

### III.1 Introduction

Les problèmes de vibrations naturelles et de stabilité sont parmi les problèmes les plus importants pour des plaques stratifiées composites. Ces derniers ont donc attiré les attentions de nombreux chercheurs au cours des dernières décennies. Ce sujet est généralement étudié en utilisant la théorie des plaques classique ou la théorie des plaques de premier ordre Mindlin [Mindlin, R.D 1951 et Reddy, J.N 1997].

Toutefois, les solutions exactes [Dong,S.B ,al 1972] pour les plaques composites ont indiqué que les théories classiques de la plaque et du premier ordre ne peuvent pas modéliser de manière adéquate le comportement des plaques composites. Par conséquent, de nombreux différents d'ordre supérieur théories [Moy,S.S.J, al 2002] ont été développés pour améliorer l'exactitude de ces deux théories. Parmi ces théories d'ordre supérieur, l'ordre supérieur à la théorie des plaques [Lo.K.H, al 1977], Approuvé par une évaluation critique des théories de la plaque d'ordre supérieur [Bert,C.W.A 1984].une prédiction très précise de la distribution non linéaire de contrainte transversale de cisaillement.

Les études antérieures mentionnées ci-dessus ont traité seulement une plaque laminée avec un seul matériau. Cependant, les plaques hybrides stratifiées avec différents matériaux sont largement utilisés. [Barai, A, Durvasula, S 1992], étudie la vibration et le flambement des plaques stratifiées hybrides utilisant la théorie du premier ordre. Les effets de courbure, séquence d'empilement, et plis-orientation ont été présentés. [Benjeddou, A, Deu, J.F.A 2002] a présenté une solution à deux dimensions sous forme fermée pour la vibration libre de tout simplement pris en charge en plaque sandwich piézo-électriques.

Les plaques composites stratifiées à l'aide de fibres renforcées et de polymère et autre(s) matériau(x) qu'ont été largement utilisées, les applications dans une haute température. [Harras, B, al 2002], a présenté en modèle théorique de base sur le Principe de Hamilton à l'étude des vibrations libre non linéaires de plaque composite hybride composé de couches alternées de métal et de fibres renforcées en composite .[Lee, Y. S, Kim, Y.W 1996] utilisent les équations de Lagrangien pour étudier les vibrations de plaques composites hybrides stratifiées.

Sur la base de la théorie classique des plaques. Les effets de la séquence d'empilement stratifié, et le nombre de couches sur le comportement vibratoire ont été analysés.

[Chen, C. S. et Fung, C. P 2004] analyse le problème des vibrations d'une plaque composite hybride basé sur la théorie des plaques de Mindlin. la théorie de Mindlin est très utilisée que

celle de la théorie classique. Cela était dû à l'effet de la déformation transversale de cisaillement et de l'inertie de rotation ne sont pas pris en compte dans la théorie classique. Les contraintes résiduelles sont toujours induites dans la plaque de stratifié après les procédés de fabrication. Par conséquent, l'étude de plaques initialement souligné a toujours attiré l'attention des chercheurs.

[Brunell, E.J, Robertson, S.R 1974 ,1976] a étudié les effets d'une contrainte initiale arbitraire sur la vibration d'une plaque isotrope, en utilisant la contrainte moyenne et méthodes de vibration.

[Yamaki, N, Chiba 1983] a étudié le comportement aux vibrations des plaques d'abord souligné stratifiés basés sur la théorie du premier ordre.

[Rogerson, G.A, Sandiford, K. J 1996] a présenté une fonction arbitraire basée sur des méthodes énergétiques dans la plaque de précontrainte stratifié pour faible amplitude.

[Cheung, Y.K, Zhu, D.S, LU 1998] a analysé la vibration non linéaire des plaques avec contraintes initiales par la méthode des bandes finies. Les effets des contraintes initiales sur la vibration et la stabilité des plaques ont également été étudiés par [Chen, L.W, Yang, J.Y 1990,1994].

La solution analytique pour la vibration et la stabilité de plaques composites hybrides dans un état arbitraire de la contrainte initiale basée sur la théorie d'élasticité exacte, autant que les auteurs savent, qui n'a pas encore été signalé, l'étude par la méthode d'intégration précise [Zhong, W.X 1993], comme les résultats présentés dans le travail de He-xiang LU et Jun-Yong. Cette méthode donne une grande précision numérique des résultats. Ainsi, les résultats pour les vibrations naturelles et flambement des plaques hybrides présentés dans ce chapitre peuvent être considérés comme analytique approchés des solutions. [Chen, C.S, Fung, C.P, Chien, R.D 2006] a étudié la plaque hybride basé sur une théorie d'ordre supérieur et a donné le détail des résultats.

Plusieurs types d'effets de couplage, tels que le couplage entre flexion et de torsion, et le couplage entre l'extension et de flexion lorsque la couche d'empilement séquence n'est pas symétrique, sont considérés par un seul ensemble d'équations régissantes. Les équations qui régissent les vibrations naturelles et le flambement sont dérivées du principe variationnel de Hellinger-Reissner [Washizu, K 1968, Tang, L.M 1992], avec la relation non linéaire force-déplacement [Gallagher, R. H 1975].

Les variables inconnues de cette équation sont considérées comme vecteur d'état, la continuité des déplacements et les contraintes aux interfaces dans les plaques stratifiées sont satisfaisant.

