

## II.1 Introduction

Un système est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. La modélisation regroupe un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système à étudier. La modélisation théorique requiert une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Les systèmes physiques sont souvent complexes et difficilement exploitables, notamment pour la Commande de systèmes. Les grands soucis de la modélisation sont : la précision et la fidélité du modèle vis-à-vis du processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématiquement exploitable.

Afin de concevoir un contrôleur de vol, on doit d'abord comprendre profondément les mouvements de l'avion, sa dynamique et par conséquent ses équations dynamiques. Cette compréhension n'est pas simplement nécessaire pour la conception du contrôleur, mais afin de s'assurer que les modèles de simulations du véhicule montrent un comportement aussi proche que possible de la réalité quand la commande est appliquée.

Beaucoup de tentatives de modélisation du drone sont enregistrées dans la littérature, tel que celle établie par Lozano [16] par la méthode Euler-Lagrange et celle de Bouabdallah [15], ou encore une modélisation basée sur les méthodes évolutionnaires dans [19]. Le modèle présenté par Hamel [17,18] basé sur le formalisme de Newton a été obtenu à partir de la dynamique d'un corps rigide associé au fuselage auquel sont ajoutées les forces aérodynamiques générées par les rotors. Ce modèle en plus intègre la dynamique des actionneurs. Notre approche de modélisation est basée sur le formalisme de Newton.

La dynamique des véhicules volants à voilure tournante est particulièrement très complexe vu les nombreux effets aérodynamiques. Dans ce chapitre, nous développons un modèle mathématique permettant de décrire les mouvements possibles du drone.

## II.2 Principe de vol d'un quadrotor

Un quadrotor est un engin volant qui consiste en une armature en croix symétrique avec des moteurs et des rotors aux extrémités de chaque tige. Les rotors diamétralement opposés tournent dans le même sens. Les rotors sont généralement non articulés [20] [21] [22] [23] [24] [25].

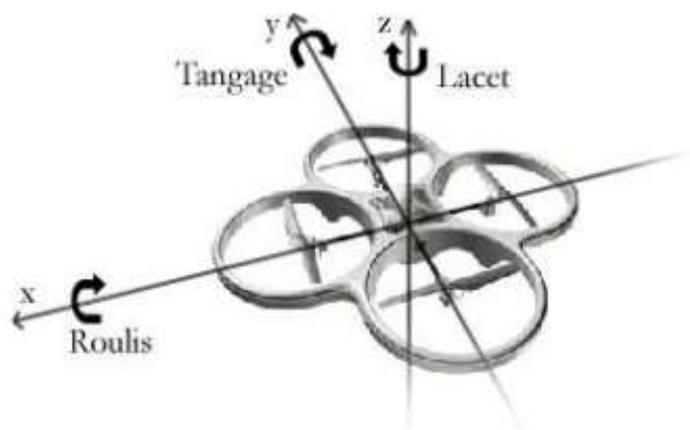


Figure II.1. Axes de rotation du Quadrotor

Les mouvements possibles du Quadrotor sont :

- Le mouvement vertical (Sustentation) s'obtient de la contribution des quatre hélices au même temps.
- Le déplacement suivant l'axe X se produit suite à une rotation autour de l'axe Y, cette dernière se crée à cause de la différence de portance des rotors 1-3 (**Tangage  $\theta$** ).
- Le déplacement suivant l'axe Y se produit suite à une rotation autour de l'axe X, cette dernière se crée à cause de la différence de portance des rotors 2-4 (**Roulis  $\phi$** ).
- Le mouvement en lacet nécessite que deux rotors du même axe tournent dans un sens tandis que les deux autres dans l'autre sens (**Lacet  $\psi$** ).

