

**II.1. Introduction:**

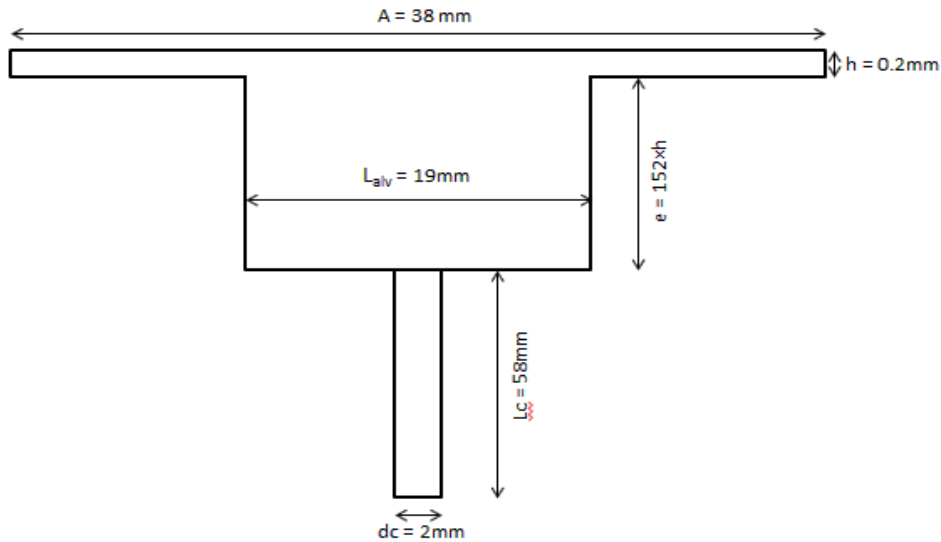
Les résultats obtenus par les méthodes numériques sont toujours accompagnés d'erreurs et des incertitudes de calcul dues à l'accumulation des petites erreurs ou à la précision des algorithmes utilisés dans le calcul, et sans la comparaison par les résultats expérimentaux ou analytiques, ils ne peuvent pas être considérée comme valide et fiable pour l'application dans la réalité, parce qu'ils peuvent conduire à des erreurs catastrophiques.

L'objectif principal de ce chapitre est l'amélioration de la convergence dans une interaction lubrifiant-grain mobile d'un palier hydrostatique, après une validation d'un modèle de palier infiniment long simulé par ANSYS CFX par la solution analytique obtenue par l'application des hypothèses simplificatrices. Cette validation nous a permis de faire la simulation d'un modèle plus complexe où il n'y a pas de solution analytique.

**II.2. Modèle physique:**

La butée infiniment longue étudiée dans ce chapitre est un cas particulier des butées hydrostatiques, elle comprend une alvéole infiniment longue suivant l'axe ( $Z$ ) cela veut dire que les caractéristiques physiques de butée ne changent pas suivant cette direction, cette hypothèse est simplifiée notre problème en 3D à un problème plan plus simple à résoudre analytiquement.

L'alvéole utilisée dans cette étude est considérée profonde. La profondeur de cette dernière est 152 fois de l'épaisseur de film lubrifiant, pour concrétiser la supposition de la pression constante dans l'alvéole. L'épaisseur de film lubrifiant est calculé analytiquement après il sera utilisé dans la simulation. Les autres dimensions de la butée hydrostatique sont représentées sur la figure suivante.



**Figure II.1:** Les dimensions de l'alvéole.

### II.3. Formulation mathématique:

#### II.3.1. La solution analytique d'une butée à alvéole infiniment longue:

On va simplifier l'équation de conservation de masse pour les paliers par des hypothèses de simplifications pour obtenir une équation qui décrit la conservation de masse dans un palier infiniment long. Après on va déterminer analytiquement les caractéristiques de ce palier.

#### Hypothèse du palier à alvéole infiniment long:

L'équation de conservation de la masse (débit massique) permet d'écrire:

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} + \frac{\partial m}{\partial t} = \dot{m}_{out} + \frac{\partial (\rho_f V_{al})}{\partial t}$$

$\dot{m}_{in}$  : Masse du fluide entrant par la résistance capillaire

$\dot{m}_{out}$  : Masse du fluide sortant de l'alvéole

$\partial m / \partial t$  : Variation temporelle de la masse à l'intérieur de l'alvéole dû principalement à la variation du volume

$\rho_f$  : Densité du fluide

$V_{al}$  : Volume de l'alvéole

L'équation de conservation de la masse peut s'écrire comme suit:

$$\rho_f Q_r = \rho_f Q_o + \rho_f \frac{\partial V_{al}}{\partial t} + V_{al} \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

$Q_r, Q_o$  : Les débits volumiques entrant par le capillaire et sortant de la zone du film.

$\frac{\partial V_{al}}{\partial t}$  : Variation du volume de l'alvéole.

Où:

$$\frac{\partial V_{al}}{\partial t} = \iint \vec{h} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

L'alvéole est considérée infiniment longue.

Si on considère une largeur d'une unité  $L_z$  l'équation sera:

$$\frac{\partial V_{al}}{\partial t} = \int_0^{L_x} \vec{h} \cdot \vec{n} \cdot dx$$

L'épaisseur du film est indépendante de l'espace (c.à.d.  $h \neq f(x, z)$ ) :

La surface totale est  $S_a = L_z (2L_x + L_{alv})$

Avec :  $L_{alv}$  longueur de l'alvéole suivant la direction x.

$$\frac{\partial V_{al}}{\partial t} = L_z (2L_x + L_{alv}) \dot{h} = L_z (2L_x + L_{alv}) \frac{\partial h}{\partial t}$$

Le sens de la vitesse doit être pris en compte. Si  $h$  augmente avec le  $t$ , c.à.d. le grain mobile est en ascension (mouvement de remonté) la vitesse est positive. Dans ce cas le fluide est aspiré par le mouvement du grain mobile.

