

Chapitre 1

Théories des poutres

I.1 Introduction:

Dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans Le terme de «poutre» désigne un objet dont la longueur est grande comparé aux la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions.

I.2 Historique:

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pu pas finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques pussent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle. [Jean-Louis Fanchon 2001].

I.3 Equations de base de la théorie d'élasticité :

1.3.1 Définition :

a- Force extérieure: Les forces extérieures aux quelles peut être soumis un corps peuvent être classées en deux catégories.

Forces volumiques: Ce sont des forces à distance associées à la masse du corps et réparties sur tout le volume .Elles s'expriment en force par unité de volume $[N/m^3]$. (Les forces de gravitation, les forces magnétiques et les forces d'inerties)

Forces surfaciques: Ce sont des forces de contact réparties sur toute la surface de contact .Elles s'expriment en force par unité de surface $[N/m^2]$.

b- Contrainte: Un système de forces extérieures appliqué à un corps engendre des forces intérieures résultant de l'interaction des particules élémentaires et à chaque force élémentaire correspond une contrainte.

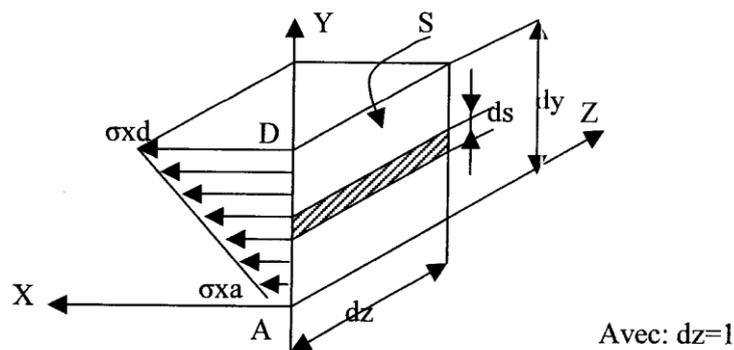


Figure 1-1 : présentation tridimensionnelle des contraintes sur une surface gauche.

b-1-Etat de contrainte en un point matériel : Dans le cas général un point matériel est soumis à neuf(09) composantes de contraintes comme l'indique la figure (1-2)

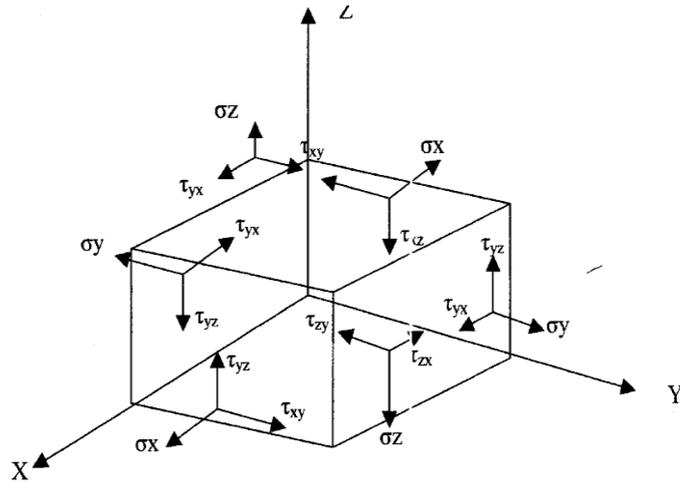


Figure 1-2 : état de contrainte pour un élément tridimensionnel infiniment petit.

En examinant la figure, on remarque trois (03) composantes normales $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

Et six (06) composantes de contraintes tangentielle $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$.

Pour satisfaire l'équilibre des moments autour des axes z, y et x de l'élément respectivement.

On doit avoir:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned} \tag{I.1}$$

Ainsi qu'il on résulte six (06) composantes indépendantes en un point.

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{I-2}$$

b-2-Vecteur contrainte en point pour une direction \vec{n} : Soit un point A d'un solide et une direction repérée par un vecteur \vec{n} (normale extérieure à la matrice) :

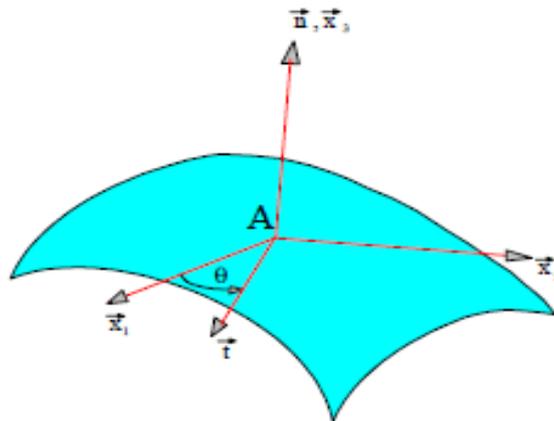


Figure 1-3: Point A sur la surface d'un solide

Soit une facette infiniment petite d'aire dS de normale \vec{n} . Le vecteur contrainte au point A pour la direction \vec{n} s'écrit :

$$\vec{T} = (A, \vec{n}) = \sigma(A) \vec{n}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{bmatrix} \quad (I-3)$$

b-3-Contrainte normale et tangentielle : Le vecteur contrainte en un point A et pour la direction \vec{n} peut être projeté :

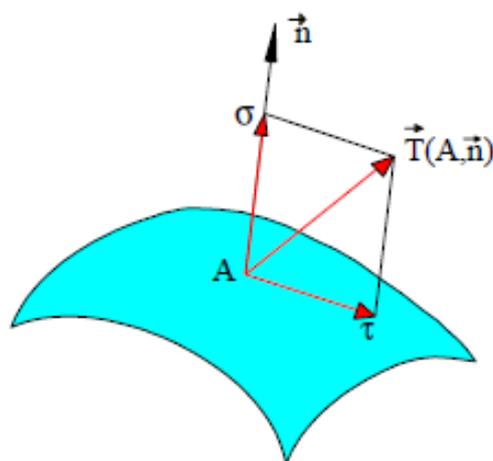


Figure 1-4: contrainte principal et direction principale

Les contraintes principales sont déterminées en écrivant que le déterminant suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{I-4})$$

