

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Ouvrage d'Art et Infrastructure

Présenté par :

- sedouki houssein
- cheikh beladel redouan

Sujet du mémoire

**Contribution a l'étude du comportement des
plaques isotropes on (AL/AL_2O_3) sous
différent chargement**

Soutenu publiquement le 05/06/2016 devant le jury composé de :

M. Cheikh.A

Rapporteur

M.Hebali.H

Examineur

M.Krim .

président

PROMOTION : 2016/2017

Remerciements

J'adresse tout d'abord mes remerciements les plus sincères, au Dr. Mrad MAALOUF, qui a très volontiers accepté d'être le promoteur de ce projet. Sa grande connaissance dans le domaine, ainsi que son expérience, ont joué un rôle important dans la conception de ce travail.

La sollicitude du Dr. Samir MEDAWAR, Directeur du programme de DEA, au cours de cette année, m'a profondément touché. L'aboutissement de ce travail me donne l'occasion de lui exprimer ma très sincère reconnaissance.

Mes remerciements s'adressent également à l'Ing. Fayez ARAJI, Directeur de l'Unité des Centres de Collecte du Lait dans la Békaa. Son judicieux concours, dans les différentes étapes du projet, a contribué grandement à l'élaboration de ce travail.

J'associe volontiers, les Drs. Hassan MACHLAB et Fouad MAALOUF dans l'expression de ma reconnaissance, pour leurs supports dans l'étude et l'analyse statistiques des données récoltées, ainsi que le Dr. Ghaleb MOURAD pour sa collaboration vétérinaire.

Je me sentirais coupable d'ingratitude si je ne remerciais pas Dr. Pierre WITTOUCK s.j., pour ses précieux conseils, ainsi que pour la lecture critique de ce mémoire.

Que M. Mohammed SALEH, qui nous a accueillis dans sa ferme, pendant 70 jours, et l'ensemble du personnel du « Centre de Collecte du Lait » à Bar Elias qui, à des titres divers, a contribué à la réussite de l'expérimentation, trouvent ici, le gage de mon infinie gratitude.

Résumé :

Dans le présent travail une théorie simple de déformation par cisaillement de premier ordre pour l'analyse de flexion et de vibration libre de plaques fonctionnellement graduées. Contrairement à la théorie classique de la déformation par cisaillement de premier ordre, la présente théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre contient seulement quatre inconnues et à de fortes similitudes avec la théorie des plaques classique dans de nombreux aspects tels que les équations de mouvement, les conditions aux limites et les expressions résultantes du contrainte. Les équations de mouvement et les conditions aux limites sont dérivées du principe de Hamilton. On obtient des solutions de forme fermée des plaques simplement supportées et on compare les résultats aux solutions 3D et quasi-3D exactes et à celles prédites par d'autres théories des plaques. Des études de comparaison montrent que la présente théorie peut obtenir la même précision de la méthode classique théorie de la déformation en cisaillement de premier ordre qui à plus de nombre d'inconnues.

Abstract :

In the present work a simple theory of first order shear deformation for the bending and free vibration analysis of functionally graduated plates. In contrast to the classical theory of first-order shear deformation, the present theory of first-order shear deformation contains only four unknowns and has strong similarities to classical plate theory in many aspects such as motion equations , Boundary conditions, and resulting constraint expressions. The equations of motion and the boundary conditions are derived from the Hamilton principle. Closed-form solutions of simply supported plates are obtained and the results are compared to exact 3D and quasi-3D solutions and to those predicted by other plate theories. Comparison studies show that the present theory can obtain the same accuracy from the classical theory of first-order shear deformation that has more number of unknowns.

ملخص:

في العمل الحالي نظرية بسيطة تشوه من الأول القص أجل تحليل الانحناء والاهتزاز الحرة لوحات متدرج وظيفيا. وخلافا للنظرية الكلاسيكية للتشوه أول أمر القص، وهذه النظرية من تشوه القص من الدرجة الأولى تحتوي على أربعة فقط المجهولة والتشابه القوية مع النظرية الكلاسيكية لوحات في العديد من الجوانب مثل معادلات الحركة والشروط الحدية وما نتج عنه من تعبيرات الجبرية. وتستمد معادلات الحركة وشروط الحدود من مبدأ هاملتون. نحصل على حلول النموذج مغلقة لوحات بدعم ببساطة ومقارنة النتائج إلى D3 و D3 الظاهري دقيقة وتلك التي تنبأ بها لوحات نظريات أخرى. وتظهر الدراسات المقارنة أن هذه النظرية يمكن تحقيق نفس دقة طريقة نظرية الكلاسيكية من سلالة القص الدرجة الأولى أكثر من عدد من المجاهيل.

LISTE DES FIGURES

Chapitre I :Recherche bibliographique sur les matériaux à gradients de propriétés.

Figure I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.	5
Figure. I.2 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. (Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004)).	6
Figure. I.3 : Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite). (Watari F et al. (2004)).....	7
Figure. I.4 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi. M (1996)).....	8
Figure. I.5 : résultats importants du programme de recherche de 1987-1991 sur « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques pour les matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées ».	10
Figure. I.6 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie (Ichiro chiota (1996)).	12
Figure. I.7 : (a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C (Ichiro chiota (1996)).	13
Figure. I.8 : changements microstructuraux de l'émetteur gradué en TiC/Mo W/Re (Ichiro chiota (1996)).	14
Figure. I.9 : Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois-couches (Ichiro chiota (1996)).	15
Figure.I.10 : Photo des électrodes symétriques graduées de MoSi ₂ /Al ₂ O ₃ /Ni/Al ₂ O ₃ /MoSi ₂ fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe (Ichiro chiota (1996)).....	16
Figure. I.11 : schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W (Ichiro chiota (1996)).....	18
Figure I.12 : La relation entre la conduction thermique et l'émissivité (Ichiro chiota (1996)).	18

Figure. I.13 : Processus de traitement des Poudre pour les FGM (Hirai T. and Chen L. (1999), Chan S.H. (2001), Uemura S. (2003)).	20
Figure. I.14 : Procédé électro phorétique de dépôt pour des matériaux de FGM (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)).	22
Figure.I.15 : Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque (Al_2O_3/ZrO_2) (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)).	23
Figure.I.16 : Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)).	24
Figure.I.17 : (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans Al_2O_3/ ZrO_2 (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)).	24
Figure. I.18 : Principe de la méthode coulage en bande.	29
Figure I.19 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.	32
Figure I.20 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh H (1997)).	33
Figure.I.21 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.	36
Figure I.22 : Les dimensions de la plaque FGM.	37
Figure I.23 : La variation de la fraction volumique pour une plaque P-FGM.	38
Figure I. 24 : La variation de la fraction volumique pour une plaque S-FGM.	40
Figure I. 25 :La variation du module de Young de la plaque E-FGM.	41
<u>Chapitre II</u> :Généralités sur les théories des plaques.	
Figure. II. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.	42
Figure. II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.	44
Figure. II.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant	45
Figure .II.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.	46
Figure. II.5 : Champs de déplacements des cinématique. Viet.Tung. Nguyen (2004)modèles couches discrètes, approche	49
Figure. II.6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. Viet.Tung. Nguyen (2004)	49

Figure. II.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. Viet.Tung. Nguyen (2004)..... 50

Figure. II.8 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. Viet.Tung. Nguyen (2004)..... 51

Chapitre III : Développement mathématique

Figure. III.1 : géométrie et les coordonnées d'une plaque isotrope en FG.

Chapitre IV :Résultats et discussions.

