, et $\rho g Z$ l'énergie potentielle :

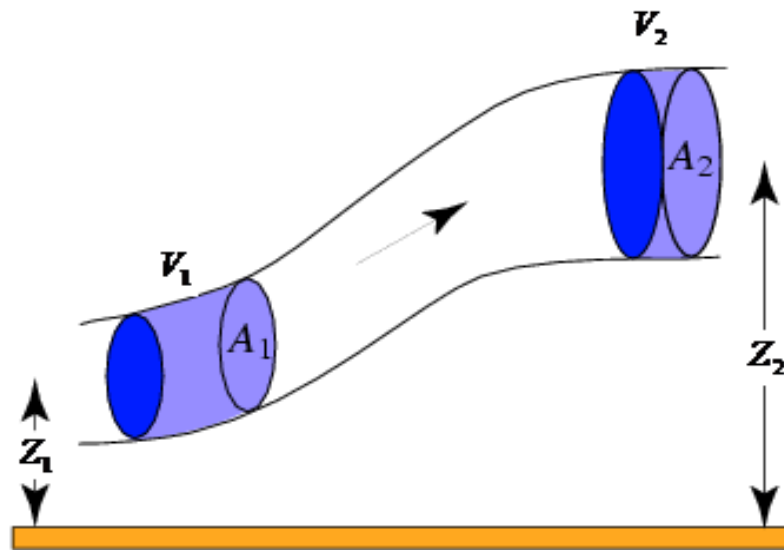


Figure II.2 : Théorème de Bernoulli appliqué entre deux points.

II.7. REGIMES D'ECOULEMENT

En 1883, Osborne Reynolds travailla sur les différents régimes d'écoulement d'un fluide. Il mit en place une expérience qui lui permit de définir les différents régimes d'écoulement. Cette expérience consiste à visualiser la stabilité d'un très fin filet coloré dans un écoulement). L'objectif est d'étudier le comportement de ce filet pour différents régimes en conduite par la variation du débit d'alimentation de l'écoulement [10].

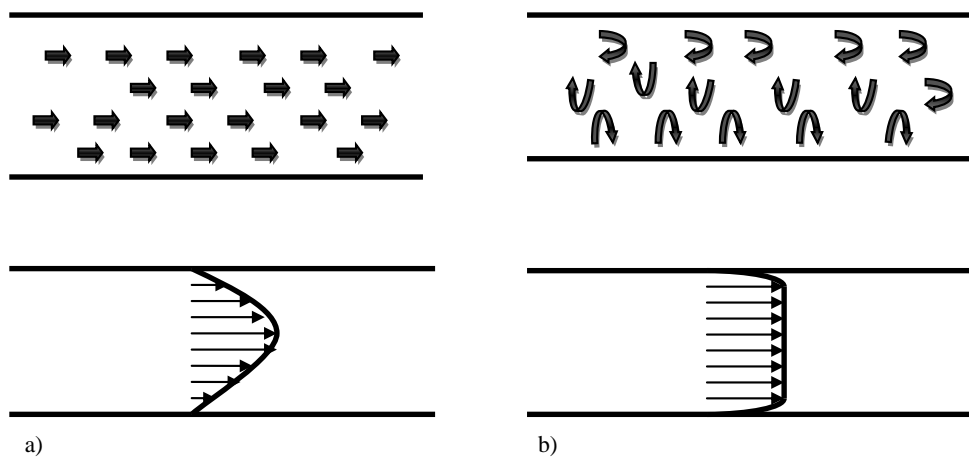


Figure II.3 : Régime d'écoulement : a) régime laminaire ; b) régime turbulent.

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ÉCOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

II.7.1. Le nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds (**Re**) est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, turbulent) [11].

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en adimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante :

$$Re: \frac{VL}{\nu} \quad (\text{II.46})$$

Avec :

- V, vitesse caractéristique du fluide [m/s]
- L, dimension caractéristique [m]
- ν , viscosité cinématique du fluide [m²/s]

Avec :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{II.47})$$

- ρ , masse volumique du fluide [kg/m³]
- μ , viscosité dynamique du fluide [Pa.s ou kg/ (m.s) ou poiseuille Pl, ou encore un dixième de poise PO]

En fonction des nombres de Reynolds croissants, on distingue quatre régimes principaux : régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire, régime turbulent.

