

**Chapitre III :**  
**Étude du comportement de flexion des plaques composites stratifiées par la théorie d'ordre élevé**

### **III.1. Introduction :**

Le comportement mécanique des plaques stratifiées est déterminé par l'utilisation d'approches mathématiques basées sur la formulation des équations d'équilibre et le développement de la théorie classique simplifiée des stratifiés. La recherche de l'effet du changement de l'ordre de disposition des couches dans le stratifié et de leur nombre ainsi que les dimensions de la plaque et de l'orientation du renfort fibreux permet de déterminer l'évolution de la résistance de ces plaques et de leurs déformations ainsi que le calcul des contraintes à travers l'épaisseur de chaque couche de la plaque stratifiée. Afin d'atteindre ces objectifs, on a appliqué la théorie classique des plaques stratifiées pour modéliser les déformations de cisaillement transverse approprié. Les différents résultats obtenus par la présente étude du comportement de flexion des plaques ont montré que la forme de sollicitations des charge transversales et la séquence d'empilement pour un matériau composite stratifié croisé symétrique ou antisymétrique en tenant en compte l'effet de la déformation de cisaillement transverse ont un effet significatif sur la distribution des déformations en cisaillement transversal et les contraintes à travers l'épaisseur. Le choix adéquat du matériau des constituants du stratifié, l'orientation des fibres, le nombre et la séquence d'empilement des plis nous permet d'assurer donc un comportement meilleur de la plaque composite stratifiée. L'accroissement de la résistance et du module spécifiques font de tels matériaux composites stratifiés à matrice polymère un candidat prometteur aux structures à haute performance. Sauf que la réduction du module de cisaillement en comparaison avec les matériaux conventionnels devient une question majeure dans l'analyse des structures faites de tels matériaux.

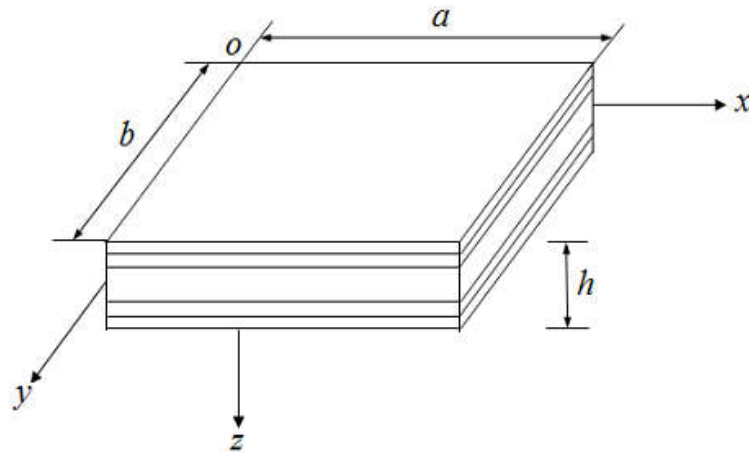
La détermination de la contrainte de cisaillement transverse développée dans l'épaisseur des plaques soumises à la flexion, est habituellement effectuée sous quelques hypothèses bien connus, basées sur la forme du champ de déplacement à travers leurs épaisseurs. Ces théories étant conçus comme une approximation d'une réalité de trois dimensions, on comprend qu'il puisse en exister plusieurs, différents entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées.

Dans la présente étude, une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement transverse d'ordre supérieur des plaques en matériau composite stratifié est proposée pour

déterminer le comportement de flexion des plaques multicouches. La théorie actuelle donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfait exactement les conditions aux limites de contrainte de cisaillement nulle sur le bord supérieur et inférieur de la plaque. Il a été observé que cette théorie donne des résultats plus précis en ce qui concerne les solutions d'élasticité 3-D pour l'analyse de flexion et de contrainte.

### III.2. Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire de longueur  $a$ , une largeur  $b$  et une épaisseur  $h$  en matériau composites stratifiés et comme représenté sur la Figure (III.1). La plaque est constituée d'un nombre  $N$  de couches homogènes.



**Figure III.1** : géométrie d'une plaque en matériau composite stratifiée

La plaque est soumise à des forces de flexion dans le plan  $(x, y, z)$  qui sont parfaitement délimités. La plaque occupe (en O-x-y-z) cartésienne droitier système de coordonnées) une région.

$$0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.1})$$

### III.3. Propriétés des matériaux :

La plaque composite stratifiée peut être défini par les propriétés suivantes :

Module de Young  $E = 25 \text{ M Mpa}$ .

