

**IV.1 : Introduction :**

A ce jour, restent les nanotubes de carbones les matériaux les plus intéressants du point de vue des applications, grâce à leur dimension nanométrique et leurs propriétés spécifiques. L'application la plus directe envisagée consiste à les utiliser comme additifs [Houdyp, 2006 ; Phan DC, 2016] pour améliorer certaines propriétés des matériaux comme: la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait... etc. De leur rigidité, leur grande flexibilité et leur très faible diamètre les nanotubes de carbone sont utilisés sous forme de fibres macroscopiques [Dalton et al, 2003] et [Vigolo et al, 2000]. Plusieurs modèles des poutres ont été proposés pour étudier l'effet non linéaire d'un nanotube et le flambement des nano-poutres sans ou avec un milieu élastique

Dans ce travail, nous étudions l'effet non linéaire du milieu élastique sur le flambement d'un nanotube de carbone type Armchair, et nous nous basons sur le modèle de la poutre non-linéaire Euler-Bernoulli du milieu élastique. Nous traitons dans ce travail plusieurs paramètres tels que : l'effet du comportement non-linéaire de la matrice (milieu élastique) et l'effet de paramètre ( $e_0a$ ).

**IV.2 : Phénomène de flambement:**

Considérons une barre rectiligne homogène soumise à deux forces  $F$  égales et opposées.

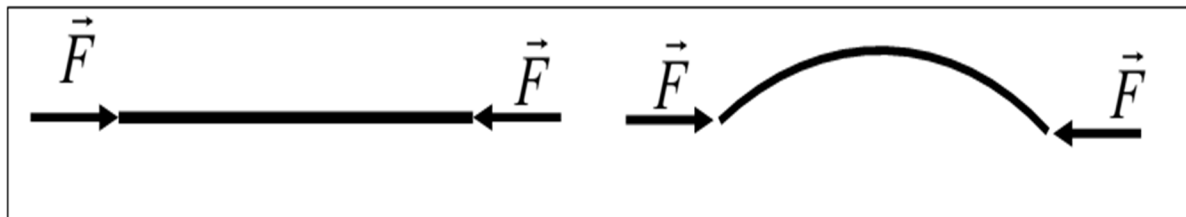


Figure VI : Flambement.

On observe qu'en dessous d'une certaine valeur de  $F$  la barre est en équilibre stable (Si on l'écarte de sa position (légère flexion), lorsque la perturbation cesse, elle retrouve sa rectitude). Au-delà d'une certaine valeur, l'état d'équilibre devient instable (Si l'on écarte la barre de sa position d'équilibre, elle atteint un autre état d'équilibre stable cette fois-là).

Le problème du flambement revient donc à déterminer le seuil de compression à partir duquel il y a bifurcation d'équilibre, une instabilité de structure. L'effort  $F$  de compression qui est le seuil de flambement, nommée  $F_c$

Charge critique d'Euler et notée :

Plusieurs cas sont possibles pour la poutre :

- $F < F_c$ : la barre est rectiligne, en équilibre stable en compression simple.
- $F = F_c$ : La barre est en équilibre instable, il peut y avoir changement d'état d'équilibre pour atteindre un état d'équilibre stable en flexion composée
- $F > F_c$  : Le seul état possible est instable.

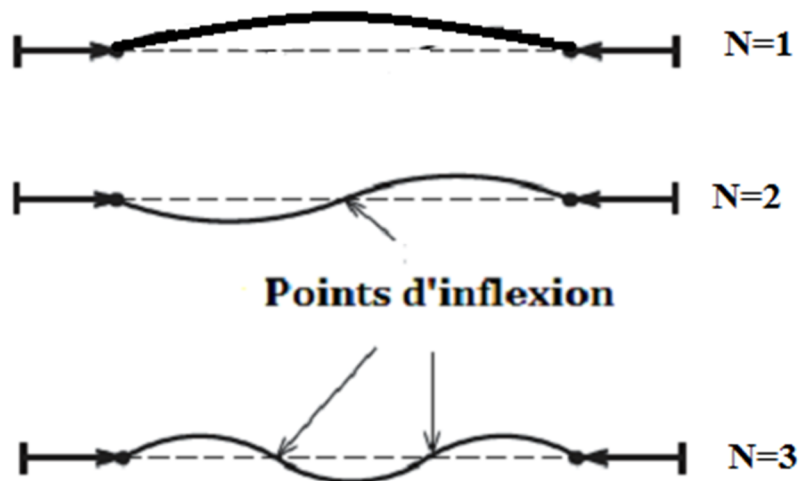


Figure IV.2 : Les modes et les points d'inflexion d'une barre comprimée

Pour chaque une valeur de  $N=1,2,3 \dots$  correspond un mode harmonique différent. Dans la pratique seul le cas où  $N=1$  est à retenir, puisqu'il correspond à la plus petite charge critique entraînant l'instabilité et par conséquent constituant un seuil à ne pas dépasser.