On aboutit à l'équation caractéristique : $-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$ (I.5)

Dans cette équation I_1, I_2, I_3 sont les trois invariants du tenseur des contraintes quantités indépendantes de la base dans la quelles est exprimé le tenseur .Dans une base quelconque ils ont pour expression :

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{trace de } \sigma(A) \quad (\text{I.6})$$

$$I_2 = (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) + (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}^2) \quad (\text{I.7})$$

$$I_3 = \det [\sigma(A)] \quad (\text{I.8})$$

Et dans la base principale :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{trace de } \sigma(A) \quad (\text{I.9})$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (\text{I.10})$$

$$I_3 = \det [\sigma(A)] \quad (\text{I.11})$$

La direction principale \vec{x} correspondant à la contrainte principale σ est déterminée en écrivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

c- Notion de déformation :

On dit un corps solide est déformable si sous l'action de certaine sollicitation (interne ou externe). Les distances internes particulières les distances peuvent varier et de ce la une déformation correspond un déplacement relatif des points à l'intérieur d'un corps solide par rapport à un point bien fixé.

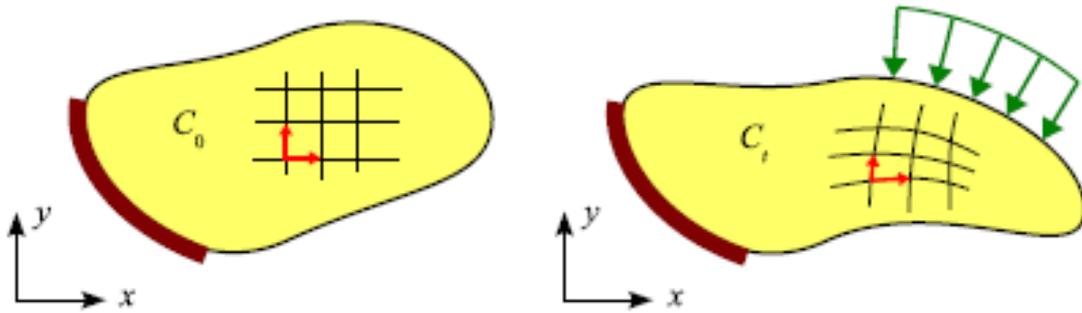


Figure 1-5 : Déformations dans un solide

1.3.2 Relation déformations-déplacements :

- a- Champ de déplacement :** Sous l'effet des efforts, la structure se déforme. Un point M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) appartenant à la structure se déplace sous le chargement. le déplacement d'un point est défini comme étant la distance séparant sa position
- b-** initiale de sa position finale. Son déplacement est caractérisé par le vecteur de déplacement :

$$\mathbf{c-} \vec{U}(M) = U_1(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_{x_1} + U_2(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_{x_2} + U_3(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_{x_3} \quad (\text{I.13})$$

Comme on est en théorie des petites perturbations, les composantes U_1, U_2 et U_3 sont petites.

- d- Etat des déformations au voisinage d'un point :** On se place ici dans le cas des petites déformations on démontre que l'état de déformation au voisinage d'un point A est caractérisé par le tenseur des déformations.

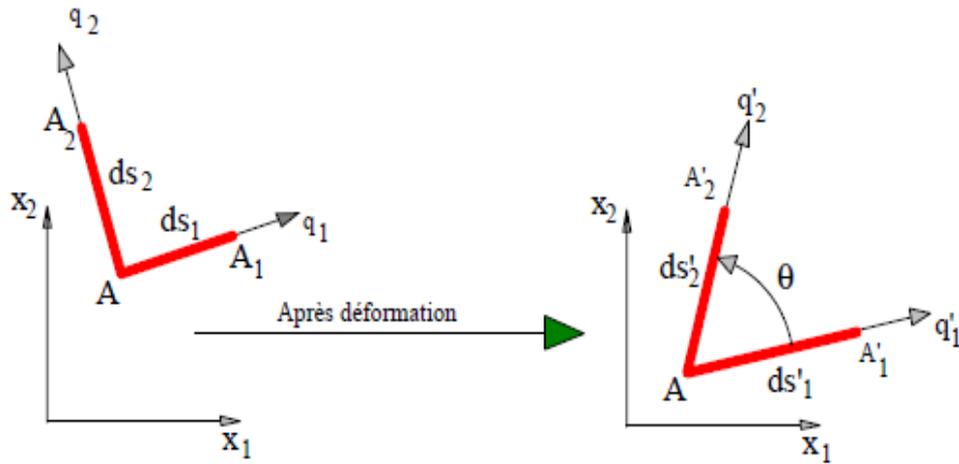


Figure 1-6 : déformation au voisinage d'un point A

C'est un tenseur du second ordre symétrique qui se déduit du champ du déplacement par la

relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (I.14)$$

Dans une base orthonormée il s'écrit en A :

$$\varepsilon(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (I.15)$$

c-1-Déformations linéaires : La déformation linéaire dans une direction donnée est définie comme étant le rapport de la variation de la longueur par la longueur d'une fibre

Originellement orientée dans cette direction (normales) $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sont définie en chaque

Point ou' :

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: Représentent les déformations linéaires suivant les directions x, y et z respectivement.

c-2-Déformations de cisaillements : La déformation de cisaillement est définie comme étant la variation de l'angle droit formé par deux axes. Elle est associée à deux directions orthogonales. Trois composantes de déformations de cisaillements γ_{xy}, γ_{xz} et γ_{yz} sont définies en chaque point.

Les déformations s'expriment par:

$$\text{c-3-Déformations linéaires:} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

$$\text{c-4-Déformation de cisaillement :} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

1.3.3 Relation contraintes-déformations :

Sous l'action d'une contrainte normale unie axiale, la plupart des matériaux ont un comportement bien défini dans le domaine élastique. Ce comportement se traduit par la relation suivante: $\sigma = \varepsilon \cdot E$

Cette relation est connue sous le nom de "loi de HOOK". La constante E est appelée module d'élasticité ou module de "YOUNG".