Coefficient de poisson  $\nu = 0,25$ .

La plaque en couche stratifiée diagonaux symétrique et antisymétrique avec de 2 et 3 et 4 couche, pour ( $\theta = 0$  et  $\theta = 90$ ).

#### III.4. Cinématique et équations constitutives

En se basant sur la théorie des plaques d'ordre élevé. Le champ de déplacement en un point quelconque de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la plaque s'écrit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0(x, y, t) \right) + f(z) \Psi(x, y, t) \quad (\text{III.2a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \left( \frac{\partial}{\partial y} w_0(x, y, t) \right) + f(z) \Psi(x, y, t) \quad (\text{III.2b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \xi(x, y, t) \quad (\text{III.2c})$$

Où  $u, v$  et  $w$  sont les déplacements suivant directions  $x, y, z$ . De même  $u_0, v_0$  et  $w_0$  sont les déplacements d'un point du plan moyen ( $x, y, z = 0$ ).  $\Psi, \xi$  et  $\xi$  sont les rotations dues à la flexion des plans  $(x, y, z)$ .

$f(z)$ : est appelée fonction de géométrie qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque en matériaux composite stratifiée. Ainsi le choix de la fonction  $f(z)$  est basé sur les résultats de l'élasticité tridimensionnelle ou toute autre information sur la distribution des contraintes de cisaillement transverse.

Dans le cas de la théorie d'ordre élevé obtenue par la fonction de terme géométrique

Ou bien fonction de (TOURATIER) et s'écrit comme suite :

$$f(z) = \left( \frac{z}{h} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \text{ et } g(z) = \left( \frac{z}{h} \right) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.3})$$

Dans le cas où  $f(z) = 0$  le champ de déplacement peut traduire les hypothèses de la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff. Par contre quand  $f(z) = z$  le champ de déplacement peut traduire les hypothèses de la théorie des plaques épaisses de premier ordre communément à (Mindlin Reissner) [1].

### III.5. Champ de déformations

Selon le champ de déplacement proposé, le champ de déformations est obtenu en substituant les termes de l'équation (III.2) dans la relation d'élasticité linéaire déformations-déplacements. Il est donné comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

En remplaçons (III.2) dans (III.4), nous obtenons les expressions suivantes:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} u_0(x, y, t) - z \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w_0(x, y, t) + f(z) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, y, t)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} v_0(x, y, t) - z \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w_0(x, y, t) + f(z) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(x, y, t)$$

$$\varepsilon_z = \left( \frac{d}{dz} g(z) \right) \xi(x, y, t)$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} u_0(x, y, t) - 2z \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} w_0(x, y, t) \right) + f(z) \left( \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y, t) \right) + \frac{\partial}{\partial x} v_0(x, y, t) + \\
 &\quad f(z) \left( \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y, t) \right) \\
 \gamma_{xz} &= \left( \frac{d}{dz} f(z) \right) u_0(x, y, t) + g(z) \left( \frac{\partial}{\partial x} \xi(x, y, t) \right) \\
 \gamma_{yz} &= \left( \frac{d}{dz} f(z) \right) v_0(x, y, t) + g(z) \left( \frac{\partial}{\partial y} \xi(x, y, t) \right)
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

La relation linéaire déformation-déplacement peut être réécrite sous la forme simplifiée suivante:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + z\varepsilon^1 + f(z)\varepsilon^2 \tag{III.6}$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon^{(0)} = \begin{cases} \varepsilon_x^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^{(0)} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases} \tag{III.7a}$$

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{cases} \varepsilon_x^{(1)} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^{(1)} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_z^{(1)} = 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{cases} \varepsilon_x^{(2)} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y^{(2)} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z^{(2)} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{cases} \tag{III.7b}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{df(z)}{dz} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{III.7c}$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \tag{III.7d}$$

### III.6. Champ de contraintes

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour une plaque composite stratifiée peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :



$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{33} &= \bar{Q}_{23} \\
 \bar{Q}_{36} &= (Q_{13} \quad Q_{23})mn \\
 \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \\
 \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} \quad Q_{44})mn \\
 \bar{Q}_{55} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2
 \end{aligned}
 \tag{III.9b}$$

Avec :  $m = \cos\theta$  et  $n = \sin\theta$

### III.7. Détermination des équations d'équilibre

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions au limites, le principe des travaux virtuels est appliquée, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels dans le cas présent peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\delta U_d + \delta V_p = 0 \tag{III.10}$$

Où  $\delta U_d$  est la variation de l'énergie de déformation et  $\delta V_p$  est la variation de l'énergie potentielle.