Figure IV.1 : FigureIV.1 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque carrée isotrope en Al/Al_2O_3 sous une charge sinusoïdale par rapport à l'indice de la loi de puissance P ($a = 5h$).....70

Figure IV.2 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque carrée isotrope en Al/Al_2O_3 sous une charge sinusoïdale versus rapport d'épaisseur a/h70

Figure. IV.3 : Variation des contraintes adimensionnel à travers l'épaisseur d'une plaque carrée isotrope Al/Al_2O_3 sous chargement uniforme ($a=b=10h, P=2$).76

Liste des abréviations, symboles et notations

Nous donnons ci-dessous les principales notations, symboles et abréviations utilisées dans cette mémoire.

FGM : Les matériaux à gradient de propriétés.

STA : Laboratoire national d'aérospatial.

VER : Volume élémentaire représentative.

CVD : Le dépôt chimique en phase vapeur.

PVD : Le dépôt physique en phase vapeur.

BID : Le processus de mélange à sec roue.

ENPC : Ecole nationale des ponts et chaussées.

2D, 3D : Bidimensionnelle et tridimensionnelle respectivement.

E : Le module de Young.

E(z) : Module de Young en fonction de « z ».

E_c : Module de Young de la céramique.

E_m : Module de Young du métal.

G : Le module de cisaillement.

G(z) : Module de cisaillement en fonction de « z ».

ν : Le coefficient de Poisson.

$\nu(z)$: Coefficient de Poisson en fonction de « z ».

V : La fraction volumique.

ρ : La masse volumique.

α : Le coefficient de dilatation thermique.

P_c et P_m sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement.

p : Paramètre du matériau (l'exposant de la fraction volumique qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro).

a : Longueur de la plaque suivant la direction de x.

b : Largeur de la plaque suivant la direction de y.

h : l'épaisseur de la plaque suivant la direction de z.

a/h : L'élancement.

u, v, w_b, w_s Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α .

w : La flèche de la plaque.

$w_{,\alpha}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α .

γ_α^0 : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

$f(x_3)$ où bien $f(z)$: La fonction de gauchissement suivant l'épaisseur de la plaque.

∂ : Dérivée partielle.

i et j Sont des nombres naturels.

ϕ_x, ϕ_y , Les rotations autour des axes x, y

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ Déformation dans la direction x, y

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Les contraintes normales.

γ_{xz}, γ_{yz} : Les déformation de cisaillement.

τ_{xz}, τ_{yz} : les contraintes de cisaillement.

$T(z)$: Un champ de température (Chargement thermique).

T_0 : La température de référence.

Q_{ij} : Les coefficients de rigidité.

Ω : La surface supérieure de la plaque.

f_e : La densité de la force de réaction de la fondation.

K_w : Le module de réaction du sol-fondation (coefficient d'élasticité de la fondation).

N, M , et S : Les résultantes des contraintes.

A_{ij}, B_{ij} , etc : les termes de la matrice de rigidité de la plaque.

$[K]$: La matrice symétrique.

$\{ \}$: Vecteur colonne.

$[]$: Matrice.

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre IV : Résultats et discussions.

Tableau IV.1 : Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG.....70.

Tableau IV.2 : Contrainte et déformation adimensionnelles des plaques carrées isotropes Al / Al₂O₃ sous des charges sinusoïdales.....71

Tableau IV.3 : flèche et contrainte adimensionnelle des plaques carrées isotropes Al/Al₂O₃ sous charges uniformes (m, n = 50 séries de termes, a/h=10).....74

Tableau IV.4 : Fréquence fondamentale sans dimension $\bar{\beta}$ de plaques carrées isotropes Al/ZrO₂.....76

Tableau IV.5 : Les deux premières fréquences additionnelles $\hat{\omega}$ des plaques carrées isotropes Al/Al₂O₃.....76.

Tableau IV.6 : Fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques rectangulaires isotropes Al/Al₂O₃ (b=2a).....79.

Résumé.....	I
Abstract.....	II
ملخص.....	III
Liste des tableaux.....	IV
Liste des figures	V
Liste des abréviations, symboles et notations.....	VIII
Introduction générale	1

Chapitre I : Recherche bibliographique sur les matériaux à gradients de propriétés

I.1. Introduction :.....	4
I.2. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés :.....	4
I.3. Histoire du développement architectural du concept FGM :	7
I.3.1. Pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire et de la dureté) :.....	8
I.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique) :.....	11
I.3.2.1. La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC :.....	12
I.4. Nouveaux procédés pour le traitement des FGM :.....	18
I.4.1. Processus de formation et de consolidation des FGM :	19
I.4.2. Densification des poudres compactes pour FGM :	24
I.5. L'intérêt d'utilisation des FGM :.....	27
I.6. Méthodes d'élaboration des FGM :.....	27
I.6.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :.....	28
I.6.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :.....	29
I.6.3. Compaction Sèche des Poudres :	30
I.6.4. Dépôt par Électrophorèse :.....	30
I.6.5. Projection Plasma :.....	30
I.6.6. C. V. D. et P. V. D :	31
I.6.7. Frittage et Infiltration :.....	31
I.6.8. Frittage Laser Différentiel :.....	31
I.6.9. Implantation Ionique :	32
I.6.10. Dépôt par Centrifugation :	32
I.7. Propriétés physiques et mécaniques des FGM :.....	33
I.7.1. Propriétés physiques du métal :.....	33
I.7.2. Propriétés physiques de la céramique :	34

I.8. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM :	35
I.9. revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM.....	36
I.9.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :	37
I.9.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :	39
I.9.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :	40
I.10. Conclusion :	41

Chapitre II : Généralités sur les théories des plaques

II.1. Introduction :	43
II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles :	44
II.2.1. Approche monocouche équivalente :	44
II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT) :	44
II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT) :	45
II.2.1.3. Les modèles d'ordre supérieur :	47
II.2.2. Approche par couche :	50
II.2.2.1. Les modèles zig-zag :	51
II.2.2.2. Les modèles couches discrètes :	53
II.3. Conclusion :	55

Chapitre III

III.1 Introduction :	57
III.2 Formulation théorique :	57
III.3 Solutions analytiques :	65
III.4 Conclusion :	67

Chapitre IV

IV.1 Introduction :	69
IV.2 Résultats numériques :	69

IV.2.1 Analyse de flexion :	69
IV.2.2 Analyse de vibration libre :	73
IV.3 Conclusion :	80
Conclusion général	82
Références Bibliographiques	
Sommer	

Introduction générale

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés du matériau d'une surface à l'autre et éliminent ainsi la concentration de contrainte dans les composites stratifiés. Les FGM sont largement utilisés dans de nombreuses applications structurelles telles que la mécanique, le génie civil, l'aérospatiale, le nucléaire et l'automobile.

En collaboration avec l'augmentation de l'application de la FGM dans les structures d'ingénierie, de nombreux modèles de calcul ont été développés pour prédire la réponse des plaques à gradient fonctionnel (FG). Ces modèles peuvent être développés en utilisant des théories basées sur le déplacement (lorsque le principe du travail virtuel est utilisé) ou des théories basées sur le déplacement-contrainte (lorsque le théorème variationnel mixte de Reissner est utilisé).

En général, ces théories peuvent être classées en trois catégories principales:

1. la théorie classique des plaques (CPT);
2. Théorie de la déformation du cisaillement de premier ordre (FSDT);
3. Et la théorie de la déformation du cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

La théorie classique des plaques (CPT), qui néglige les effets de déformation du cisaillement transversal, fournit des résultats précis pour les plaques minces ([Javaheri]-[Bodaghi]). Pour les plaques modérément épaisses, elle sous-estime les déflexions et surestime les charges de flambement et les fréquences naturelles.