L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1). Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine de la micro fluidique. Pour des valeurs plus élevées, les forces d'inertie entrent en jeu : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

On observe d'abord un écoulement laminaire avec des lignes de courant bien identifiées. Dans ce type d'écoulement l'effet de la viscosité s'atténue au fur et à mesure que l'on s'éloigne

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

des parois, les vitesses du fluide tendant à s'homogénéiser. Il est alors souvent commode de considérer que l'approximation du fluide parfait (non visqueux) est suffisante hors d'une zone proche d'une paroi, appelée couche limite. Cette dernière concentre les effets visqueux qui peuvent y être modélisés sous une forme simplifiée.

À partir d'un certain Reynolds se produit une transition qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des perturbations. La valeur du Reynolds de transition et la nature des instabilités dépendent essentiellement du type d'écoulement considéré.

Ensuite, les instabilités augmentent au point de donner naissance à un phénomène chaotique dans lequel il est difficile de voir une organisation : c'est la turbulence. Si les vitesses d'écoulement sont importantes, on parle alors d'écoulements turbulents. Dans ce cas, si une petite perturbation est introduite dans le fluide, elle s'intensifie. Le mouvement n'a plus le caractère permanent d'un régime laminaire. Les trajectoires s'enchevêtrent inextricablement et il devient impossible de décrire avec exactitude l'écoulement. Pour concrétiser ses résultats,

Un écoulement est dit parfait si tous les phénomènes diffusifs, en particulier la viscosité, sont négligeables.

La limite de la viscosité nulle $\eta \rightarrow 0$ revient à considérer $Re \rightarrow \infty$

Si : $Re < 2000$: écoulement laminaire

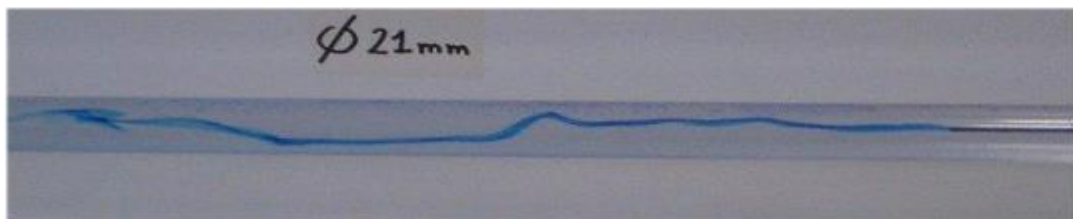


Figure II.4 : Ecoulement laminaire

Si : $2000 < Re < 4000$, on observe un régime de transition, où l'écoulement entre le Régime laminaire et le régime turbulent.

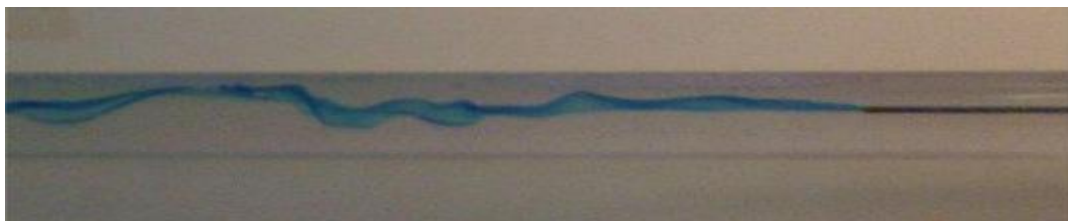


Figure II.5 : Régime de transition

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ÉCOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