### III.2 Equations gouvernantes

Les équations qui régissent sont obtenues par des moyens de l'idée de [Gallagher, R. H 1975]. bidimensionnelle, l'énergie potentielle généralisée [Washizu.K 1968, Tang, L.M 1992] est :

$$U(u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \iint_{\Omega} \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y - 12G\tau_{xy} - f_x u - f_y v \right] d\Omega - \int_{S_u} p_x u - u + p_y (v - \bar{v}) dS - \int_{S_\sigma} \sigma p_x - p_x u + (p_y - \bar{p}_y) v dS \quad (III.1)$$

Où  $S_u$  désigne des conditions aux limites de déplacement et  $S_\sigma$  représente les conditions aux limites de traction de surface. Le mérite de la méthode de l'espace d'état est d'analyser les structures composites et de satisfaire la continuité de déplacement intercalaire et le exactement. Les variables d'espace d'état à  $y = \text{const.}$  sont  $(u, v, \sigma_y, \tau_{xy})$  d'après loi de Hooke, on a

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x - \nu \epsilon_y), \text{ d'où } \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

En introduisant les conditions de déplacement  $u = \bar{u}$  et  $v = \bar{v}$  naturellement. en substituant  $\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x - \nu \epsilon_y)$  dans l'équation. (III.1), le fonctionnel  $(u, v, \sigma_y, \tau_{xy})$  est obtenue. Ici, nous introduisons le terme non linéaire de  $\epsilon_x$  à examiner la contribution des  $\sigma_x$  à l'équilibre normal dans le sens  $y$ . Le fonctionnel est exprimé comme :

$$U(u, v, \sigma_y, \tau_{xy}) = \iint_{\Omega} \left\{ \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 \right] + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \sigma_y \frac{\partial u}{\partial x} + 12 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1-\nu^2}{2E} \sigma_y^2 - 12G\tau_{xy} - f_x u - f_y v \right\} d\Omega - \int_{S_u} p_x u - u + p_y (v - \bar{v}) dS - \int_{S_\sigma} \sigma p_x - p_x u + (p_y - \bar{p}_y) v dS \quad (III.2)$$

La variation de  $U(u, v, \sigma_y, \tau_{xy})$  est exprimée comme suit :

$$\delta U(u, v, \sigma_y, \tau_{xy}) = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\tau_{xy}}{G} \right) \delta \tau_{xy} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \epsilon_x - \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y \right) \delta \sigma_y - \delta \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} + f_x \delta u - \delta \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + f_y + \sigma_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \delta \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} \right] d\Omega + \int_{S_\sigma} [(p_x - \bar{p}_x) \delta u + (p_y - \bar{p}_y) \delta v] dS = 0 \quad (III.3)$$

de l'équation (III.3) ; les équations suivantes sont obtenues :

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (III.4)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \quad (III.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (III.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y + \sigma_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (III.7)$$

A cause de la petite déformation  $\left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \ll 1$  donc  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$  et  $\left| \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right|$  peuvent être négligé et nous obtenons les équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{G} \quad (III.8)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - f_y - \sigma_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (III.9)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - f_x \quad (III.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y \quad (III.11)$$

L'équation (III.9) signifie que la contribution de  $\sigma_x$  à l'équilibre dans la direction y est due à des déformations  $v$ . on a  $\sigma_x = \sigma_x^0$  comme une contrainte initiale appliquée au corps élastique, et  $f_x = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $f_y = -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ .  $\rho$  représente la densité de matière.

Équations (III.8) - (III.11) peut être considéré comme les équations qui régissent le calcul de la fréquence naturelle du corps élastique sous contrainte initiale  $\sigma_x^0$  c'est -à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} u \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{G} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & -\sigma_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\nu \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ -\nu \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1-\nu^2}{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Ici, l'espace d'état mixte est appliqué, ce qui garantit la continuité des déplacements  $(u, v)$  et les contraintes  $(\sigma_y, \tau_{xy})$  entre les couches, pour des structures composites à deux dimensions. Pour le matériau orthotrope, le comportement contrainte-déformation dans les directions principales 1, 2, et 3 est :

$$\varepsilon = S \cdot \sigma_L, \quad (\text{III.13})$$

d'où

$$\sigma_L = C \cdot \varepsilon, \quad (\text{III.14})$$

$$\text{d'où} \quad \varepsilon = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{12})^T, \quad (\text{III.15})$$

$$\sigma_L = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \tau_{23} \quad \tau_{13} \quad \tau_{12})^T, \quad (\text{III.16})$$

$$S = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

$$C = S^{-1} \quad (\text{III.18})$$

Ici  $\nu_{ij} = (i, j = 1, 2, 3)$  désigne le coefficient de Poisson, à savoir la déformation transversale suivant la direction  $i$  due à la contrainte produite par une force unitaire en direction  $j$ , lorsque la contrainte en direction  $j$ .  $\varepsilon, \sigma_L, S$  et  $C$  désignent, vecteur de de contrainte, de la matrice de souplesse du matériau, et la matrice rigidité du matériau dans la direction principale, respectivement.  $E_1, E_2,$  et  $E_3$  désignent le module d'élasticité des fibres en directions principales.  $G_{12}, G_{23},$  et  $G_{13}$  désignent les modules de cisaillement à l'égard de fibres en directions principales. Pour les angles des couches laminées (voir Fig. III.1, l'axe 3 de matériau coïncide avec l'axe  $z$ ), la relation contrainte-déformation pour une couche arbitraire peut être exprimé comme suit :

$$\bar{\sigma} = \bar{C} \cdot \bar{\varepsilon} , \tag{III.19}$$

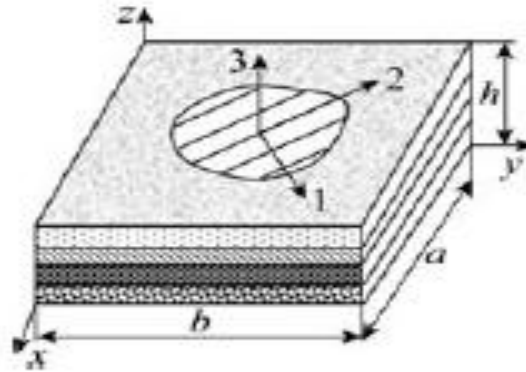


Figure III.1 : géométrie d'une plaque stratifiée.

d'où

$$\bar{\sigma} = (\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{xz} \ \tau_{xy})^T, \tag{III.20}$$

