

## CHAPITRE II : Comportement mécanique des matériaux composites

### II.1 L'élasticité dans les matériaux composites

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés, pour une température donnée, de nombreux milieux solides déformables ont un comportement élastique linéaire [J.M.Berthelot, 1994].

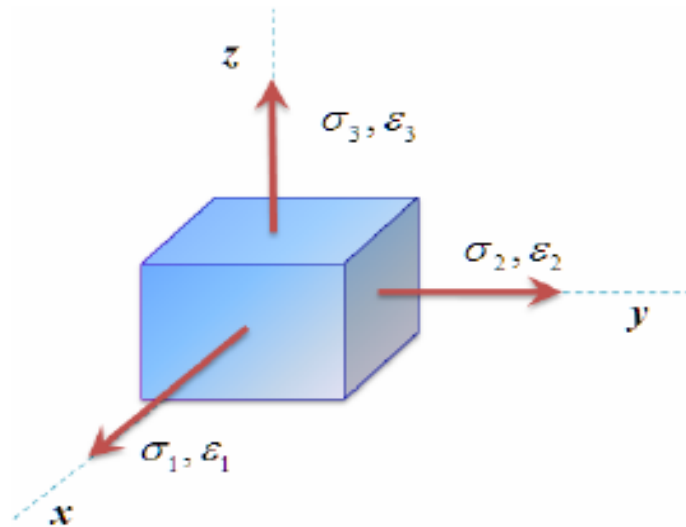


Figure II.1 Définition des contraintes et déformations en 3D.

#### II.1.1 Notation

La matrice des 9 composantes du tenseur des contraintes, est remplacée par une matrice colonne à 6 composantes. On utilise les notations suivantes :

notation standard	$\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{13} \sigma_{12}$	(II.1)
notation contractée	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6$	

Les notations semblables s'appliquent aux déformations. Sous l'effet de contraintes dans toutes les directions, la loi de Hooke, pour un élément en matériau linéaire élastique isotrope, s'écrit sous la forme

### II.1.2 Matrice de rigidité

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{24} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{34} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

Sous forme condensée

$$\sigma = C\varepsilon \quad (\text{II.3})$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité  $C$ , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc, décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici, les 21 constantes de rigidité  $C_{ij}$ .

### II.1.3 Matrice de flexibilité (souplesse)

La relation précédente peut être écrite sous la forme inverse :

$$\varepsilon = S\sigma \quad (\text{II.4})$$

La matrice  $S$  est appelée matrice de flexibilité ou matrice de souplesse, et s'écrit dans le cas général :

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

avec 
$$S = C^{-1} \quad (\text{II.6})$$

Les coefficients  $S_{ij}$  sont appelés constantes de flexibilité ou constantes de souplesse.

### II.1.4 Matériaux anisotropes

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries. Les propriétés de symétries géométriques réduisent alors le nombre des

constants indépendants nécessaires pour décrire le comportement du matériau. Cette réduction est fonction des symétries présentées par le matériau considéré.

### II.1.5 Matériau monoclinique

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (II.1), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13

### II.1.6 Matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie perpendiculaires deux à deux. Il est à noter l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires, implique l'existence du troisième. La forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

### II.1.7 Matériau unidirectionnel

Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (souplesse). L'exploitation de cette propriété conduit à la matrice :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Et la matrice de souplesse :

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{16} \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Les propriétés du matériau unidirectionnel sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

### II.1.8 Matrices de rigidité et souplesse en fonction des paramètres de l'ingénieur d'un composite orthotrope

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope peut être décrit par les 9 modules indépendants :

3 modules de Young:  $E_1, E_2, E_3$

3 coefficients de Poisson :  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ ,

3 modules de cisaillement :  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$ ,

La matrice de souplesse en fonction des modules de l'ingénieur est :

$$S = \begin{bmatrix} (1/E_1) & -(\nu_{12}/E_1) & -(\nu_{13}/E_1) & 0 & 0 & 0 \\ -(\nu_{12}/E_1) & (1/E_2) & -(\nu_{23}/E_2) & 0 & 0 & 0 \\ -(\nu_{13}/E_1) & -(\nu_{23}/E_2) & (1/E_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

Où  $\nu_{ij}$  est le coefficient de Poisson transversal dans la direction i par rapport à la déformation de compression longitudinale dans la direction j. c à d :

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (\text{II.12})$$

Le coefficient de Poisson n'est pas symétrique dans ses indices, et la symétrie de la matrice de

Souplesse mène à la relation suivante :  $\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$  (II.13)

En inversant la matrice de souplesse, la matrice de rigidité en fonction des modules de l'ingénieur s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} (1 - \nu_{23}\nu_{32})/E_2 E_3 \Delta & (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})/E_2 E_3 \Delta & (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})/E_2 E_3 \Delta & 0 & 0 & 0 \\ (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})/E_1 E_3 \Delta & (1 - \nu_{13}\nu_{31})/E_1 E_3 \Delta & (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})/E_1 E_3 \Delta & 0 & 0 & 0 \\ (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})/E_1 E_2 \Delta & (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})/E_1 E_2 \Delta & (1 - \nu_{12}\nu_{21})/E_1 E_2 \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