La variation de l'énergie de déformation  $\delta U_d$  , peut être exprimée en fonction des tenseurs de contraintes  $[\sigma]$  et de déformations  $[\varepsilon]$ :

$$\delta U_d = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \tag{III.11}$$

Qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \delta U_d &= \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}] dx dy dz \\
 &\quad \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} q(x, y) \delta w dx dy = 0
 \end{aligned}
 \tag{III.12}$$



En remplaçant les déformations virtuelles par leurs expressions définies par les équations (III.7) dans l'équation (III.12), ensuite en introduisant les efforts globaux, on obtient la forme suivante:

$$\begin{aligned} \delta U_p = \int_0^a \int_0^b \left( N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + M_x^s \frac{\partial \delta \varphi_x}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + M_y \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + M_y^s \frac{\partial \delta \varphi_y}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \right. \\ \left. N_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + M_{xy}^s \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} + M_{xy}^s \frac{\partial \delta \Psi}{\partial x} + q \delta w \quad V_x^s \delta \quad V_{yz}^s \delta \Psi \right. \\ \left. + \frac{\pi}{h} V_{zz}^s \delta \xi - q(x, y) \delta w \right) \delta w dx dy \end{aligned} \quad (III.13)$$

Où  $N, M, V$  et  $Q$  sont les résultantes des contraintes par unité de longueur des couches totales de la plaque définies par :

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \sum_{K=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_x, \tau_{xy}) z dz$$

$$(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) = \sum_{K=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_x, \tau_{xy}) f(z) dz$$

$$(V_{xz}^s, V_{yz}^s) = \sum_{K=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) f(z) dz \quad (III.14)$$

$$V_{zz}^s = \sum_{K=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \sigma_{zz} g(z) dz$$

Et en faisant l'intégration par partie de l'équation (III.13), on obtient

$$\begin{aligned} \delta U_p = \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial N_x}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 + \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \delta v_0 + \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \right. \right. \\ \left. \left. q \right) \delta w_0 + \left( \frac{\partial M_x^s}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial y} \quad V_x^s \right) \delta \quad + \left( \frac{\partial M_y^s}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial x} \quad V_{yz}^s \right) \delta \Psi + \left( \frac{\partial V_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}^s}{\partial y} \quad \frac{\pi}{h} V_{zz}^s \right) \delta \xi \\ \left. + q(x, y) \delta w \right) dx dy \end{aligned} \quad (III.15)$$

La variation de l'énergie potentielle  $\delta V_p$ , due aux charges appliquées sur la plaque s'écrit:

$$\delta V_p = \int_0^a \int_0^b \left( N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \delta w_0 dx dy \quad (III.16)$$

L'équation (III.10) devra être vérifiée quel que soit les déplacements virtuels  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$  et  $\delta \Psi, \delta \xi$  cinématiquement admissible, on en déduit les équations différentielles d'équilibre du mouvement de la plaque en utilisant le principe des travaux virtuels comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0: \frac{\partial N_x}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, & \delta v_0: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_0: \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta: \frac{\partial M_x^s}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial y} V_x^s &= 0, & \delta \Psi: \frac{\partial M_y^s}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial x} V_{yz}^s &= 0 \\ \delta \xi: \frac{\partial V_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}^s}{\partial y} \pi - V_{zz}^s &= 0 \end{aligned} \quad (III.17)$$

### III.8. Détermination des coefficients de rigidité

En substituant les équations (III.8) et (III.5) dans l'équation (III.14), on obtient les expressions qui représentent des résultantes en membrane  $N = \{N_x, N_y, N_{yx}\}^{Tr}$ , en flexion pure.