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{xy})^T, \tag{III.21}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot C \cdot (A^{-1})^T , \tag{III.22}$$

d'où

$$A = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & 0 & 0 & 0 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & 0 & 0 & 0 & 2l_2m_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & l_1 & 0 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & 0 & 0 & 0 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix} , \tag{III. 23}$$

avec

$$l_1 = \cos \theta, m_1 = \sin \theta, l_2 = -\sin \theta, m_2 = \cos \theta. \tag{III.24}$$

Ici,  $\theta$  désigne l'angle d'orientation de pli, de l'axe x globale à la direction des fibres. Lorsque  $\theta = 0^\circ$  (ou  $90^\circ$ , ou autres valeurs), la plaque est stratifiée. A désigne une coordonnée de matrice de transformation  $\bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\sigma}$ , et  $\bar{C}$  désignent, vecteur de déformation, contrainte, et la

matrice rigidité du matériau respectivement dans le repère global, Les relations déformations-déplacements , y compris des termes non linéaires pour des structures tridimensionnelles sont :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2, \varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad (III.25)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (III.26)$$

De façon similaire à ce problème à deux dimensions, les équations différentielles mixtes en trois dimensions de l'angle des plis des plaques stratifiées sont dérivées comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial x} F = \begin{bmatrix} 0 & R \\ Q & 0 \end{bmatrix} F, \quad (III.27)$$

$$F = (u \quad v \quad \sigma_z \quad \tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad w)^T \quad (III.28)$$

$$R = \begin{bmatrix} a_{10} & -a_{11} & & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -a_{11} & a_{12} & & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\sigma_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sigma_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\tau_{xy}^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \end{bmatrix} \quad (III.29)$$

$$Q = \begin{bmatrix} -a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_{13} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2a_{14} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & -a_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_{15} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (a_{13} + a_3) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_{16} \frac{\partial}{\partial y} \\ -a_{14} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_{15} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (a_{13} + a_3) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -a_{13} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_4 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2a_{15} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & a_5 \frac{\partial}{\partial y} + a_{16} \frac{\partial}{\partial x} \\ a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_{16} \frac{\partial}{\partial y} & a_5 \frac{\partial}{\partial y} + a_{16} \frac{\partial}{\partial x} & a_7 \end{bmatrix} \quad (III.30)$$

$$\begin{cases} a_1 = -C_{13}/C_{33}, & a_2 = C_{11} - C_{13}^2/C_{33}, & a_3 = C_{12} - C_{13}C_{23}/C_{33}, \\ a_4 = C_{22} - C_{23}^2/C_{33}, & a_5 = -C_{23}/C_{33}, & a_6 = C_{66}, & a_7 = 1/C_{33}, \\ a_9 = 1/C_{44}, & a_{10} = C_{44}/(C_{44}C_{55} - C_{45}^2), & a_{11} = C_{45}/(C_{44}C_{55} - C_{45}^2), \\ a_{12} = C_{55}/(C_{44}C_{55} - C_{45}^2), & a_{13} = C_{66} - C_{36}^2/C_{33}, & a_{14} = C_{16} - C_{13}C_{36}/C_{33}, \\ a_{15} = C_{26} - C_{23}C_{36}/C_{33}, & a_{16} = -C_{36}/C_{33}, \end{cases} \quad (III.31)$$

L'équation (III.27) est l'équation gouvernante pour calculer la fréquence naturelle sous l'effet des contraintes initiales  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ , et  $\tau_{xy}^0$  pour des structures tridimensionnelles anisotropes. L'équation (III.27) peut être utilisé pour calculer non seulement les stratifiés

symétriques, mais aussi des stratifiés asymétriques laminées (les effets de couplage doit être pris en compte).

### III.3 Application des équations

Pour la plaque simplement appuyée,  $\sigma_x^0$  est constante et les autres contraintes initiales sont négligeables.

on a :

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_z(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_z(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t},$$

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_z(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \quad \tau_{zx} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_1(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t},$$

$$\tau_{zy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_2(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \quad \sigma_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t},$$

Où  $i = \sqrt{-1}$  et  $\omega$  est la fréquence de la vibration naturelle. Alors l'équation. (III.27) se réduit comme :

$$\frac{\partial}{\partial z} F = H \cdot F, \quad (III.32)$$

d' où

$$F = (u_z \ v_z \ w_z \ \sigma \ \tau_1 \ \tau_2)^T, \quad (III.33)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p & 0 & a_{10} & -a_{11} \\ 0 & 0 & -q & 0 & -a_{11} & a_{12} \\ -a_1 p + a_{16} q & -a_5 q + a_{16} p & 0 & a_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \sigma_x^0 - \rho \omega^2 & 0 & p & q \\ a_2 p^2 + a_{13} q^2 + 2a_{14} p q - \rho \omega^2 & a_{14} p^2 + a_{15} q^2 + (a_{13} + a_3) p q & 0 & a_1 p + a_{16} q & 0 & 0 \\ a_{14} p^2 + a_{15} q^2 + (a_{13} + a_3) p q & a_{13} p^2 + a_4 q^2 + 2a_{15} p q - \rho \omega^2 & 0 & a_5 q + a_{16} p & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (III.34)$$

avec :  $p = m\pi/a$  ,  $q = n\pi/b$ .

Par l'application de la méthode d'intégration précise [Zhong, W.X 1993], les solutions de l'équation (III.32) sont obtenus:

$$F|_{z=h} = H \cdot F|_{z=0} \quad (III.35)$$



$F = (u, \sigma)^T, T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ , équation (III.35) est exprimée sous

$$u_h = T_{11}u_0 + T_{12}\sigma_0, \sigma_h = T_{21}u_0 + T_{22}\sigma_0 \tag{III.36}$$

En introduisant les conditions aux limites  $\sigma_h = \sigma_0 = 0$  dans l'équation. (III.36),

nous obtenons :

$$T_{21}u_0 = 0 \tag{III.37}$$

Pour la solution non triviale  $u_0 \neq 0$ , le déterminant de la matrice de coefficients  $T_{21}$  devrait être nul.