La théorie de la déformation du cisaillement de premier ordre (FSDT) tient compte de l'effet de déformation en cisaillement transversal, mais nécessite un facteur de correction du cisaillement pour satisfaire les conditions de contrainte de cisaillement transversal libre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque ([Della]- [Hosseini (a)]). Bien que la (FSDT) fournisse une description suffisamment précise de la réponse pour les plaques minces à modérément épaisses, il n'est pas commode d'utiliser en raison de la difficulté à déterminer la valeur correcte du facteur de correction du cisaillement.

Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, de nombreux HSDT ont été développés en fonction de l'hypothèse de variations quadratiques, cubiques ou d'ordre supérieur des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur de la plaque, parmi lesquels [Reddy] , [Karama] , [Zenkour] , [Xiao] , [Matsunaga], [Pradyumna et Bandyopadhyay] [Fares] , [Talha et Singh] , [Benyoucef] , [Atmane] , [Meiche] , [Mantari] , [Xiang]

Parmi les HSDT susmentionnés, les HSDT bien connus avec cinq inconnus comprennent: la théorie de [Reddy] , la théorie de la déformation du cisaillement sinusoïdal ([Zenkour (a)]-[Zenkour (c)]), la théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique [23-24], la théorie exponentielle de la déformation du cisaillement ([Karama] , [Mantari]). Bien que les HSDT avec cinq inconnus soient suffisamment précis pour prédire la réponse de la plaque mince à épaisse, leurs équations de mouvement sont beaucoup plus compliquées que celles de FSDT et CPT. Par conséquent, il existe une possibilité de développer un HSDT qui est simple à utiliser.

Ce travail vise à une contribution pour développer une simple théorie de la déformation du cisaillement sinusoïdal pour les analyses de flexion, de flambement et de vibration des plaques FG. Cette théorie repose sur l'hypothèse que les déplacements dans le plan et transversal sont constitués de parties de flexion et de cisaillement.

Contrairement à la théorie conventionnelle de déformation du cisaillement sinusoïdal ([Zenkour (a)]-[Zenkour (c)]), la théorie de la déformation du cisaillement sinusoïdale proposée contient quatre inconnues et a de fortes similitudes avec le CPT dans de nombreux aspects tels que les équations de mouvement, les conditions aux limites et les expressions résultantes des contraintes.

On suppose que les propriétés des matériaux de la plaque FG varient en fonction de la répartition de la fraction de volume des constituants selon la loi de puissance.

Les équations de mouvement découlent du principe de Hamilton. Les solutions exactes sont obtenues pour les plaques simplement supportées.

Des exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie proposée pour prédire les réponses de flexion, de flambement et la vibration libre des plaques FG.

Il convient de souligner que [Merdaci], [Ameur], [Tounsi] a récemment développé une théorie similaire à celle actuelle. Cependant, leurs travaux ne sont limités qu'à des problèmes de flexion

I.1. Introduction :

Les matériaux à des gradients évalués FGM représentent un des derniers développements, la révolution et la conception de ces matériaux a été défini au 21ème siècle. Ils sont utilisés pour des emplois à une large variété d'applications.

L'amélioration des performances des pièces structurales peut conduire à chercher au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace par exemple pose alors le problème de l'interface, par exemple une couche d'un matériau céramique peut collé à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une fortes concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration.

Une façon pour surmonter ces effets nuisibles on doit employer un matériau à gradient de propriétés (de l'anglicisme *functionally graded materials* (FGM)).

Ces dernières années, les matériaux à gradient de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et sont capables de résister aux températures des plus chaudes.

Au début les FGM ont été conçus en tant que matériaux de barrière dans les applications et les réacteurs, c'est par suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, automobile, biomédicale l'industrie des semi-conducteurs et toutes utilisations dans un environnement à haute température.

I.2. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés :

Un matériau a gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatif à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans

interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces matériaux FGMs sont généralement fait à partir d'un mélange de métaux et de céramique (**figure I.1**) par un processus de métallurgie de poudre, le coté métal riche est typiquement placé dans les régions ou les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. En revanche, la céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est place dans les régions de grand gradient de la température.

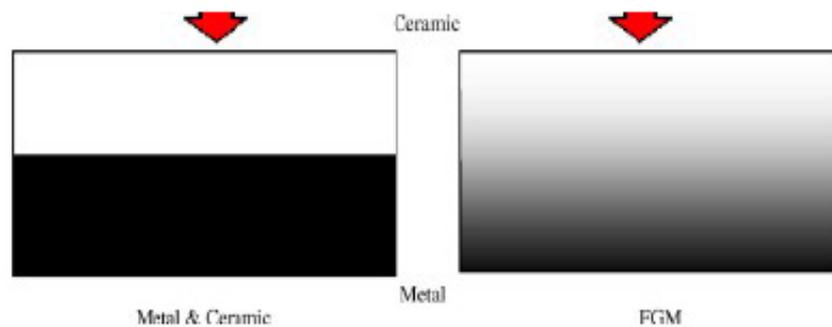


Figure I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Hirai T. and Chen L. (1999), Chan S.H. (2001), Uemura S. (2003)). Un exemple d'un tel matériau est montré sur la **figure I.2** (Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004)) où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope.

En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en remédient aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations de contraintes thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (functionally graded material) typique est un composé non homogène constitué de différentes

phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, en vue d'atténuer les singularités prédites ci-dessous.

