

**CHAPITRE II :**  
**THEORIES DES PLAQUES STRATIFIEES**

Chapitre II

Théories des plaques stratifiées

II.1. Introduction

Des matières composites, particulièrement des plaques stratifiées, ont largement répondues aux besoins des constructeurs dans divers genres des machines tel que les structures aéronautiques, astronomiques, marines et transport (automobiles etc.), à cause de leur haute rigidité, leur poids et à la haute résistance au choc et la forte anisotropie. Ces concepts donnent une importance à l'étude des matériaux composites considérés sous la forme de plaques constituées de couches différentes ou non.

II.2. Qu'est ce qu'un Composite Stratifié ?

On appelle composite stratifié; ce qui résulte de plusieurs couches (ou pli) de nappes unidirectionnelles (figure II.1) ou de tissus avec des orientations propres à chaque pli. Il est défini par ses séquences d'empilement.

Un stratifié est construit de plusieurs couches dans la direction de l'épaisseur. [28]

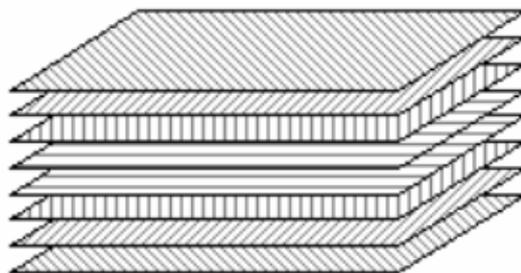


Figure II.1 : Stratifié Constitue de Couches Parfaitement Liées

Un stratifié monolithique est constitué de plusieurs plis composites (fibre/résine), caractérisés par leur orientation. La figure II.2 présente la composition d'un stratifié dit quasi isotrope [45°, -45°, 90°, 0°].

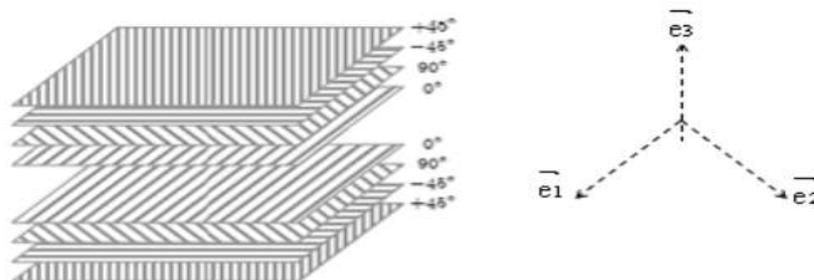


Figure II.2 : Stratifié Quasi-Isotrope [45°, -45°, 90°, 0°].

### II.3. Les Différents types des stratifiés

Parmi les stratifiés, il existe quatre types (Figure II.3) :

#### II.3.1 Stratifié unidirectionnel

L'orientation des fibres est la même dans tous les plis, ils sont toutes dans la même direction.

Exemple: un stratifié unidirectionnel à  $0^\circ$ ,  $\theta=0^\circ$  dans les différents plis

#### II.3.2 Stratifié à pli orienté (équilibré) $\pm\theta$

L'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre,  $(+\theta/-\theta)$ , avec  $\theta$  différent de  $0^\circ$  ou de  $90^\circ$ .

#### II.3.3 Stratifié à pli croisé

L'orientation des fibres est alternée (figure II.3) d'un pli à l'autre,  $0/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ .

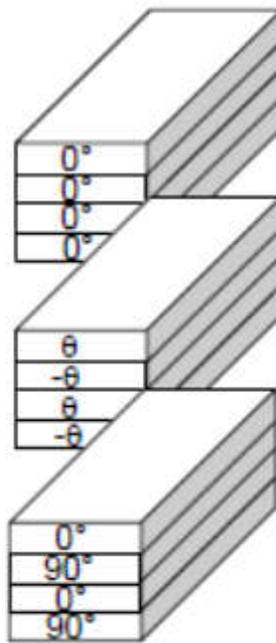
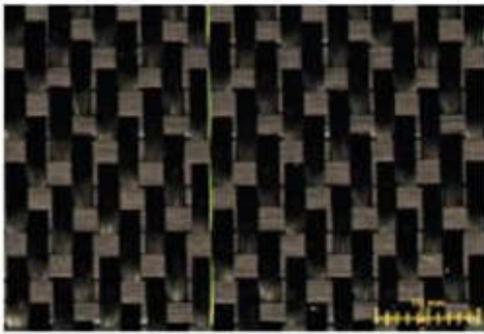


Figure II.3 : Différents type de Stratifiés

Lorsque les fibres se présentent sous forme de tissu, le pli est dit "tissé" (figure II.4), il comporte des fibres dans deux directions appelées sens chaîne et sens trame. S'il y a autant de fibres dans les sens chaîne et trame le pli est dit tissé équilibré.