Par conséquent dans ce présent travail nous avons appliqué la simple méthode de différence finie [S.P Timoshenko 1977] (voir annexe).

### III.4 Résultats et discussions

Les fréquences naturelles et les contraintes de flambement des plaques composites hybrides soumises à une contrainte initiale sont étudiées ici. La plaque composite hybride est constituée de trois couches (voir figure III.2). En premier lieu, les couches supérieure et inférieure sont en aluminium. La couche intermédiaire est un stratifié de N plis GFRP (verre polymère renforcé de fibres en premier lieu).

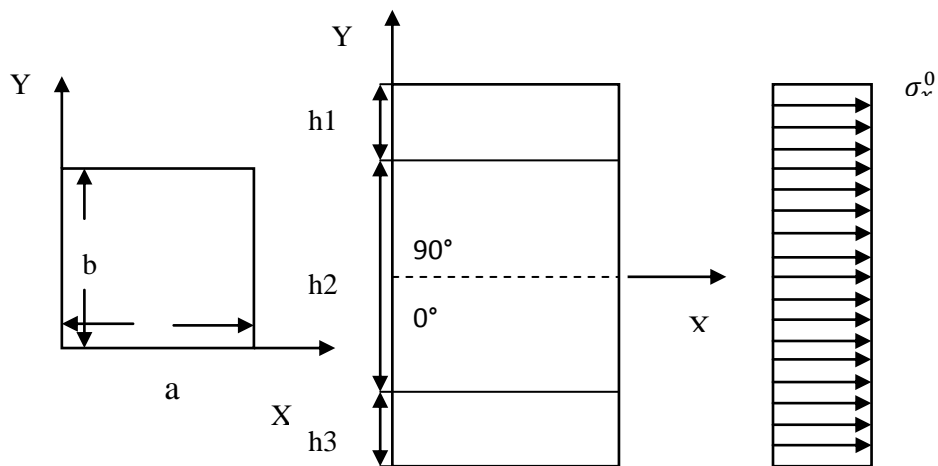


Figure III.2 : un model de la plaque rectangulaire hybride (Al/GFRP /Al) sous l'effet sa contraint initiale, étudiées précédemment [He-xiang LU, Jun-Yong LI 2009].

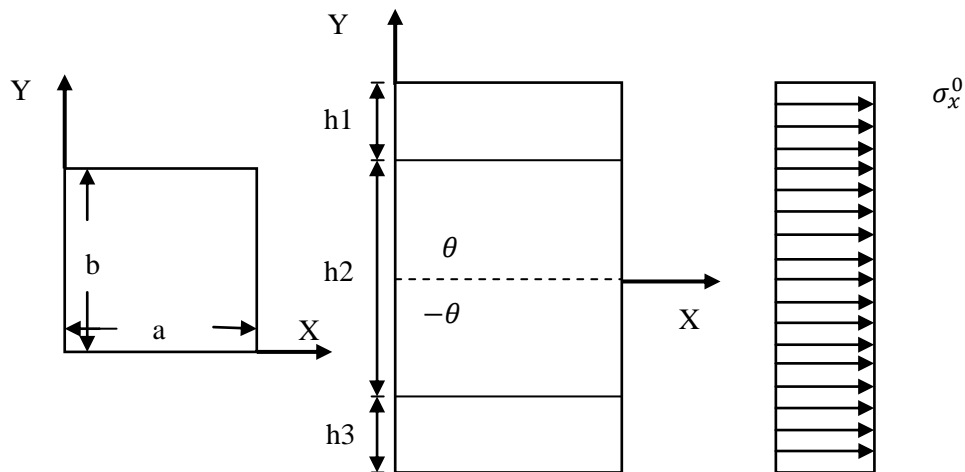


Figure III.3 : le même model de la plaque rectangulaire hybride (Al/GFRP /Al) sous l'effet sa contraint initiale, avec des différentes orientations des fibres (Al/GFRP ' et les angles  $\theta, -\theta$ /Al). Résultats dans le tableau III.7.

Le tableau suivant résume les propriétés mécaniques des matériaux constituant les plaques composites hybrides étudiées.

**Remarque :** toutes les valeurs présentées de fréquence naturelle et le chargement critique sont adimensionnelles (sans unité).

**Tableau III. 1: propriétés mécaniques des matériaux constituant les plaques composites hybrides.**

Propriété des matériaux	Aluminium (A1)	Fibres de verre renforcé en polymère 1 (GFRP1)	Fibres de verre renforcé en polymère 2 (GFRP2)	Céramique	Fibres de carbone HR
$E_x$ /GPa	72.0	55.897 9	35.2059	380	230
$E_y$ /GPa	72.0	13.729 3	28.7335	380	230
$E_z$ /GPa	72.0	13.729 3	17.9462	380	230
$\nu_{yx}$	0.33	0.277	0.177	0,30	0,30
$\nu_{zx}$	0.33	0.068	0.157	0,30	0,30
$\nu_{zy}$	0.33	0.400	0.371	0,30	0,30
$G_{xy}$ /GPa	28.0	5.589 8	7.453 1	146,2	50
$G_{xz}$ /GPa	28.0	5.589 8	6.472 4	146,2	50
$G_{yz}$ /GPa	28.0	4.903 3	6.178 2	146,2	50
$\rho$ / (kg · m <sup>-3</sup> )	$2.7 \times 10^3$	$2.55 \times 10^3$	$2.55 \times 10^3$	$3,8 \times 10^3$	1, 75 à $1,8 \times 10^3$

• Les effets de paramètres géométriques  $\lambda$  et  $mh / a$ ,  $(nh / b)$  sur la fréquence naturelle d'une plaque composite hybride sont présentés dans le tableau III.4 et III.5. Le tableau III.2 représente la fréquence naturelle sur une plaque purement aluminium ( $\lambda = 0$ ).