Le sens négatif de la vitesse signifie un écrasement du lubrifiant entre la surface du grain mobile et le palier.

Le coefficient de compressibilité est donné par :  $\beta = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial P_r}$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial \rho_f}{\partial P_r} \frac{\partial P_r}{\partial t} = \rho_f \beta \frac{\partial P_r}{\partial t} \Rightarrow \rho_f Q_r = \rho_f Q_o + \rho_f \frac{\partial V_{al}}{\partial t} + V_{al} \rho_f \beta \frac{\partial P_r}{\partial t}$$

La densité peut être simplifiée, pour obtenir:

$$Q_r = Q_o + \frac{\partial V_{al}}{\partial t} + V_{al} \beta \frac{\partial P_r}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

**Cas du fluide incompressible:**  $\beta = 0$

L'équation (II.1) devient:

$$Q_r = Q_o + \frac{\partial V_{al}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

**Le débit volumique entrant par le capillaire:**

Le débit volumique entrant par le capillaire peut s'écrire comme suit:

$$Q_r = \frac{\pi d_c^4}{128 \mu L_c} (P_s - P_r) \quad (\text{II.3})$$

$d_c, L_c, P_s$  : sont le diamètre du capillaire, sa longueur et la pression de l'alimentation respectivement.

**Le débit volumique sortant de la zone du film mince:**

Le palier est considéré infiniment long (dans la direction z), donc le débit dans la direction axiale (z) peut être négligé devant le débit dans la direction x:

$$Q_z \ll Q_x$$

A cause de la symétrie on ne considère que la partie du débit dans la direction +x positive et on le multiplie par deux :

$$Q_o = 2u_{xm} S_s = 2L_z h u_{xm} \quad (\text{II.4})$$

$u_x, u_{xm}, S_s$  : sont la vitesse du fluide dans la direction x (fonction de y), la vitesse moyenne dans la direction x et la superficie de la zone de sortie du fluide respectivement.

$$u_{xm} = \frac{\int_0^h u_x dy}{h}$$

La vitesse d'un écoulement de fluide newtonien entre deux plaque parallèles est donnée par:

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (y-h)y \quad \Rightarrow \quad u_{xm} = \frac{\int_0^h \left( \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (y-h)y \right) dy}{h}$$

Le débit sortant est donc devient:

$$Q_o = - \frac{L_z h^3}{6\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=L_x} \quad (II.5)$$

D'après les équations (II.2) (II.3) et (II.5) on obtient:

$$\underbrace{\frac{\pi d_c^4}{128\mu L_c} (P_r - P_s)}_{\text{Débit à travers le capillaire}} = - \underbrace{\frac{L_z h^3}{6\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=L_x}}_{\text{Débit sortant}} + \underbrace{L_z (2L_x + L_{alv}) \dot{h}}_{\text{Débit dû à la variation du volume}} \quad (II.6)$$

**Recherche du gradient de pression dans le film mince  $\frac{\partial P}{\partial x}$  :**

La pression dans le film mince est régie par l'équation de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (II.7)$$

$U$  : Vitesse de glissement, c.à.d. vitesse de la surface mobile dans la direction x, elle est nulle ainsi que

la variation spatiale de l'épaisseur  $\frac{\partial h}{\partial x}$

$\frac{\partial h}{\partial t} = \dot{h}$  : est la vitesse d'écrasement.

L'hypothèse du palier infiniment long permet d'écrire :  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

$$(II.7) \Rightarrow \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 12\dot{h} \quad (II.8)$$

$$P(x) = \frac{6\mu\dot{h}}{h^3} x^2 + C_1 x + C_2$$

Avec les conditions aux limites :  $\begin{cases} P(0) = P_f \\ P(L_x) = P_0 \end{cases}$

$P_f$  : est la pression dans l'entrée de la zone du film mince.

$P_0$  : est la pression à la sortie de la zone du film mince, elle est souvent considérée nulle (atmosphérique).

Après identification de  $C_1$  et  $C_2$  l'expression de la pression dans le film mince sera:

$$P(x) = \frac{6\mu\dot{h}}{h^3} x^2 + \left( \frac{(P_0 - P_f)}{L_x} - \frac{6\mu\dot{h}L_x}{h^3} \right) x + P_f \quad (II.9)$$

Si la vitesse d'écrasement est nulle  $\dot{h} = 0$  on obtient:

$$P(x) = \frac{(P_0 - P_f)}{L_x} x + P_f$$

Et le gradient spatial de (II.9) est:

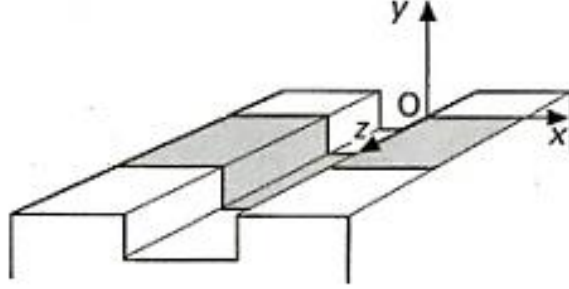
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{12\mu\dot{h}}{h^3} x + \left( \frac{(P_0 - P_f)}{L_x} - \frac{6\mu\dot{h}L_x}{h^3} \right) \quad (II.10)$$

