

III.1. Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories à ordre élevé qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque [15].

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche
- Approche développement asymptotique

III.2 Modélisations des structures sandwiches

Les modèles les plus utilisés sont basés sur les hypothèses de kirchoff-love ou de Reissin Mindlin, qui supposent un déplacement linéaire dans l'épaisseur cela conduit à la théorie des stratifiés classiques, qui définit des tenseurs de rigidité équivalente en flexion et membrane. Mais cette théorie ne fonctionne pas bien lorsque l'âme des sandwichs est très molle, ce qui est le cas des sandwichs à âme en nid d'abeille ou des tôles sandwichs avec une couche de polymère amortissant. Pour les sandwichs à âme molle, il faut donc enrichir la description des champs à travers l'épaisseur. Divers modèles ont été proposés, les plus connus étant l'hypothèse d'une variation cubique dans l'épaisseur (Reddy, Soldatos..), d'une variation sinusoïdale (Touratier) ou d'une variation zigzag (Mead, Rao...) ou d'autre encore. ont été classés l'ensemble des modèles zigzag et les modèles non zig-zag. la différence essentielle entre ces deux descriptions est au niveau de la continuité ou la continuité du champ de déplacement à l'interface cœur-peaux. Le plus connu et le plus simple des modèles est celui proposé Par love (1927) connu sous le nom de kirchoff-love. Dans ce modèle, le champ de déplacement est linéaire par rapport à z , et la déformation transversale est nulle. vu l'importance de la déformation transversale du cœur dans la modélisation d'une structure sandwichs. le modèle de kirchoff-love est inadapté à la modélisation du cœur par contre il pourra être retenu pour la modélisation des faces, l'autre modèle linéaire, souvent utilisé, est de celui de Mindlin. contrairement

au modèle de kirchoff-love , ce modèle peut décrire une déformation non nulle au niveau du cœur . le modèle de Midlin au cœur combiné avec le modèle Kirchoff-love aux faces et un modèle type zig-zag.[16]

III.3. Les Différent Modèle des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

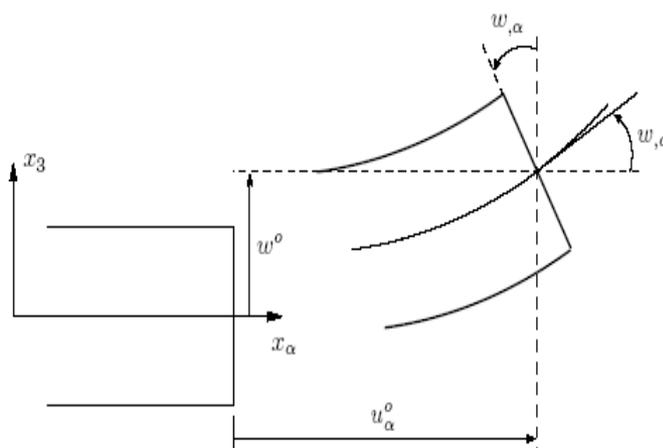
III.3.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

III.3.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [17] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure. III.1).



.Figure.III. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff

,Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors

$$(III.1) \quad \begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad , \alpha = 1, 2$$

Avec

u_α : Le déplacement de membrane dans la direction α :

w : La flèche de la plaque :

$w_{,\alpha}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement) :

III.3.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé ; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure.III.2).

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$u_\alpha(X_1, X_2, X_3 = z) = \begin{cases} u_\alpha^0(X_1, X_2) - z \gamma_\alpha^0(X_1, X_2) \\ w(X_1, X_2) \end{cases} \quad (III.2)$$

Avec,

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

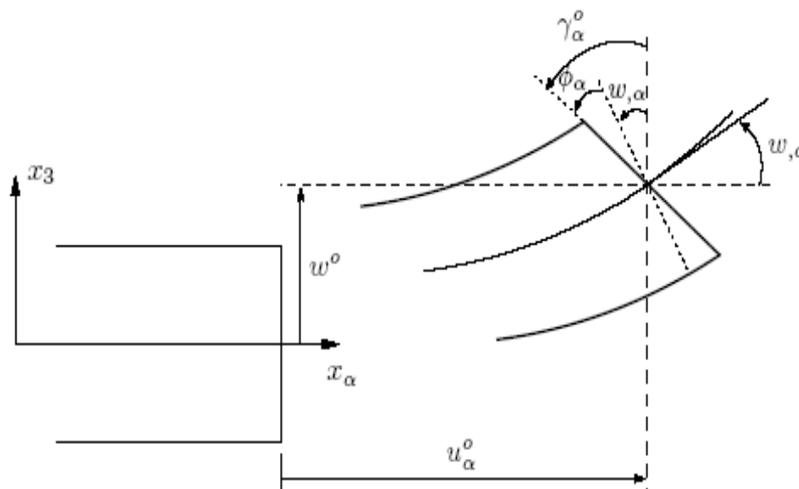


Figure. III.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_α^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [18]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. III.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiées ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

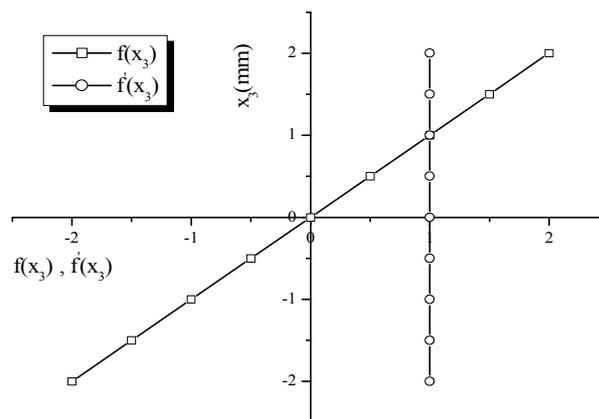


Figure. III.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur

III.3.1.3. Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. III.4) [18]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \text{(III.3)}$$

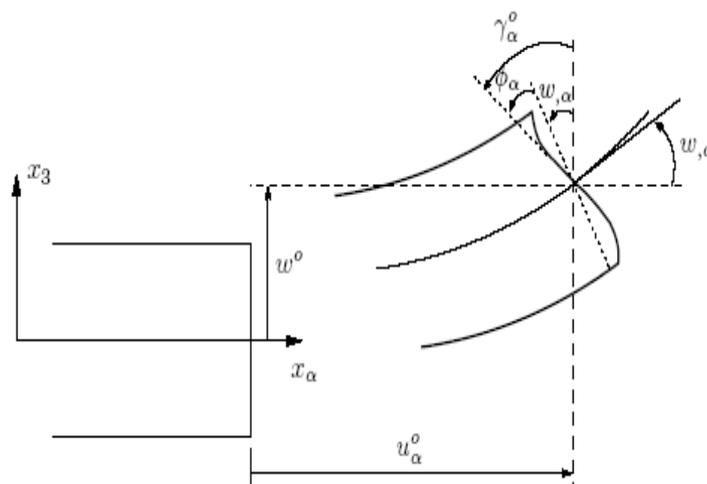
Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{0(i)} = 0$ pour $j= 2, 3, 4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Le développement en série de Taylor est utilisé avec .

* Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zW_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = W(x_1, x_2) \end{cases} \text{(III.4)}$$



.Figure .III.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes : $\psi(z)$

; L'approche d'[Ambartsumyan][19] avec -

$$(III.5) \quad \psi(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$$

; L'approche de [Reissner][20] avec -

$$\psi(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (III.6)$$

; L'approche de [Reddy][21] avec -

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (III.7)$$

Dans le modèle de [18], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de Touratier [22] avec ;

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (III.8)$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit:

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1}$$

$$= \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \quad (\text{III.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [5].

Récemment, Afaq et al. [18] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$\psi(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance paire et impaire de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de Aydogdu [23] avec ;

$$\psi(z) = z \alpha \frac{2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\sin(\alpha)} \quad \alpha > 0 \quad (\text{III.11})$$

h : étant l'épaisseur du multicouche.

III.3.2 Approche par couche :

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous-structure (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux, (d'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche).

mais ils permettent l'obtention de résultat plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan. D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacement ou en contrainte aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfait à priori les conditions de contact et est indépendante du nombre de couches.

III.3.2.1 Les modèles zig-zag :

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnu. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaire qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface. Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre.

Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements.

On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles connus par "artificiels" peuvent prévoir les délaminages, par exemple.

Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élanement diminue.

III.3.3 Approche développement asymptotique :

Le développement asymptotique est appliqué à des structures a priori peu épaisses ou le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite). Un deuxième type d'intégrales, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords (couche limite).

III.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons vu les différents modèles dans l'élasticité bidimensionnelles à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.

Le chapitre suivant portera sur la présentation des formulations théoriques et validation et interprétation des résultats.