(II.14)

avec  $\Delta = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{13})}{E_1 E_2 E_3}$  (II.15)

**II.1.9 Relations d'élasticité dans un système d'axes quelconque**

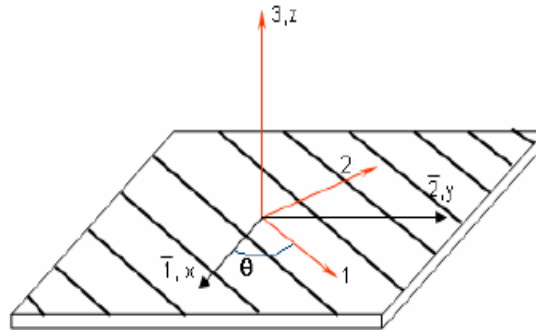


Figure II.2 : Axes principaux (1, 2,3) et axes de référence (1-bar,2-bar,3)=(x, y, z) d'une couche de stratifié.

Le comportement élastique d'une couche, rapporté à ses axes principaux, est donné par les relations (II.2) et (II.5) pour une couche unidirectionnelle. Les matrices de rigidité C et de souplesse S exprimées dans la base (1,2,3) sont obtenues en appliquant aux matrices de rigidités souplesse, rapportées à la base (1-bar,2-bar,3) les relations de changement de base suivantes :

$$[\bar{C}] = [T_\sigma]^{-1}[C][T_\epsilon] \tag{II.16}$$

$$[\bar{S}] = [T_\epsilon]^{-1}[S][T_\sigma] \tag{II.17}$$

avec :

$T_\varepsilon$  : La matrice de changement de base des déformations :

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

$T_\sigma$  : La matrice de changement de base des contraintes:

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

### II.1.10 Equations d'élasticité pour un état de contraintes planes

Dans le cas de la théorie des stratifiés, on est amené à considérer un état de contrainte plane défini par :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

Soit

$$\bar{\sigma}_{ij} \neq 0 \quad \text{si} \quad i = 1, 2, 6 \quad (\text{II.21})$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i = 3, 4, 5$$

Dans ce cas, les relations d'élasticité peuvent être expliquées à partir de la matrice de rigidité réduite Q du

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{66} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

Où les constantes de rigidité réduites s'expriment en fonction des rigidités par :

$$Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \quad Q_{22} = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}. \quad (\text{II.23})$$

$$Q_{12} = C_{11} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \quad Q_{66} = C_{66}$$

Les expressions des constantes de rigidités réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux sont données par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \frac{E_L}{E_T} \nu_{LT}^2} & Q_{22} &= \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \nu_{LT} Q_{11} & Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

### II.1.11 Constantes de rigidité réduites en dehors des ses axes principaux

La relation d'élasticité en contraintes planes s'écrit dans le système d'axe (x, y, z) suivant

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Les expressions de rigidité réduites en dehors de ses axes principaux sont

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

### II.1.12 Restrictions sur les coefficients d'élasticité

Si une seule contrainte suivant un axe principal est appliquée au matériau, la déformation suivant cette direction est de même signe que la contrainte. Il en résulte :

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0 \quad (\text{II.27})$$

Ou en termes de modules d'élasticité

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12} > 0 \quad (\text{II.28})$$

De même, si l'on impose au matériau une seule déformation suivant un axe principal, la contrainte qui en résulte dans cette direction a le même signe que la déformation imposée. Il en résulte que :

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0, \quad (\text{II.29})$$

et compte tenu de la relation (II.5) :

$$1 - \nu_{23} \nu_{32} > 0, \quad 1 - \nu_{31} \nu_{13} > 0, \quad 1 - \nu_{12} \nu_{21} > 0, \quad (\text{II.30})$$

et

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} > 0, \quad (\text{II.31})$$

Puisque la matrice  $S$  est définie positivement, le travail thermodynamique est positif. Cette même propriété associée aux relations (II.8) implique également :

$$\begin{aligned} |S_{23}| &< \sqrt{S_{22}S_{33}}, \\ |S_{13}| &< \sqrt{S_{11}S_{33}}, \\ |S_{12}| &< \sqrt{S_{11}S_{22}}, \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

En utilisant les relations de symétrie (II.13), les conditions (II.30) peuvent également s'écrire :

$$\begin{aligned} |\nu_{12}| &< \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} & |\nu_{21}| &< \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \\ |\nu_{23}| &< \sqrt{\frac{E_2}{E_3}} & |\nu_{32}| &< \sqrt{\frac{E_3}{E_2}} \\ |\nu_{31}| &< \sqrt{\frac{E_3}{E_1}} & |\nu_{13}| &< \sqrt{\frac{E_1}{E_3}} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

De même en reportant les relations de symétrie dans (II.31), nous obtenons :

$$2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} < 1 - \nu_{21}^2 \left(\frac{E_1}{E_2}\right) - \nu_{32}^2 \left(\frac{E_2}{E_3}\right) - \nu_{13}^2 \left(\frac{E_3}{E_1}\right) < 1. \quad (\text{II.34})$$

Ceci montre que les trois coefficients de Poisson ne peuvent pas avoir simultanément de grandes valeurs positives, puisque leur produit doit être inférieur à 0.5. Cependant, si l'un est négatif s'il n'y a pas de restriction sur les autres.