A l'entrée de la zone du film mince  $x=0$ :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{6\mu\dot{h}}{h^3} L_x + \frac{(P_0 - P_f)}{L_x} \quad (II.11)$$

A la sortie de la zone du film mince  $x = L_x$ :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=L_x} = \frac{6\mu\dot{h}}{h^3} L_x + \frac{(P_0 - P_f)}{L_x} \quad (\text{II.12})$$



**Figure II.2:** Vue perspective d'une butée plane infiniment longue.

On remplace le gradient de la pression (II.10) dans l'équation de débit sortant (II.5) on obtient:

$$Q_{sortie} = \frac{h^3 L_z}{6\mu L_x} \left( (P_f - P_0) - \frac{6\mu\dot{h} L_x^2}{h^3} \right) \quad (\text{II.13})$$

Et l'équation (II.6) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\pi d_c^4}{128\mu L_c} (P_r - P_s) &= \frac{h^3 L_z}{6\mu L_x} \left( (P_f - P_0) - \frac{6\mu\dot{h} L_x^2}{h^3} \right) + L_z (2L_x + L_{atv}) \dot{h} \\ \Rightarrow \frac{\pi d_c^4}{128\mu L_c} (P_s - P_r) &= \frac{h^3 L_z}{6\mu L_x} (P_f - P_0) + L_z L_x \dot{h} + L_z \dot{h} L_{atv} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Si l'effet d'inertie est négligeable alors :  $P_r = P_f$

Si en plus on choisit la pression à la sortie du film mince nulle  $P_0 = 0$

L'équation (II.13) devient:

$$\frac{\pi d_c^4}{128\mu L_c} (P_s - P_r) = \frac{h^3 L_z}{6\mu L_x} P_r + L_z L_x \dot{h} + L_z \dot{h} L_{atv}$$

$$\text{Avec: } K_c = \frac{\pi d_c^4}{128 L_c}, \quad K_Q = \frac{L_z}{6 L_x}$$

$$\frac{K_c}{\mu} (P_s - P_r) = K_Q \frac{h^3}{\mu} P_r + L_z L_x \dot{h} + L_z \dot{h} L_{alv}$$

$$\text{Alors: } P_r = \frac{K_c P_s - \mu L_z \dot{h} (L_x + L_{alv})}{K_Q h^3 + K_c} \quad (\text{II.15})$$

Si on suppose que le grain mobile soit fixe, c-à-dire la vitesse d'écrasement est nulle  $\dot{h} = 0$ , l'équation (II.15) sera:

$$P_r = \frac{K_c P_s}{K_q h^3 + K_c} \Rightarrow P_r = \frac{P_s}{\frac{K_q}{K_c} h^3 + 1} \quad (\text{II.16})$$

La force de portance, ou la charge générée par la pression est obtenue en intégrant le champ de pression sur la surface totale :

$$W = \int P(x, z) dS = L_z \int_0^{L_{alv}} P_r dx + 2L_z \int_0^{L_x} P dx$$

$P_r$  est constante et après intégration on obtient:

$$W = L_z L_{alv} P_r + (P_0 + P_f) L_z L_x - \frac{2\mu \dot{h}}{h^3} L_z L_x^3 \quad (\text{II.17})$$

Pour  $P_0 = 0$  et  $P_r = P_f$  (l'effet d'inertie est négligeable)

$$W = (L_{alv} + L_x) L_z P_r - \frac{2\mu \dot{h}}{h^3} L_x^3 L_z \quad (\text{II.18})$$

Si  $\dot{h} = 0$  l'équation (II.18) devient:

$$W = (L_{alv} + L_x) L_z P_r \quad (\text{II.19})$$

$$\text{Or que: } P_r = \frac{P_s}{\frac{K_q}{K_c} h^3 + 1}$$



$$\Rightarrow W = \frac{(L_{alv} + L_x)L_z P_s}{\frac{K_q}{K_c} h^3 + 1} \quad (\text{II.20})$$

Pour l'équilibre statique il faut que  $W = F$  où  $F = Mg$ .

$$\Rightarrow h = \left( \frac{K_c}{K_q} \left[ \frac{(L_{alv} + L_x)L_z P_s}{F} - 1 \right] \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{II.21})$$

En posant  $\frac{1}{\beta_0} = \frac{P_s}{P_r}$  l'équation (II.16) donne :

$$\beta_0 = \frac{1}{1 + \frac{K_q}{K_c} h^3} \quad (\text{II.22})$$

### II.3.2. Résultats analytiques:

On va faire une application numérique pour calculer les caractéristiques du palier à partir des valeurs numériques données par le tableau suivant:

Paramètres	unités SI
Masse M de grain mobile	8 Kg
Pression d'entrée $P_s$	2.01813e+5 Pa
La gravité g	9.814 N/Kg
Pression à la sortie $P_0$	0 Atms

**Tableau II.1:** Les paramètres de calcul.

Les autres paramètres sont donnés sur le modèle de la géométrie du palier.

Les résultats obtenus pour ces paramètres sont:

- La pression d'alvéole:  $P_r = 1.4478 \times 10^5 \text{ Pa}$ .
- La force générée par le fluide:  $W = 78.40 \text{ N}$ .
- L'épaisseur de film lubrifiant:  $h = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$ .