**Tableau III.2 : Présentation des résultats des fréquences naturelles de [Al/Al], et N critique des plaques stratifiées carrées (Aluminium).**

A/cas de ( $\lambda = 0$ ) :

Aluminium pure					
N=2	Résultats comparatifs		Présents		
mh/a (nh/b)	Fréquence naturelle ( $\omega_{bar}$ )		N critique		
	[He-xiang LU, Jung-yong LI 2009]	Présents	a/h	[He-xiang LU, Jung-yong LI 2009]	Présents
0,1	0,05869	0,05865	10	3,54185	3,53671
0,2	0,21536	0,21527	20	14,16742	14,14685
0,3	0,43334	0,43330	...	..	..
0,4	0,68434	0,68447	100	..	353,67146
0,5	0,95201	0,95238			

• Pour le cas de  $\lambda = 0$ , la plaque hybride est une plaque d'aluminium pur (tableau III.2).

• D'après les résultats présentés dans le tableau III.2, on a une variation ascendante des valeurs numériques remarquable concernant le calcul des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  en fonction des rapports  $mh/a$  (ou  $nh / b$ ), la plaque serait épaisse dans le cas ou ces rapports  $mh/a$ ,  $nh/b$  augmentent.

• Concernant le calcul de N critique en fonction de rapport  $a/h$ , il ya une augmentation importante des valeurs numériques surtout dans le rapport  $a/h=100$ .

• Les présents résultats s'approchent à ceux de [He-xiang LU, Jung-yong LI 2009] et de la théorie classique des plaques CLPT [Reddy, J. N 1997], et le tableau III.3 montre une petite comparaison des résultats obtenus par différentes théories en mêmes conditions : ( $\lambda = 0$ ,  $R= 0.1$ ,  $N= 2$ ).

**Tableau III.3: Comparaison de fréquence naturelle des plaques stratifiées carrées [Al/Al] et d'autres résultats existents.**

Présent résultat	[He-xiang LU, Jun-yong LI 2009]	CLPT [Reddy,J. N 1997]	résultat de [Chen,al 2006 ]
0,05865	0,05869	0,06036	0,1646

**Tableau III.4 : Présentation des résultats des fréquences naturelles de [Al/0/90/Al], et N critique des plaques hybrides stratifiées carrées (GFRP1).**

B/cas de ( $\lambda = 1$ ) :

[Al/GFRP1/Al]					
N=2	Résultats comparatifs		Présents		
mh/a (nh/b)	Fréquence naturelle ( $\omega_{bar}$ )		N critique		
	[He-xiang LU, Jung-yong LI 2009] (0/90)°	Présents (0/90)°	a/h	[He-xiang LU, Jung-yong LI 2009] (0/90)°	Présents (0/90)°
0,1	0 ,05524	0,05519	10	3,07076	3,13761
0,2	0 ,18261	0,18120	20	12,28304	12,55046
0,3	0 ,33737	0,33033	...	..	..
0,4	0,50445	0,49806	100	..	313,76163
0,5	0,68099	0,67334			

- Dans les résultats présentés dans le tableau III.4, nous remarquons aussi une variation ascendante des valeurs concernant le calcul des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  en fonction des rapports  $mh/a = nh/b$ , mais ils sont petites par rapport a celles de purement aluminium, la plaque dans ce cas est composite hybride ( $\lambda = 1$ ).

- Pour le calcul de N critique en fonction de rapport a/h, nous remarquons une augmentation importante des valeurs numériques surtout dans le rapport a/h=100, il s'agit dans ce dernier cas d'une plaque mince, et les autres cas de a/h=10, 20 sont respectivement épaisse et peu épaisse .Mais elles sont toujours petites par rapport le cas d'aluminium pure.

**Tableau III. 5 : Présentation des résultats des fréquences naturelles de [Al/0/90/Al], et N critique des plaques hybrides stratifiées carrées (GFRP1).**

C/cas de ( $\lambda = 5$ ) :

[Al/GFRP1/Al]					
N=2	Résultats comparatifs		Présents		
mh/a (nh/b)	Fréquence naturelle ( $\omega_{bar}$ )		N critique		
	[He-xiang LU, Jung-yong LI 2009] (0/90) <sup>o</sup>	Présents (0/90) <sup>o</sup>	a/h	[He-xiangLU, Jung-yong LI 2009] (0/90) <sup>o</sup>	Présents
0,1	0,04829	0,04992	10	3,07076	2,57778
0,2	0,15796	0,15503	20	12,28304	10,31113
0,3	0,28729	0,27778	...	..	..
0,4	0,42116	0,40550	100	..	257,77825
0,5	0,55617	0,52350			

- Le tableau III.3 illustre une variation ascendante des valeurs concernant le calcul des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  en fonction des rapports mh/a ou nh /b, mais ils sont petites par rapport à celles de ( $\lambda = 1$ ), la plaque dans ce cas est composite hybride avec ( $\lambda = 5$ ), cela signifie que  $h_2$  augmente proportionnellement avec  $\lambda$ .

- Comme le rapport épaisseur de la couche  $\lambda = h_2/h_1 = h_2/h_3$ , l'augmentation du rapport de l'épaisseur de couche indique une augmentation de l'épaisseur de la(les) couche(s) intermédiaire(s) en composite(s).

- Le chargement critique en fonction du rapport a/h, dans ce cas on a une augmentation des valeurs numériques est remarquable surtout dans le rapport a/h=100, mais elles sont toujours petites par rapport le cas d'aluminium pure et le cas de plaque composite ( $\lambda=1$ ).