Les deux dernières conditions peuvent être regroupées pour obtenir :

$$\left(1 - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right) \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right) - \left(\nu_{21} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \nu_{32} \nu_{13} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right)^2 > 0 \quad (\text{II.35})$$

Enfin, la condition précédente peut être réarrangée de manière à obtenir des bornes sur le coefficient de Poisson  $\nu_{21}$  :

$$-\left[\nu_{32}\nu_{13} \frac{E_2}{E_1} + \left(1 - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right] < \nu_{21} < -\left[\nu_{32}\nu_{13} \frac{E_2}{E_1} - \left(1 - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right] \quad (\text{II.36})$$

Pour un matériau transversalement isotrope, exemple d'une plaque unidirectionnelle en fibre de carbone/époxyde, dans lequel les propriétés dans un plan sont les mêmes dans toutes les directions par rapport à la normale (le plan 1).



$$\nu_{13} = \nu_{23} = \nu' \quad E_1 = E_2 = E \quad (II.37)$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \nu \quad E_3 = E' \quad (II.38)$$

Dans ce cas, les conditions de l'équation deviennent

$$-1 < \nu < 1 \quad (II.39)$$

$$-\sqrt{\frac{E}{E'}} < \nu < \sqrt{\frac{E}{E'}} \quad (II.40)$$

Et l'équation devient

$$\nu < 1 - 2(\nu')^2 \left(\frac{E}{E'}\right)$$

Ainsi, les limites du coefficient de Poisson dans le plan deviennent

$$-1 < \nu < 1 - 2(\nu')^2 \left(\frac{E}{E'}\right) \quad (II.41)$$

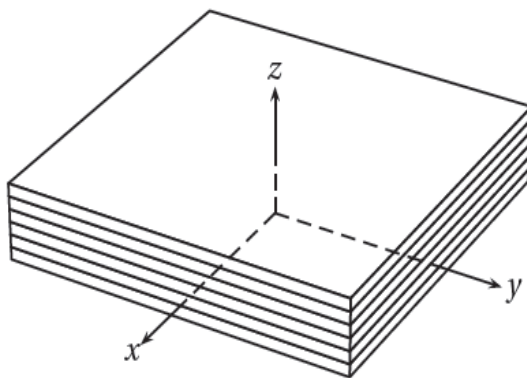
Pour un matériau isotrope  $E = E'$  et  $\nu' = \nu$

Les limites de coefficient de Poisson (II.41) encore plus simplifiées à :

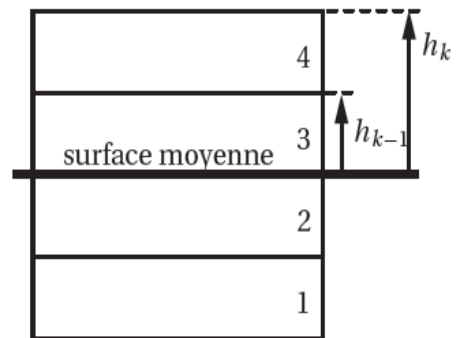
$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (II.42)$$

## II.2 Théorie des plaques stratifiées de Love-Kirchhoff

Les structures planes minces et d'épaisseur faible par rapport aux autres dimensions du plan sont correctement modélisées par le modèle de Love-Kirchhoff.



(a) plaque stratifiée



(b) section - k : numéro de la couche

Figures II.3 : Section de plaque stratifiée constituée de couches.

### II.2.1 Hypothèses

Les hypothèses de Love-Kirchhoff sont les suivantes : une section droite rigide, normale à la surface moyenne avant déformation, reste normale à cette surface moyenne après déformation.