Si : $Re > 4000$: écoulement turbulent

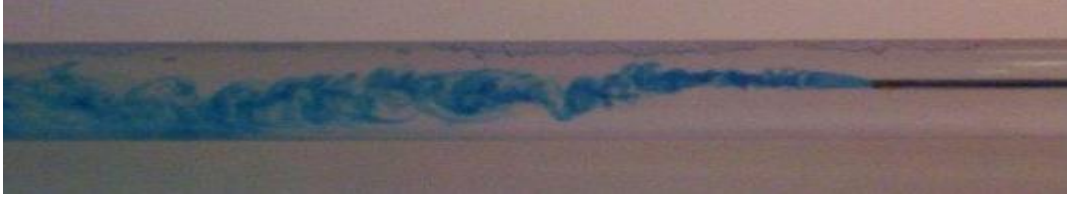


Figure II.6 : Ecoulement turbulente

II.8. EQUATIONS DE BILAN

La modélisation mathématique d'un écoulement turbulent est fondée sur les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et d'énergie. Dans le cas des fluides incompressibles et de densité constante [13], ces lois s'expriment en notation tensorielle de la façon suivante :

- Equation de continuité (Conservation de la masse) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (\text{II.48})$$

u : est la composante de la vectrice vitesse selon l'axe (j)

- Equations de Navier – Stokes (Conservation de la quantité de mouvement) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] \quad (\text{II.49})$$

- Equations d'énergie (Conservation d'énergie) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h_m) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_j h_m) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (\text{II.50})$$

Où :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (\text{II.51})$$

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ÉCOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

Représente la dissipation visqueuse, et h_m est l'enthalpie massique relia à la température par la relation :

$$h_m = \int_{T_{ref}}^T c_p dT \quad (\text{II.52})$$

II.9. PERTES DE CHARGES

En mécanique des fluides, la perte de charge correspond à la dissipation, par frottements, de l'énergie mécanique d'un fluide en mouvement sous forme de chaleur¹. Les lois de perte de charge font la distinction entre :

- Les pertes de charges linéaires.
- Les pertes de charges singulières.

Cette énergie doit être compensée afin de permettre au liquide de se déplacer. On l'exprime couramment sous la forme d'une pression (on l'appelle aussi ΔP), bien qu'elle soit en fait représentative d'une dissipation d'énergie et qu'elle apparaisse dans l'équation de Bernoulli comme une hauteur de colonne de fluide. [15]

Lorsque l'on est en présence de frottements, le théorème de Bernoulli ne s'applique plus et la charge n'est plus constante. On parle alors de perte de charge.

On utilise dans ce cas le théorème de Bernoulli généralisé, qui s'écrit :

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\Delta p}{\rho g} \quad (\text{II.53})$$

Où :

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h \quad (\text{II.54})$$

Où le terme Δh représente la dissipation d'énergie (exprimée en mètres) entre le point **1** (en amont) et **2** (en aval de l'écoulement).



Figure II.7 : Conduit

CHAPITRE II : METHODES NUMERIQUES ET CARACTERISTIQUE D'ECOULEMENT ET PRESENTATION DES CFD

Dans le cas d'un fluide incompressible, si la section du tuyau est constante, alors la vitesse est également constante. L'altitude z étant imposée par l'installation de la canalisation, on voit que la perte de charge se traduit par une diminution de pression.

II.9.1. Les pertes de charges linéaires

Elles sont dues aux frottements du fluide sur la paroi interne des tuyauteries.

On montre que dans ce cas :

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho v^2 L}{2 D} \quad (\text{II.55})$$

$$\Delta h = \frac{v^2 L}{2g D} \quad (\text{II.56})$$

Si l'écoulement est laminaire ($Re < 2000$)

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (\text{II.57})$$

Si l'écoulement est turbulent, on utilise des abaques.

II.9.2. Les pertes de charges singulières

Relation expérimentale :

$$\Delta p = K \frac{\rho v^2}{2} \quad (\text{II.58})$$

Où

$$\Delta h = K \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II.59})$$

La valeur de K est donnée par des tableaux expérimentaux.

II.10. CONCLUSION

Le chapitre, présente les méthodes numériques (différences finis, éléments finis, volumes finis), les modèles de fermeture $k-\varepsilon$ et $k-\omega$, et ces équations utilisées par le logiciel de simulation CFX.