**Tableau III.6 : Présentation des résultats des fréquences naturelles de [Al/0/90/Al], et N critique des plaques hybrides stratifiées carrées (GFRP1).**

D/cas de ( $\lambda = 10$ ) :

[Al/GFRP1/Al]		
N=2	Résultats comparatifs	Présents
	Fréquence naturelle ( $\omega_{bar}$ )	N critique

mh/a (nh/b)	[He-xiang LU, Jung-yong LI 2009] (0/90)°	Présents (0/90)°	a/h	[He-xiangLU, Jung-yong LI 2009] (0/90)°	Présents
0,1	0,04342	0,04459	10	1.84823	2,05945
0,2	0,14576	0,14023	20	7.39294	8.23781
0,3	0,27017	0,24694	...	..	..
0,4	0,40045	0,33321	100	..	205.94548
0,5	0,53157	0,57785			

- Ces résultats représentent une variation croissante des valeurs concernant le calcul des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  en fonction des rapports  $mh/a = nh/b$ , mais ils sont inférieurs par rapport à celles de ( $\lambda = 1, 5$ ), cette plaque est composite hybride avec ( $\lambda = 10$ ), cela signifie que  $h_2$  augmente proportionnellement avec  $\lambda$ .

- L'augmentation du rapport d'épaisseur de la couche  $\lambda = h_2/h_1 = h_2/h_3$ , du rapport indique une augmentation de l'épaisseur de la(les) couche(s) intermédiaire(s) en composite.

- Pour le calcul de N critique en fonction de rapport a/h, nous remarquons une augmentation importante des valeurs numériques est remarquable toujours dans le rapport a/h=100, mais elles sont toujours petites par rapport à le cas d'aluminium pure et le cas des plaques composites avec ( $\lambda=1, 5$ ).

**Tableau III.7: Comparaison des résultats des fréquences naturelles de [Al/différentes orientation/Al], des plaques hybrides stratifiées carrées (GFRP1).**

Avec ( $\lambda = 1$ ), (voire figure III.3).

N=2	Différentes orientations des angles			
	(0/90)°	(0 /0)°	(30 /-30)°	(60/-60)°
0,1	0,05519	0.05437	0.05422	0.05389
0,2	0,18120	0.18053	0.18021	0.17892
0,3	0,33033	0.33429	0.33341	0.33216
0,4	0,49806	0.49543	0.49362	0.48898
0,5	0,67334	0.63301	0.65480	0.63824

- Le tableau III.5 résume des différentes valeurs des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  obtenues dans des orientations multiples des fibres, l'orientation des fibres a un effet apparaît selon ces résultats.

- On remarque que ces valeurs augmentent proportionnellement avec le rapport  $R=mh/a=nh/b$  dans toutes les orientations que nous avons, et elles sont plus grandes dans le cas de l'orientation  $(0/90)^\circ$  que les autres cas.

- A l'orientation  $(60/-60)^\circ$ , La fréquence naturelle a des valeurs inférieures ceux des autres, ce qui traduit par conséquent une bonne stabilité vis-à-vis à la vibration libre par rapport a autres orientations.

**Tableau III.8: Présentation des résultats des fréquences naturelles de [Al/différentes matériaux/Al] en fonction de rapport  $mh/a=nh/b$ , et N critique en fonction de l'élanement  $a/h$  des plaques hybrides stratifiées.**

Avec ( $\lambda = 1$ ) :

Différentes matériaux							
$\bar{\omega}$				N critique			
mh/a	[Al/GFRP2 /Al]	[Al/f.de carbone/Al]	[Al/céramique/Al]	a/h	[Al/GFRP2 /Al]	[Al/f.de carbone/Al]	[Al/céramique/Al]
0,1	0,55231	0,06071	0,06370	10	3,12669	3,79139	4,17596
0,2	0,18626	0,22585	0,24110	20	12,51478	14,16556	16,70384
0,3	0,34876	0,46219	0,50402	100	312,86959	379,13912	417,59623
0,4	0,52293	0,73867	0,82308				
0,5	0,70581	1,03937	1,18229				

Le tableau III.8 résume les résultats calculés des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  et la charge critique dans des différents matériaux GFRP2, fibres de carbone, et la céramique à base d'alumine.

- Les valeurs de  $\bar{\omega}$  et N critique varient d'un matériau à l'autre et augmentent proportionnellement avec les rapports  $mh/a=nh/b, a/h$  respectivement .

- Les variations des valeurs dépendent de la variation des différentes propriétés des constituants des ces matériaux tel que : le module de Young, le poids volumique  $\rho$ , le module de cisaillement G et le coefficient de Poisson  $\nu$ .

Les figures suivantes illustrent l'influence des propriétés mécaniques et géométriques introduites dans les différents matériaux constituant la plaque hybride sur des différents comportements.

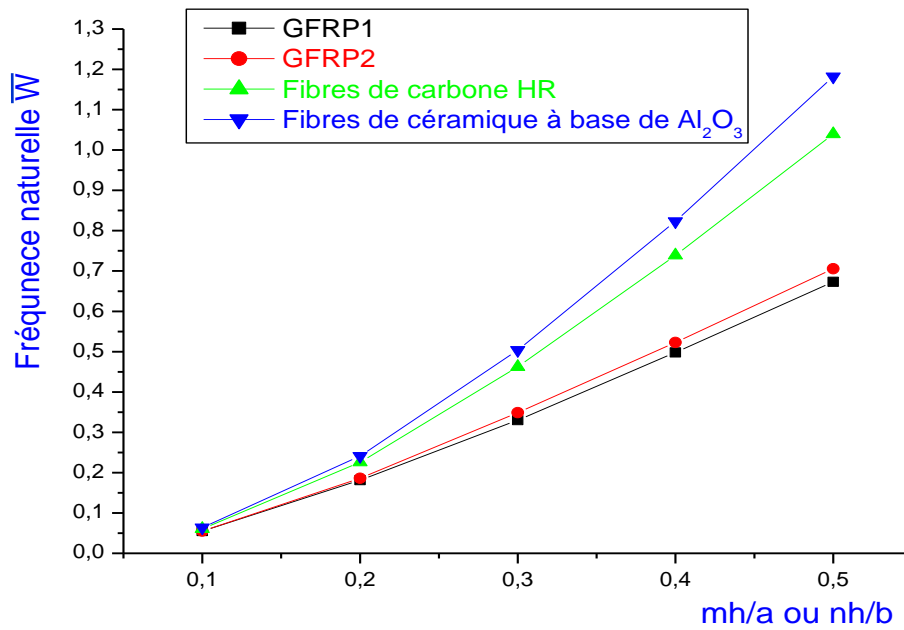


Figure III.4 : Influences des propriétés mécaniques et les dimensions sur la fréquence naturelle avec ( $\lambda=1, N=2$ ).