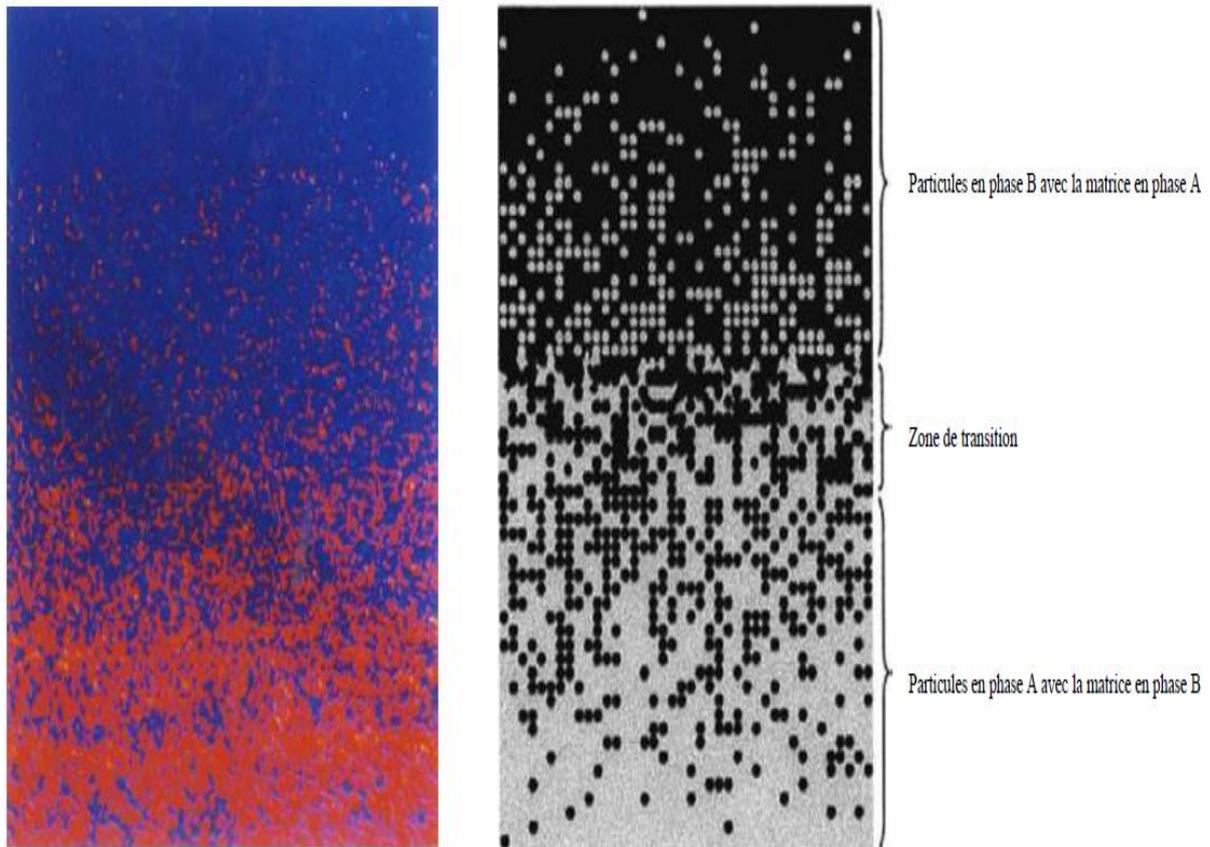


Figure. I.2 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. (Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004)).

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques, etc... (Viet.Tung. Nguyen (2004)). D'autres Applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses. Elles ont été, récemment, rapporté dans la littérature ouverte ; par exemple, des sondes (Müller E., Drašar C., Schilz J., and Kaysser W.A. (2003)), des déclencheurs (Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., and Du H. (2003)), des armures métal/céramique (Liu L.-S., Zhang Q.-J., and Zhai P.-C. (2003)), des détecteurs photoélectriques (Paszkievicz B et al. (2008)) et des implants dentaires (Watari F et al. (2004)). Un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériau ont été édités pendant les deux dernières décennies (Fuchiyama T et al. (1995), Markworth A et al.

(1995), Tanigawa Y et al. (1995), Noda N. (1999), Paulino G et al (2003)). Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques (Hui- shen (2009)).

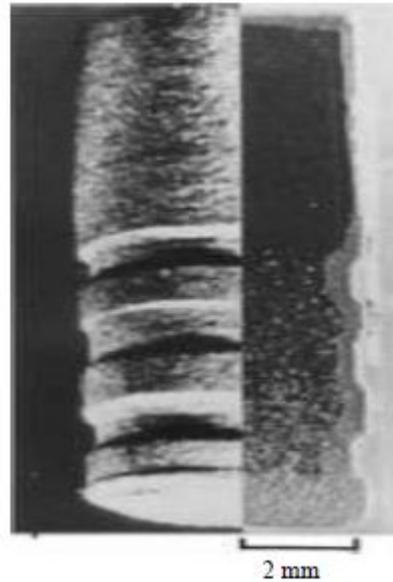


Figure. I.3 : Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite). (Watari F et al. (2004))

Un aperçu complet sur l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration des plaques et des structures en coques faites en FGM a été présenté par Shen (2004).

Récemment, Birman et Byrd (2007) ont présentés une étude sur les principaux développements dans ces matériaux en traitant plusieurs problèmes à savoir : le transfert de chaleur, la distribution des contraintes, la stabilité, l'analyse dynamique, les essais, la fabrication et la conception, la rupture et les différentes applications du matériau à gradient de propriétés.

I.3. Histoire du développement architectural du concept FGM :

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme c'est illustré dans la **figure. I.4** (Koizumi. M (1996)). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans

certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch. P Chartier. Huttepain. M (1986)).

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibre ◇*</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure. I.4 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi. M (1996))

I.3.1. Pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire et de la dureté) :

La véritable lancée de ce matériau à commencer en 1987. À cette époque-là, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un budget total de 1.215 millions de Yens sous l'auspice de l'agence des sciences et technologie. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme

barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux travaillent à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C.

A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trente organisations de recherches entre instituts, universités et compagnies nationales ont participé au programme en tant que membres des trois importants ateliers « conception, traitement et évaluation ». Le souci était de développer l'architecture fondamentale des FGM ainsi que leurs applications.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

1. Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
2. Ténacité du matériau côté basse température.
3. Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau (Abdizadeh H (1997)).

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (coté hautes températures) et des métaux (coté basse température) (**Figure. I.4**).

La figure. I.5 montre les principaux résultats du programme de recherche (T.Hirai (1996)), (Ichirochiota (1996)). Par exemple, du côté de la conception et de la modélisation, ils ont développé un système de DAO utilisant un modèle de conception inverse qui peut donner une architecture de conception globale en choisissant des compositions et des microstructures tout en optimisant sur l'arrangement gradué. En vue d'une meilleure optimisation ils ont utilisés des paramètres thermo-physiques mesurés ou calculés pour réduire au minimum la contrainte thermique sous les conditions des différents processus de fabrication ou de service. Une fonction aléatoire a été utilisée pour combiner différentes microstructures et propriétés. Ils ont établis une approche micromécanique pour corrélérer les microstructures graduées et leurs propriétés. Des théories fractales et de percolation ont été présentées pour l'analyse quantitative de la variation spatiale des microstructures graduées, la méthode FEM a été employée pour modéliser la distribution des efforts internes.