$M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^{Tr}$ , en flexion supplémentaire dû au cisaillement.

$$M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^{Tr}, \text{ et } \{V_{xz}^s, V_{yz}^s\}, \{V_{zz}^s\}$$

$$\begin{aligned} N_x = & \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0 \right) A_{11} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0 \right) B_{11} + \left( \frac{\partial}{\partial x} \Psi \right) E_{11} + \left( \frac{\partial}{\partial y} v_0 \right) A_{12} + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_0 \right) B_{12} \\ & + \left( \frac{\partial}{\partial y} \Psi \right) E_{12} + \xi A_{s13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_y &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right) A_{12} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right) B_{12} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{12} + \left(\frac{\partial}{\partial y} v_0\right) A_{22} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w_0\right) B_{22} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi\right) E_{22} + \xi A S_{23} \\
 N_{xy} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} u_0\right) A_{66} \quad 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} w_0\right) B_{66} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) E_{66} + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_0\right) A_{66} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi\right) E_{66} \\
 M_x &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right) B_{11} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right) D a_{11} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F_{11} + \left(\frac{\partial}{\partial y} v_0\right) B_{12} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w_0\right) D a_{12} + \\
 &\quad \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi\right) F_{12} + \xi B S_{13} \tag{III.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right) B_{12} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right) D a_{12} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F_{12} + \left(\frac{\partial}{\partial y} v_0\right) B_{22} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w_0\right) D a_{22} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi\right) F_{22} + \xi B S_{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right) B_{66} \quad 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} w_0\right) D a_{66} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) F_{66} + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_0\right) B_{66} \tag{III.18a} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi\right) F_{66}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x^s &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right) E_{11} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right) F_{11} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) H_{11} + \left(\frac{\partial}{\partial y} v_0\right) E_{12} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w_0\right) F_{12} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi\right) H_{12} + \xi H S_{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y^s &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right) E_{12} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right) F_{12} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) H_{12} + \left(\frac{\partial}{\partial y} v_0\right) E_{22} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w_0\right) F_{22} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi\right) H_{22} + \xi H S_{23}
 \end{aligned}$$

$$M_{xy}^s = \left(\frac{\partial}{\partial y} u_0\right) E_{66} \quad 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} w_0\right) F_{66} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) H_{66} + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_0\right) E_{66} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi\right) H_{66}$$

$$V_{yz}^s = \Psi D S_{44} + \left(\frac{\partial}{\partial x x} \xi\right) E S_{44}$$

$$V_{yz}^s = D_{S55} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \xi\right) E_{S55} \quad (\text{III.18b})$$

$$V_{zz}^s = \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right) A_{S13} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right) B_{S13} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) H_{S13} + \left(\frac{\partial}{\partial y} v_0\right) A_{S23} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w_0\right) B_{S23} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \Psi\right) H_{S23} + \xi F_{S33}$$

Où  $A_{ij}, B_{ij}$  etc. représentent les coefficients de rigidité de la plaque, sont définis comme :

$$(A_{ij}, B_{ij}, E_{ij}, D_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, f(z), z^2, zf(z), f^2(z)) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (\text{III.19})$$

Ainsi que les expressions des contraintes en fonction des déplacements sont obtenues, en reportant les relations (III.5) et (III.9) dans l'expression (III.8), on obtient :

$$\sigma_{11} = Q_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + f(z) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) Q_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + f(z) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right) + Q_{13} \left( \frac{d}{dz} g(z) \xi \right) \quad (\text{III.20a})$$

$$\sigma_{22} = Q_{12} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + f(z) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) Q_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + f(z) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right) + Q_{23} \left( \frac{d}{dz} g(z) \right) \xi \quad (\text{III.20b})$$

$$\sigma_{33} = Q_{13} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + f(z) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) Q_{23} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + f(z) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right) + Q_{33} \left( \frac{d}{dz} g(z) \right) \xi$$

(III.20c)

$$\tau_{12} = Q_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + f(z) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} + f(z) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (III.20d)$$

$$\tau_{23} = Q_{66} \left( \left( \frac{d}{dz} f(z) \right) \Psi + g(z) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right) \quad (III.20e)$$

$$\tau_{13} = Q_{55} \left( \left( \frac{d}{dz} f(z) \right) + g(z) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right) \quad (III.20f)$$

### III.9. Solution exacte pour une plaque composite stratifiée

La recherche de solutions analytiques des problèmes des structures composites multicouches sous diverses conditions aux limites fait appel à la résolution d'équations aux dérivées partielles classiques et linéaires à coefficients constants.