**IV.3 : Modèles du milieu élastique.**

Dans ce travail, nous nous basons sur un seul modèle c'est le modèle de Winkler voir la figure VI.3 ; mais dans deux états. Le premier état là où le comportement du milieu élastique est linéaire et le deuxième état leur comportement est non-linéaire comme il est présenté dans la figure IV.4



Figure IV.3 : le modèle du milieu élastique : Modèle de Winkler

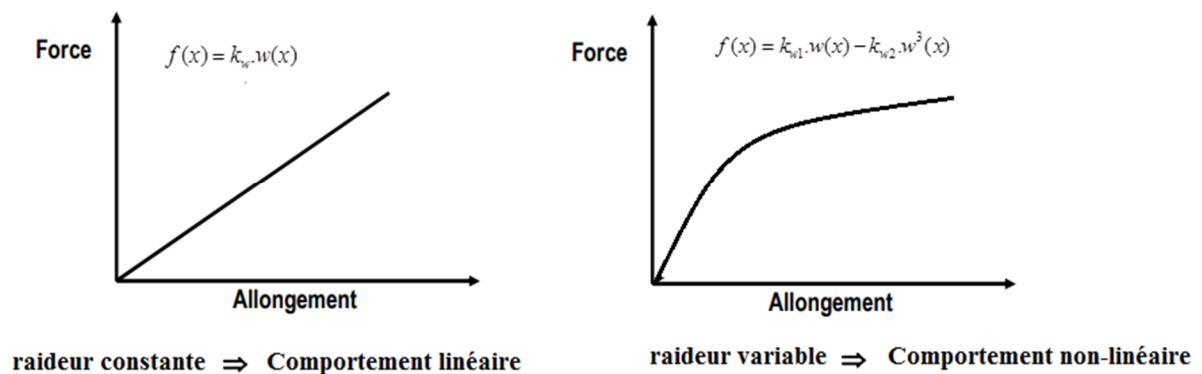


Figure IV.4 : Comportement linéaire et non linéaire du milieu élastique

- Modèle de Winkler linéaire :  $F(x) = k_w \cdot w(x)$  (1)

- Modèle de Winkler non-linéaire :  $F(x) = k_{w1} \cdot w(x) - k_{w2} \cdot w^3(x)$  (2)

Avec  $f(x)$  est la force de l'interaction par unité de longueur entre le nanotube de carbone et le milieu élastique (la matrice en polymère).  $w(x)$  Est le déplacement vertical (la flèche) de CNT.  $k_{w1}$  et  $k_{w2}$  Sont respectivement les modules de Winkler.

Un problème non-linéaire est un problème pour lequel la matrice de rigidité de la structure varie avec sa déformation.

#### IV.4 : Le modèle non local d'un nanotube de carbone :

Dans la théorie d'élasticité non locale [Eringen 1972], la contrainte au niveau d'un point de référence ( $x$ ) est considérée comme une fonction du champ de déformation estimée à chaque point dans le corps. Cette observation est conforme au modèle atomique et aux observations expérimentales sur la dispersion des photons.

En outre, quand l'effet des contraintes aux autres points sur le point à ( $x$ ) est négligé, la théorie non local d'élasticité se conforme à la théorie (locale) classique d'élasticité ceci en mettant ( $e0a = 0$ ). Par conséquent, la théorie non-locale fournit une description plus précise du comportement matériel comparée à la théorie (locale) classique d'élasticité.

Les équations de base pour un solide élastique non-local, linéaire, homogène et isotrope, n'a pas soumis par une force extérieure sont données par:

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

$$\sigma_{ij}(x) = \int K(|x-x'|, \tau) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x') dV(x'), \quad \forall x \in V \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

Où  $(C_{ijkl})$  est le tenseur de module d'élasticité isotrope classique,  $(\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij})$  sont les tenseurs des contraintes et déformations respectivement, et  $(u_{i,j})$  est le vecteur de déplacement.