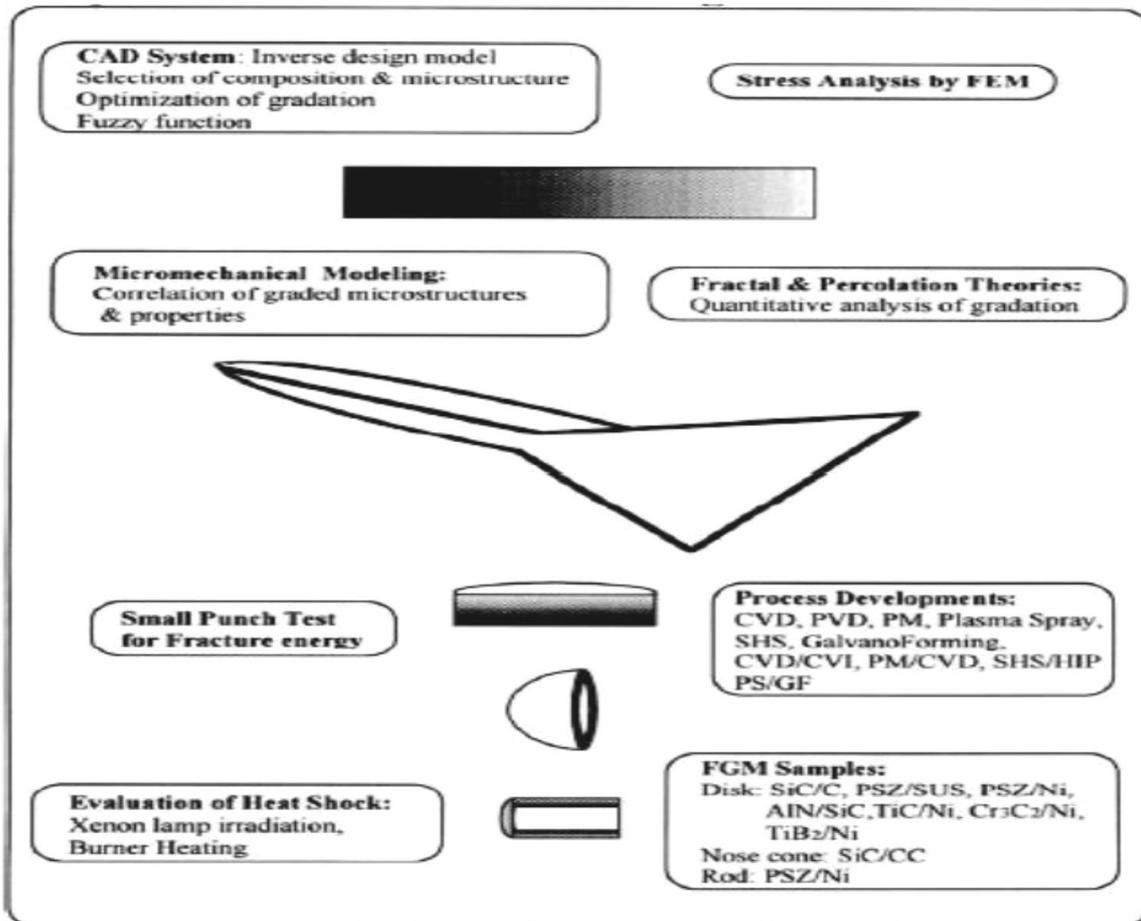


Figure. I.5 :résultats importants du programme de recherche de 1987-1991 sur « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques pour les matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées ».

Cette première étape dure de 1987 à 1992 ; Plusieurs techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure en site CVD, PVD, jet de plasma, poudre métallurgique, SHS et galvano formation. Les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000°K (température de surface) et à un gradient de température de 1000°K. Divers échantillons en FGM ont été fabriqués comme des disques en SiC/C, AlN/sic, PSZ /acier, PSZ/Ni, TiC/Ni, Cr₃C₂/Ni, TiB₂/Cu ; des ogives en SiC/CC et des tiges de PSZ/Ni.

Un petit essai de poinçonnement a été conçu pour évaluer l'énergie à la rupture d'un disque mince en FGM. Deux méthodes ont été développées pour l'évaluation de la résistance au choc

thermique jusqu'à 2000°K ; L'irradiation par un forte lampe en xénon et une méthode basée sur le chauffage en utilisant un mélange de gaz d'oxygène/hydrogène comme flamme de brûleur. Les petites chambres de combustion pour des moteurs fusées faites de formations SiC/CC par CVD/CVI et de ZrO₂/Ni par jet de plasma/galvano ont subis des essais de combustion au laboratoire aérospatial national.

Bien que ce programme ne soit pas prolongé au-delà de la recherche fondamentale, il a établi l'orientation future pour continuer la recherche en FGM dans le monde entier. Plus tard le concept FGM a été appliqué dans plusieurs industries et même dans les productions en série. À nos jours, des outils de coupe de haute performance en TiCN/WC/Co, Ni et des lames de rasage faites de composés intermétalliques Al-Fe/ acier inoxydable ont été commercialisés (Ichirochiota (1996)). Cependant, d'autres applications commerciales sont encore limitées.

I.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique) :

Puisqu'on s'est attendu à ce que le concept FGM s'applique aux matériaux aussi bien pour des usages fonctionnels que pour des applications structurales, un nouveau projet de cinq ans a été lancé en 1993 dans le but d'appliquer le concept FGM au développement de l'énergie de conversion des matériaux thermoioniques et thermoélectriques. Les convertisseurs TIC (en conversion ionique) et TEC (en conversion électrique) peuvent produire de l'énergie électrique directement à partir de l'énergie thermique par l'écoulement d'électron produit dans l'espace ou dans un solide sous un différentiel à hautes températures. La **figure. I.6** montre ce programme continu. Dans ce système hybride de conversion directe d'énergie, un TIC et un TEC sont combinés, et l'énergie solaire est utilisée comme source de chaleur pour créer un gradient de température de ~2000°K à ~300°K. La conception et l'optimisation des champs gradués sous un potentiel électronique et élastique devraient mener à une efficace conversion avec la relaxation de la contrainte thermique. Ainsi le développement de l'architecture du FGM qui combinerait les propriétés structurales et fonctionnelles est un autre but de ce programme.

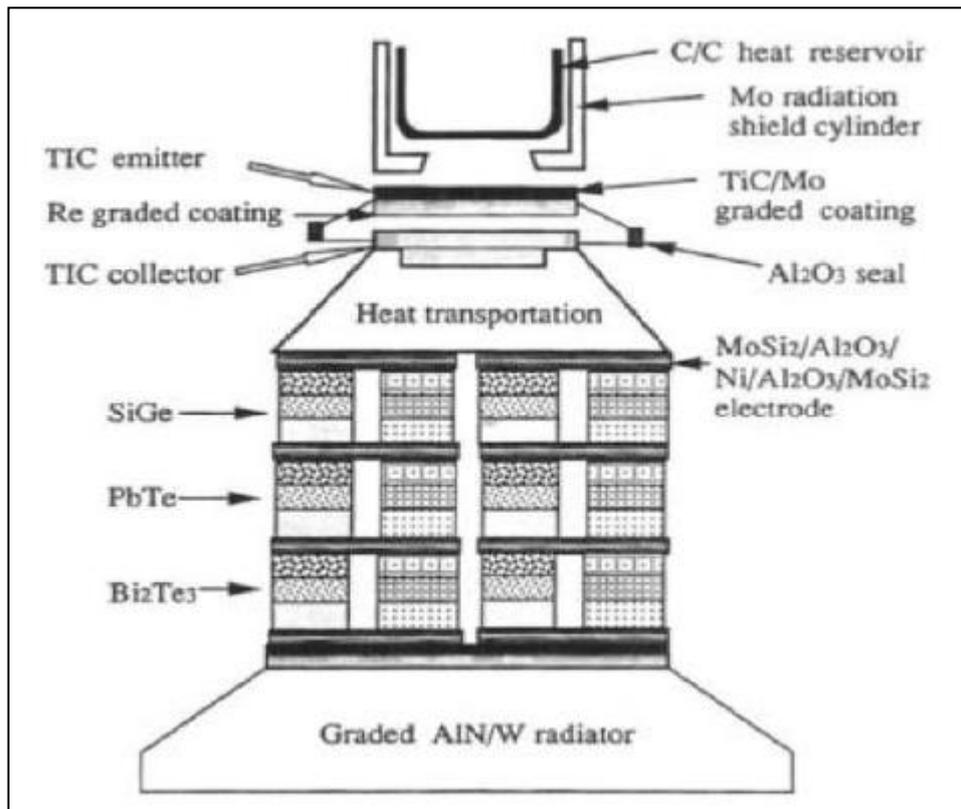


Figure. I.6 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie (Ichirochiota (1996)).

I.3.2.1. La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC :

Afin de développer des TIC et TEC efficaces et durables, ou une combinaison de ces deux dispositifs, un système optimisé, avec une faible perte de température et moins de dégradation, doit être assemblé utilisant les matériaux et dispositifs à haute performance par TIC et TEC. Ceci exige de résoudre divers problèmes d'interface concernant le transfert de chaleur, jonction des matériaux, contrainte thermique, contact électrique, et isolation sous des conditions thermiques extrêmes.

A/ un réservoir de chaleur gradué (C/C) :

Afin de réaliser une accumulation de chaleur et un transfert efficace à partir des rayons solaires, un FGM composé d'un alignement gradué des fibres de carbone en 3D et une technique d'infiltration de lancement a été développée par Nippon OilCompany Ltd. (Ichirochiota (1996)). Les fibres de carbone sont fortement anisotropes concernant la conduction thermique suivant et perpendiculairement à leur longueur. Par conséquent,

l'alignement gradué des fibres est conçu pour avoir une densité plus élevée des fibres le long du flux thermique dans les couches internes.

Une pièce tissée de fibres de carbone avec une texture graduée a été infiltrée par un lancement sous pression isostatique chaude (HIP) pour graphiter le lancement et pour densifier la structure. La **figure I.7 (a)** montre l'alignement gradué des fibres de carbone, tandis que la **figure I.7 (b)** est une photo d'un réservoir de chaleur gradué et dense en C/C selon la technique (HIP). Des rayons solaires sont concentrés dans ce réservoir par un grand miroir parabolique, et les parois latérales et celles du fond sont uniformément chauffées à 1380°C et à 1680°C respectivement.

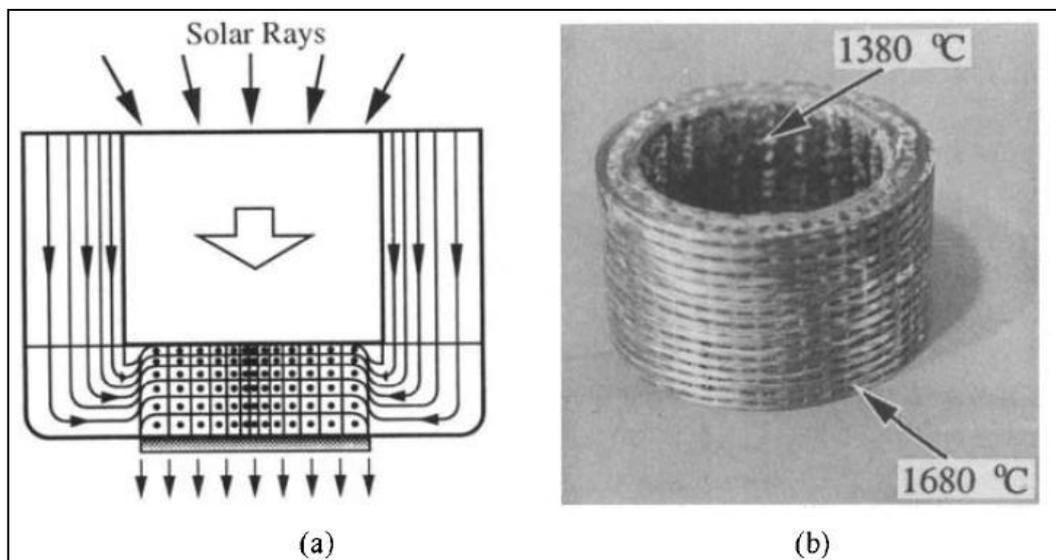


Figure. I.7 : (a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C (Ichiro chiota (1996)).

Le réservoir à chaleur est couvert d'un bouclier de radiations fait d'un cylindre fortement poli en monocristal M_0 (**Figure. I.7**). Un flux thermique élevé de 1450°C peut être transporté du fond du réservoir jusqu'à la surface arrière de l'électrode d'émission du TIC par les rayons de chaleur.

- **un émetteur gradué TIC (TIC/MO/W/Re) :**

Le carbure titanique est un matériau prometteur pour la réception de la chaleur de l'émetteur TIC en raison de son point de fusion élevée (3000° C) et son émissivité élevée (0,9), qui

permet l'absorption efficace de la chaleur d'une bande du spectre solaire à températures élevées. Un enduit gradué de TiC/Mo avec une contrainte thermique basse a été développé en utilisant une technique de jet de plasma en double-pistolet développée à l'institut de recherche national sur les métaux au Japon (Ichirochiota (1996)). Il n'a été observé aucune fissure dans cet enduit gradué après chauffage à 1800°C.

L'enduit a été formé par le côté arrière de l'électrode d'émission Mo/W/Re (Ichirochiota (1996)). W et Re ont été déposés sur un substrat M0 par CVD. La couche graduée est formée à travers l'inter-diffusion de ces éléments à 2300°C par traitement thermique. W peut agir en tant que barrière de diffusion pour Re par la création d'une graduation compositionnelle stable au-delà de 2000°C.

La figure. I.7 montre la section transversale graduée de cet émetteur en FGM développé par la firme Tokyo Tungstène Co. Ltd. le changement linéaire du coefficient de dilatation thermique pour Re-W et le petit changement pour W-M0 relaxent efficacement la contrainte thermique.

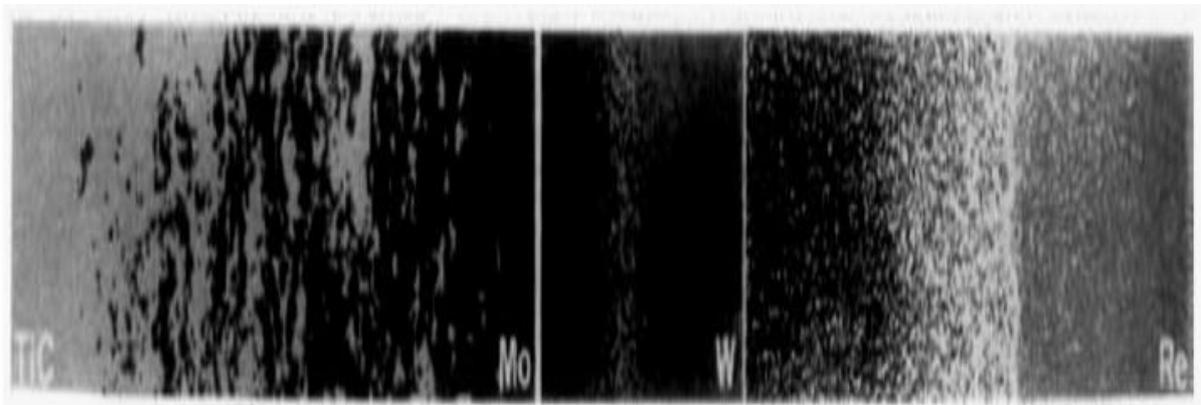


Figure. I.8 : changements microstructuraux de l'émetteur gradué en TiC/Mo W/Re (Ichirochiota (1996)).

L'électrode du collecteur a été façonnée au laboratoire électrotechnique en pulvérisant l'oxyde de niobium selon une basse fonction de voltage de 1,38 eV sur l'électrode M0. Le dispositif TIC avec un maximum de puissance de sortie de 8 W/cm² obtenue à un différentiel de température d'émetteur-collecteur de 1600°C-760°C et une température du réservoir de 330°C est assemblée à Mitui Engineering & Ship Building Co.Ltd. (Ichirochiota (1996)).

- **Matériel thermoélectrique gradué en PbTe :**

Pour les dispositifs TEC tels que Bi₃Te₂, PbTe, et SiGe, exposés dans le procédé d'ichiro (1996), les calculs théoriques suggèrent qu'il soit possible d'améliorer l'efficacité de conversion d'un pourcentage considérable par la graduation des compositions. La **figure I.9** compare le maximum de puissance de sortie d'un PbTe gradué ayant trois différentes concentrations (A- couche 3.51x10²⁵/m³, b- couche 2.6x10²⁵/m³, c- couche 2.26x10²⁵/m³), fabriqué à l'institut national de recherche sur les métaux au japon, à celui des compositions homogènes de chaque couche (théorique). Le PbTe avec une graduation du dopant PbI₂ a été préparé en stratifiant des poudres avec trois compositions différentes du dopant, suivies du pressage à chaud. La puissance de sortie a été mesurée en tenant l'électrode de basse température à la température ambiante. Il a été montré que l'échantillon de FGM possède une puissance maximum de 253 W/m pour $\Delta T=486^\circ\text{K}$, 11% plus grande que la puissance la plus élevée des échantillons non-gradués en stratifiée.

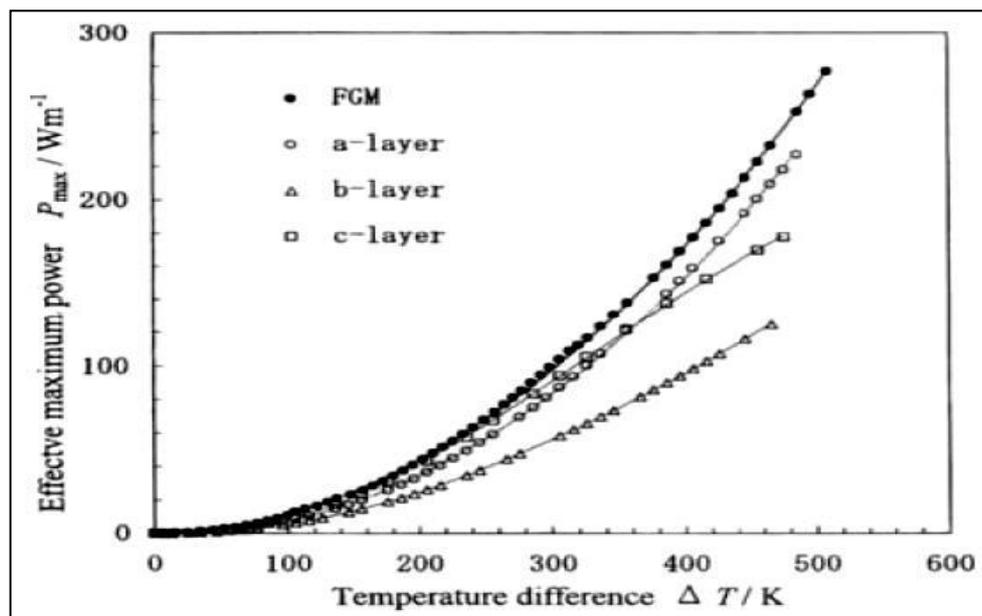


Figure. I.9 : Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois-couches (Ichiro chiota (1996)).

- **Une électrode symétriquement graduée MoSi₂/Al₂O₃/Ni/Al₂O₃/MoSi₂ pour un TEC SiGe :**

Dans le cas du dispositif TEC, MoSi₂ est prometteur comme électrode à hautes températures pour les matériaux thermoélectriques tels que SiGe parce qu'il a un point de fusion élevée (2030°C), avec une résistivité appropriée de $(1.7 \cdot 10^{-4} \Omega\text{-cm}$ à 1000 °C), et une excellente

résistance à l'oxydation. Cependant, sa dureté mécanique ($3-4 \text{ MPA.m}^{1/2}$) est faible. Pour façonner des électrodes dures, une électrode symétriquement graduée de $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{MoSi}_2$ (représenté sur la **figure I.10**) a été fabriquée à l'université d'Osaka à l'aide d'une combinaison d'auto propagation d'une synthèse à hautes températures et de HIP (SHS/HIP).

Cette structure symétriquement graduée produit une contrainte résiduelle compressive de 100 MPA à la couche externe de MoSi_2 due à une dilatation thermique inadéquate entre les couches externes et internes, ayant pour résultat le renforcement du MoSi_2 jusqu'à $5,8 \text{ MPA m}^{1/2}$. Al_2O_3 agit en tant que barrière de diffusion contre le Ni à environ 800°C . Un aperçu des expériences avec la diffusion de Ni dans une structure de FGM à températures élevées suggère qu'à 800°C il y aura peu de formation de couches réactives pendant au moins 10 années. Cette électrode symétrique en FGM a été jointe à SiGe par la firme (Mitsubishi Heavy Industries Ltd) en utilisant des inters couches en poudres Ge et W et des feuilles Zr-Ni à 1000°C (Ichirochiota (1996)).

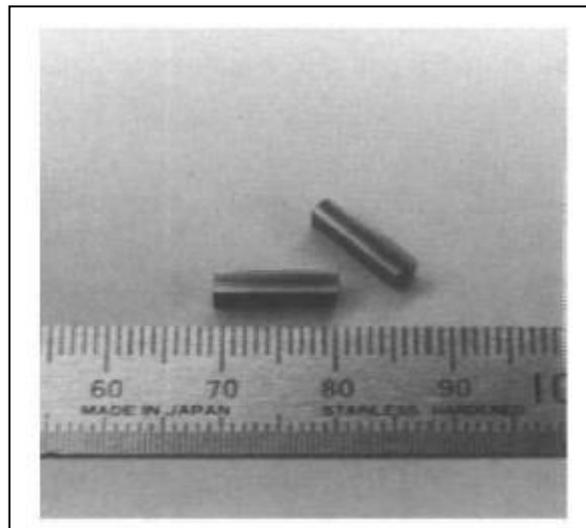


Figure. I.10: Photo des électrodes symétriques graduées de $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{MoSi}_2$ fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe (Ichiro chiota (1996)).

- **matériau radiatif gradué AlN/W :**

Pour l'utilisation des dispositifs TIC et TEC ou leur combinaison dans l'espace, le refroidissement par rayonnement est exigé. Au Sumitomo Electric Industries, Ltd. Au Japon, un matériau radiatif unique fait d'un composé d'une matrice en céramique AlN contenant une dispersion graduée des particules fines de W, fabriqué par frittage à 1800°C . L' AlN dense

possède une conductivité thermique élevée (200 W/mK), il est transparent aux longueurs d'ondes du visible à l'infrarouge. D'autre part, W a une émissivité élevée (0,9) pour les ondes infrarouges. Une partie de la chaleur écoulee, conduite à partir du TEC vers AlN, peut être reflétée par les particules W, comme illustré sur la **figure. I.11**. Une émissivité élevée de 0,97 a été calculée et mesurée quand une forte concentration de particules de W ont été dispersées près de l'interface avec TEC, et la concentration a été graduellement diminuée vers l'autre extrémité.

Suivant les indications de la **figure. I.12**, la structure graduée AlN/W, qui peut satisfaire à la fois une conduction thermique élevée et une émissivité élevée, possède différentes caractéristiques comparées aux matériaux conventionnels (Ichirochiota (1996)).

Dans ce programme, la nouvelle enquête a été effectuée principalement sur les sujets suivants :

1. Modélisation et évaluation des matériaux thermoélectriques gradués ;
2. Synthèse des graduations p et n type (Bi_3Te_2 , PbTe, et SiGe) avec une efficacité de conversion plus élevée ;
3. La fabrication des segments et des cascades de TEC avec des pertes d'énergie faibles au niveau des interfaces ;
4. fabrication des TIC avec les électrodes graduées qui ont une efficacité de conversion au-dessus de 15%.
5. Stabilité des structures graduelles de propriétés aux températures élevées.