Soit un élément tridimensionnel soumis à une contrainte uni axiale.

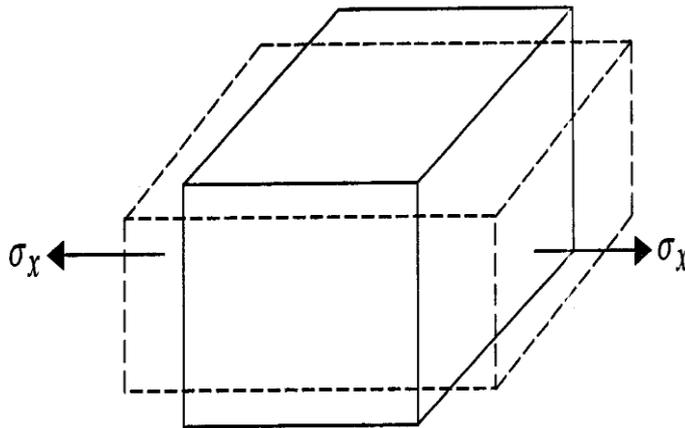


Figure 1-7 : prolongement linéaire d'un élément prismatique.

$$\text{La déformation } \varepsilon_x \text{ est donnée par : } \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{I.18})$$

L'élément aura des contractions suivant les directions Y et Z de ces contractions en résulte des déformations $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ qui sont : $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \left(\frac{\sigma_x}{E} \right)$ (I.19)

ν est appelée coefficient de "POISSON".

Considérons maintenant un élément soumis à un état de contrainte tridimensionnel.

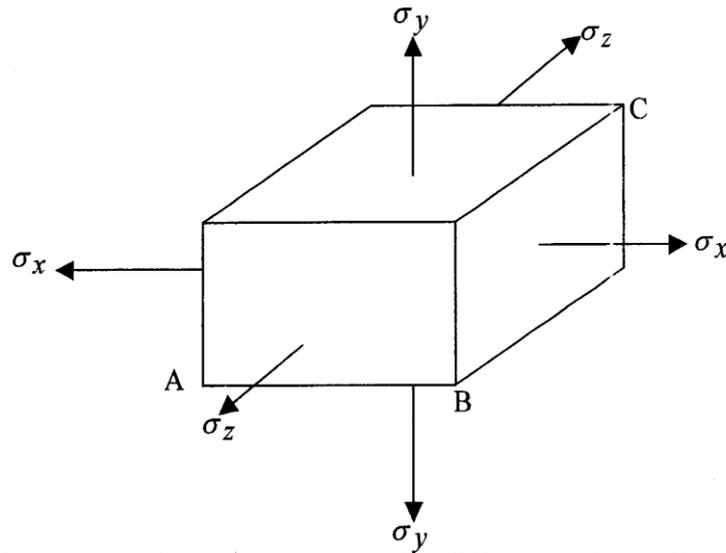


Figure 1-8: les contraintes normales sur les différentes faces d'un élément.

Nous prenons la longueur initiale de AB égale à l'unité. Supposons que la contrainte est appliquée en premier lieu, ce qui va en frouer une variation de longueur AB d'une valeur égale à : $\frac{\sigma_x}{E}$

En second lieu, la contrainte est appliquée ; ainsi que la variation de AB est égale à :

$$\left(\frac{-\nu}{E} \right) \sigma_y \left(1 + \frac{\sigma_x}{E} \right) \quad (I.20)$$

Mais comme $\frac{\sigma_x}{E}$ est une déformation élastique, elle est négligeable devant l'unité.

En dernier la contrainte σ_z est appliqué et la longueur AB varie d'une quantité égale à

$$\left(\frac{-\nu}{E} \sigma_z \right)$$

De même, les déformations totales dans les directions Y et Z seront:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (\text{I.21})$$

La relation dans le domaine élastique entre les contraintes et les déformations pour un corps soumis à un état de contrainte de cisaillement pure bidimensionnel, a été trouvée expérimentalement sous la forme suivante :

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (\text{I.22})$$

De même pour le cas tridimensionnel, les deux autres composantes de déformation de cisaillement seront :

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}\end{aligned}\quad (\text{I.23})$$

Avec : G représente le module d'élasticité de cisaillement appelé aussi le module de rigidité.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{I.24})$$

Si nous voulons réécrire les équations précédentes sous une forme matricielle, elles seront comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.25})$$

En exprimant la relation contraintes- déformations (loi de Hooke inverse) suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2G \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
 \sigma_y &= 2G \varepsilon_y + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
 \sigma_z &= 2G \varepsilon_z + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
 \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \\
 \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} \\
 \tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz}
 \end{aligned} \tag{I.26}$$

avec : $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Et encore:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{I.27}$$

1.3.4 Equations d'équilibre : En général dans un corps les contraintes varient d'un point à l'autre.

Soit (σ_x) la composante de la contrainte totale. Considérons la variation de cette composante.

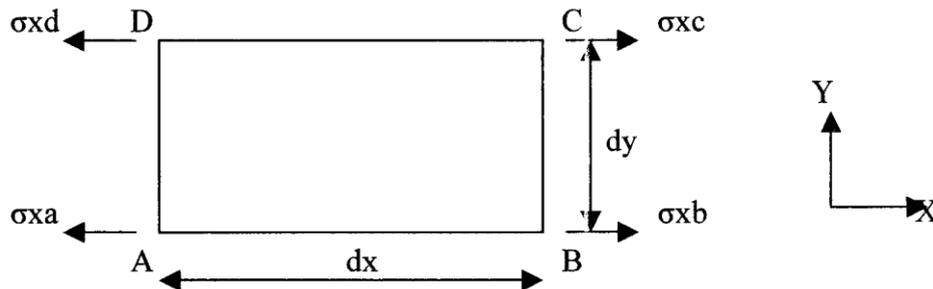


Figure 1-9: variation des contraintes pour un élément infinitésimal.