La cinématique du modèle impose que les normales à la surface moyenne subissent un déplacement de solide rigide. Il en résulte que les déplacements entre deux points M et G situés sur une même normale sont liés par la relation :

$$\vec{U}(M) = \vec{U}(G) + \vec{\Omega} \wedge \overline{GM} \quad (\text{II.43})$$

Ou  $\vec{\Omega} = \theta_y(x, y)\vec{x} + \theta_x(x, y)\vec{y}$  est la rotation de la normale et  $\overline{GM} = z\vec{z}$ . G est un point du m Plan moyen (plan de référence) :

$$\begin{aligned} G(x, y, z=0) \\ \vec{U}(G) &= u(x, y, z=0)\vec{x} + v(x, y, z=0)\vec{y} + w(x, y, z=0)\vec{z} \\ \vec{U}(M) &= V(x, y)\vec{x} + V(x, y)\vec{y} + w(x, y)\vec{z} \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

On obtient :

$$\begin{aligned} U(x, y) &= u(x, y, z=0) + z\theta_x \\ V(x, y) &= v(x, y, z=0) - z\theta_y \\ W(x, y) &= w(x, y, z=0) \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

### II.2.2 Cinématique

La théorie des plaques de Love Kirchhoff impose les conditions suivantes sur les déformations.

$$\varepsilon_{zz} = 0; \quad \varepsilon_{xz} = 0 \Rightarrow \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yz} = 0 \Rightarrow \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{II.46})$$

### II.2.3 Déformations

Le champ des déformations dans le plan de la plaque s'écrit à partir du champ de déplacement et de la définition du tenseur des déformations.

On obtient :

$$\bar{\varepsilon}(M) = \frac{1}{2}(\overline{grad} \vec{U}(M) + \overline{grad}^T \vec{U}(M)) \quad (\text{II.47})$$

Autrement dit, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{xz} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = 0$$

On pose la notation vectorielle suivante :

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma} + z\hat{\chi} \quad (\text{II.49})$$

Dans la base globale  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , le tenseur des déformations se met sous la forme :

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma} + z\hat{\chi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \sqrt{2}\gamma_{xy} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \sqrt{2}\chi_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{II.50})$$

Où  $\hat{\gamma}$  représente les déformations de membrane et  $\hat{\chi}$ , les courbures. La quantité  $z\hat{\chi}$  représente les déformations de flexion et torsion :

$$\varepsilon_{xx} = \gamma_{xx} + z\chi_{xx}; \varepsilon_{yy} = \gamma_{yy} + z\chi_{yy}; \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} + z\chi_{xy} \quad (\text{II.51})$$

avec :

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \gamma_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \chi_{xx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

## II.2.4 Efforts généralisés

### II.2.4.1 Efforts de membrane

On suppose que les contraintes sont homogènes dans l'épaisseur de chacune des  $n$  couches de la plaque stratifiée. Cette hypothèse est utilisée pour pouvoir intégrer dans l'épaisseur de la plaque. Les efforts généralisés sont définis par les formules suivantes :

- $N_{xx}$ : effort résultant dans la direction  $\vec{x}$ , par unité de largeur selon  $y$  ;
- $N_{yy}$ : effort résultant dans la direction  $\vec{y}$ , par unité de largeur selon  $x$  ;
- $N_{xy}$ : effort de cisaillement de membrane par unité de largeur selon  $y$  ;
- $N_{yx} = N_{xy}$ : effort de cisaillement de membrane par unité de largeur selon  $x$ .

Les expressions des efforts généralisés en fonction des contraintes dans chacune des couches s'écrivent :

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx}^k dz \\ N_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy}^k dz \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy}^k dz \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

En notation vectorielle, on introduit les quantités suivantes :

$$\hat{N}_{xx} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \hat{\sigma}^k dz \quad \text{avec} \quad \hat{N} = \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ \sqrt{2}N_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{II.54})$$

### II.2.4.2 Efforts de flexion et torsion

On pose les efforts généralisés suivants :

– moment fléchissant d'axe  $\vec{y}$ , par unité de largeur suivant la direction  $y$  :

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx} dz \quad (\text{II.55})$$

– moment fléchissant d'axe  $\vec{x}$ , par unité de largeur suivant la direction  $x$  :

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy} dz \quad (\text{II.56})$$

– moment de torsion d'axe  $\vec{x}$  par unité de largeur suivant la direction  $y$  :

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy} dz \quad (\text{II.57})$$

– moment de torsion d'axe  $\vec{y}$  par unité de largeur suivant la direction  $x$  :

$$M_{yx} = M_{xy} \quad (\text{II.58})$$

Les expressions des efforts généralisés en fonction des contraintes dans chacune des couches s'écrivent :

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z\sigma_{xx}^k dz \\ M &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z\sigma_{yy}^k dz \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z\sigma_{xy}^k dz \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

En notation vectorielle, on introduit les quantités suivantes :

$$\hat{M}_{xx} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z\hat{\sigma}^k dz \quad \text{avec} \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ \sqrt{2}M_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{II.60})$$

### II.2.5 Relations de comportement

En injectant la relation de comportement en contrainte plane de chacune des couches dans la définition des efforts généralisés et moments généralisés, on obtient la relation de comportement.

L'ensemble des expressions est exprimé dans la base  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ .

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^k &= \hat{Q}^k(\hat{\gamma} + z\hat{\chi}) \\ \hat{N} &= \sum_{k=1}^n \int_{-h_{k-1}}^{h_k} \hat{\sigma}^k dz & \hat{M} &= \sum_{k=1}^n \int_{-h_{k-1}}^{h_k} z\hat{\sigma}^k dz \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

$$\hat{N} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \hat{Q}^k (\hat{\gamma} + z\hat{\chi}) dz \quad \hat{M} = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{k-1}}^{h_k} (z\hat{Q}^k \hat{\gamma} + z\hat{Q}^k z^2 \hat{\chi}) dz$$

On pose la relation de comportement des plaques de L.K. sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{N} \\ \hat{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{B} & \hat{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} \quad (\text{II.62})$$

Où les éléments de la matrice s'écrivent dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\begin{aligned} \hat{A}: \quad \bar{A}_{IJ} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{IJ}^k (h_k - h_{k-1}) \\ \hat{B}: \quad \bar{B}_{IJ} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{IJ}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ \hat{D}: \quad \bar{D}_{IJ} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{IJ}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

Les matrices caractérisent le comportement équivalent de la plaque respectivement en membrane, flexion-torsion, et le couplage membrane-flexion. Si une structure est stratifiée de façon quelconque, il existe un couplage entre le comportement membranaire et le comportement de flexion et torsion. Ce couplage est dû à la matrice  $\hat{B}$ . Cette dernière est nulle si l'empilement des couches est symétrique par rapport au plan moyen de la plaque. Il faut noter également que ce couplage n'existe pas si la plaque est constituée d'un seul matériau homogène.

### II.2.5.1 Stratifiés équilibrés

Les structures stratifiées équilibrées comportent le même nombre de plis dans chacune des directions  $\theta$  et  $-\theta$ . Il y a alors découplage entre les déformations de tension et les déformations de cisaillement plan. Les termes A16 et A26 sont nuls.

$$\hat{N} = \hat{A} \hat{\gamma} \quad (\text{II.64})$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ \sqrt{2}N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & 0 \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \sqrt{2}\gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{II.65})$$

Les  $\bar{A}_{ij}$  sont indépendants de l'ordre de l'empilement des plis. En effet pour ces stratifiés on a dans le cas de couches à  $\mp\theta$  les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{16}(\theta) &= -\bar{Q}_{16}(-\theta) \\ \bar{Q}_{26}(\theta) &= -\bar{Q}_{26}(-\theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \bar{A}_{16} = 0 \\ \bar{A}_{26} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

### II.2.5.2 Stratifiés à symétrie miroir

Les structures stratifiées à symétrie miroir comportent un nombre de plis pair dans chacune des directions, repartis de manière symétrique par rapport au plan moyen de la plaque stratifiée. Le comportement de membrane est découplé du comportement de flexion-torsion :

$$\begin{pmatrix} \widehat{N} \\ \widehat{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & 0 \\ 0 & \widehat{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{Y} \\ \widehat{Z} \end{pmatrix} \quad (\text{II.67})$$

Avec :

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{16} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{26} \\ \bar{A}_{16} & \bar{A}_{26} & \bar{A}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

Où les  $\bar{A}_{ij}$  sont indépendants de l'ordre de l'empilement des plis.

### II.5.5.3 Stratifiés équilibrés à symétrie miroir

Ce type de structures stratifiées comporte à la fois les propriétés des stratifiés équilibrés et les propriétés des structures stratifiées à symétrie miroir. Il y a alors découplage entre les déformations de tension et les déformations de cisaillement plan. Les termes  $A_{16}$  et  $A_{26}$  sont nuls. Le comportement de membrane est découplé du comportement de flexion-torsion :

$$\begin{pmatrix} \widehat{N} \\ \widehat{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & 0 \\ 0 & \widehat{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{Y} \\ \widehat{Z} \end{pmatrix} \quad (\text{II.69})$$

### II.5.6 Contraintes inter laminaires et délaminage

L'analyse des contraintes inter laminaires permet d'expliquer le phénomène de délaminage (séparation progressive des couches). Le délaminage est un phénomène très important qui n'est pas pris en compte dans les critères de rupture classiques. Ces phénomènes sont dus à l'existence d'une contrainte normale au plan du stratifié et de contraintes de cisaillement.

hors plan de la plaque à proximité des bords libres des structures. Ces contraintes sont nommées contraintes interlaminaires. Les séquences d'empilement influencent le signe et l'intensité des contraintes interlaminaires.

Si on considère un stratifié croisé symétrique sollicité en traction, il aura une déformation globale en membrane mais chaque couche prise séparément se déformerait en torsion. L'équilibre est obtenu par interaction entre les couches au prix de fortes contraintes interlaminaires.