$K(|x-x'|, \tau)$  Représente le module non local ou la fonction d'atténuation incorporant aux équations constitutives qui caractérisent l'effet non local au point de référence ( $x$ ) produit par la déformation locale de la source.  $(|x-x'|)$  est la distance entre le point de référence ( $x$ ) et le point ( $x'$ ), et  $\tau = e0a/l$ . [Eringen 1983], où ( $e0$ ) est une constante appropriée à chaque matériel, ( $a$ ) est la longueur interne qui caractérise le matériel (par exemple longueur de la liaison (C-C), distance granulaire), et ( $L$ ) est une longueur externe qui caractérise le matériel.

#### IV.5 : Equation non locales du modèle Euler-Bernoulli :

On calculant la somme du moment fléchissant par rapport au point ( $O$ ).

$$\begin{aligned} \sum M_{/o} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} - p \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \partial x - V - \frac{\partial V}{\partial x} \partial x + F(x) \frac{\partial x^2}{2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} - V(x) - p \frac{\partial w}{\partial x} + F(x) \frac{dx^2}{2} &= 0 \\ \Rightarrow V(x) = \frac{\partial M}{\partial x} - p \frac{\partial w}{\partial x} + F(x) \frac{dx^2}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

L'équation fondamentale de la dynamique est comme suit:

$$\begin{aligned} \sum F_{/y} &= 0 \\ \sum F_{/y} = V + \frac{\partial V}{\partial x} dx - V - F(x) dx & \\ \frac{\partial V}{\partial x} dx - F(x) dx &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= F(x) \end{aligned} \quad (4)$$

Substituant l'équation (3) dans (4) donne:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 M}{\partial x} - p \frac{\partial^2 w}{\partial x} + F(x) \frac{d^2 x^2}{2} - F(x) = 0 \quad (5)$$

La relation des contraintes de déplacement est donnée par :

$$\varepsilon = -y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6)$$

Le moment fléchissant et l'effort tranchant sont donnés par :

$$M = \int_A y \sigma_x dA \quad (7)$$

$$T = \int_A \tau_{xy} dA \quad (8)$$

I: représente le moment d'inertie.

$$I = \int_A y^2 dA \quad (9)$$

L'équation constitutive non-locale simplifiée pour la contrainte et la déformation normale dans un cas unidimensionnel est donnée par (Eringen 1983)

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sigma_x = E \varepsilon_x \quad (10)$$

Avec :

$\sigma_x$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $E$ , et  $e_0 a$  représentent respectivement la contrainte normale, la déformation normale, module de Young et le coefficient de l'effet à l'échelle réduit.

Par l'utilisation du modèle Euler-Bernoulli. Les équations d'équilibres d'une nano-poutre composite c'est-à-dire le nanotube de carbone et la matrice en polymère sous une charge de compression unidirectionnelle données par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} - p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F(x) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - T = 0 \quad (12)$$

Où  $p$  est la charge de compression axiale (le flambement),  $w$  est la déflexion (la flèche),  $T$  l'effort tranchant,  $M$  est le moment fléchissant et  $f(x)$  est la force de l'interaction par unité de longueur entre le nanotube de carbone et le milieu élastique.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \cdot \left[ P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F(x) \right] = 0 \quad (13)$$

$$\text{On a : } f(x) = k_{w1} \cdot w(x) - k_{w2} \cdot w^3(x)$$

Substituant l'équation (2) dans (13) donne:

L'équation du flambage d'un nanotube de carbone entouré par une matrice en polymère est donnée par :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \cdot \left[ P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_{w1} \cdot w(x) - k_{w2} \cdot w^3(x) \right] = 0 \quad (14)$$

**IV.6 : L'effet non linéaire du milieu élastique sur le flambement d'un nanotube de carbone :**

A partir de l'équation (14), on peut déterminer la charge critique d'un nano-poutre composite selon les différents types de fondation élastique. Pour une nano-poutre composite simplement appuyée, on a utilisé les conditions appuis suivantes :

$$w(x) = \sin(\lambda \cdot x) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{N\pi}{L} \quad (15)$$

En substituant les équations (15) dans (14) on obtient la charge critique:

$$P_{cr} = \frac{EI\lambda^4 + k_{w1} - k_{w2} \cdot \sin(\lambda \cdot x)^2 - e0a^2 (k_{w1} \cdot \lambda^2 - 6 \cdot k_{w2} \cdot \lambda^2 \cdot \cos(\lambda \cdot x)^2 + 3 \cdot k_{w2} \cdot \lambda^2 \cdot \sin(\lambda \cdot x)^2)}{e0a^2 \cdot \lambda^4 + \lambda^2} \quad (16)$$