Si la contrainte au point 'A' est σ_x , en 'B' la contrainte varie de $\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right)$

Où: $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ est le taux de variation de σ_x .

σ_x : étant la fonction de x, y dans le cas bidimensionnel (et de z dans la cas général).

La dérivation partielle est nécessaire.

La contrainte au point "B" est donnée par: $\sigma_{xB} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ (I.28)

Egalement les contraintes en C et D sont:

$$\sigma_{xC} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_{xB}}{\partial y} dy \dots\dots\dots(1)$$

$$\sigma_{xD} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \dots\dots\dots(2)$$

x étant constant de B à C, en remplaçant σ_{xB} par sa valeur dans l'équation (1), on obtiendra:

$$\sigma_{xC} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \quad (I.29)$$

D'où : $\sigma_{xC} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy$

(Où le terme du second ordre est négligé)

En négligeant les petites quantités du second ordre. Les taux de variation sont constants, ainsi que les contraintes sur la surface d'un élément infinitésimal varient linéairement d'où on aura:

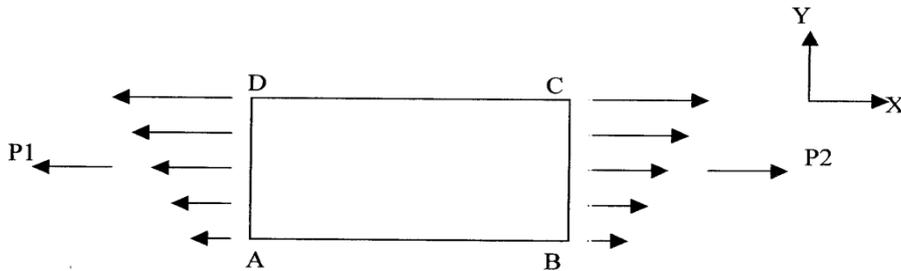


Figure 1-10 : La variation des contraintes sur les facettes d'un élément.

Avec P_1 , P_2 les forces exercées respectivement sur les surfaces latérales de gauche et de droite. Considérons la surface latérale de gauche:

La force exercée sur cette surface est : $P_1 = \int \sigma ds$ (I.30)

S étant égal à 1 x dy.

$P_1 = \int_s \sigma(1 dy) \Rightarrow P_1$: est la surface du trapèze:

$$P_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_{x0})dy$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\right)dy$$

$$\text{D'où: } P_1 = \sigma_x dy + \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} dy^2 \quad (\text{I.31})$$

De même la force sur la facette droite est :

$$P_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{xB} + \sigma_{xC})dy$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx + \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\right)dy$$

$$\text{D'où: } P_2 = \sigma_x dy + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dy dx + \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dy^2 \quad (\text{I.32})$$

$$\text{La résultante sur le corps dans la direction x sera: } P_2 - P_1 = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dy dx \quad (\text{I.33})$$

Si on considère que la répartition des contraintes sur les facettes considérées est constante, alors les contraintes appliquées au centre de gravité des facettes seront :

$$\sigma_x, \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx \quad (\text{I.34})$$

Ainsi que la résultante des forces sera la même, d'où on aura:

$$P_2 - P_1 = \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx\right) \cdot 1 dy - 1 dy \quad (\text{I.35})$$

$$\text{D'où: } P_2 - P_1 = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx dy$$

Cette représentation est simplifiée de l'état de contrainte pourra être utilisée pour l'établissement des équations d'équilibre en état de contrainte plane:

$$\begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \end{cases}$$

Avec: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ et τ_{yx} étant supposées indépendantes de z, le modèle d'équilibre de l'élément sera:

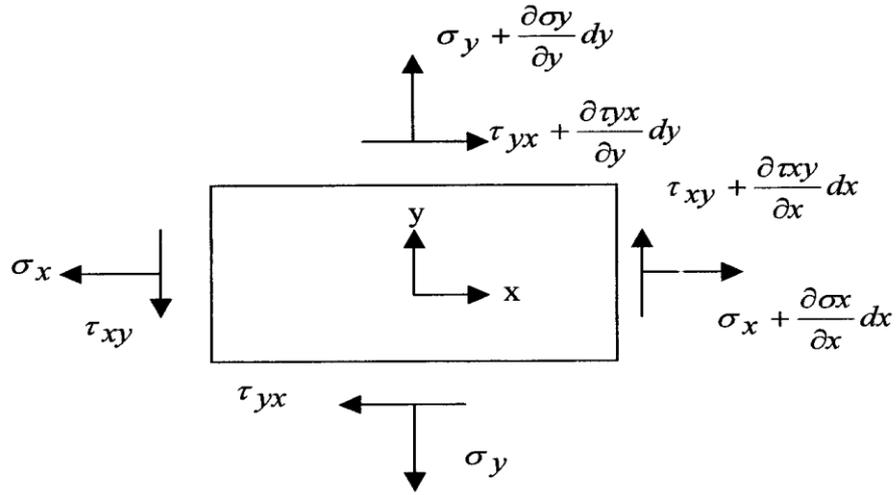


Figure 1.11 : présentation des contraintes agissant sur un élément.

Avec x , y et z les composantes de la force volumique suivant les directions X , Y et Z respectivement.

Vu que l'élément est en équilibre la somme des forces projetées sur l'axe X est nulle.

$$\text{D'où: } \sum F_x = 0 \quad (\text{I.36})$$

$$\sum F_x = x \, dx \, dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x \, dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} \, dx \quad (\text{I.37})$$

(L'épaisseur de l'élément suivant la direction Z étant égale à l'unité).

$$\text{Après la simplification on obtiendra: } \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \bar{x} \right) dx dy = 0 \quad (\text{I.38})$$

(dx, dy) sont différents de zéro, ainsi qu'on aura:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \bar{x} = 0 \quad (\text{I.39})$$

De même l'équilibre des forces dans la direction Y donne:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \bar{y} = 0 \quad (\text{I.40})$$

Où \bar{x}, \bar{y} sont les forces surfaciques de l'élément.