On pose les notations suivantes pour la matrice des contraintes :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \Pi\sigma\Pi & \Pi\sigma\vec{z} \\ (\Pi\sigma\vec{z})^T & \vec{z}^T\sigma\vec{z} \end{bmatrix} \quad (\text{II.70})$$

Dans la suite, on établit une expression approchée des contraintes interlaminaires  $\Pi\sigma\vec{z}$  et  $(\Pi\sigma\vec{z})^T$  en fonction des contraintes déterminées par la théorie des plaques. Pour établir une approximation des contraintes interlaminaires, on injecte dans les équations d'équilibre :

$$\overrightarrow{\text{div}}(\sigma^k) + \vec{f}_d = \vec{0} \quad (\text{II.71})$$

Les contraintes interlaminaires sont déterminées à partir des contraintes calculées par la théorie des plaques à savoir  $\Pi\sigma\Pi$ :

$$\Pi\sigma\vec{z} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overrightarrow{\text{div}}(\Pi\sigma^k\Pi) dz + \Pi\vec{f}_d ; \quad \vec{z}^T\sigma\vec{z} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overrightarrow{\text{div}}(\Pi\sigma^k\vec{z}) dz + \vec{z}^T\vec{f}_d \quad (\text{II.72})$$

Grâce aux modèles exposés précédemment, une structure composite constituée d'un assemblage de plaques stratifiées sera modélisée de façon relativement simple. Il est alors possible d'étudier le dimensionnement de la structure, et de procéder à son analyse dans le cadre éléments finis. Ce dimensionnement s'effectue d'après des critères de résistance.

De nombreux critères sont disponibles dans la littérature et dans les logiciels éléments finis. Ces critères se limitent en général à la résistance d'une couche. Les critères de délaminage ne sont généralement pas disponibles dans les codes de calculs éléments finis.

### II.3 Dimensionnement des structures composites

Les spécialistes disposent actuellement de méthodes d'investigation de plus en plus puissantes pour étudier les matériaux composites. Ces méthodes permettent une définition quasi optimale des associations renfort-matrice pour une application donnée. Paradoxalement, les méthodes de dimensionnement et d'analyse des structures stratifiées reposent sur des approches pragmatiques et primitives. Pour évaluer la résistance d'une structure stratifiée, il faut disposer de critères de dimensionnement.

Les critères de limites de dimensionnement en chargement monotone ou critères de rupture reposent sur l'hypothèse de comportement élastique fragile des constituants de base, fibre et matrice. Ils sont généralement déduits des critères limites d'élasticité isotrope. Ces critères sont généralement exprimés en fonction des contraintes par l'intermédiaire d'une fonction scalaire dénommée critère limite. Cette fonction permet de quantifier l'intensité de sollicitations appliquées.

Classiquement on utilise le critère de contrainte maximale, le critère de déformation maximale et les critères énergétiques de Hill, Tsai-Hill. Ils permettent d'avoir une première évaluation de la résistance mécanique du stratifié. Ces critères nécessitent la connaissance des contraintes ou déformations à rupture.

### II.3.1 Mécanismes de dégradation d'une structure stratifiée

Les structures stratifiées réalisées dans à partir de matériaux composites carbone époxy par exemple T300/914, IM6/914 et M55J/M18 sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues de carbone liées par de la matrice de type époxy. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice de type résine époxy assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurales sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. Trois principaux modes de dégradation sont observés dans les couches unidirectionnelles (voir figure II.4) :

- la micro fissuration de la matrice parallèlement aux fibres ;
- la dégradation de l'interface fibre matrice ;
- la rupture des fibres.

Les structures stratifiées, par nature fortement hétérogènes, sont sujettes à l'apparition de délaminages multiples près des bords libres et des zones où règne un état de sur contrainte. Le mécanisme de délaminage est initié par des phénomènes d'endommagement microscopique

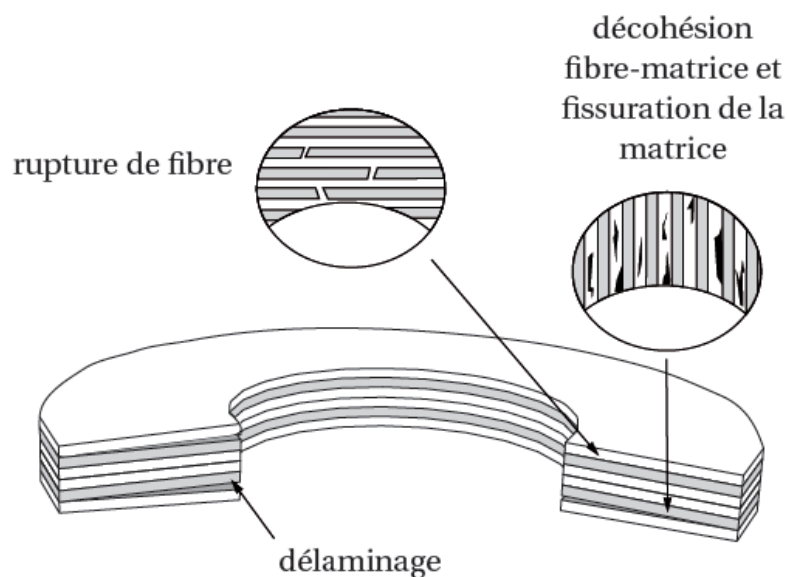


Figure II.4: Modes de rupture et front de délaminage.



complexes. Ce mode de dégradation ne peut être imputé entièrement à la détérioration de la liaison inter laminaire car les fronts de délaminage peuvent se transférer d'une interface à une autre au cours de l'évolution des dégradations dans la structure.

Dans la suite, on précise les différents critères classiquement utilisés pour évaluer le domaine admissible dans lequel aucune dégradation des couches ne doit être observée. Ces critères sont couramment utilisés dans l'industrie et permettent de dimensionner les pièces composites en supposant un comportement élastique linéaire des couches.

### II.3.2 Matériaux isotropes

Les critères limitent de dimensionnement en chargement monotone ou critères de rupture reposent sur l'hypothèse d'un comportement élastique fragile. Ils sont en général déduits des critères de limite d'élasticité utilisés notamment pour l'analyse du comportement en plasticité des matériaux métalliques :

- dans le cas unidimensionnel (traction) cette vérification se réduit à assurer  $|\sigma_{11}| \leq \sigma_e$  avec  $\sigma_e$ , limite élastique en traction ;
- dans le cas tridimensionnel, il faut vérifier un critère de limite d'élasticité qui s'écrit  $f(\sigma) \leq \sigma_e$ , où  $f$  est une fonction réelle, la fonction seuil élastique.

Il existe un grand nombre de critères, certains sont valables pour des matériaux isotropes fragiles (fontes, béton), d'autres, pour des matériaux ductiles (alliages cuivreux, alliages d'aluminium, aciers doux). Il n'existe pas de critères universels valables pour tous les matériaux.

#### II.3.2.1 Critère de Rankine

Ce critère s'applique plutôt aux matériaux fragiles. Ce critère considère que la limite d'élasticité(ou de rupture) est atteinte lorsqu'une, au moins, des contraintes principales atteint une valeur limite obtenue par test uni-axial, de traction ou de compression :

$$\sup (\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq \sigma_{Te} \quad (\text{II.73})$$

#### II.3.2.2 Critère de Tresca

Ce critère s'applique plutôt aux matériaux ductiles. Des essais sur des matériaux ductiles confirment que le début de la plastification en traction a lieu suivant des plans inclinés à  $45^\circ$  par rapport à la direction de chargement. Cette direction correspond à un état de contrainte de cisaillement maximum. Si  $\tau_e$  est la contrainte tangentielle de cisaillement, alors :

$$\frac{1}{2} \sup |\sigma_I - \sigma_{III}| \leq \tau_e \quad \text{ou} \quad \sup |\sigma_I - \sigma_{III}| \leq \sigma_e \quad (\text{II.74})$$

### II.3.2.3 Critère de Von Mises

Ce critère s'applique également aux matériaux ductiles. Notant qu'un état de contrainte hydrostatique change seulement le volume et non la forme du matériau, la partie hydrostatique du tenseur des contraintes est telle que :

$$\sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\sigma_D, \sigma_D)} \leq \sigma_e \quad \text{avec} \quad \sigma_{ijD} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \delta_{ij} \quad (\text{II.75})$$

Et

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\sigma_D \sigma_D)} \\ \sigma_D &= \sigma - \frac{\text{tr}(\sigma)}{3} \bar{1} \\ \sigma_{eq} &\leq \sigma_y \end{aligned} \quad (\text{II.76})$$

## II.3.3 Matériaux anisotropes

### II.3.3.1 Critère de contrainte maximale

Ce critère relativement rustique reste très utilisé pour rechercher une première solution technologique dans la conception d'une pièce composite. En contrainte plane, le critère s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^t} &\leq 1 \quad \text{si} \quad \sigma_{11} \geq 0; \quad \frac{|\sigma_{11}|}{\sigma_{11}^c} \leq 1 \quad \text{si} \quad \sigma_{11} \leq 0 \\ \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^t} &\leq 1 \quad \text{si} \quad \sigma_{22} \geq 0; \quad \frac{|\sigma_{22}|}{\sigma_{22}^c} \leq 1 \quad \text{si} \quad \sigma_{22} \leq 0 \\ \frac{|\sigma_{12}|}{\sigma_{12}^r} &\leq 1 \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

Les valeurs ultimes des contraintes sont notées  $\sigma_{22}^t$

### II.3.3.2 Critère de déformation maximale

Ce critère est utilisé conjointement au critère en contrainte :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^t} &\leq 1 \quad \text{si} \quad \varepsilon_{11} \geq 0; \quad \frac{|\varepsilon_{11}|}{\varepsilon_{11}^c} \leq 1 \quad \text{si} \quad \varepsilon_{11} \leq 0 \\ \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^t} &\leq 1 \quad \text{si} \quad \varepsilon_{22} \geq 0; \quad \frac{|\varepsilon_{22}|}{\varepsilon_{22}^c} \leq 1 \quad \text{si} \quad \varepsilon_{22} \leq 0 \\ \frac{|\varepsilon_{12}|}{\varepsilon_{12}^r} &\leq 1 \end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