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appuis utilisé. Dans cette partie nous sommes concernés par la solution exacte des équations (III.17) pour une plaque simplement appuyée sur les quatre cotés en matériau composites stratifiées. Pour ce cas d'étude, les conditions aux limites pour la présente théorie d'ordre élevé s'écrivent:

- Les conditions aux limites sur les bords  $x=0$  et  $x=a$  sont exprimées sous la forme suivante:

$$w = \Psi = \xi = M_x = M_x^s = 0 \quad \text{Avec : } x = 0, y = b \quad (III.21)$$

- Les conditions aux limites sur les bords  $y=0$  et  $y=b$  sont exprimées sous la forme suivante:

$$w = \xi = M_y = M_y^s = 0 \quad \text{Avec : } y = 0, y = b \quad (III.22)$$

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement élastique de flexion des plaques en composites stratifiées. Elle peut être alors recherchée en écrivant les déplacements.

Ce qui suit est la forme de solution  $u_0(x, y), v_0(x, y), w(x, y), \Psi(x, y)$  et  $\xi(x, y)$  est supposé pour les exemples ci-dessus, qui satisfait les conditions aux limites exactement.

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= \sum_{m=1,3}^{m=\infty} \sum_{n=1,3}^{n=\infty} u_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 v_0(x, y) &= \sum_{m=1,3}^{m=\infty} \sum_{n=1,3}^{n=\infty} v_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
 w(x, y) &= \sum_{m=1,3}^{m=\infty} \sum_{n=1,3}^{n=\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \theta(x, y) &= \sum_{m=1,3}^{m=\infty} \sum_{n=1,3}^{n=\infty} \theta_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \Psi(x, y) &= \sum_{m=1,3}^{m=\infty} \sum_{n=1,3}^{n=\infty} \Psi_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
 \xi(x, y) &= \sum_{m=1,3}^{m=\infty} \sum_{n=1,3}^{n=\infty} \xi_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned} \tag{III.23}$$

Avec :  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$  ,  $\beta = \frac{n\pi}{b}$

$u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \theta_{mn}, \Psi_{mn}$  et  $\xi_{mn}$  sont les coefficients inconnus de la Fourier respective

Expansions et  $m, n$  sont des entiers positifs. En cas de charge unique  $m = 1$  et  $n = 1$ . En substituant cette forme de solution et la charge  $q(x, y)$  dans l'équation régissant. Coefficients inconnus de la Fourier respective, déterminés sous la condition que la solution de l'équation (III.23) doit vérifier l'équation (III.17). On obtient l'opérateur suivant :

$$[K]\{ \} = \{F\} \tag{III.24}$$

$$\{ \} = \{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \theta_{mn}, \Psi_{mn}, \xi_{mn}\}^{Tr} \tag{III.25}$$

Et  $[K]$  C'est une matrice symétrique donnée par :

$$[K] = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{matrix} \quad (III.26)$$