Pour le cas général tridimensionnel, nous considérons l'équilibre des forces qui agissent sur un élément infinitésimal dans la direction X seulement. Les autres directions Y et Z peuvent être traitées de la même façon

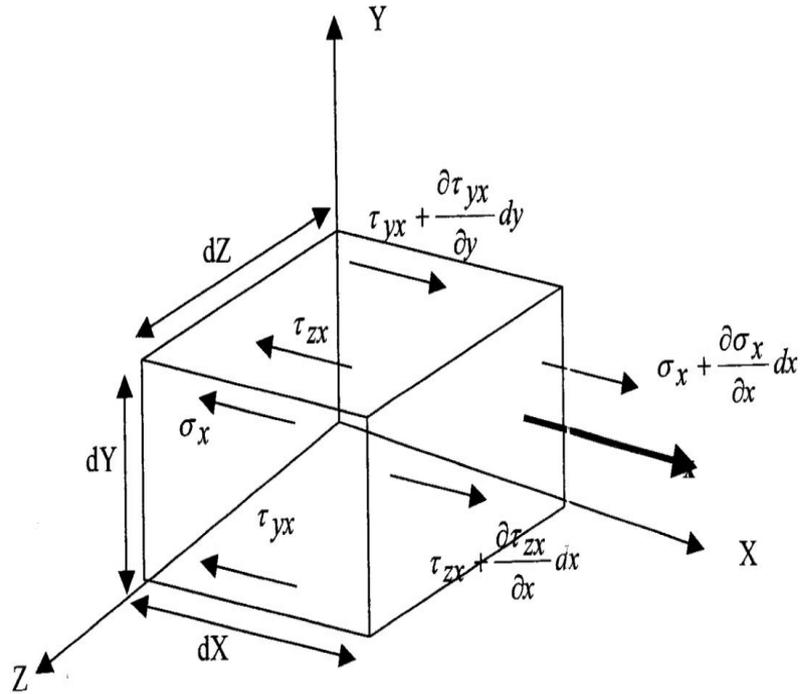


Figure 1-12 : configuration tridimensionnelle des contraintes.

L'équilibre des forces dans la direction X donne:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_x = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \bar{x} dx dy dz$$

Après la simplification on obtiendra:

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{x} \right) dx dy dz = 0 \quad (\text{I.41})$$

$dx \cdot dy \cdot dz$ étant différents de zéro, l'équation précédente se simplifie à:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{x} = 0$$

De même on obtiendra pour les directions Y et Z:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \bar{y} = 0 \quad (\text{I.42})$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \bar{z} = 0 \quad (\text{I.43})$$

Etant donnée que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (\text{I.44})$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Les équations d'équilibre pour le cas général tridimensionnel peuvent s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \bar{z} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.45})$$

Où; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$: sont les forces de volume.

I.4 La théorie d'élasticité plane :

Les équations de la théorie de l'élasticité se simplifient considérablement dans le cas particulier fréquent où tous les vecteurs contraintes sont parallèles à un même plan. Ce cas se rencontre dans deux types de problèmes nettement distincts, que nous allons étudier. La notation indicielle ne présentant aucun avantage dans les problèmes particulier, nous emploierons la notation des ingénieurs.

I.4.1 Etat plan de contrainte: On a affaire à un état plan de contraintes parallèlement au plan (x, y) si :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \quad (\text{I.46})$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y) \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

C'est le cas des plaques planes chargées dans leur plan.

Le tenseur des contraintes s'écrit alors dans une base quelconque :

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'axe : z est donc direction principale et la contrainte principale correspondantes est nulle.

$$\text{Dans la base principale : } \sigma(A) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Les équations d'équilibres deviennent : } \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + y = 0 \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

D'autre part les relations entre les déformations et les contraintes seront:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z = \frac{\nu}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

$$\text{Et : } \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{I.43})$$

1.4.2 Etat plan de déformation : Considérons un tunnel ou un puits de mine de très grande étendue selon la direction z . Si les sections perpendiculaires à l'axe z sont toutes identiques, deux sections distantes de dz se déforme de façon identiques. Sur la figure b est présentée une tôle en sortie de laminoir. Dans la direction (DT) il n'y a pas de déformation à cause du frottement entre le cylindre du laminoir et la tôle. Les deux exemples rentrent dans le cadre des déformations planes.

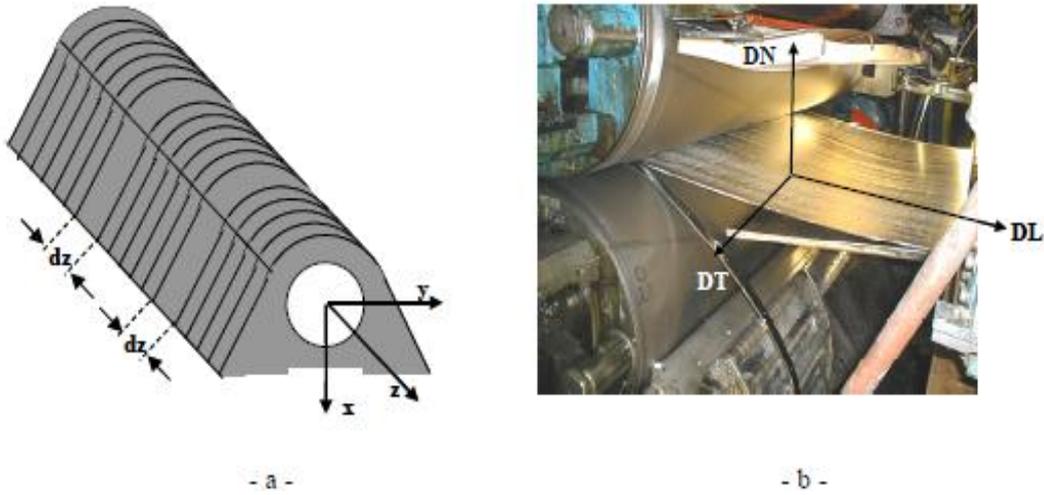


Figure 1.13 : Exemple de structures en déformation plane :
Puits de mine (a) et tôle en laminage (b)