## II.3.3.3 Critères énergétiques

### II.3.3.3.1 Critère de Hill

Ce critère est utilisé pour définir le domaine d'élasticité d'un matériau orthotrope :

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{23}^2 \leq 1 \quad (\text{II.79})$$

On suppose la base d'orthotropie  $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$  connue. Pour identifier ce critère, il faut réaliser suivant les axes d'orthotropie, trois expériences de traction et trois expériences de cisaillement qui permettent d'écrire les relations suivantes :

- trois essais de traction :  $F + G = \frac{1}{\sigma_{11}^e}$ ,  $F + H = \frac{1}{\sigma_{22}^e}$  et  $F + G = \frac{1}{\sigma_{33}^e}$
- trois essais de cisaillement :  $2L = \frac{1}{\sigma_{11}^e}$ ,  $2M = \frac{1}{\sigma_{13}^e}$  et  $2N = \frac{1}{\sigma_{23}^e}$

Il suffit d'exploiter les essais pour identifier les six paramètres du critère F,G,H, L,M, N en fonction des limites d'élasticité du matériau considéré. Il faut noter que lorsque  $F = G = H = L = M = N$ , le critère de Hill correspond à celui de Mises. Le critère s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{33}}{\sigma_{33}^e}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_{11}^e} + \frac{1}{\sigma_{22}^e} - \frac{1}{\sigma_{33}^e}\right) \sigma_{11}\sigma_{22} \\ & - \left(\frac{1}{\sigma_{11}^e} - \frac{1}{\sigma_{22}^e} + \frac{1}{\sigma_{33}^e}\right) \sigma_{11}\sigma_{33} - \left(-\frac{1}{\sigma_{11}^e} + \frac{1}{\sigma_{22}^e} + \frac{1}{\sigma_{33}^e}\right) \sigma_{22}\sigma_{33} \\ & \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{13}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{\sigma_{23}^e}\right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (II.80)$$

Où les caractéristiques injectées dans le critère sont les limites élastiques. D'un point de vue conception, lors du dimensionnement des structures, les valeurs limites dans le critère sont généralement les contraintes enregistrées à rupture.

### II.3.3.3.2 Critère de Hill en contraintes planes

On considère un état de contraintes planes dans le plan  $(\vec{N}_1, \vec{N}_2)$ , le critère se réduit à :

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^e}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_{11}^e} + \frac{1}{\sigma_{22}^e} - \frac{1}{\sigma_{33}^e}\right) \sigma_{11}\sigma_{22} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^e}\right)^2 = 1 \quad (II.81)$$

### II.3.3.4 Critères de Tsai-Hill

Le critère proposé par Tsai-Hill correspond au critère de Hill écrit en contrainte plane dans le cas d'un matériau isotrope transverse. Ce critère ne tient pas compte des différences de comportement en traction et en compression. Dans la base d'orthotropie connue, le critère s'écrit :

$$F(\sigma_{22})^2 + G(\sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{12}^2 \leq 1 \quad (II.82)$$

Pour identifier ce critère, il faut réaliser suivant les axes d'orthotropie, deux expériences de traction et une expérience de cisaillement comme suit :

- deux essais de traction :  $G + H = \frac{1}{\sigma_{11}^e}$  et  $F + H = \frac{1}{\sigma_{22}^e}$
- un essai de cisaillement :  $2L = \frac{1}{\sigma_{12}^e}$  et  $H = \frac{1}{2\sigma_{11}^e\sigma_{22}^e}$

Les valeurs caractéristiques du matériau sont accompagnées de l'exposant  $e$ .

Le critère est classiquement utilisé sous la forme :

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^e}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{11}^e}\right) + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^e}\right)^2 = 1 \quad (\text{II.83})$$

### II.3.3.5 Critère Hoffman

Ce critère généralise dans le cas tridimensionnel, le critère de Hill. Il est utilisé pour définir le domaine d'élasticité d'un matériau orthotrope en tenant compte des limites en compression :

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{23}^2 + P\sigma_{11} + Q\sigma_{22} + R\sigma_{33} \leq 1 \quad (\text{II.84})$$

On suppose la base d'orthotrope  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$  connue. Pour identifier ce critère, il faut réaliser suivant les axes d'orthotropie, trois expériences de traction, trois expériences de compression et trois expériences de cisaillement. Pour ce qui concerne la modélisation des matériaux composites, la mécanique de l'endommagement fournit actuellement un outil extrêmement puissant à la disposition des mécaniciens des structures, intégrant par l'introduction de variables internes judicieusement choisies, l'essentiel des phénomènes mécaniques de dégradation dans le comportement.

L'analyse des matériaux composites par la mécanique de l'endommagement suppose une nouvelle approche de l'étude des composites, tant sur le plan expérimental que théorique.