**IV.7 : Résultats et discussions :**

Pour étudier l'effet du comportement non linéaire du milieu élastique (c-à-d la matrice en polymère) sur la charge critique du flambage d'un nanotube de carbone de type Armchair entouré par elle. Sur Base le modèle de la poutre Euler Bernoulli non-local et modèle des fondations élastique de type Winkler, nous avons développé un modèle analytique qui prend en compte le comportement non-linéaire du milieu élastique et aussi l'effet de petite échelle sur la charge critique de flambement d'un nanotube de carbone mono-paroi de type Armchair. Les paramètres utilisés dans les calculs de (SWCNTs) sont donnés comme suit : l'épaisseur de la couche de (NTC) prendre pour être de 0.35nm [Bao 2004], coefficient de Poisson  $\nu=0.3$  [Zhang, 2006].

A la base de la simulation de dynamique moléculaire (MD), les modules de Young utilisés dans cette étude de nanotubes monocouche de carbone (SWCNTs) de type Armchair, sont calculés par Bao WenXing et al [Bao, 2004]. Ces résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux existants. Bao et al, indiquent que les modules de Young de SWCNTs sont faiblement affectés par le rayon et la chiralité de tube.

Tableau IV.1: présente les valeurs du module de Young de SWCNT pour le type Armchair  
[Bao 2004]

armchair	diamètre (nm)	Module du Young (SWNT) (GPa)
(8 ; 8)	1.0848	934.960
(10 ; 10)	1.3560	935.970
(12 ; 12)	1.6272	935.462
(14 ; 14)	1.8984	935.454
(16 ; 16)	2.1696	939.515
(18 ; 18)	2.4408	934.727
(20 ; 10)	2.7120	935.048

#### IV.8 : Validation des résultats :

Nous avons fait une étude comparative entre le modèle analytique exacte de Wang et al. (2006) et notre modèle développé mais sans milieu élastique ( $k_{w1} = 0$  et  $k_{w2} = 0$ ) et avec les mêmes leurs données.

Le modèle analytique exacte de Wang et al. (2006) est donné par:

$$P_{exact} = \frac{(N\pi)^2 \left( \frac{EI}{L^2} \right)}{\left( 1 + (e0a)^2 \left( \frac{N\pi}{L} \right)^2 \right)}$$

Tableau IV .2 : Comparaison entre le modèle analytique exacte de Wang et al. (2006) et le présent modèle.

e0a(nm)	0		1		2	
L/d	P <sub>cr</sub> (exact) (Wang, et al 2006) Gpa	P <sub>cr</sub> Present Gpa	P <sub>cr</sub> (exact) (Wang et al 2006) Gpa	P <sub>cr</sub> Present Gpa	P <sub>cr</sub> (exact) (Wang et al 2006) Gpa	P <sub>cr</sub> Present Gpa
10	4.8447	4.8447	4.4095	4.4095	4.0460	4.0460
12	3.3644	3.3644	3.1486	3.1486	2.9588	2.9588
14	2.4718	2.4718	2.3533	2.3533	2.2456	2.2456
16	1.8925	1.8925	1.8222	1.8222	1.7569	1.7569
18	1.4953	1.4953	1.4511	1.4511	1.4094	1.4094
20	1.2112	1.2112	1.1821	1.1821	1.1542	1.1542

Le tableau 1 présente une comparaison de la charge de flambement axial P du CNT soumis à une charge de flambement axial calculée par notre modèle développé avec celles obtenues par Wang et al. (2006). Le tableau 1 montre l'excellent accord de la méthode de solution proposée avec divers paramètres à petite échelle et ceux obtenus dans la littérature

#### IV.9 : l'effet de la chiralité sur le flambage d'un NTC :

Dans ce cas nous avons utilisé notre modèle analytique pour étudier l'effet de la chiralité d'un nanotube sur la charge critique mais sans milieu élastique ( $k_{w1} = 0$  et  $k_{w2} = 0$ ) voir le tableau IV.3.