## II.4. Méthode numérique par logiciel ANSYS CFX:

### II.4.1. Le logiciel ANSYS CFX:

Parmi les codes commerciaux les plus connus dans la mécanique de fluide on trouve ANSYS CFX, cet outil est utilisé pour la conception et l'analyse des systèmes. Elle peut simuler l'écoulement de fluide dans un environnement virtuel, il utilise l'analyse numérique et les algorithmes pour résoudre et analyser les problèmes qui impliquent l'écoulement de fluide. Les ordinateurs sont utilisés pour effectuer les calculs nécessaires pour simuler l'interaction des liquides et des gaz avec des surfaces définies par des conditions aux limites. Une validation est nécessaire pour un tel type de logiciel pour assurer la fiabilité des résultats obtenus.

Le code de calcul ANSYS-CFX utilise une méthode couplée où les équations hydrodynamiques ( $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $p$ ) sont résolues comme une équation unique. Cette méthode utilise une approche entièrement implicite pour chaque pas de temps. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le pas de temps se comporte comme un paramètre d'accélération pour rendre la solution stationnaire convergente et plus au moins réelle.

La figure II.3 représente l'organigramme général du code de calcul ANSYS-CFX.

Pour la résolution de chaque ensemble d'équations, l'organigramme de calcul se compose de deux opérations numériques :

- 1- La linéarisation des équations non linéaires avant d'être insérées dans la matrice de solution.
- 2- La résolution des équations linéaires avec un procédé itératif en utilisant une méthode algébrique

Lors de la résolution de domaine dans le CFX-solveur. L'itération externe est contrôlée par le temps physique pour les analyses permanentes et transitoires, respectivement. Seulement une itération interne est performée pour chaque itération externe dans les analyses permanentes, tandis que des itérations internes multiples sont performées par un pas de temps dans les analyses transitoires [6].

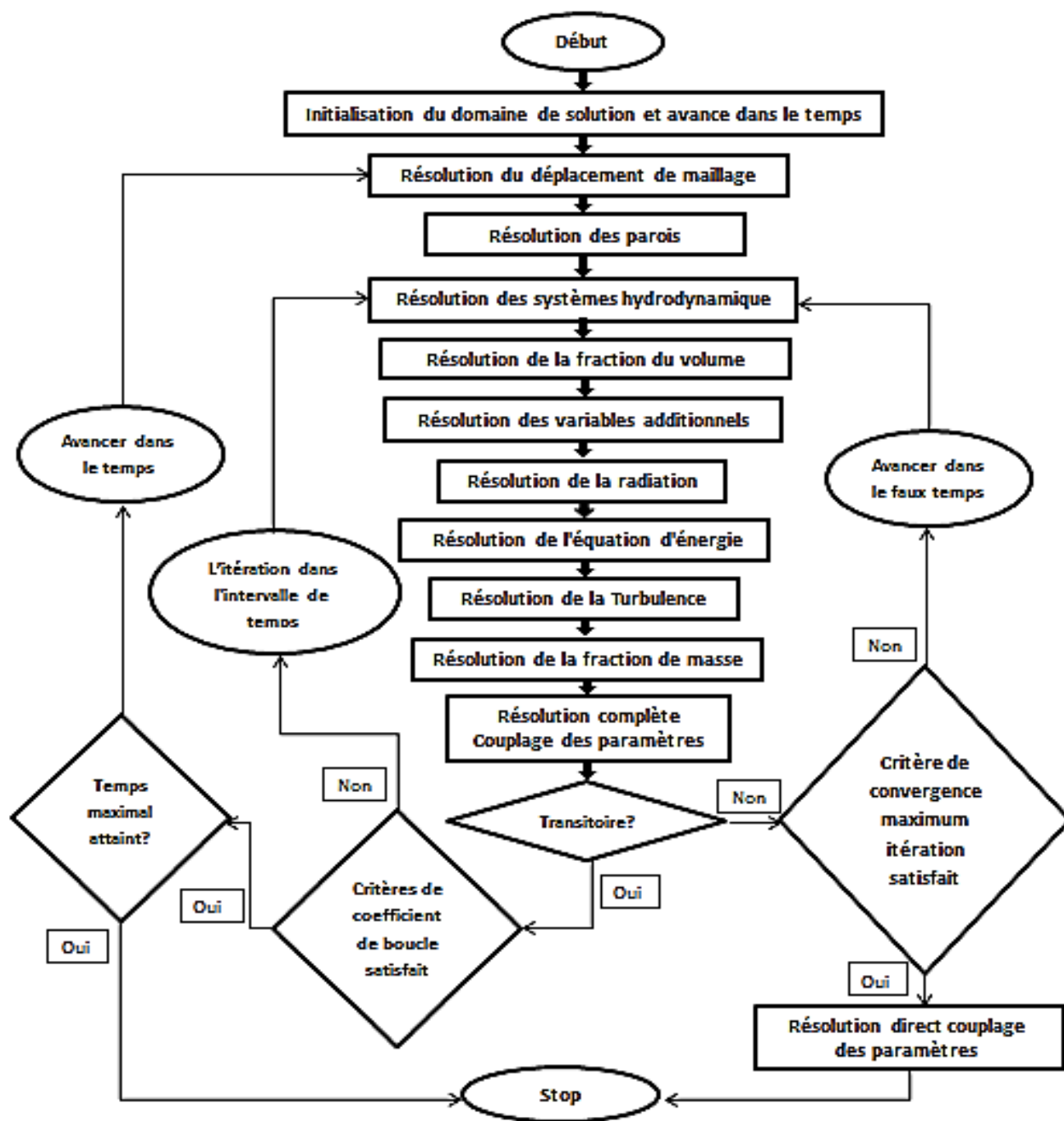


Figure II.3: l'organigramme général du code de calcul ANSYS-CFX.