$$\{F\} = \begin{matrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \\ F5 \\ F6 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ q0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (III. 27)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha^2 A_{11} & \beta^2 A_{66} \\ a_{12} &= \alpha\beta A_{12} & \alpha\beta A_{66} \\ a_{13} &= \alpha\beta^2 B_{12} + 2\alpha\beta^2 B_{66} + \alpha^3 B_{11} \\ a_{14} &= \beta^2 E_{66} & \alpha^2 E_{11} \\ a_{15} &= \alpha\beta E_{66} & \alpha\beta E_{12} \\ a_{16} &= \alpha A S_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= \alpha\beta A_{12} & \alpha\beta A_{66} \\ a_{22} &= \beta^2 A_{22} & \alpha^2 A_{66} \\ a_{23} &= \beta^3 B_{22} + 2\alpha^2 B_{66} + \alpha^2 B_{12} \\ a_{24} &= \alpha E_{66} & \alpha\beta E_{12} \\ a_{25} &= \alpha^2 E_{66} & \beta^2 E_{22} \\ a_{26} &= \beta A S_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= \alpha\beta^2 B_{12} + 2\alpha\beta^2 B_{66} + \alpha^3 \\ a_{32} &= \beta^3 B_{22} + 2\alpha^2 \beta B_{66} + \alpha^2 \beta B_{12} \\ a_{33} &= 2\alpha^2 \beta^2 D a_{12} + 2\alpha\beta^2 D a_{22} \\ &\quad 4\alpha^2 \beta^2 \\ a_{34} &= \alpha\beta^2 F_{12} + 2\alpha\beta^2 F_{66} + \alpha^3 \\ a_{35} &= \beta^2 F_{22} + 2\alpha^2 \beta F_{66} + \alpha^2 \beta F_{12} \\ a_{36} &= \alpha^2 B S_{13} & \beta^2 B S_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{41} &= \beta^2 E_{66} & \alpha^2 E_{11} \\ a_{42} &= \alpha\beta E_{66} & \alpha\beta E_{12} \\ a_{43} &= \alpha\beta^2 F_{12} + 2\alpha\beta^2 F_{66} + \\ &\quad \alpha^3 F_{11} \\ a_{44} &= \alpha^2 H_{11} & \beta^2 H_{66} & D S_{55} \\ a_{45} &= \alpha\beta H_{12} & \alpha\beta H_{66} \\ a_{46} &= \alpha E S_{55} + \alpha H S_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{51} &= \alpha\beta E_{66} & \alpha\beta E_{12} \\
 a_{52} &= \alpha^2 E_{66} & \beta^2 E_{22} \\
 a_{53} &= \beta^3 F_{22} + 2\alpha^2\beta F_{66} + \alpha^2\beta F_{12} \\
 a_{54} &= \alpha\beta H_{12} & Ds_{44} + \alpha^2 H_{66} \\
 a_{55} &= \beta^2 H_{22} & Ds_{44} & \alpha^2 \\
 a_{56} &= \beta E s_{44} + \beta H s_{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{61} &= \alpha A s_{13} \\
 a_{62} &= \beta A s_{23} \\
 a_{63} &= \alpha^2 B s_{13} & \beta^2 B s_{23} \\
 a_{64} &= \alpha D s_{55} + \alpha H s_{13} \\
 a_{65} &= \beta D s_{44} + \beta H s_{23} \\
 a_{66} &= F s_{33} & \alpha^2 E s_{55} & \beta^2 E s_{44}
 \end{aligned}$$

### III.10. Des exemples illustratifs

Afin de prouver la fiabilité / précision de la présente théorie, les exemples numériques suivantes sur les composites stratifiés plaques tirés de la littérature sont décrites et discutées. Certains problèmes de plaques sandwich avec des résultats non disponibles sont également présentés.

**Exemple 1:** Le carré laminé plaques carrées composites avec simplement appuyée conditions aux limites et soumis à une charge sinusoïdale  $q = q_0 \sin(\pi x / a) \sin(\pi y / b)$  sur le dessus.

Plaques sont considérés où " $q_0$ " est l'ampleur de la charge sinusoïdale au centre avec :

$$q_0 = q_{mn} \tag{III.28}$$

La configuration du stratifié considéré dans cet exemple est représenté sur la Figure.2.