La composante non nulle σ_{zz} du tenseur des contraintes s'obtient par la loi de HOOK .Dans un matériau isotrope élastique σ_{zz} vaut :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{I.44})$$

Donc on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] ; \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \quad (\text{I.45})$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} [-\nu\sigma_{xx} + (1-\nu)\sigma_{yy}] \end{cases} \quad (\text{I.46})$$

Les relations entre la déformation et le déplacement sont:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.47})$$

Les contraintes agissant sur un tel corps soient obtenues à partir équations suivantes:

Et les équations d'équilibres seront :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + z = 0 \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Pour passer de contrainte planes en déformations planes : $E \rightarrow \frac{E}{(1-\nu^2)}$; $\gamma \rightarrow \frac{\gamma}{(1-\nu)}$

Et pour passer de déformations planes aux contraintes planes : $E \rightarrow \frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)^2}$; $\gamma \rightarrow \frac{\gamma}{(1+\nu)}$

1.5 Les équations fondamentales de l'élasticité plane :

1.5.1 Les équations d'équilibre :

- a- **Les équations différentielles d'équilibre :** en annulant σ_{zz} , σ_{zx} , σ_{zy} et en adoptant X et Y pour les forces volumiques dans la direction x et dans la direction y respectivement, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

- b- **Les équations de conditions aux limites :**

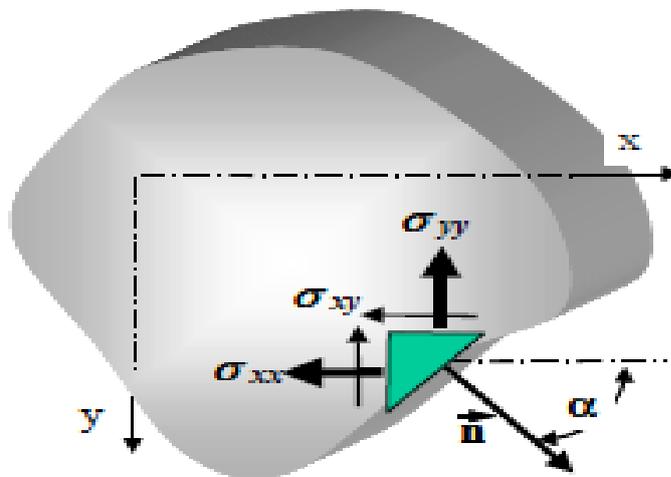


Figure 1-14: Les conditions de contour en contrainte plane

Soient $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour du disque en chargement plan. Soient T_x et T_y les tractions superficielles imposées sur le contour. La déformation du tenseur de contrainte permet d'écrire:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha = T_x \\ \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha = T_y \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

Ces conditions expriment l'équilibre de translation selon les deux coordonnées du prisme élémentaire sur la figure.

1.6 Loi de comportement des matériaux élastiques :

La linéarité de la loi de comportement de l'élasticité se traduit par la loi qui relie tenseur des contraintes et tenseur des déformations. Soit en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (\text{I.51})$$

Dans cette relation: δ_{ij} est le tenseur de Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{Si } (i = j) \quad , \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{si } (i \neq j) \quad (\text{I.52})$$

Dans certains manuels on note $G : \mu$

λ et G sont les coefficients de Lamé, constants pour un matériau donné.

$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ Est le premier invariant du tenseur des déformations

Inversement, on peut exprimer le tenseur de la déformation à partir de celui des contraintes à partir de celui des contraintes : $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\gamma}{E} \sigma_{ij} - \frac{\gamma}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ (I.53)

E : est le module de Young et γ le coefficient de Poisson, constantes pour un matériau donné.

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

Et le premier invariant du tenseur des contraintes les relations entre les différents coefficients d'élasticité sont les suivantes : $\lambda = \frac{E\gamma}{(1-2)(1+\gamma)}$, $G = \frac{E}{2(1+\gamma)}$

G est le module de Coulomb. Si $\gamma = 0.25$ alors $G = \frac{E}{2.5}$, c'est le cas pour les matériaux ductiles.

On décomposant sur les axes on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\gamma}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\gamma}{E}(\sigma_{33}, \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\gamma}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} \\ \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} \\ \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \end{array} \right. \quad (I.54)$$

1.7 L'équations de compatibilité et le potentiel des contraintes :

Dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0 \quad (I.55)$$

Si les déformations ε_{xz} , ε_{yz} sont nulles et que toutes les autres déformations sont indépendantes de z , les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (I.56)$$

Comme dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité peuvent être exprimées en fonction des contraintes. En contraintes planes ou déformations planes, on part cependant plus souvent de la fonction d'AIRY.

1.8 La loi de Hooke :

La loi de Hooke est une loi de comportement des solides soumis à une déformation élastique de faible amplitude. De la loi de comportement deux aspects sont importants: la linéarité et l'élasticité.

C'est en quelque sorte une analogie avec l'allongement $l - l_0$ d'un ressort de constante de raideur k soumis à une force F :

l : longueur du ressort étiré ou comprimé ;

l_0 : longueur du ressort à vide.

Pour un ressort on a $F = k \cdot (l - l_0)$.

Afin de s'abstraire de la forme de la pièce, et notamment de ses dimensions, on divise la force par l'aire de la section de la pièce, grandeur que l'on appelle contrainte σ (exprimée en Pa), et

on divise l'allongement par la longueur initiale, grandeur que l'on appelle déformation ou allongement relatif ε (sans dimension).

On note l'allongement relatif ε :

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$$

On note la contrainte σ (similaire à une pression) : $\sigma = \frac{F}{S}$

L'analogie de la constante de raideur du ressort est donc le **module de Young E** .

La loi de Hooke s'exprime alors sous la forme: $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (I.57)

Où E est le module de Young, une caractéristique du matériau, loi valable pour l'étirement ou la compression d'une pièce, les autres dimensions étant libres de s'étendre.