(a)Satin 4 équilibré carbone (T300)

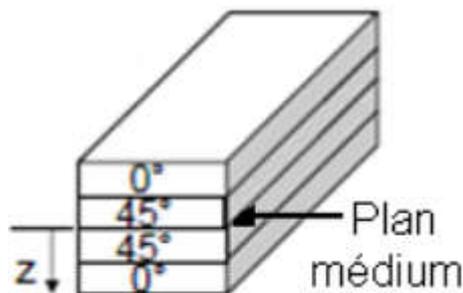


(b)Nappe de fibre verre(R)

**Figure II.4** : Exemple de Pli Tissé (a) et de Pli Unidirectionnel (b) [28]

### II.3.4 Stratifié symétrique

L'orientation des fibres est symétrique par rapport à la ligne centrale du stratifié (figure II.5), c.à.d. pour chaque pli à angle  $\theta$  au-dessus du plan médian il y a un pli à angle égal de l'autre côté du plan médian,  $\theta(z)=\theta(-z)$ .

**Figure II.5** : Stratifié symétrique

### II.3.5 Stratifié antisymétrique

Les plaques stratifiées antisymétriques sont utilisées afin d'éliminer le couplage entre membrane et la flexion. Par contre, certaines applications nécessitent l'utilisation des plaques stratifiées non symétriques où le couplage membrane-flexion est nécessaire (conception de turbine à ailettes ayant un profil gauche). Egalement, dans le cas où une meilleure rigidité au cisaillement est recherchée, il est nécessaire d'avoir des couches possédant différentes orientations.

Une plaque stratifiée antisymétrique est constituée de couches en nombre impair, dont la répartition des épaisseurs est symétrique, et celle des orientations des axes antisymétriques par rapport au plan moyen. Deux couches de cotes symétriques ont donc :

- Des cotes opposées  $z_k$  et  $-z_k$
- La même épaisseur  $e_k$
- Des orientations  $\theta$  et  $-\theta$  par rapport aux axes de référence de plaque stratifiée.

#### II.4. Les hypothèses de la théorie des stratifiés

La théorie des stratifiés permet de calculer les contraintes et les déformations dans chaque pli d'une structure composite stratifiée. Les hypothèses suivantes sont fondamentales pour cette théorie: [29].

- 1- L'interface entre les couches est parfaite (Continuité des déplacements et des déformations) ;
- 2- Chaque couche est un matériau homogène avec des propriétés effectives connues ;
- 3- Les propriétés de la couche individuelle peuvent être isotropes, orthotropes ou transversalement isotropes ;
- 4- Chaque couche est dans un état de contrainte plane ;
- 5- Le stratifié se déforme selon les hypothèses de «Kirchhoff -Love» pour la flexion et la traction des plaque minces :
  - La normale au plan médium reste droite et est normale au plan médium déformé après déformation,
  - Les normales au plan médium ne changent pas de longueur.
- 6- Le stratifié a une épaisseur très faible par rapport à sa largeur.

#### II.5. Le Comportement élastique d'un stratifié

##### II.5.1. Relation déformation et déplacement

Le comportement élastique d'un pli est bien évidemment anisotrope, mais l'anisotropie dépend du type de pli. Un pli unidirectionnel a un comportement isotrope transverse [36], son tenseur de souplesse est de la forme.

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{26}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{26}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_{26}}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Un stratifié équilibré a un comportement orthotrope, son tenseur de souplesse est de la forme.

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{16}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{16}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{16}}{E_1} & -\frac{\nu_{16}}{E_1} & \frac{1}{E_6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{16}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{16}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

Le comportement élastique d'un composite stratifié est plus complexe à décrire, il dépend de l'orientation de chacun des plis qui le compose. Les structures composites stratifiées étant le plus souvent minces et donc assimilables à des plaques ou à des coques. On utilise la théorie des stratifiés qui consiste à se placer en contraintes planes et à prendre une cinématique de type Euler-Bernoulli ou Kirchhoff-Love. Ainsi on homogénéise le comportement du stratifié dans son épaisseur pour obtenir une modélisation bidimensionnelle de type plaque ou coque.

La première hypothèse de «Kirchhoff -Love» exige que les déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  soient nulles.

La deuxième hypothèse de «Kirchhoff -Love» exige que le déplacement transversal suivant l'axe «Z» du plan médium est une fonction de x et y seulement c'est-à-dire  $W=(x, y)$ .

La Figure II.6, illustre un schéma du plan X -Z d'une surface moyenne déformée.

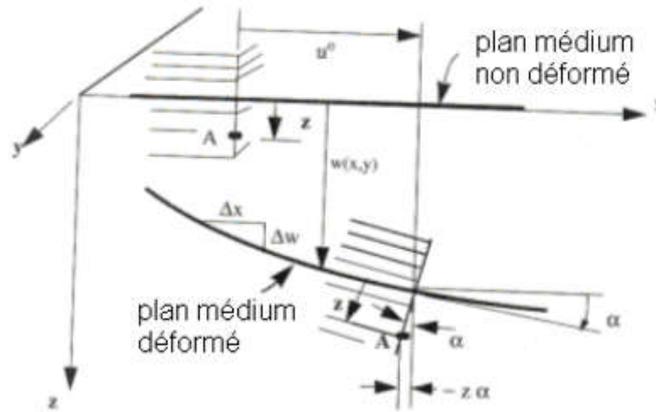


Figure II.6 : Plan Medium dans un Stratifié Déformé [30]

Supposons que les déplacements sont petits, la pente  $\alpha$  de la surface déformée sera aussi petite ce qui implique que:

$$tg\alpha = \frac{\partial w}{\partial x} \approx \alpha \quad (II.3)$$

Le déplacement total «u» du point A (voir Figure II.6) peut être écrit comme la somme du déplacement du plan moyen  $u_0$  plus le déplacement dû à la rotation  $\alpha$  de la normale au plan moyen. Ainsi :

$$u = u_0 + ztg\alpha = u_0 + z\alpha = u_0 + z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (II.4)$$

De la même façon que pour le plan Y-Z, nous aurons:

$$v = v_0 + z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (II.5)$$

$v_0$  : Le déplacement du plan médium suivant l'axe Y.

Puisque les normales ne changent pas de longueurs, le déplacement transversal  $w$  est indépendant de «z» et peut être écrit sous la forme suivante:

$$w(x, y) = w_0(x, y) \quad (II.6)$$

Où: l'indice «0» représente le plan médium

Les équations déformations-déplacements peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} & z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \varepsilon_x + z k_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} & z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \varepsilon_y + z k_y \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Où les courbures  $\{k\}$  sont définies comme suit:

$$k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad k_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{II.8})$$

En combinant les équations (II.7) et (II.8) nous aurons;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Ou plus simplement :

$$\{\varepsilon_x\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\}_x \quad (\text{II.10})$$

La dernière équation exprime les déformations totales  $\{\varepsilon_x\}$  à chaque cotes «z» dans le stratifié en fonction des déformations au niveau du plan médium  $\{\varepsilon^0\}_x$  et les courbures  $\{k\}_x$ , c'est l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés.

### II.5.2 Les Contraintes

L'expression des contraintes peut être maintenant déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations et par l'utilisation de l'équation (II.10):

$$\{\sigma\}_x = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon\}_x \quad (\text{II.11})$$

Où :  $[\bar{Q}]^k$  matrice de rigidité réduite transformée du k<sup>ième</sup> pli correspondant à la cote z.

Le point le plus important dans l'utilisation des équations constitutives des stratifiés est que la matrice transformée  $[\bar{Q}]^k$  varie avec l'orientation des fibres de chaque couche.

A partir des équations (II.10) et (II.11), nous pouvons écrire:

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + [\bar{Q}]^k z \{k\} \quad (\text{II.12})$$

### II.5.3 Les forces par unité de longueur [31]

Les forces par unité de longueur  $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$  (voir Figure II.7) sont définies comme suit :

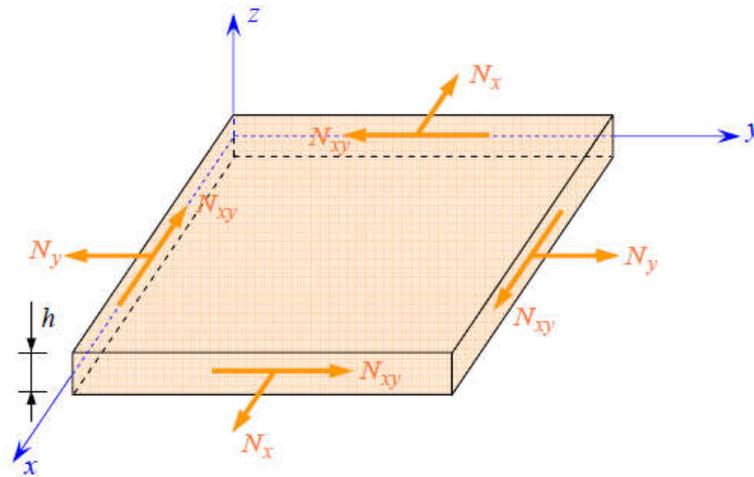


Figure II.7 : Forces par unité de longueur [31]

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz \quad (\text{II.13})$$

Les trois équations peuvent être écrites sous la forme condensée:

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} dz \quad (\text{II.14})$$

A partir des équations (II.12) et (II.13), nous aurons:

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} dz + \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}]^k \{k\} z dz \quad (\text{II.15})$$

Ou bien sous une autre forme:

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] dz \right) \{\varepsilon^0\} + \sum_{k=1}^n \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] dz \right) \{k\} \quad (\text{II.16})$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme suivante:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{k\} \quad (\text{II.17})$$

Où:

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k \quad z_{k-1}) \quad (\text{II.18})$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^2 \quad z_{k-1}^2) \quad (\text{II.19})$$

**Remarque:**

La matrice  $[\bar{Q}]^k$  est constante à travers chaque couche mais peut être différente d'une couche à une autre.

L'équation (II.17) relie les forces de membrane par unité de longueur aux déformations du plan médium  $\{\varepsilon^0\}$ , et les courbures du stratifié  $\{k\}$  par les matrices  $[A]$  et  $[B]$ .

La matrice  $[A]$  représente «la matrice de membrane» et la matrice  $[B]$  représente «la matrice de couplage membrane -flexion».

**II.5.4 Moments par unité de longueur [31]**

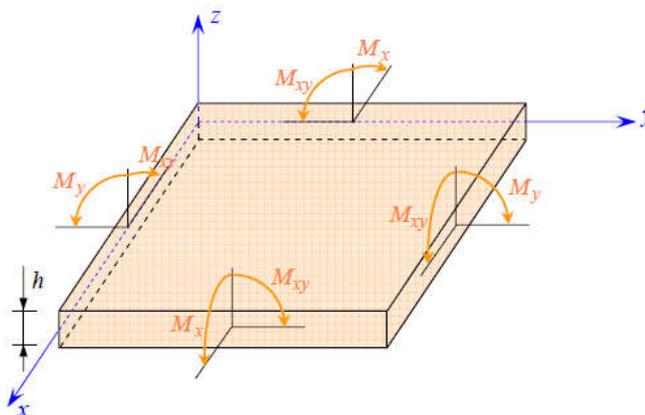


Figure II.8 : Moments par unité de longueur [31]

On définit les moments par unité de longueur  $\{M_x, M_y, M_z\}$  (voir figure II.8) comme l'intégrale des forces « $\sigma_i z dz$ », ainsi:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz \quad M_z = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_z z dz \quad (\text{II.20})$$

Ou bien sous une forme condensée:

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} z dz \quad (\text{II.21})$$

Substituant l'équation (II.12) dans l'équation (II.21), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur:

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \quad (\text{II.22})$$

Où la matrice de flexion [D] est définie comme suit:

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (\text{II.23})$$

### II.5.5 Relations Constitutives du Stratifié

Les équations (II.17) et (II.22) peuvent être combinées pour donner l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

Cette équation peut être écrite sous une forme plus détaillée comme suit:

$$\begin{matrix}
 N_x & A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & \varepsilon_x^0 \\
 N_y & A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & \varepsilon_y^0 \\
 N_{xy} & A_{16} & A_{66} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & \gamma_{xy}^0 \\
 M_x & B_{11} & B_{16} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & k_x \\
 M_y & B_{12} & B_{26} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & k_y \\
 M_{xy} & B_{16} & B_{66} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & k_{xy}
 \end{matrix} = \quad (II.25)$$

Les équations (II.24) ou (II.25) montrent clairement le couplage de la réponse en flexion et de membrane du stratifié, illustrée par la matrice  $[B]$ . Si la matrice  $[B] = [0]$ , alors l'effet de membrane est découplé de l'effet de flexion.

## II.6 : Modèles analytiques des plaques

### II.6.1 : La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement ( $L/h$ ).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.9), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé à [32] et [30].

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \quad (II.26)$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).

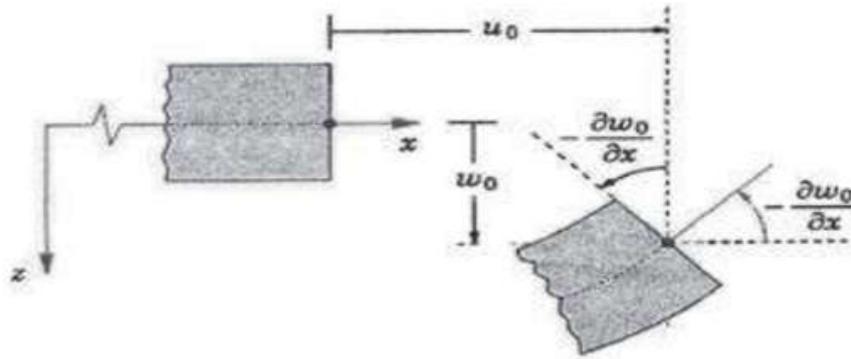


Figure II.9 : Illustration de la plaque (CPT)[30].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

### II.6.2 : La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) (figure II.10) [1].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \theta_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \theta_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.27}$$

$(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\theta_x, \theta_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement de

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}
 \tag{II.28}$$

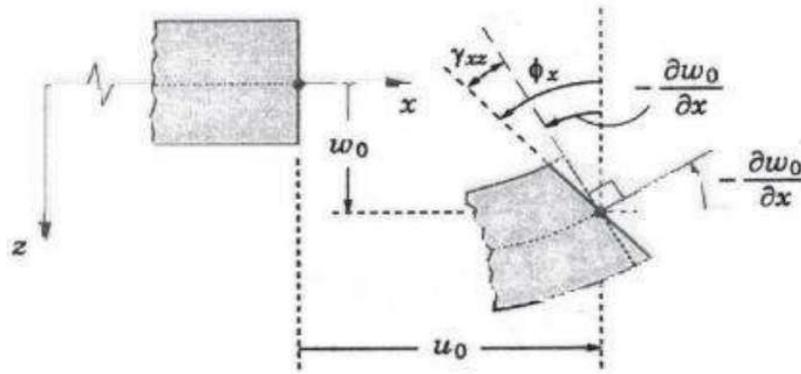


Figure II.10: Illustration de la plaque de ( FSDT) [1].

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### II.6.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. [37], [8] .

Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des plaques matériaux à gradient de propriétés.

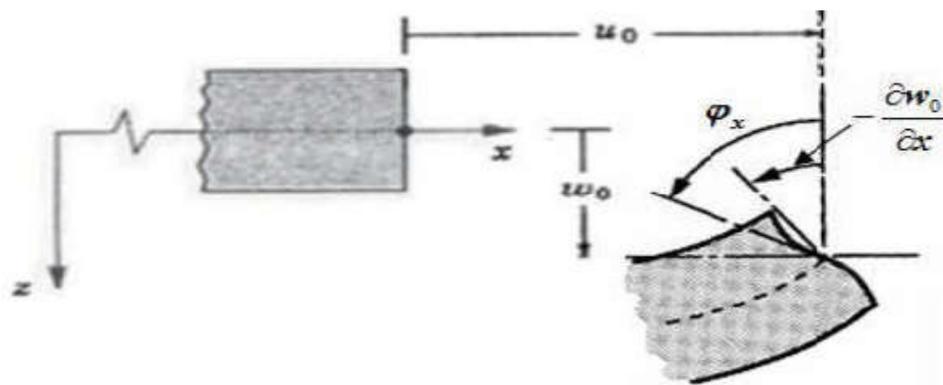


Figure II.11: Illustration de la plaque théorie d'ordre élevé (HSDT)[8].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (II.29)$$

Avec :

$(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\varphi_x, \varphi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement  $\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x$ ,  $\varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y$ ,  $f(z)$  est une fonction de Cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenue en prenant :  $f(z)=0$

Alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $f(z)=z$

Les champs de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT)[8] sont obtenu par la prise de la fonction suivante:

$$f(z) = z(1 - \frac{4}{3h^2} z^2) \quad (II.30)$$

Dans le modèle de (Reddy) [33], le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur .Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier propose le modèle sinus (SSDT) [35] qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{z}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (II.31)$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (Reddy) [33].

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée [36] est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.32})$$

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z \frac{(h/\pi) \sin h\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{II.33})$$

## **II.7. Conclusion**

Au cours de ce chapitre, après l'introduction et une présentation de l'architecture des plaques stratifiées, et nous l'avons terminé par une démonstration des différents types des théories des plaques stratifiées telles que la théorie classique (CPT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDT) et les théories d'ordre élevé HSDT (TSDT ,SSDT, ESDPT).