Tableau IV.3 : l'effet de chiralité sur la charge critique du flambement d'un NTC sans milieu élastique

	ea0=0		ea0=1		ea0=1.5		ea0=2	
	W=10	W=100	W=10	W=100	W=10	W=100	W=10	W=100
n=8 m=8	11.976 6	0.119766	11.0498	0.11966	10.0753	0.11954 4	8.9680	0.11936
n=10 m=10	14.630 8	0.146308	13.88548	0.146229 5	13.0542	0.14613 1	12.0447	0.14599
n=12 m=12	17.329 8	0.173298	16.70710	0.173234 0	15.9888	0.17315 3	15.0812	0.17304
n=14 m=14	20.058 3	0.20058	19.5236	0.200528	18.8941	0.20045 9	18.0780	0.20036
n=16 m=16	22.904 4	0.229044	22.43402	0.228936	21.8725	0.22893 6	21.1320	0.22885
n=18 m=18	25.544 8	0.255448	25.12857	0.255406	24.6269	0.25535 3	23.9572	0.25527
n=20 m=20	28.320 3	0.283203	27.9453	0.283165	27.4900	0.28311 8	26.8776	0.28305

Le tableau IV.3 présente l'effet de la chiralité, non-localité ( $e_0a$ ) et élancement ( $W=L/d$ ) sur la charge critique du flambement. Nous avons vu clairement qu'il y a une variation remarquable dans les résultats obtenus. Donc l'augmentation des indices de Hamada ( $n, m$ ) signifie l'augmentation du rayon de nanotube, cette augmentation provoque une augmentation de la charge critique du nanotube de carbone, aussi il est remarquable que la variation du paramètre non-local  $e_0a$  et de l'élancement  $W$  ont une influence sur la charge critique du flambement, donc l'augmentation de cette charge est en fonction de l'augmentation de ces derniers.

Tableau IV.4 : l'effet  $e_0a$  et  $W$  sur la charge critique  $P_{cr}$  pour nanotube de carbone (20, 20) dans un milieu non-linéaire élastique.

w e <sub>0</sub> a (nm)	P <sub>cr</sub> en (nN)					
	w=10	w=20	w=40	w=60	w=80	w=100
0	65.58089759	156.1224290	597.9394263	1342.167839	2385.120130	3726.341992
0,1	65.56709913	156.1121919	597.9294116	1342.157836	2385.110130	3726.331991
0,5	65.23704356	155.8667056	597.6891077	1341.917789	2384.870121	3726.091992
1	64.21914068	155.1021001	596.9387811	1341.167918	2384.120248	3725.342087
1,5	62.56683223	153.8362439	595.6903303	1339.919065	2382.870984	3724.092585
2	60.34198035	152.8411385	593.9468823	1338.172623	2381.123112	3722.343986

Le tableau IV.4 présente l'effet non linéaire de flambement axial  $P$  du NTC, il montre l'excellent accord de la méthode de solution proposée avec divers paramètres à petite échelle  $e_0a$  varié entre (0 2) et le déplacement  $W$  varié entre la valeur 10 et 100 et la rigidité ( $k_1=1$ ,  $k_2=0.5$ ).

A la base de notre résultats du tableau montre que les l'effet du milieu élastique augmente si la valeur de  $w$  augmente, cette augmentation est attribuée à la rigidité du milieu.

Tableau IV.5 : effet de comportement du milieu élastique et sur la charge critique du flambement d'un nanotube (20, 20) pour  $e_0a=2\text{nm}$ .

	$K_{w1}$	$K_{w2}$	w=10	w=30	w=100
Sans milieu élastique	0	0	26.8776	3.1280	0.2830
Avec milieu élastique linéaire	1	0	101.3988	673.8186	7452.4006
	1,5	0	138.6593	1009.1639	11178.4594
	1,96	0	172.939	1317.681	14606.433
Avec milieu élastique non-linéaire	1	0,5	112.787	685.747	7464.394
	1.5	1	161.436	1033.021	11202.446
	1,96	1,5	207.105	1353.468	14642.414

Le tableau IV.5 présente une comparaison de la charge critique de flambement axial  $P_{cr}$  du NTC entre trois cas, le premier cas le nanotube sans milieu élastique, le deuxième cas avec un milieu élastique du comportement linéaire et le dernier cas avec un milieu élastique du comportement non- linéaire. A travers cette comparaison, il est remarquable que l'effet de non-linéaire du milieu influence sur cette charge critique, il est vu clairement une augmentation dans le deuxième paramètre du milieu élastique a provoqué une augmentation dans cette dernière.

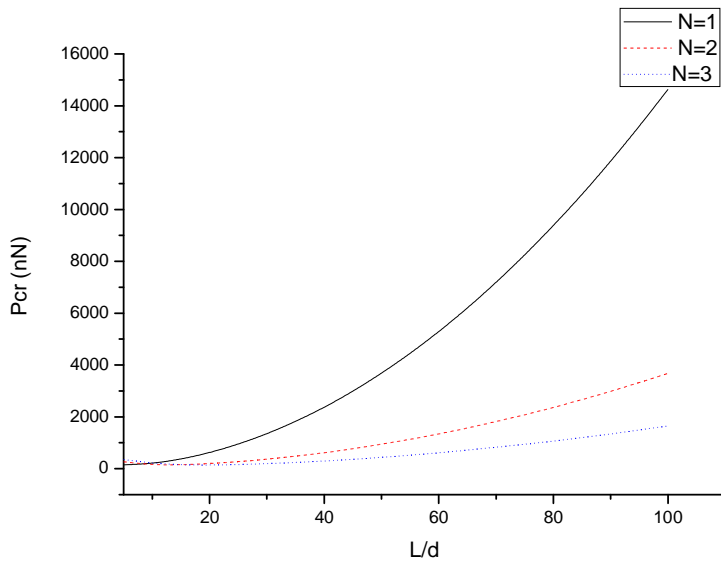


Figure IV.5 : l'effet du mode du flambement sur la variation du  $p$  en fonction de  $L/d$

La figure IV.5 : montre les variations de différentes valeurs de  $p$  avec les valeurs de  $k_1$  ont été prises entre (0 et 1.4) et le paramètre de déplacement  $w$  entre (5 et 30)

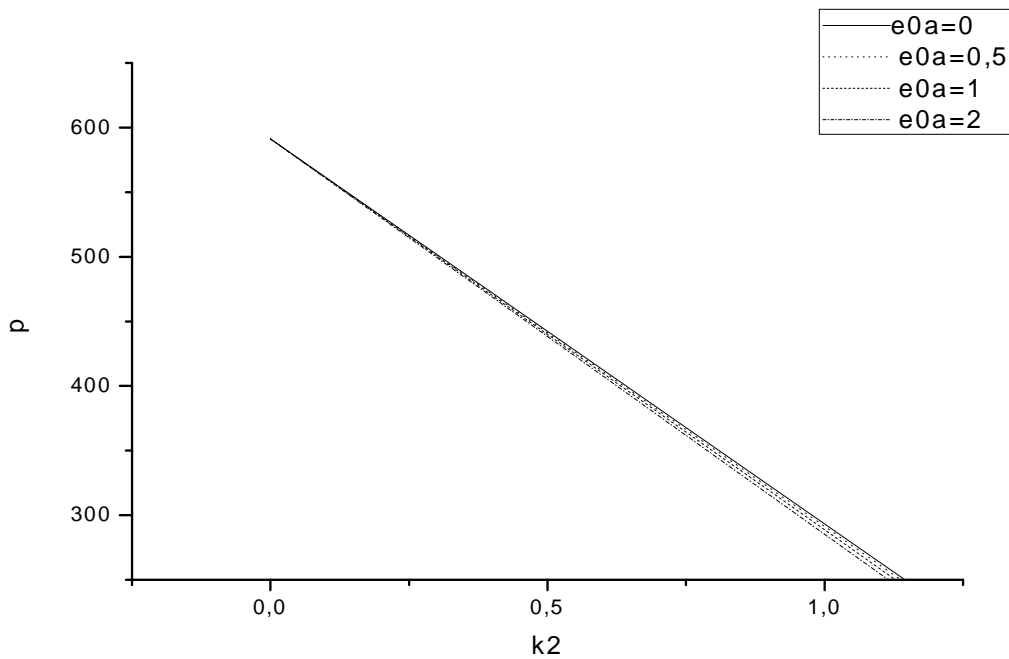


Figure IV. 6 :l'effet du milieu élastique sur la variation du  $p$  en fonction de  $k_2$

Dans les figures (IV, 5, 6) présentent l'effet de mode et paramètre  $e_0a$  sur la charge critique de flambement, nous avons vu clairement que Les valeurs de la charge critique  $P_{cr}$  d'un nanotube de carbone sur la base du modèle non-local Euler-Bernoulli diminuent avec l'augmentation du nombre de mode (N) et le paramètre ( $e_0a$ ), et augmentent avec l'augmentation du rapport (L/d) et la rigidité du milieu élastique.

**IV.10 : Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle de milieu élastique utilisé, ainsi leur comportement linéaire et non linéaire. Puis un développement d'un modèle analytique pour but d'étudier l'effet cette non-linéarité du milieu élastique sur la charge critique du flambement d'un nanotube de carbone sous la base du modèle de la poutre Euler- Bernoulli et nous avons prend en compte l'effet du paramètre non-local ( $e_0a$ ).