La linéarité provient du fait que l'on est en faible déformation, on peut donc faire une approximation linéaire de la loi réelle (développement limité au premier ordre). Il s'agit en fait d'approcher le potentiel interatomique par une parabole.

Dans le cas d'une pièce de forme complexe, la loi de déformation globale n'a aucune raison d'être linéaire, mais par contre, chaque élément infinitésimal de matière se déforme lui de manière linéaire.

1.7.1 Loi de Hooke généralisée : Dans le cas d'un matériau isotrope, si l'on reprend en compte le coefficient de Poisson ν , la loi de Hooke devient :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_k^k \sigma_{ij} \right) \quad (I.58)$$

Avec : δ_{ij} le symbole de Kronecker et ε_k^k est une notation abrégé de la trace du tenseur des déformations (somme des termes diagonaux du tenseur).

On peut aussi l'écrire sous forme matricielle :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} Tr(\varepsilon) I \right) \quad (I.59)$$

Les relations ci-dessus peuvent être inversées pour donner

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_k^k \delta_{ij} \right] \quad (I.60)$$

ou, sous forme matricielle (en appliquant la trace à la relation plus haut):

$$\varepsilon = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma - \nu \text{Tr}(\sigma)I] \quad (\text{I.61})$$

La forme explicite très simple de ces relations (donnant les déformations en fonction des contraintes) montre bien la signification physique du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \end{array} \right. \quad (\text{I.62})$$

Dans le cas d'un matériau anisotrope, on définit la contrainte et la déformation localement par un tenseur 3×3 , le tenseur des contraintes $[\sigma_{ij}]$ et le tenseur des déformations $[\varepsilon_{ij}]$.

Le comportement élastique du matériau est alors modélisé par un tenseur d'ordre 4 $[C_{ijkl}]$ contenant 81 coefficients élastiques. Le nombre de coefficients indépendants est réduit à 21 en tenant compte de la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations, et de la stabilité énergétique du tenseur.

$$\text{On a: } \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (\text{I.63})$$

En appliquant la sommation sur les indices (Convention de sommation d'Einstein).

Du fait de ces propriétés de symétrie, le tenseur C_{ijkl} peut être représenté sous la forme d'une matrice 6x6, où les directions représentent les directions de la déformation.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{I.64})$$

1.8 Milieux solides:

Le comportement des milieux solides peut être très varié. Nous étudierons plus particulièrement les solides à comportement linéaire, c'est-à-dire les milieux élastiques.

1.8.1 solide élastique linéaires : On dit qu'un milieu solide est élastique linéaire, s'il existe un opérateur linéaire qui relie les contraintes et les déformations, et on écrit :

$$\sigma = d : \varepsilon$$

Ou : σ : Est le tenseur des contraintes.

ε : Celui des déformations.

d : est un tenseur du quatrième ordre encore appelé opérateur d'élasticité.

Les (:) représentent le produit doublement contracté entre les tenseurs. En notation indicielle on écrit encore: $\sigma_{ij} = d_{ijkl} \varepsilon_{lk}$

a- Milieux anisotropes : Un milieu est dit anisotrope si ses propriétés varient dans l'espace.

Dans ce cas la matrice élasticité est pleine et peut se résumer à :

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & d_{55} & d_{56} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} & d_{46} & d_{56} & d_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.65})$$

Les 21 coefficients sont indépendants et il faut 21 mesures indépendantes pour les déterminer. Ce type de matériau est très rare, car bien souvent des symétries matérielles existent et diminuent encore le nombre de coefficients d'élasticité.

b- Milieux orthotropes : Un milieu est dit orthotrope s'il possède deux plans de symétrie perpendiculaires, par exemple 1-3 et 2-3. En écrivant l'invariance des coefficients d'élasticité par rapport à ces plans, on peut montrer qu'il ne reste que (09) coefficients indépendants et que la matrice d'élasticité a la forme suivante :

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.66})$$

Un milieu est dit orthotrope et isotrope dans un plan (on dit encore isotrope transverse) si ses propriétés matricielles sont de plus invariantes par rotation autour d'un axe de symétrie, par exemple l'axe 3. Dans ce cas, en écrivant que les coefficients d'élasticité sont invariants par une rotation d'angle quelconque autour de 3, on peut montrer qu'il ne reste que 5 coefficients indépendants et que la matrice s'écrit :

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{11} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{13} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{I.67})$$

Avec : $2d_{44} = d_{11} - d_{12}$

Ce type de matériau est assez courant (composite à fibre dirigées suivant l'axe 3, ou encore tronc d'arbre).

c- Milieux isotropes : Un milieu est dit isotrope si ses propriétés matérielles sont identiques dans les trois directions de l'espace. On particularise alors le matériau orthotrope en écrivant l'invariance des coefficients d'élasticité par rapport aux trois axes, et on peut montrer qu'il ne reste cette fois que 2 coefficients indépendants car on obtient les relations :

$$d_{33} = d_{11} \quad ; \quad d_{13} = d_{12} \quad ; \quad d_{55} = d_{44}.$$

Posons : $\lambda = d_{12}$ et $\mu = d_{44}$. Les coefficients λ et μ sont appelés coefficients de Lamé et la matrice D devient :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{I.68})$$

Cette loi de comportement d'élasticité s'appelle encore la loi de Hooke. On peut la résumer sous la forme : $\sigma = \lambda \text{ trace } \varepsilon I + 2\mu \varepsilon$

Ou encore en écriture indicielle : $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ (I.69)

En inversant la loi de comportement, ce qui est toujours possible car la loi d'élasticité est définie positive, on obtient les relations entre déformations et contraintes, c'est-à-dire l'opérateur de flexibilité $c = d^{-1}$ (ou de souplesse ou de complaisance) que l'on caractérisera soit par sa matrice C : $C = D^{-1}$

Soit par les relations entre déformations et contraintes :

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \sigma - \frac{\lambda \text{ trace } \sigma}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} I \quad \text{Ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda \sigma_{kk}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \quad (\text{I.70})$$