### II.4.2. Maillage:

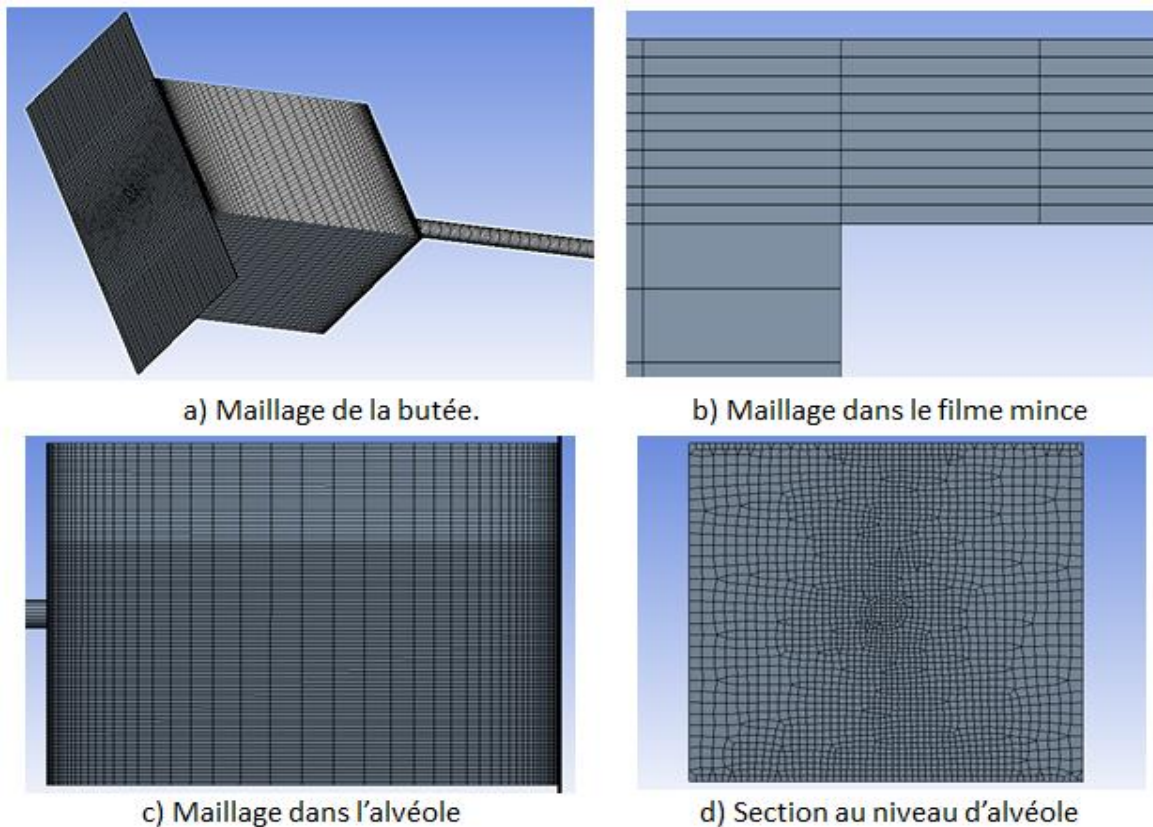
Pour faire une simulation par volumes finis d'un phénomène en mécanique des fluides il faut discrétiser la géométrie à des volumes de contrôle par l'utilisation des formes de maillage (maillage structuré ou non structuré).

Nous avons maillé notre géométrie avec un maillage non structuré par le mailleur de CFX. Nous avons obtenu une bonne qualité de maillage une valeur max de 0.70 pour le critère de l'inclinaison.

Pour l'obtention de ce maillage (figure II.4.a) nous avons utilisé la méthode multizone avec des éléments de type hexaèdres et prismes. Après nous avons utilisé des dimensionnement d'arrêtes pour raffiner le maillage dans les zones de transitions qui sont:

- L'épaisseur film lubrifiant est divisée à 10 éléments figure II.4.b.
- Les arrêtes d'alvéole qui sont dans le sens d'écoulement sont divisé à 50 division avec un ratio pour raffiner le maillage près du film lubrifiant et capillaire figure II.4.c.
- Les arrêtes circulaires du capillaire sont aussi raffiner.

Le nombre des nœuds est de 685424 nœuds et les éléments sont 165458 éléments. La plupart des éléments sont des hexaèdres, les éléments de types primes sont situés au niveau d'alvéole.

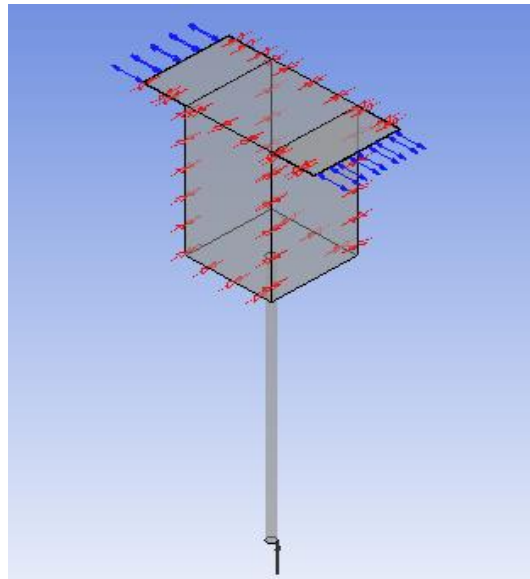


**Figure II.4:** Le maillage de la géométrie.

### II.4.3. Procédure de solution pour l'étude statique découplée:

Pour que nous fassions l'étude statique du palier infiniment long nous avons défini notre problème sur ANSYS-Pré. L'analyse se fait en régime permanent sur un écoulement laminaire et les conditions aux limites et les conditions initiales sont comme suit (Figure II.5):