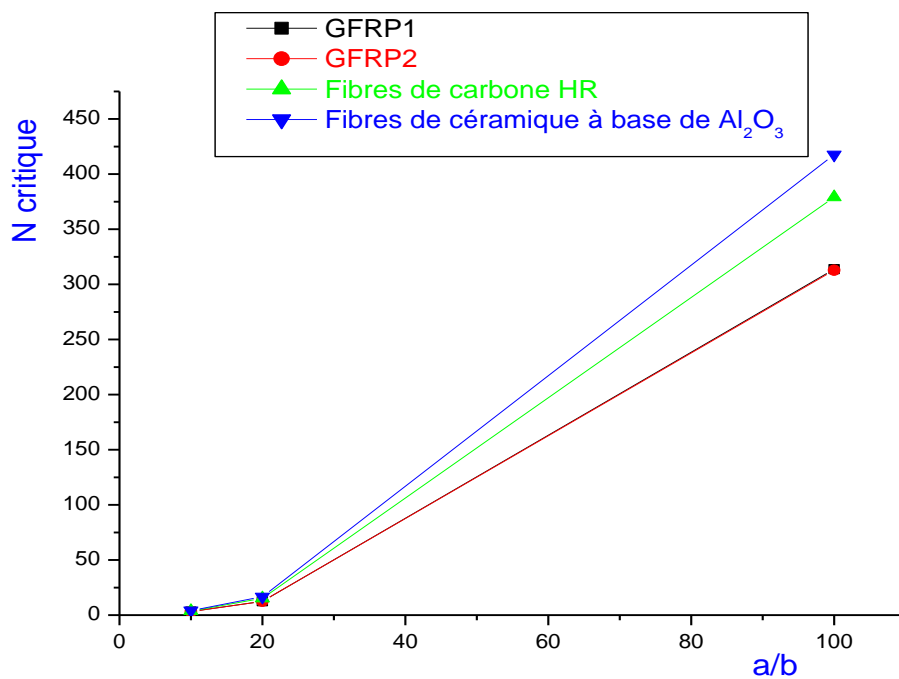


Figure III.5 : Influences des propriétés mécaniques sur et l'élongement des plaques sur le flambement avec ( $\lambda=1, N=2$ ).



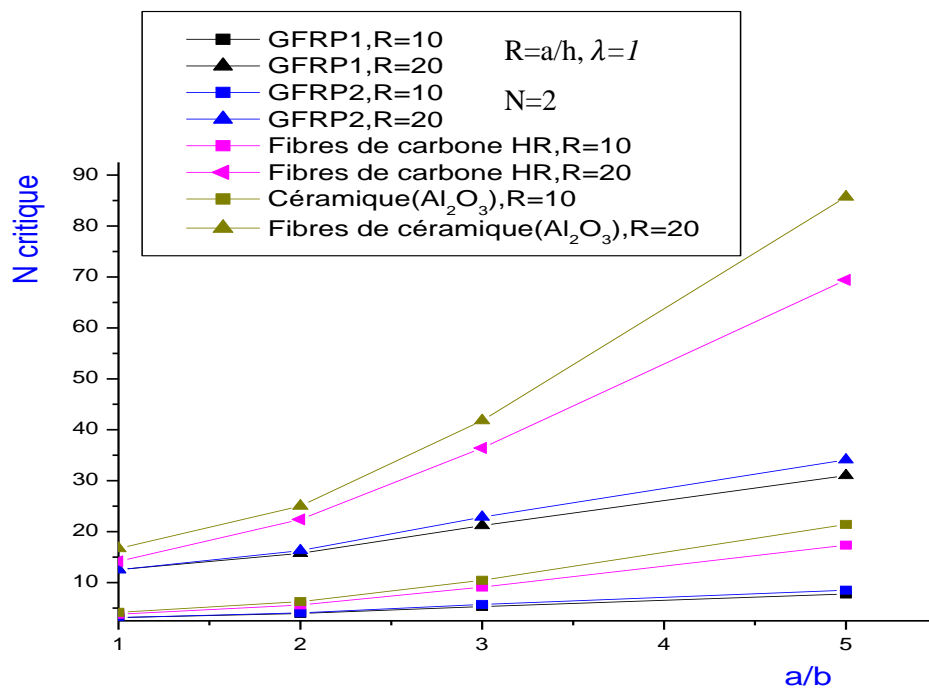


Figure III.6 : Influences du rapport d'élanement et le rapport  $R$  sur le coefficient de flambement dans des différents matériaux.

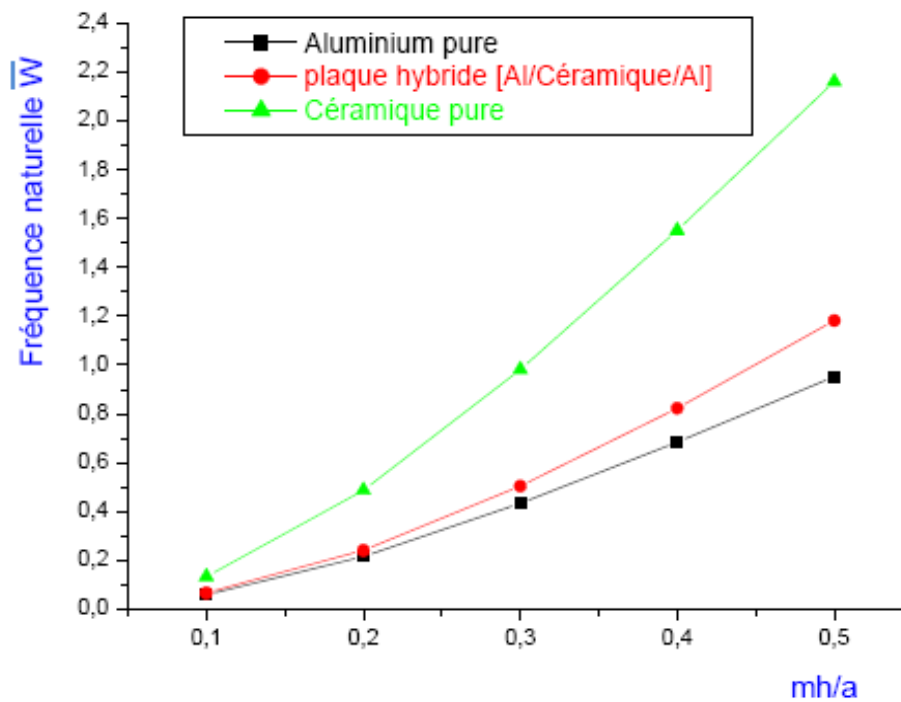


Figure III.7 : L'influence des constituants (matériaux) introduits dans la composition de la plaque hybride vis-à-vis à la vibration naturelle.

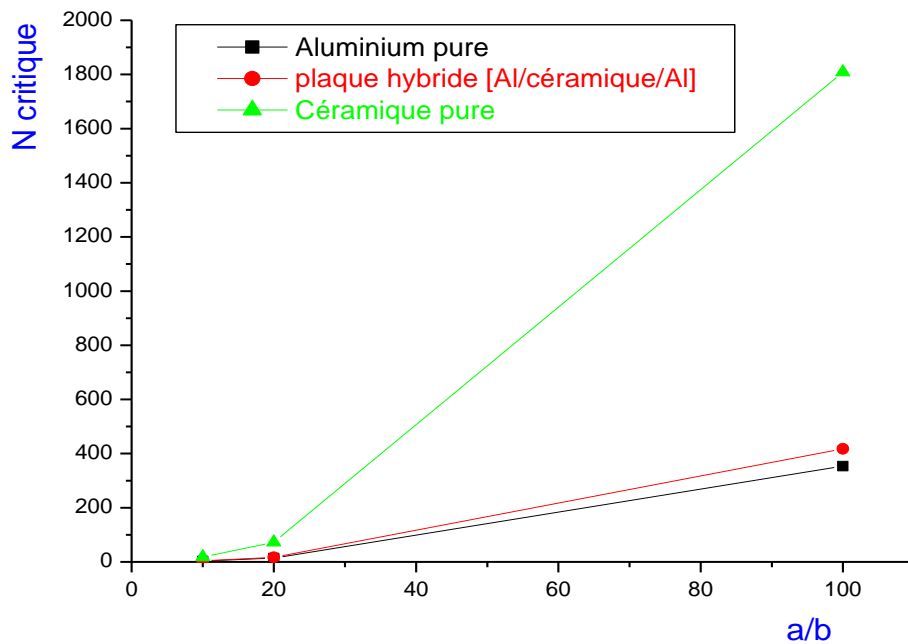


Figure III.8 : L'influence des constituants (matériaux) introduits dans la composition de la plaque hybride vis-à-vis au chargement critique.

- L'effet de la contrainte initiale sur la fréquence de vibration est représenté dans les Figures précédentes Il peut être vu que la charge de compression induit un effet adoucissant sur le comportement de vibration. Le flambement est obtenu lorsque la fréquence naturelle s'approche à zéro.

- Une plaque hybride avec un petit rapport d'épaisseur  $\lambda$  de couche donne un plus grand coefficient de flambement, et le coefficient de flambement est plus grand dans une plaque d'aluminium pur. Le tableau III.4 montre l'effet de la contrainte initiale sur les fréquences naturelles de différents GFRP. Les fréquences de vibration des plaques [Al/GFRP1/Al] sont inférieures aux fréquences des autres plaques [Al/(différents matériaux)/Al]. (tableau III.8 et 3)

- En second lieu, nous avons utilisé deux types de matériaux différents tel que : les fibres de carbone (CFRP, HR) et la céramique. Les caractéristiques mécaniques mentionnées au tableau III.1.

- La fréquence naturelle dépend de la variation du rapport  $m_h/a = n_h/b$ , elle augmente avec l'augmentation de ce dernier. Et varie d'un matériau à l'autre à cause de ses propriétés mécaniques (Figure III.4).

- Le coefficient de flambement est important dans les plaques élancées par rapport à celles carrées (Figure III.5).
- Le coefficient de flambement est inférieur dans le cas de GFRP1 et GFRP2 par rapport à autre matériaux (Figure III.5).
- La figure III.6 représente la croissance des courbes de coefficient de flambement en fonction de l'élancement de la plaque, cette augmentation est très importantes dans les rapports  $R=20$  que les rapports  $R=10$ .
- Le coefficient de flambement est très important dans le cas de céramique (La figure III.6).
- Les valeurs des fréquences naturelles (figure III.7) et la charge critique (figure III.8) sont entre celle en céramique pure (rigide) et en aluminium (souple), (prend des valeurs médiantes).

### III.5 Conclusion

Les résultats d'analyse des vibrations naturelles et le flambement des plaques hybrides soumis à une contrainte initiale par le procédé de différence finis sont comparables avec ceux donnés par la méthode d'intégration précise, et par conséquent cette méthode, donne une précision acceptable des résultats numériques.