La figure (figure II.2) expliquée les possibilités de vol du Quadrotor

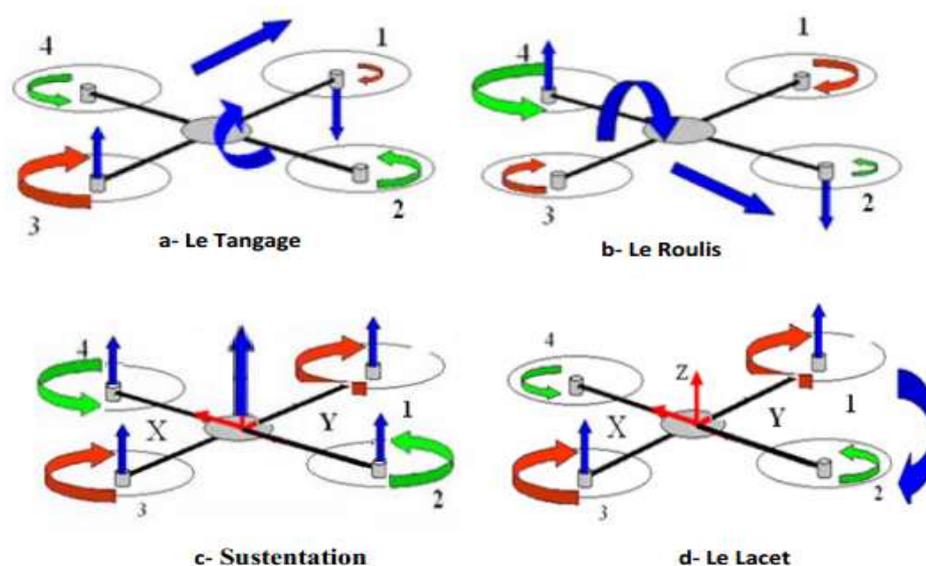


Figure II.2. Les mouvements possibles du Quadrotor

- **Translation Verticale** : le contrôle vertical se fait par variation de la vitesse de rotations des rotors. Pour un vol stationnaire, la vitesse de rotation est la même pour les 4 rotors, de façon à ce que la poussée globale des 4 rotors compense le poids de l'engin. Pour changer l'altitude, on fait varier identiquement la vitesse de rotation des 4 rotors.
- **Translation Horizontale** : on fait varier l'assiette de l'engin, ce qui permet de modifier le vecteur de translation en grandeur et en direction de chaque rotor.
- **Lacet** : le lacet s'obtient par la différence de couple de frottement créée au niveau des rotors. Il suffit donc d'augmenter la vitesse de rotation des deux moteurs diamétralement opposés et diminuer la vitesse des deux autres moteurs. Ainsi la poussée globale est maintenue, mais il y a apparition d'un couple résultant.
- **Roulis et Tangage** : le roulis et le tangage à altitude constante sont obtenus de la façon suivante: il faut faire varier la vitesse des moteurs des rotors diamétralement opposés. On augmente la vitesse de l'un et on diminue la vitesse de l'autre (on conserve la force globale opposée au poids), le quadrotor s'incline du côté où l'on a ralenti la vitesse du moteur et prend cette direction.

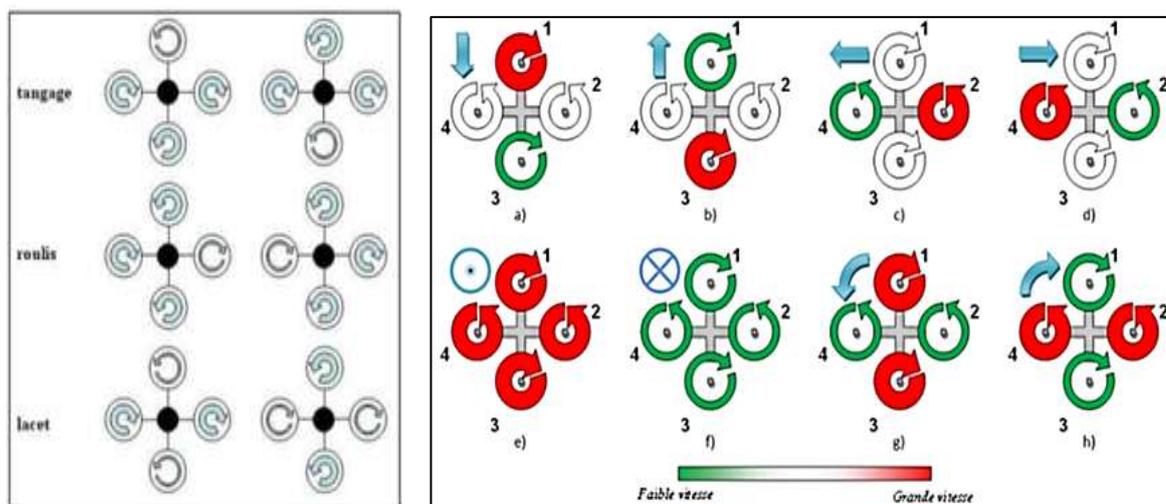


Figure II.3. Mouvement du Drone en fonction de la vitesse de la rotation des rotors

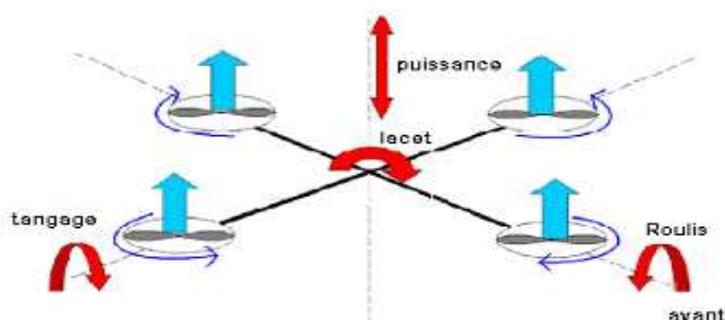


Figure II.4. Commande de puissance, lacet, roulis et tangage

### II.3 Modèle dynamique proposés

Plusieurs auteurs ont étudié la modélisation du quadrirotor. Cette étape est considérée comme le premier pas pour construire des lois de commande. Le modèle dynamique obtenu représente la relation d'une part entre les forces et les couples aérodynamiques provoqués par la rotation des rotors et l'engin, et d'autre part les accélérations de translation du centre de masse du quadrotor.

Dans cette section, nous présentons un modèle dynamique du quadrotor : la modélisation selon Newton-Euler.

#### II.3.1 Modélisation selon Newton-Euler

Dans cette approche, l'équation des forces est employée pour décrire la dynamique de translation tandis que l'équation du moment est employée pour décrire la dynamique de rotation (voir la section 3.7). Ce modèle dynamique est adopté par plusieurs auteurs comme Hamel et al. [25], Pounds et al. [21] et Bouabdallah et al. [16], Altug et al. [26]. où Altug et al. ont développé un modèle semblable au modèle de Bouabdallah et al. En utilisant l'équilibre entre les forces et les moments. Ce modèle peut être employé dans le cas de vitesses basses où la traînée peut être négligée dans le cas de la stabilisation du quadrirotor (A. Hably [27]).

### II.4 Fixation des coordonnées et modélisation cinématique

#### II.4.1 Les repères utilisés

Un Quadrotor nécessite deux repères pour le localiser dans l'espace, ces repères sont :

##### a. Le repère lié à la terre : $E(O, X, Y, Z)$

C'est un repère lié à la terre supposée plate et immobile, il est noté  $(O, X, Y, Z)$ .

- $O$  est l'origine, fixe par rapport à la terre.
- $OZ$  orienté suivant la verticale ascendante.
- $OX$  et  $OY$  sont deux directions perpendiculaires arbitrairement choisies dans le plan horizontal, en général  $OX$  est orienté vers le Nord et  $OY$  vers l'Est.

##### b. Le repère lié au corps du Quadrotor : $B(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$

C'est un trièdre lié au Quadrotor supposé indéformable. Il est noté  $(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$

- $O$  est l'origine, fixe par la centre de gravité du Quadrotor.

- $OZ_1$  orienté suivant la verticale ascendante.
- $OX_1, OY_1$  sont deux directions perpendiculaires lie aux la carcasse du quadrotor

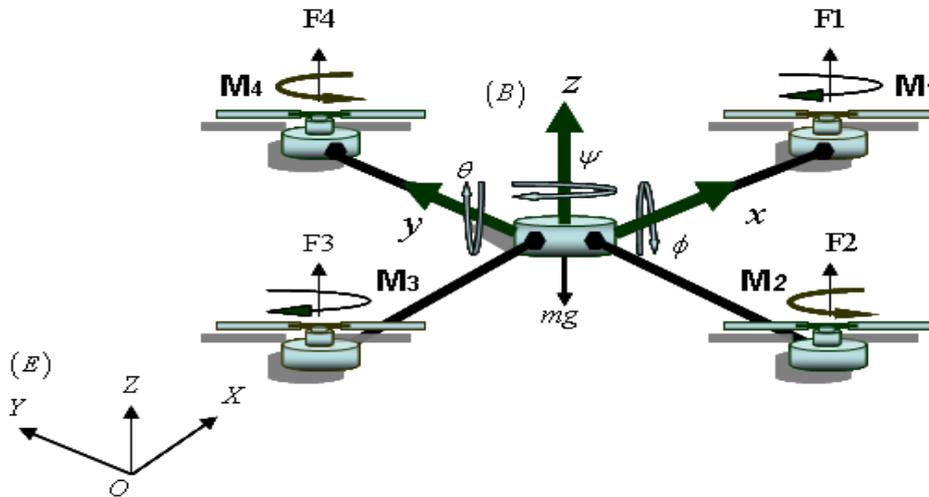


Figure II.5. Système de repères du Quadrotor

On considère que :

- $x$  : Coordonnée du centre de gravité  $O_1$  du Quadrotor suivant l'axe X
- $y$  : Coordonnée du centre de gravité  $O_1$  du Quadrotor suivant l'axe Y
- $z$  : Coordonnée du centre de gravité  $O_1$  du Quadrotor suivant l'axe Z
- $\phi$  : Angle de Roulis tel que  $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$  : Rotation autour de  $\vec{X}_1$
- $\theta$  : Angle de Tangage tel que  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  : Rotation autour de  $\vec{Y}_1$ .
- $\psi$  Angle de Lacet tel que  $-\pi < \psi < \pi$  : Rotation autour de  $\vec{Z}_1$ .

### II.4.2 Matrice de rotation

La matrice de rotation est une matrice de transformation homogène [28] reliant le repère lie à la terre au repère inertiel.

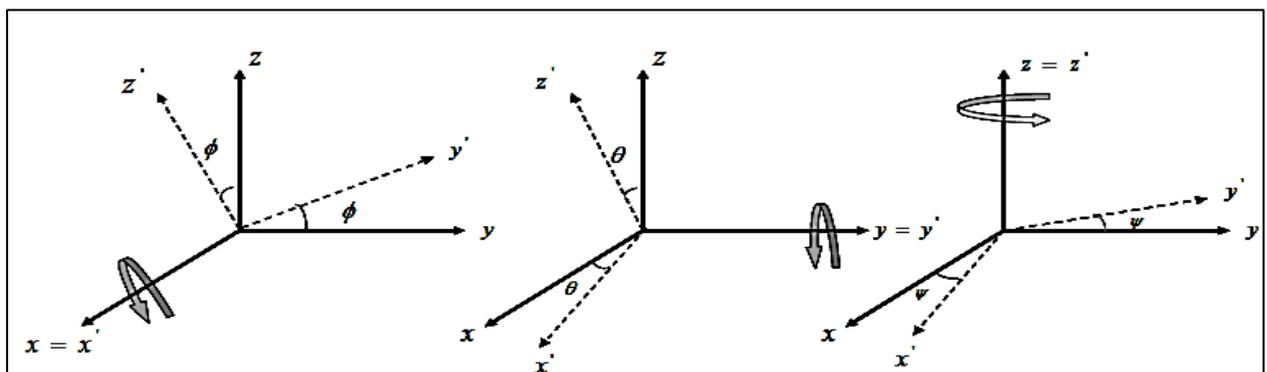
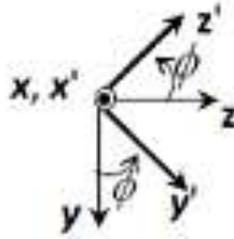


Figure II.6. Les trois rotations roulis tangage, et lacet.

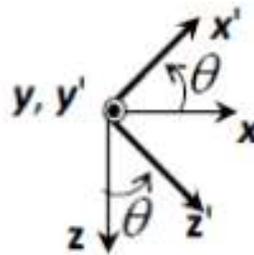
Par l'utilisation des angles d'Euler (qui sont les plus utilisés dans l'aérodynamique) on aura :

La matrice de rotation selon  $X_1$  par l'angle  $\phi$  est :



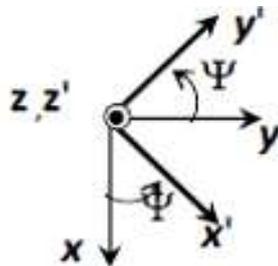
$$R(X_1, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

La matrice de rotation selon  $Y_1$  par l'angle  $\theta$  est :



$$R(Y_1, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

La matrice de rotation selon  $Z_1$  par l'angle  $\psi$  est :



$$R(Z_1, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rotation globale se traduit par le produit des trois matrices :

$$R = Rot_z(\psi) \times Rot_y(\theta) \times Rot_x(\phi) \quad (II.1)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta)\cos\psi - \sin(\psi)\cos(\phi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\psi)\sin(\phi) \\ \sin(\psi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \cos(\psi)\cos(\phi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi) \\ -\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

### II.4.3 Vitesses angulaires

Les vitesses  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  sont les vitesses angulaires exprimées dans le repère fixe tel que :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + Rot_x(\phi)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + (Rot_y(\theta) \times Rot_x(\phi))^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

En effet, la rotation en roulis a lieu lorsque les repères sont encore confondus. Puis, en ce qui concerne le tangage, le vecteur représentant la rotation doit être exprimé dans le repère fixe: il est donc multiplié par  $Rot(\phi)_x^{-1}$ . De même, le vecteur représentant la rotation en lacet doit être exprimé dans le repère fixe qui a déjà subites deux rotations. On arrive ainsi à :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\cos(\phi) \\ -\dot{\theta}\sin(\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\sin(\theta) \\ \dot{\psi}\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \dot{\psi}\cos(\phi)\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin(\theta) \\ \dot{\theta}\cos(\phi) + \dot{\psi}\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \dot{\psi}\cos(\phi)\sin(\theta) - \dot{\theta}\sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Dans le cas où le quadrirotor réalise des mouvements angulaires de faibles amplitudes :

$$\begin{cases} \cos(\phi) = \cos(\theta) = \cos(\psi) = 1 \\ \sin(\phi) = \sin(\theta) = \sin(\psi) = 0 \end{cases}$$