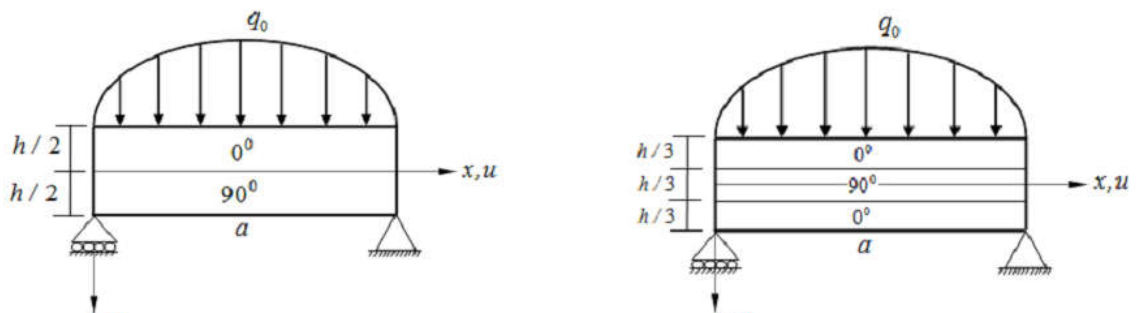


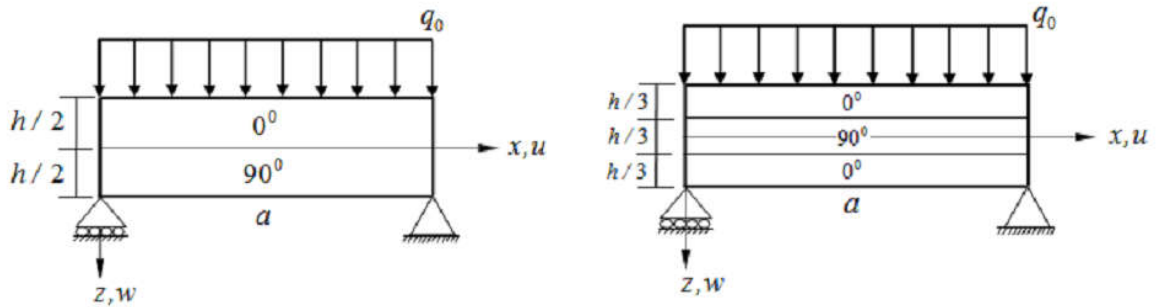
Figure III.2 : plaques stratifiées simplement appuyée sous chargement sinusoïdal



**Exemple 2:** Le carré laminé plaques composites avec des conditions aux limites simplement appuyées et soumis à réparti uniformément chargement transversal sont considérés. Le charge et donner par  $q(x, y) = \sum_{n=1}^{m=\infty} \sum_{m=1}^{n=\infty} q_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$  Plaque où  $m$  et  $n$  sont des entiers positifs et  $q_{mn}$  est le coefficient de dilatation de Fourier de charge en tant que donnée ci-après.

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \tag{III.29}$$

Où  $q_0$  est l'intensité de charge uniformément répartie. Les configurations stratifiées considérés dans cet exemple sont présentés sur la Figure.3.



**Figure III.3 :** plaques stratifiées simplement appuyées sous charge uniformément répartie.

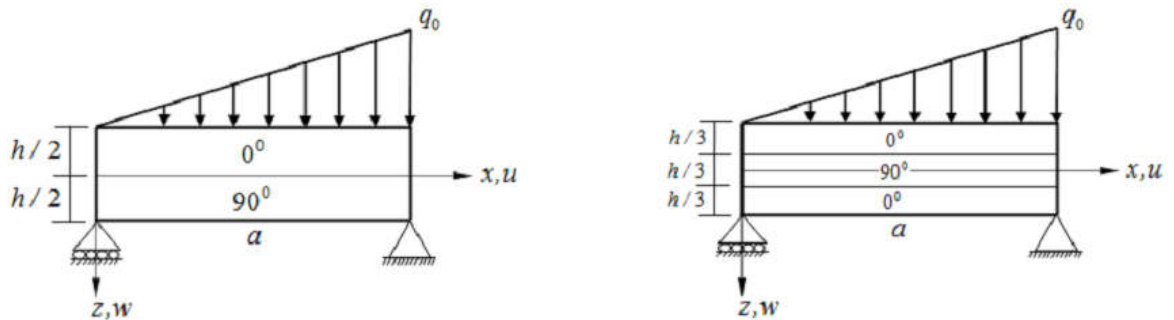
**Exemple 3:** Les composites de type sandwich et carrés plaques stratifiées avec des conditions aux limites sur appuis simples et soumis à une charge variant linéairement sur la surface supérieure de la plaque sont considéré .La charge et donner par :

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{m=\infty} \sum_{m=1}^{n=\infty} q_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \tag{III.30}$$

Avec les coefficients de Fourier expositions et la charge  $q_{mn}$

$$q_{mn} = \frac{8q_0}{mn\pi^2} \cos(m\pi) \tag{III.31}$$

Les configurations stratifiées considérés dans cet exemple sont présentés sur la Figure. 4.



**Figure III. 4 :** plaques stratifiées et sandwiches simplement appuyée sous charge variant linéairement.

### III.11. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement mécanique en flexion des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie d'ordre élevé. La théorie présentée n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les résultats présentés dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories.