

Chapitre 4

Comportement statique des poutres FGM sous l'effet de cisaillements transverse.

IV.I Introduction:

Le travail dans ce chapitre présente une étude sur l'effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des poutres FGM soumises à la flexion. Nous avons proposé une solution analytique, ensuite, nous avons déduit les expressions mathématiques de la flèche, du déplacement longitudinal et des contraintes normales et tangentielles en utilisant les différentes théories de poutres à savoir : la théorie d'ordre élevé qui vérifie la nullité des contraintes de cisaillement aux bords supérieurs et inférieurs de la poutre, la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet de cisaillement transverse mais elle n'assure pas la nullité des contraintes de cisaillement dans les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et la théorie d'Euler-Bernoulli qui ne tient pas compte de l'effet de cisaillement transverse. Les équations d'équilibre sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels. Les expressions mathématiques sont obtenues en utilisant l'approche de Navier.

IV.2 Formulation théorique:

Considérons une poutre rectiligne constituée d'un matériau composite, d'épaisseur h , de largeur b et de longueur L , construite de couches orthotropes linéairement élastiques. La relation contrainte déformation pour les poutres FGM est donnée par :

La loi de Hooke généralisée :

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \overline{Q_{11}^{(k)}} \varepsilon_{xx} \tag{IV.1}$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = \overline{Q_{55}^{(k)}} \gamma_{xz}$$

Avec $Q_{ij}^{(k)}$ sont les coefficients de rigidité réduite. En supposant que les déformations de la poutre sont dans le plan x-z et désignant les composantes du déplacement le long de la x et z par u et w, respectivement, le champ de déplacement est connu d'après la théorie d'ordre élevé.

$$\begin{aligned} U_x(x, z) &= U(x) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \psi(z) \varphi_x \\ U_z(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad (IV.2)$$

Avec $u(x)$, $w(x)$ représentent respectivement le déplacement dans le plan et le déplacement transverse, $\frac{\partial w}{\partial x}$ est la rotation de la section, φ_x est la rotation suivant x, et la fonction $\psi(z)$ et la fonction de gauchissements .par conséquent, la déformation la déformation dans la direction y est négligée dans cette approche .dans l'hypothèse de petit perturbation, le tenseur de déformation de green- Lagrange est écrit comme:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, z) &= \frac{\partial U(x)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \psi(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \gamma_{xz}(x, z) &= \psi'(z) \cdot \varphi_x \end{aligned} \quad (IV.3)$$

IV.3 Equations d'équilibre et conditions aux limites :

Nous pourrions établir les équations d'équilibres à partir du principe des travaux virtuels (P.T.V). L'équilibre statique peut être décrit par la somme du travail intérieur (δW_{int}) et le travail extérieur (δW_{ext}) développés par le champ du déplacement d'un point M. Le travail virtuel de tous les efforts (Intérieurs et extérieurs) s'exerçant sur le système est nul.

$$\delta W_{ext}(\delta U) + \delta W_{int}(\delta U) = 0 \quad (IV.4)$$

Suivant les hypothèses de la théorie classique des poutres, le chargement appliqué est considéré comme une charge uniformément répartie le long de la poutre comme montré dans (Fig. 1)

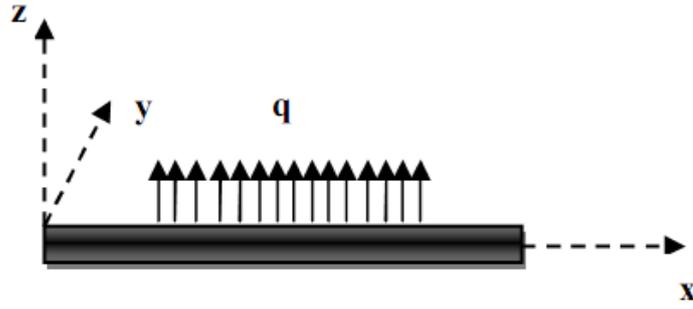


Figure IV.1 : la charge uniformément répartie le long de la poutre

-Le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit:

$$\delta W_{ext}(\delta U) = \int_0^l (q \delta w) dx \quad (IV.5)$$

Le travail virtuel des efforts intérieurs s'écrit:

$$\delta W_{int}(\delta U) = - \int_0^l \left[\int [\sigma_x \delta \varepsilon_x(x) + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}(x)] ds \right] dx \quad (IV.6)$$

Champ virtuel : D'après Eq. (IV.2), le champ de déplacement virtuel s'écrit dans la base (x, y, z) :

$$\delta U_x = \delta U(x) - z \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \psi(z) \delta \varphi_x \quad (IV.7)$$

$$\delta U_z = \delta w(x)$$

De façon identique, le tenseur des déformations virtuelles s'écrit:

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{\partial U(x)}{\partial x} - z + \psi(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad (IV.8)$$

$$\gamma_{xz}(x, z) = \psi'(z) \varphi_x$$

On remplace l'expression Eq. (IV.6) dans Eq. (IV.8) on obtient le travail virtuel des efforts intérieurs :

$$\delta W_{\text{int}}(\delta U) = - \int \left[N_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + S_x \delta \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + Q_{xz} \delta \varphi_x \right] dx \quad (\text{IV.9})$$

N_x et M_x sont respectivement l'effort normal et le moment de flexion.

$$N_x = \int \sigma_x ds = \int (\bar{Q}_{11} \frac{\partial U(x)}{\partial x} - \bar{Q}_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{11} \psi(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) ds \quad (\text{IV.10})$$

$$= b A_{11} \frac{\partial U(x)}{\partial x} - b B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b B_{11}^a \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$M_x = - \int_s z \sigma_x ds = - \int_s z (\bar{Q}_{11} \frac{\partial U(x)}{\partial x} - \bar{Q}_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{11} \psi(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) ds \quad (\text{IV.11})$$

$$= -b B_{11} \frac{\partial U(x)}{\partial x} + b D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b D_{11}^a \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

Les résultats supplémentaires s_x Eq.(IV.12) et Q_{xz} Eq (IV.13) sont dus à l'introduction de $\psi(z)$ dans l'expression du champ de déplacement.

Le moment supplémentaire du aux cisaillements transverses et est l'effort de cisaillement Q_{xz} .

$$S_x = \int_s \psi(z) \sigma_x ds = \int_s \psi(z) \left(\bar{Q}_{11} \frac{\partial U(x)}{\partial x} - \bar{Q}_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{11} \psi(z) \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) ds \quad (\text{IV.12})$$

$$= b B_{11}^a \frac{\partial U(x)}{\partial x} - b D_{11}^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b F_{11}^a \frac{\partial Q_x}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{xz} &= \int_S \psi'(z) \tau_{xz} ds = \int_S (\psi'(z) \bar{Q}_{55} Q_x) ds \\
 &= b A_{44}^a Q_x
 \end{aligned}
 \tag{IV.13}$$

Les coefficients de rigidité du stratifiée A_{11} , B_{11} etc., sont définis en termes de coefficients réduits, $\bar{Q}_{11}^{(k)}$, $\bar{Q}_{55}^{(k)}$ pour les couches $k=1,2,\dots, N$;

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \{1, z, z^2\} dz
 \tag{IV.14}$$

$$\{B_{11}^a, D_{11}^a, F_{11}^a\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \psi(z) \{1, z, z^2\} dz
 \tag{IV.15}$$

$$A_{44}^a = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{55}^{(k)} \psi'^2(z) dz
 \tag{IV.16}$$

k est le numéro de couche

1V.4 Equations d'équilibre :

Par application du principe des travaux virtuels Eq. (IV.4) sur les expressions des travaux virtuels Eq. (IV.5) et Eq. (IV.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^L \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta U + \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + q \right) \delta W + \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} - Q_x z \right) \delta Q_x \right) \\
 &+ \left[-N_x \delta U - M_x \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta W - S_x \delta Q_x \right]_0^L = 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.17}$$

L'équation Eq. (IV.17) devant être vérifiée quels que soient les déplacements virtuels δU , δW et $\delta \varphi_x$, on en déduit les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + q = 0 \\ \frac{\partial s_x}{\partial x} - Q_{xz} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

Et les conditions aux limites en $x=0$ et $x=a$ qui peuvent être exprimées soit en déplacement soit en force.

$$\begin{cases} \delta U = 0 \text{ ou } -N_x = 0 \\ \frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0 \text{ ou } -M_x = 0 \\ \delta w = 0 \text{ ou } \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \\ \delta \varphi_x = 0 \text{ ou } -s_x = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

Remplacement des équations Eqs. (IV.10), (IV.11), (IV.12) et (IV.13) dans l'équation Eq. (19), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + B_{11}^a \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} &= 0 \\ B_{11} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_{11}^a \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} &= -q \\ B_{11}^a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - D_{11}^a \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + F_{11}^a \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - A_{44}^a \varphi_x &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

IV.5 La solution exacte de la poutre FGM

Considérant une FGM de longueur L , la largeur b , et d'épaisseur totale h soumis à une charge $q_z(x)$. Suivant la procédure de la solution de Navier, les composantes du déplacement et la force extérieure pour les cas de charge sinusoïdalement distribuée peut être exprimée en :

$$\begin{cases} U(x) \\ W(x) \\ Q_x(x) \end{cases} = \begin{cases} U_s \cos(\lambda x) \\ W_s \sin(\lambda x) \\ X_s \cos(\lambda x) \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

$$q_z(x) = q_0 \sin(\lambda x) \quad (\text{IV.22})$$

$$\lambda = \frac{m\pi}{q}$$

U_s, W_s, X_s sont des paramètres arbitraires. En remplaçant les équations Eq. (IV.21), et Eq. (IV.22), dans l'équation Eq. (IV.20) on obtient :

$$\begin{aligned} -A_{11} \cdot \lambda^2 U_s \cos(\lambda x) + B_{11} \lambda^3 W_s \cos(\lambda x) - B_{11}^\alpha \lambda^2 X_s \cos(\lambda x) &= 0 \\ -B_{11} \cdot \lambda^3 U_s \sin(\lambda x) - D_{11} \lambda^4 W_s \sin(\lambda x) + D_{11}^\alpha \lambda^3 X_s \sin(\lambda x) &= -q \sin(\lambda x) \\ -B_{11}^\alpha \cdot \lambda^2 U_s \cos(\lambda x) + D_{11}^\alpha \lambda^3 W_s \cos(\lambda x) - (F_{11}^\alpha \lambda^2 - A_{11}^\alpha) X_s \cos(\lambda x) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Ou sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} -\lambda^2 A_{11} & \lambda^2 B_{11} & -\lambda^2 B_{11}^\alpha \\ \lambda^3 B_{11} & -\lambda^4 D_{11} & \lambda^3 D_{11}^\alpha \\ -\lambda^2 B_{11}^\alpha & \lambda^3 D_{11}^\alpha & -(F_{11}^\alpha \lambda^2 - A_{11}^\alpha) \end{bmatrix} \begin{cases} U_s \\ W_s \\ X_s \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -q_0 \\ 0 \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

IV.6 La forme de la fonction :

La plupart des solutions montrées ont été basées sur les choix de la fonction, plusieurs modèles disponibles pour les poutres à savoir : le modèle classique d'Euler-Bernoulli (CBT) qui néglige le cisaillement transversal, le modèle de premier ordre de Timoshenko (FSDBT), qui considère que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur de la poutre, et oblige d'introduire la notion de coefficient correcteur pour mieux prendre en compte l'effet du cisaillement transverse, et les modèles d'ordre élevé qui vérifient la nullité des contraintes de cisaillement sur les limites supérieure et inférieure de la structure. Pour les modèles d'ordre élevés, on utilisera une fonction de gauchissement cubique telle que celle employée dans la théorie des plaques de Reddy [Reddy 84] (TSDBT). La fonction de gauchissement utilisée pour chaque théorie est comme suit :

Euler- Bernoulli : $\Psi(z)=0$ (IV.25)

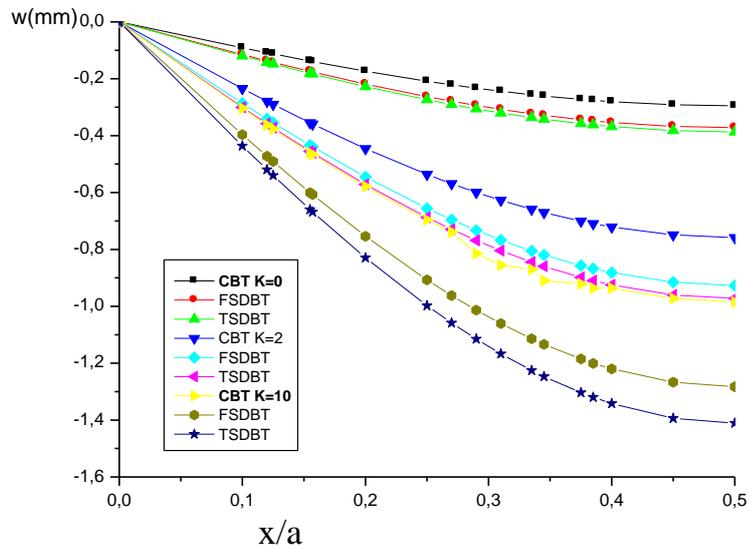
Timoshenko: $\Psi(z)=z$ (IV.26)

Reddy: $\Psi(z)= z (1-\frac{4 z^2}{3 h^2})$ (IV.27)

IV.7 Résultats numériques et discussions

On considère une poutre composite stratifiée de longueur $L=10m$, de largeur unitaire et d'épaisseur $h=1m$. La poutre possède une seule couches Le matériau utilisé couches c'est le céramique $E_c=380GPa$ et le métal $E_m=70 GPa$. La poutre est simplement appuyée et soumise à un chargement sinusoïdale, $q=-10^6Pa$.

1- la variation de la flèche :



FigureIV.2:La variation de la flèche en fonction de x/a pour diffirentes modèles

2- Le déplacement longitudinal : $k=0$

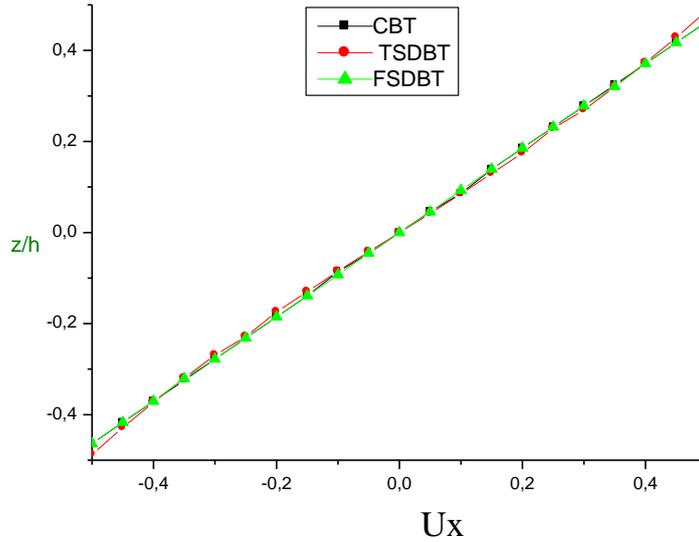


Figure IV.3: profil de déplacement longitudinale dans l'épaisseur en fonction des différents modèles ($k=0$)

3- Le déplacement longitudinal : $k=2$

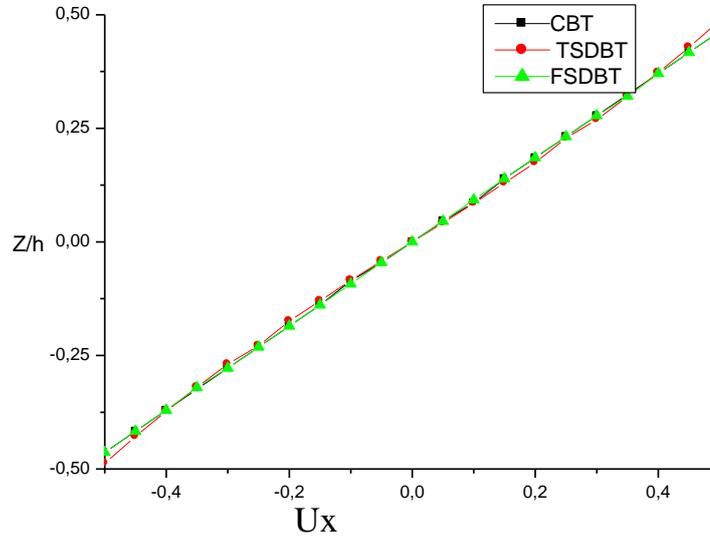


Figure IV.4: Profil de déplacements longitudinale dans L'épaisseur en fonction des différents modèles ($k=2$)

4-la distribution de la contrainte normale ($k=0$) :

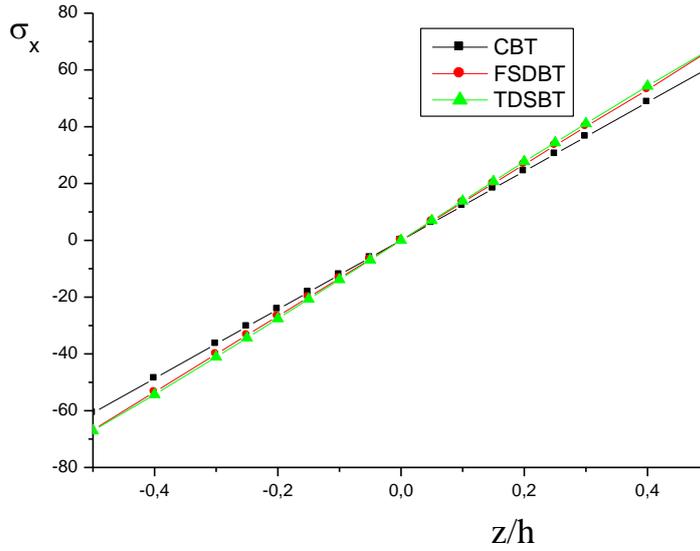


Figure IV.5: La distribution de la contrainte normale en fonction de différents modèles ($k=0$)

5-la distribution de la contrainte normale ($k=2$) :

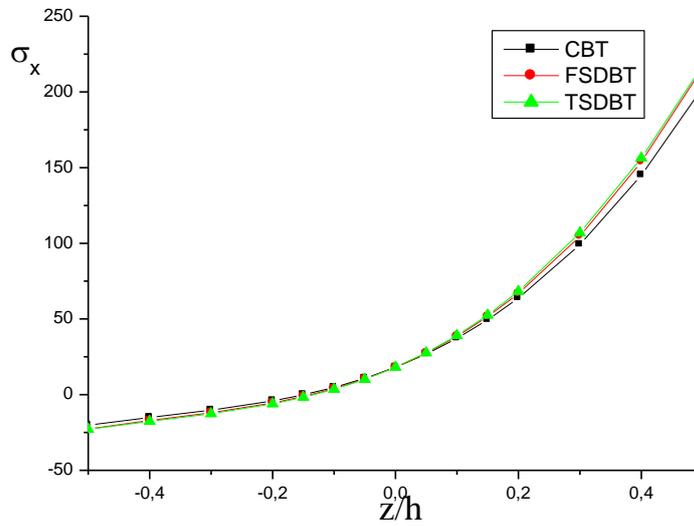


Figure IV.6: La distribution de la contrainte normale en fonction des différents modèles

6-la distribution de la contrainte tangentielle ($k=0$) :

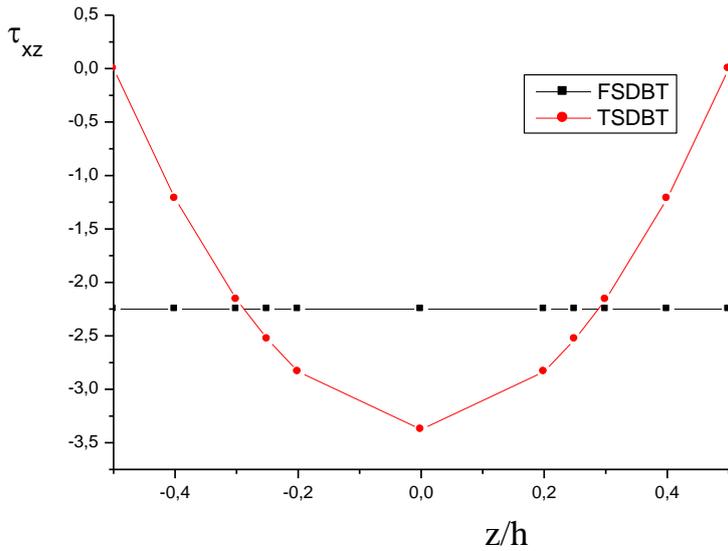


Figure IV.7: La distribution de la contrainte tangentielle en fonction des différents modèles (k=0)

7-la distribution de la contrainte tangentielle (k=2) :

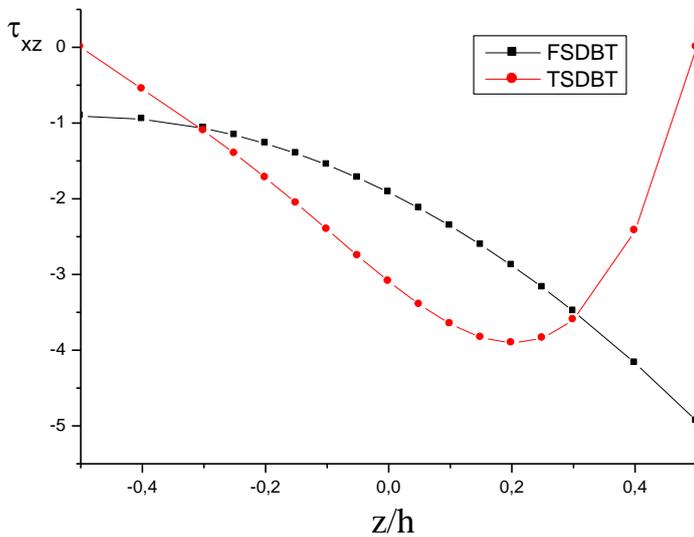


Figure IV.8: La distribution de la contrainte tangentielle en fonction de différents modèles (k=2)

IV.8 Validation et comparaison des résultats :

Dans la Fig.2 la flèche de modèle d'ordre élevé est plus grande que celle d'Euler-Bernoulli et Timoshenko, ceci est dû à la présence de l'effet de cisaillement transverse dans la théorie cubique. et quand le paramètre K prend une grande valeur la poutre fléchée plus car la portion de céramique a diminué.

Dans la figure 3 le déplacement longitudinale est linéaire dans tous les modèles car il ne dépend pas de l'effet de cisaillements dans le cas homogène ($k=0$, céramique) comme dans le cas hétérogène ($k=2$, céramique et le métal) figure 4.

Dans la figure 5 la distribution des contraintes ($k=0$) est linéaire car le matériau est homogène céramique et les conditions aux limites sont vérifiées, la contrainte normale est maximale dans les limites inférieure et supérieure. Et elle était nulle au centre de la poutre.

Dans le cas de $k=2$ (FGM) la distribution de contrainte est cubique dans tous les modèles à cause de mélange (céramique, métal) et on remarque une déviation des courbes où la contrainte normale n'est pas nulle au milieu. (figure 6)

Dans la (figure 7) le cas de $k=0$ on trouve une distribution uniforme de contraintes tangentielle et les conditions aux limites sont vérifiées, la contrainte tangentielle est nulle dans les bords supérieurs et inférieurs et était maximale au centre de la poutre FGM. La distribution doit être linéaire au modèle de Timoshenko et cubique au modèle de Reddy.

Dans la (figure 8) le cas où $k=2$ on remarque une déviation vers la partie la plus rigide (céramique) et la contrainte tangentielle maximale éloignée au centre de la poutre.

IV.9 Conclusion :

Le modèle basé sur la fonction cubique est plus performant que les autres modèles, donne une bonne prévision et qui satisfait les conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre pour $k=0$ (céramique) et une distribution non uniforme dans le cas hétérogène (FGM) ou la courbe déviée vers la partie de céramique la plus rigide .