- ❖ Pression statique à l'entrée de la résistance capillaire avec une valeur de  $2.01813e+5$  Pa.
- ❖ Une symétrie est définie sur les surfaces finales de la direction infiniment longue.
- ❖ La sortie du palier qui est la fin du film lubrifiant est ouvrir sur la pression atmosphérique c-à-dire la pression de sortie égale à zéro Atmosphère.
- ❖ Le cylindre de capillaire avec les surfaces d'alvéole sont définis comme des murs fixes sans glissement.
- ❖ La haute face qui définit le grain mobile est supposée comme mur fixe sans glissement (étude statique).



**Figure II.5:** Le domaine de calcul et les conditions aux limites.

### II.4.4. Procédure de solution pour l'étude par l'interaction F/S (rigide body) :

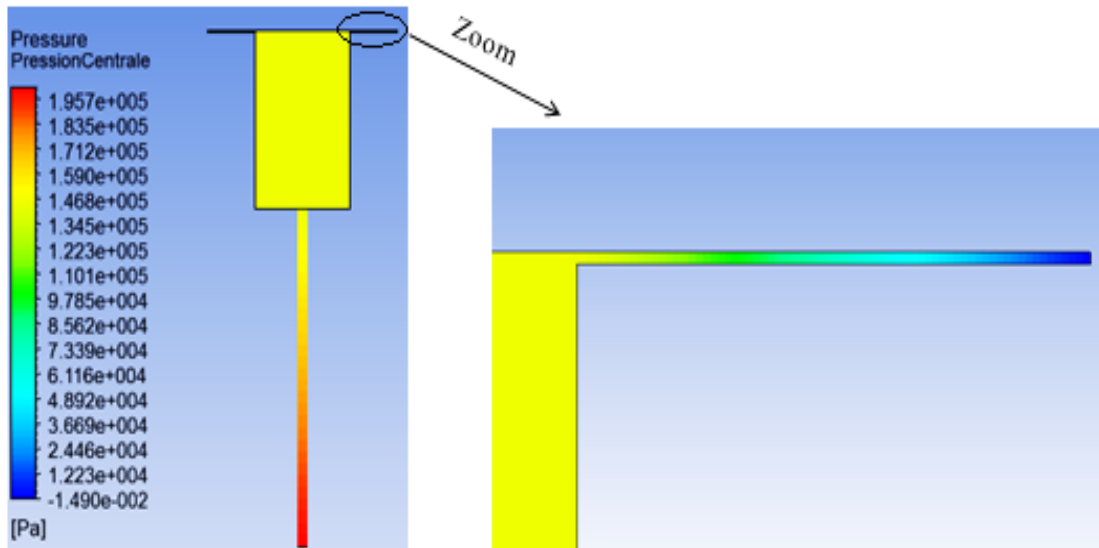
Pour faire une simulation par corps rigide on va laisser la même configuration précédente (Figure II.5). Sauf qu'on va augmenter l'épaisseur de film lubrifiant dans la géométrie, et on va créer un corps rigide d'une masse  $M=8K$ g sur la haute face de la butée. Le corps a une degré de liberté suivant l'axe (y) cela nécessite un maillage dynamique.

L'idée principale de cette étude est de chuter le corps rigide sous l'effet de la gravité d'une épaisseur supérieur de celle calculé analytiquement et sous l'effet de la pression de fluide, et après la stabilisation du corps rigide, on va vérifier l'épaisseur de film lubrifiant s'il est égal au celle calculé analytiquement ou non. Le système de coordonnées de référence est la haute face de la butée (grain mobile).

#### II.4.5. Les résultats numériques:

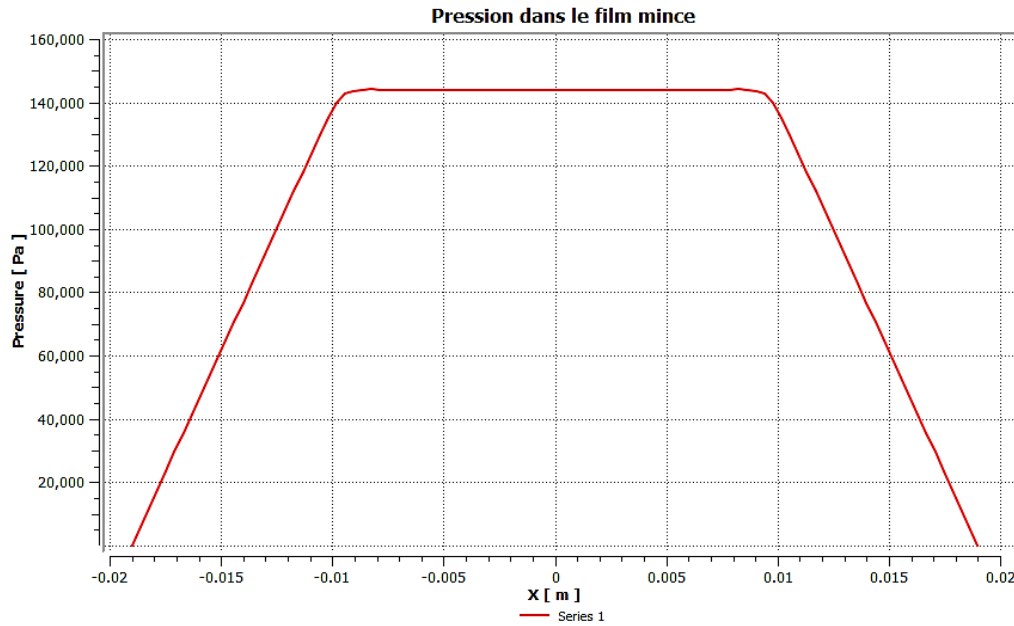
##### II.4.5.1. Les résultats numériques pour l'étude statique découplée:

Les résultats numériques de l'étude statique sont représentés dans les figures suivantes:



**Figure II.6:** La variation de la pression dans la butée hydrostatique pour l'étude statique.

La figure II.6 représente la variation de la pression dans la butée hydrostatique, elle montre que la pression dans l'entrée du capillaire a une valeur max et qu'elle dégrade jusqu'à l'alvéole où elle reste constante le long de cette dernière, après elle dégrade le long du film mince jusqu'à la sortie où elle prend la valeur de la pression atmosphérique.



**Figure II.7:** Graphe de la variation de la pression dans le film mince.

La figure II.7 représente le graphe de la variation de la pression dans le film mince en fonction de la position suivant l'axe (x). Elle montre que la pression dans le film mince au niveau de l'alvéole est constante et a une valeur max de  $1.44017 \times 10^5 Pa$ , et elle dégrade d'une façon linéaire jusqu'à qu'il s'annule à la sortie du film mince.

La force normal sur le grain mobile (suivant Y), qu'il est généré par le fluide lubrifiant a été calculé par l'introduction d'une expression dans le CFX-POST. Cette force est de 78.27 N.

#### II.4.5.2. Les résultats numériques pour l'étude par le corps rigide (couplé):

Les résultats numériques pour l'étude par le corps rigide sont représentés dans les figures qui suivent.

La Figure II.8 représente la position du corps rigide suivant l'axe Y en fonction de temps. Elle montre que le corps rigide (grain mobile) a descendu de leur hauteur initiale qui est 0.25mm par une valeur de 0.055mm, alors la valeur de l'épaisseur de film mince après la stabilisation de corps rigide est 0.195mm avec une déférence de 0.005mm de celle calculé analytiquement.

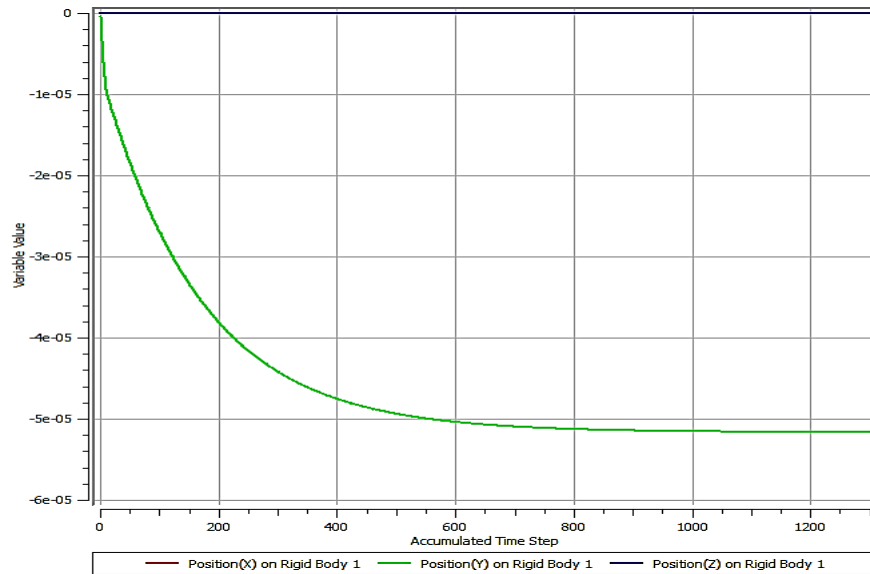


Figure II.8: la position du grain mobile en fonction de temps.

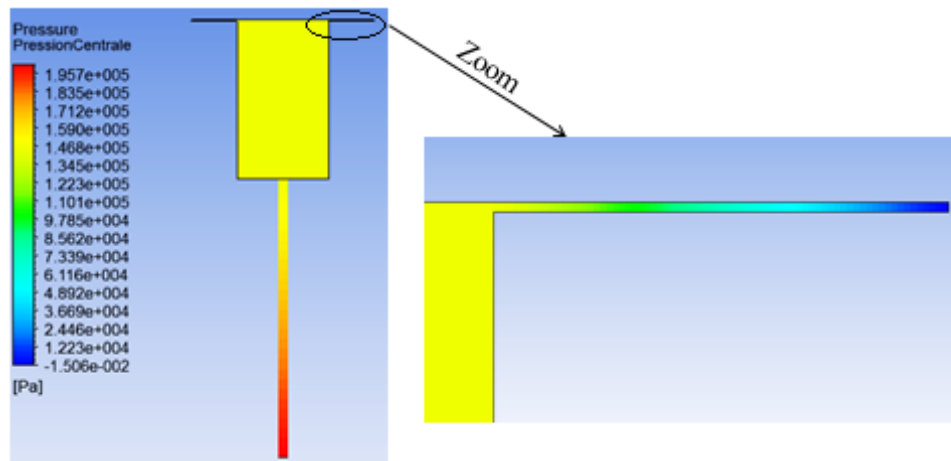


Figure II.9: Contour de la pression dans la butée hydrostatique pour le cas de l'étude par le corps rigide.