Donc la vitesse angulaire sera:

$$\Omega = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$$

### II.4.4 Vitesses linéaires

Les vitesses linéaires  $v_x^b, v_y^b, v_z^b$  dans le repère fixe en fonction des vitesses linéaires  $v_x^m, v_y^m, v_z^m$  dans le repère mobile sont données par :

$$V = \begin{bmatrix} v_x^b \\ v_y^b \\ v_z^b \end{bmatrix} = R \times \begin{bmatrix} v_x^m \\ v_y^m \\ v_z^m \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

R : la matrice de rotation.

#### II.4.5 Les effets physiques agissant sur le quadrirotor

##### a. Les forces

Les forces agissant sur le système sont :

- **Le poids du quadri-rotors:** il est donné par

$$P=mg$$

**m** : la masse totale.

**g** : l'accélération de la pesanteur.

- **Les forces de poussée « portance »:** qui sont des forces provoquées par la rotation des moteurs, elles sont perpendiculaires sur le plan des hélices. Ces forces sont proportionnelles au carré de la vitesse de rotation des moteurs :

$$F_i = k_p \omega_i^2 \quad (\text{II.8})$$

Avec  $i(\overline{1:4})$ ,  $k_p$  : est le coefficient de portance, il dépend de la forme et le nombre des pales et la densité de l'air.

- **Les forces de traînée « résistance » :** la force de traînée est le couplage entre une force de pression et la force de frottement visqueux, dans ce cas on a deux forces de traînée agissant sur le système :

La traînée dans les hélices: elle agisse sur les pales, elle est proportionnelle à la densité de l'air, a la forme des pales et au quart de la vitesse de rotation de l'hélice, elle est donnée par la relation suivant:

$$T_i = k_d \omega_i^2 \quad (\text{II.9})$$

Avec  $i(\overline{1:4})$ ,  $d$  : est le coefficient de traînée.

La traînée selon les axes (x, y, z) : elle est due au mouvement du corps du quadrirotor

$$F_t = K_{ft} v \quad (\text{II.10})$$

$K_{ft}$ : Le coefficient de force de traînée de translation.

v: La vitesse linéaire

## b. Les moments

Il y a plusieurs moments agissant sur le quadrotor, ces moments sont dus aux forces de poussée et de traînée et aux effets gyroscopiques.

- **Moments dus aux forces de poussée des hélices :**

La rotation autour de l'axe x : elle est due au moment créé par la différence entre les forces de portance des rotors 2 et 4, ce moment est donné par la relation suivante :

$$M_x = d(F_4 - F_2) = dk_p(\omega_4^2 - \omega_2^2) \quad (\text{II.11})$$

d: est la distance entre le centre de masse du quadrotor et l'axe de rotation du rotor.

La rotation autour de l'axe y : elle est due au moment créé par la différence entre les forces de portance des rotors 1 et 3, ce moment est donné par la relation suivante :

$$M_y = d(F_3 - F_1) = dk_p(\omega_3^2 - \omega_1^2) \quad (\text{II.12})$$

- **Moments dus aux forces de traînée des hélices :**

La rotation autour de l'axe z : elle est due à un couple réactif provoqué par les couples de traînée dans chaque hélice, ce moment est donné par la relation suivante :

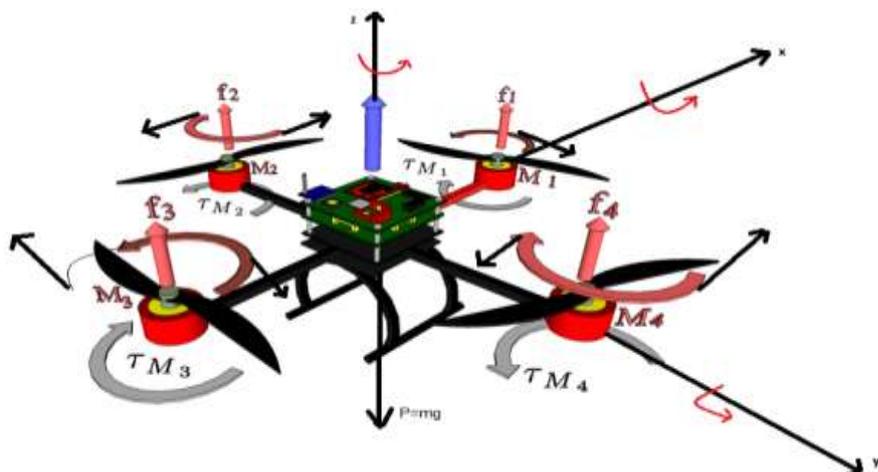
$$M_z = k_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (\text{II.13})$$

- **Moment résultant des frottements aérodynamiques :** il est donné par :

$$M_a = K_{fa}\Omega^2 \quad (\text{II.14})$$

$K_{fa}$ : Le coefficient des frottements aérodynamiques.

$\Omega$  : est la vitesse angulaire.



**Figure II.7.** Les forces et les moments agissant sur le quadrotor

### c. Effet gyroscopique

L'effet gyroscopique se définit comme la difficulté de modifier la position ou l'orientation du plan de rotation d'une masse tournante. L'effet gyroscopique est ainsi nommé en référence au mode de fonctionnement du gyroscope, appareil de contrôle de mouvement utilisé dans l'aviation (du grec gyro qui signifie rotation et scope, observer). Dans notre cas il y a deux moments gyroscopiques, le premier est le moment gyroscopique des hélices, l'autre est le moment gyroscopique dû aux mouvements de quadrirotor.

- **Moment gyroscopique des hélices:** il est donné par la relation suivante :

$$M_{gh} = \sum_{i=1}^4 \Omega \wedge J_r [0 \quad 0 \quad (-1)^2 w_i]^T \quad (\text{II.15})$$

Avec :  $J_r$  est l'inertie des rotors.

- **Moment gyroscopique dû aux mouvements de quadrirotor :** il est donné par la relation suivante:

$$M_{gm} = \Omega \wedge J \Omega \quad (\text{II.16})$$

Avec :  $J$  est l'inertie du système

## II.5 Hypothèses du modèle

Afin de présenter les effets physiques agissants sur le quadrirotor, les hypothèses suivantes sont Considérées :

- La structure du quadrirotor est supposée rigide et symétrique d'où l'hypothèse que la matrice d'inertie est diagonale.
- Les hélices sont supposées rigides pour pouvoir négliger l'effet de leur déformation lors de la rotation.
- Le repère lié à cette structure est généralement supposé confondu avec son centre de gravité, cela nous emmène à considérer la dynamique du quadrirotor comme celle d'un corps rigide dans l'espace.
- Les forces de portance et de traînée sont proportionnelles aux carrés de la vitesse de rotation des rotors ce qui est une approximation très proche du comportement aérodynamique.
- Les conditions atmosphériques sont la condition standard de pression et de température.

## II.6 Développement du modèle selon le formalisme de Newton-Euler

Après avoir décrit les différentes équations on peut maintenant élaborer le modèle mathématique en utilisant la formulation de Newton-Euler, les équations sont écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m \frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum F = F_f + F_t + F_g \\ J \frac{d\Omega}{dt} = \sum M = M_f - M_{gm} - M_{gh} - M_a \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Avec :

$\xi$  : Est le vecteur de position du quadrirotor  $\xi = [x \ z \ y]^T$ .

$m$  : la masse totale du quadrirotor.

$J$  : matrice d'inertie symétrique de dimension (3x3), elle est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

$\Omega$  : La vitesse angulaire exprimée dans le repère inertiel « fixe ».

$R$  : La matrice de rotation.

$\wedge$  : Le produit vectoriel.

$F_f$  : est la force totale générée par les quatre rotors, elle est donnée par :

$$F_f = R \times [0 \ 0 \ \sum_{i=1}^4 F_i]^T \quad (\text{II.18})$$

$$F_i = k_p \omega_i^2$$

$F_t$  : la force de traînée selon les axes (x, y, z), elle est donnée par :

$$F_t = \begin{bmatrix} -K_{ftx} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{fty} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{ftz} \end{bmatrix} \times \dot{\xi} \quad (\text{II.19})$$

$K_{ftx}$ ,  $K_{fty}$ ,  $K_{ftz}$  : Les coefficients de traînée de translation.

$F_g$  : force de gravité, elle est donnée par :

$$F_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

$M_f$ : moment provoqué par les forces de poussée et de traînée.

$$M_f = \begin{bmatrix} d(F_4 - F_2) \\ d(F_3 - F_1) \\ k_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

$M_a$ : moment résultant des frottements aérodynamiques, il est donnée par :

$$M_a = \begin{bmatrix} K_{fax}\dot{\phi}^2 \\ K_{fay}\dot{\theta}^2 \\ K_{faz}\dot{\psi}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

$K_{fax}$ ,  $K_{fay}$ ,  $K_{faz}$ : Les coefficients des frottements aérodynamiques.

$M_{gh}$ : Moment gyroscopique des hélices.

$$M_{gh} = \sum_{i=1}^4 \Omega \wedge J_r [0 \quad 0 \quad (-1)^2 \omega_i]^T \quad (\text{II.23})$$

Avec :  $J_r$  est l'inertie des rotors.

$M_{gm}$ : Moment gyroscopique dû aux mouvements de quadrirotor.

$$M_{gm} = \Omega \wedge J \Omega \quad (\text{II.24})$$

## II.7 Dynamique de rotor

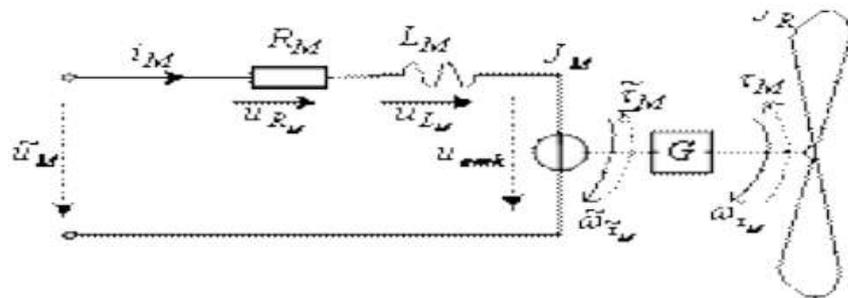


Figure II.8. Système de propulsion

Le rotor est un ensemble constitué d'un moteur à courant continu entraînant une hélice via un réducteur ; le moteur à courant continu est régi par les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} V = ri + L \frac{di}{dt} + k_e \omega \\ k_m i = J_r \frac{d\omega}{dt} + C_s + k_r \omega^2 \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Les différents paramètres du moteur sont définis comme suit :

$V$  : est la tension d'entrée du moteur.

$\omega_i$  : est la vitesse angulaire du rotor.

$k_e, k_m$  : représentent respectivement les constantes des couples électrique et mécanique.

$k_r$  : Est la constante du couple de charge.

$r, L$  : La résistance du moteur et l'inductance.

$J_r$  : L'inertie du rotor.

$C_s$  : représente le frottement sec.

$$\dot{\omega}_1 = bV_i - \beta_0 - \beta_1\omega_i - \beta_2\omega_i^2, i \in [1,4] \quad (\text{II.26})$$

Avec :

$$\beta_0 = \frac{C_s}{J_r}, \beta_1 = \frac{k_e k_m}{r J_r}, \beta_2 = \frac{k_r}{J_r}, b = \frac{k_m}{r J_r}$$

## II.8 Equations de mouvement

### II.8.1 Équations de mouvement de translation

On a :

$$m\ddot{\xi} = F_f + F_t + F_g$$

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\psi)\sin(\phi) \\ \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i - \begin{bmatrix} K_{ftx}\dot{x} \\ K_{fity}\dot{y} \\ K_{ftz}\dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

On obtient alors les équations différentielles qui définissent le mouvement de translation :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} + (\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\psi)\sin(\phi))(\sum_{i=1}^4 F_i) - \frac{K_{ftx}}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} + (\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi))(\sum_{i=1}^4 F_i) - \frac{K_{fity}}{m}\dot{y} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} + (\cos(\phi)\cos(\theta))(\sum_{i=1}^4 F_i) - \frac{K_{ftz}}{m}\dot{z} - g \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

### II.8.2 Équations de mouvement de rotation

On a :

$$J\dot{\Omega} = -M_{gm} + M_f - M_a - M_{gh} \quad (\text{II.29})$$

On remplace chaque moment par la formule correspondant, on trouve :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \wedge \left( \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} db(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ db(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ [k_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{fax}\dot{\phi}^2 \\ K_{fay}\dot{\theta}^2 \\ K_{faz}\dot{\psi}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_r\Omega_r\dot{\theta} \\ -J_r\Omega_r\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On obtient alors les équations différentielles définissant le mouvement de rotation :

$$\begin{cases} I_x \ddot{\phi} = -\dot{\theta}\dot{\psi}(I_z - I_y) - K_{fax}\dot{\phi}^2 - J_r \Omega_r \dot{\theta} + db(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ I_y \ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x) - K_{fay}\dot{\theta}^2 + J_r \Omega_r \dot{\phi} + db(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ I_z \ddot{\psi} = -\dot{\phi}\dot{\theta}(I_y - I_x) - K_{faz}\dot{\psi}^2 + k_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

À signaler que  $u_1, u_2, u_3, u_4$  sont les entrées de commande (de translation selon l'axe « x, y, z » et la rotation selon lacet). Du système et qui s'écrivent en fonction des vitesses angulaires des quatre rotors comme suit :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p & k_p & k_p & k_p \\ 0 & -dk_p & 0 & dk_p \\ -dk_p & 0 & dk_p & 0 \\ k_d & -k_d & k_d & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

- $u_1$  est la poussée des quatre rotors défini par :  $u_1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ .
- $u_2$  est la différence de poussée entre le rotor gauche et le rotor droit :  $u_2 = F_3 - F_1$ .
- $u_3$  est la différence de poussée entre le rotor avant et le rotor arrière :  $u_3 = F_4 - F_2$ .
- $u_4$  est la résultante des couples fournis par les quatre rotors :  $u_4 = k_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)$

Et :  $\Omega_r = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$

En conséquence, le modèle dynamique complet qui régit le quadrotor est le suivant :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{(I_y - I_z)}{I_x} \dot{\theta}\dot{\psi} - \frac{J_r}{I_x} \Omega_r \dot{\theta} - \frac{K_{fax}}{I_x} \dot{\phi}^2 + \frac{d}{I_x} u_2 \\ \ddot{\theta} = \frac{(I_z - I_x)}{I_y} \dot{\phi}\dot{\psi} - \frac{J_r}{I_y} \Omega_r \dot{\phi} - \frac{K_{fay}}{I_y} \dot{\theta}^2 + \frac{d}{I_y} u_3 \\ \ddot{\psi} = \frac{(I_x - I_y)}{I_z} \dot{\theta}\dot{\phi} - \frac{K_{faz}}{I_z} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{I_z} u_4 \\ \ddot{x} = -\frac{K_{ftx}}{m} \dot{x} + \frac{1}{m} u_x u_1 \\ \ddot{y} = -\frac{K_{fty}}{m} \dot{y} + \frac{1}{m} u_y u_1 \\ \ddot{z} = -\frac{K_{ftz}}{m} \dot{z} - g + \frac{\cos \phi \cos \psi}{m} u_1 \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Avec :

$$\begin{cases} u_x = (\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi) \\ u_y = (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

## II.9 Représentation d'état

Pour un système physique il existe une multitude de représentations d'état, dans notre cas on considère  $X = [x_1 \dots \dots x_{12}]^T$  comme vecteur d'état du système :

Soit :

$$\underline{X} = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}]^T$$

Le vecteur de sortie :

$$Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_6]^T = [\varphi \ \theta \ \psi \ x \ y \ z]^T$$

Le vecteur d'entrée :

$$U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$$

À partir des équations dynamiques (II.31) on obtient la représentation dans l'espace d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, U) \\ Y = h(X) \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ a_1 x_4 x_6 + a_2 x_2^2 + a_3 \Omega_r x_4 + b_1 u_2 \\ x_4 \\ a_4 x_2 x_6 + a_5 x_4^2 + a_6 \Omega_r x_2 + b_2 u_3 \\ x_6 \\ a_7 x_2 x_4 + a_8 x_6^2 + b_3 u_4 \\ x_8 \\ a_9 x_8 + \frac{u_x}{m} u_1 \\ x_{10} \\ a_{10} x_{10} + \frac{u_y}{m} u_1 \\ x_{12} \\ a_{11} x_{12} - g + \frac{\cos x_1 \cos x_3}{m} u_1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.35})$$

$$a_1 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}, a_2 = -\frac{K_{fax}}{I_x}, a_3 = -\frac{J_r}{I_x}, a_4 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}, a_5 = -\frac{K_{fay}}{I_y}, a_6 = -\frac{J_r}{I_y},$$

$$a_7 = \frac{(I_x - I_y)}{I_z}, a_8 = -\frac{K_{faz}}{I_z}, a_9 = -\frac{K_{ftx}}{m}, a_{10} = -\frac{K_{fty}}{m}, a_{11} = -\frac{K_{ftz}}{m},$$

$$b_1 = \frac{d}{I_x}, b_2 = \frac{d}{I_y}, b_3 = \frac{1}{I_z}$$

## II.10 Conclusion

Dans ce chapitre, on a décrit les mouvements de base du Quadrotor et leur principe de fonctionnement. Puis on a donné un modèle dynamique de notre système par le formalisme de Newton-Euler. Un quadrirotor est un avion qui serait aéroporté par la force de poussée produite à partir de quatre rotors. Ceux-ci sont disposés diagonalement d'où le nom quadrirotor, Ce système est constitué de quatre rotors, deux de ces rotors tournent dans un sens et les deux autres dans le sens inverse. En variant les vitesses de rotation de ces rotors, le quadrirotor peut faire des mouvements différents aussi bien en translation qu'en rotation.

Le modèle comprend presque tous les phénomènes physiques agissant sur le Quadrotor. Ce dernier modèle montre la nature couplée, complexe, non linéaire, multi variable et le sous-actionné du Quadrotor, ce qui rend son contrôle relativement difficile, et l'interaction entre les états du système, peuvent se voir clairement.