Pour exprimer plus simplement cette loi en souplesse, on utilise un autre couple de coefficients (E, v) au lieu du couple (λ, μ):

$$\varepsilon = \frac{1+v}{E} \sigma - \frac{v}{E} \text{ trace } \sigma I \quad \text{Ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+v}{E} \sigma_{ij} - \frac{v}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{I.71})$$

E est le module d'Young (homogène à une pression) et v est le coefficient de Poisson (sans dimension). Ces divers coefficients sont reliés par les relations suivantes :

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{I.72})$$

$$\lambda = \frac{vE}{(1-2v)(1+v)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+v)}$$

On peut enfin utiliser le fait que l'opérateur d'élasticité est défini positif pour obtenir des relations d'inégalité sur les coefficients qui viennent d'être introduits :

$$\begin{aligned} 3\lambda + 2\mu &> \mu > 0 \\ E > 0 & \quad -1 < v < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donnons, à titre indicatif les modules d'Young et coefficients de Poisson de certains matériaux usuels:

Matériaux	E (Mpa)	ν
Acier	200 000	0,25
Aluminium	80 000	0,33
Cuivre	120 000	0,35
Béton	28 000	0,20
Plexiglas	3 000	0,30

Tableau I.1 : indicatif les modules d'Young et coefficients de Poisson de certains matériaux usuels:

1.9 Les différentes théories des poutres [Sallai 2011]:

Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

1.9.1 Modèle d'Euler Bernoulli (classical laminated beam theory- CLBT):

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. L'hypothèse dans cette théorie:

- Après déformation, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre),

- La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section plane reste plane.

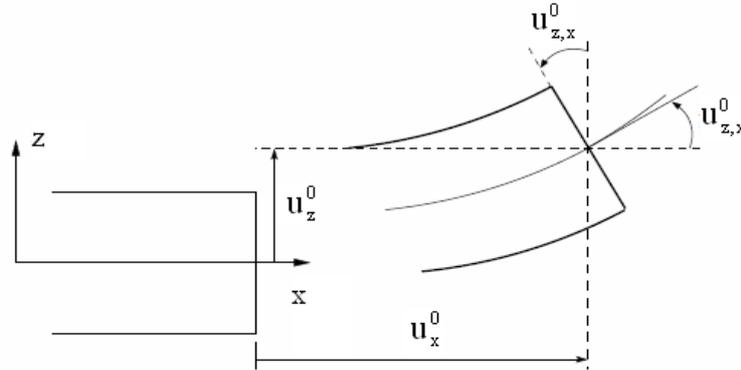


Figure I -15 : Cinématique d'Euler Bernoulli [Dufort, 2000a]

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est :

$$\psi(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.73})$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_{,x}(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{I.74})$$

$u(x, z)$: C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$w'_{,x}(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.75})$$

$u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de transversal.

I.9.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT):

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toute fois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes. Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure I.17). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. [Timoshenko.et al, 1972]. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $\psi(z)$ est égale à Z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw',_x(x) + z \gamma^0_{xz}(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (I.76)$$

γ^0_{xz} , c'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que : $\phi^0(x)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

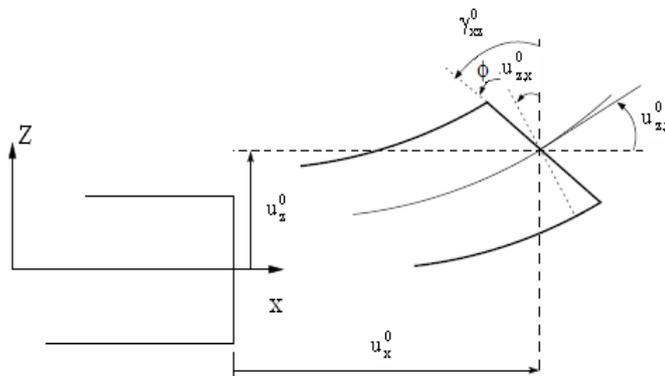


Figure I-16: Cinématique de Timoshenko [Timoshenko.et al, 1972]

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w',_x(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w',_x(x) \quad (\text{I.78})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \quad (\text{I.79})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}^0$$

G_{xz} ; est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'ya aucun chargement qui induit le cisaillement. Cette contradiction mène à introduire des coefficients de correction pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mindlin et Deresiewicz]. Cowper et Murty ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes. Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

I.9.3 Théorie d'Ordre Elevé :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle

Introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement». Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure I.18). La fonction $\psi(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $\psi'(z)$ le cisaillement.

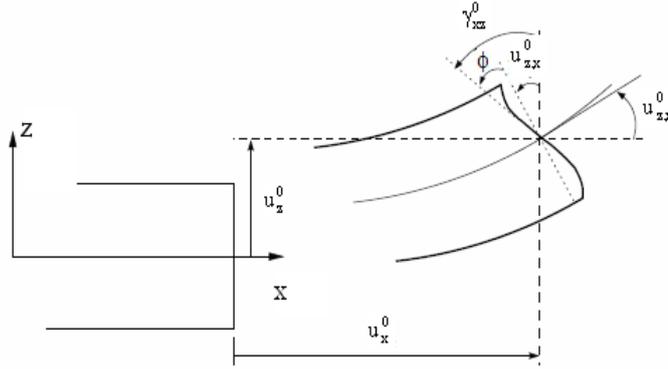


Figure I-17 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_{,x}(x) + ((z)\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (I.80)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w'_{,x}(x) + \psi'(z)\gamma_{xz}^0(x) + w'_{,x}(x) \quad (I.81)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\psi(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM:

1-) Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CLBT):

$$\psi(z) = 0 \quad (I.82)$$

2-) Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT):

$$\psi(z) = z \quad (I.83)$$

3-) Le modèle d'ordre élevé, avec l'approche de [Levinson, 1980], [Murthy, 1981] et [Reddy, 1984] :

$$\psi(z) = z(1 - (4z^2)/(3h^2)) \quad (I.84)$$

4-) Le modèle exponentiel proposé par [Afaq et al, 2003] :

$$\psi(z) = z e^{-z(\frac{z}{h})^2} \quad (I.85)$$