La figure II.9 représente la pression dans la butée pour un corps rigide. Elle montre que la pression dans la butée est semblable à celle de l'étude statique.

La figure II.10 représente le graphe de la pression dans le film mince en fonction de la position suivant l'axe (x) pour l'étude avec grain mobile. Elle montre que la pression dans le film mince au niveau de l'alvéole est constante et a une valeur max de  $1.44426 \times 10^5 Pa$ , et elle dégrade d'une façon linéaire jusqu'à qu'il s'annule à la sortie du film mince.

La force générée par le fluide sur le grain mobile est de 78.5063 N.



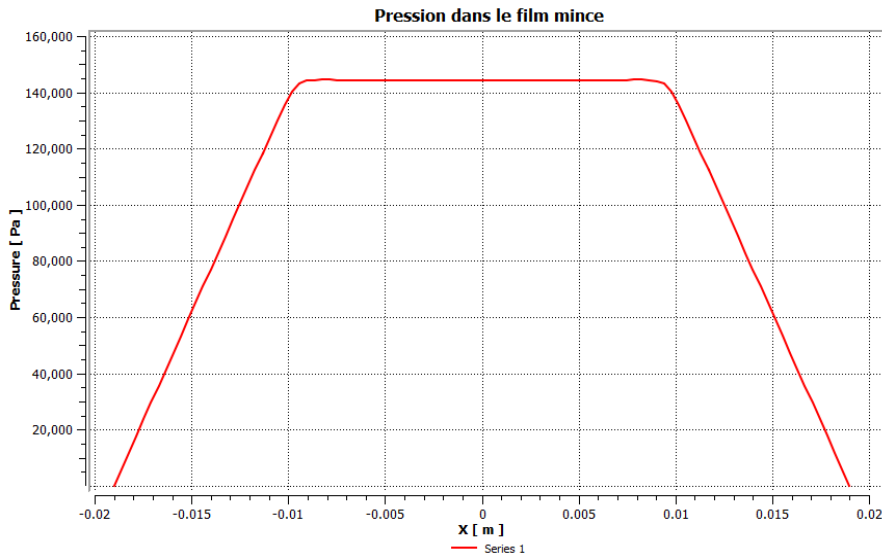


Figure II.10: Le graphe de la distribution de la pression dans le film mince.

II.5. Comparaison entre les résultats analytiques et numériques :

Pour vérifier la validité de l'analyse numérique, les résultats d'ANSYS CFX doit être comparé avec les autres obtenue par la méthode analytique. La figure II.11 montre que les graphes de la pression dans l'alvéole pour l'étude statique, l'étude par corps rigide et le calcul analytique sont superposés, et on remarque que les différences entre les résultats numériques et les résultats analytiques sont très petites, et cela signifie que le modèle numérique est fiable.

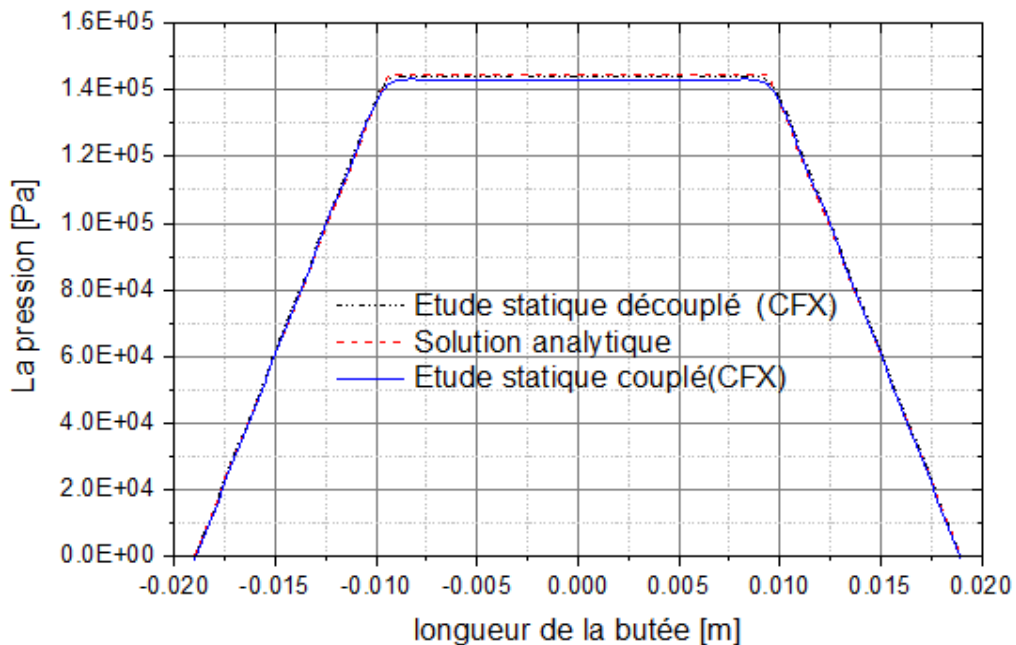


Figure II.11: comparaison entre les résultats analytiques et numériques.

**II.6. Conclusion:**

Dans ce chapitre nous avons fait une étude de validation d'un modèle de palier infiniment long simulé par ANSYS CFX par la solution analytique obtenue par l'application des hypothèses simplificatrice. Et enfin on voit que Les résultats obtenue par la simulation sont en accord avec les résultats analytiques. Alors on peut dire que le modèle numérique est valide pour des problèmes plus complexes où la solution analytique est absente.