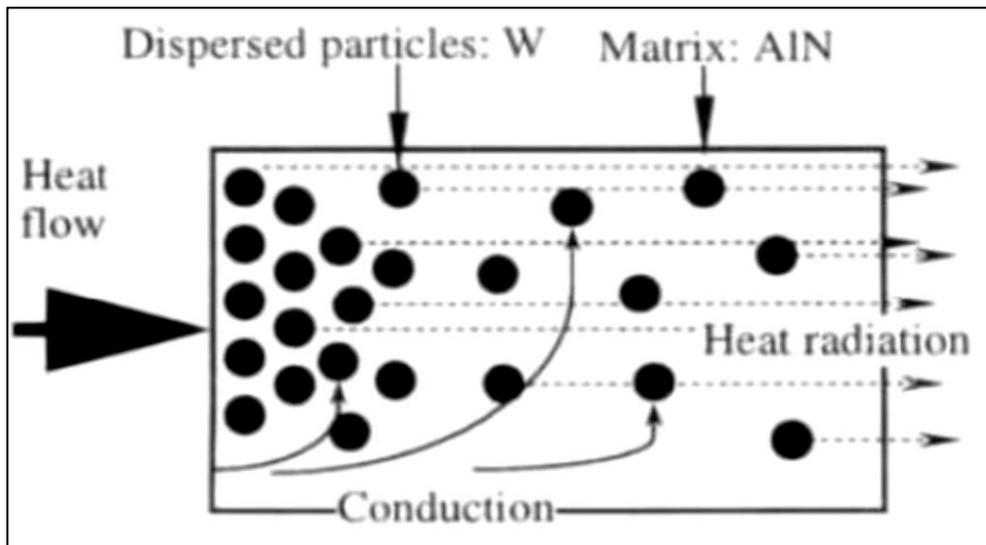


Figure. I.11 : schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W (Ichiro chiota (1996))

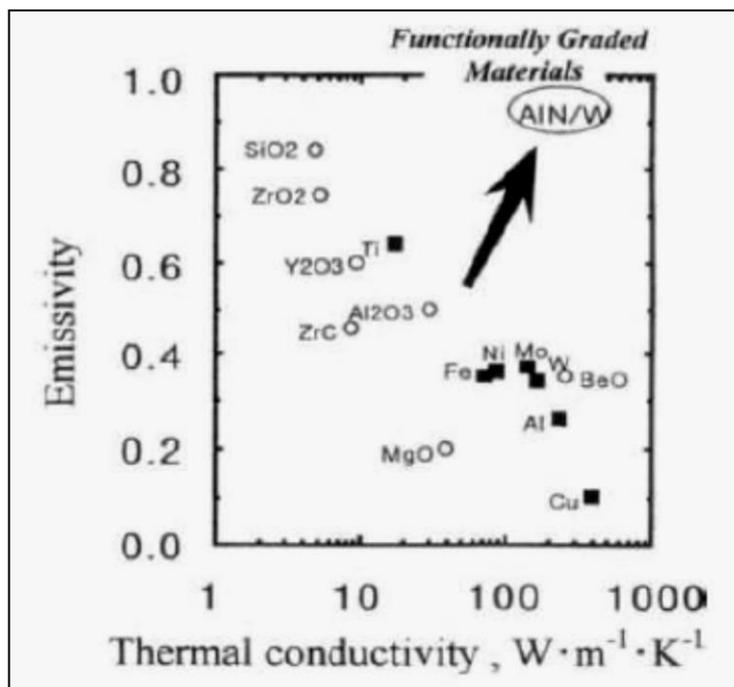


Figure I.12: La relation entre la conduction thermique et l'émissivité (Ichiro chiota (1996)).

I.4. Nouveaux procédés pour le traitement des FGM :

S'il y'a Une caractéristique concernant la fabrication des FGM c'est certainement la très grande variété des méthodes de traitement disponibles (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)). Les matériaux fonctionnellement gradués incluent des matériaux avec un gradient

dans la composition, La taille de grain et/ou la porosité. Le but général du traitement des FGM est de réaliser une distribution spatiale en microstructure et/ou en composition dans le produit final. Quand on choisit la méthode de traitement, les différences existantes entre les propriétés des deux phases constitutives du FGM sont d'extrême importance. Dans la composition d'un FGM, par exemple, la différence dans la résistance thermique entre les deux phases est un facteur clé. Si les deux phases ont des points de fusion sensiblement différents, comme dans le cas des FGM en céramique/métal, le gradient de composition peut être formé en produisant un gradient de porosité performant de la phase réfractaire infiltré, par la suite, par la deuxième phase fondue pour obtenir un produit final dense. Si les deux phases ont un point de fusion semblable, l'infiltration ne peut pas être utilisée, car le squelette ne peut pas tenir leur puissance durant l'infiltration. Les dimensions et la géométrie du FGM doivent être aussi bien considérées. Il est faisable de produire des FGM dans plusieurs systèmes avec des technologies de couches thermiques, mais leur basse efficacité les rend inutiles pour la production en grandes masses des FGM tridimensionnels.

I.4.1. Processus de formation et de consolidation des FGM :

Pour la fabrication de FGM en bloc, le traitement métallurgique en poudre est le plus économique et approprié à la production en série. Afin de produire un FGM par traitement conventionnel à la poudre, un corps vert avec un gradient de fraction volumique désirée est d'abord fabriqué. Après la formation et la consolidation, ce corps doit être densifié par frittage. Les méthodes de gradation peuvent être divisées en deux groupes : le processus sec et l'autre humide (**figure I.13**) (Hirai T. and Chen L. (1999), Chan S.H. (2001), Uemura S. (2003)). Les processus secs sont rapides, mais, généralement, ils permettent seulement la génération des profils gradués par étape. Dans le processus humide, une étape de séchage est exigée pour l'élimination du liquide mais la continuité du mélange est facilitée et il peut y avoir une production des gradients continus et lisses. En outre, des procédés de transport apparaissent dans les suspensions, par exemple sédimentation et électrophorèse, peuvent être employés pour produire des gradients à bas prix.

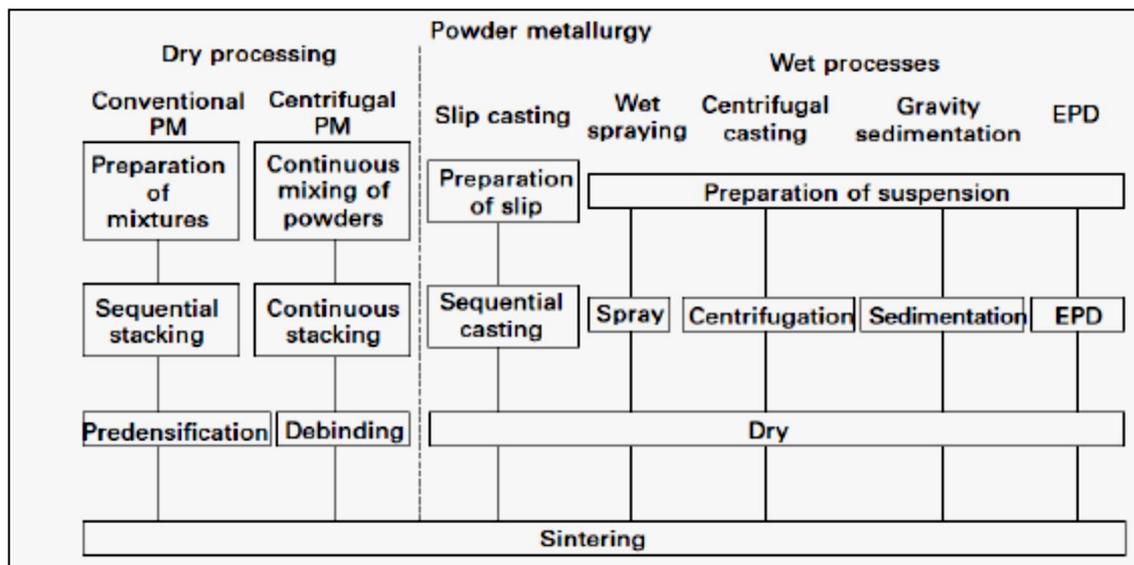


Figure. I.13 : Processus de traitement des Poudre pour les FGM (Hirai T. and Chen L. (1999), Chan S.H. (2001), Uemura S. (2003)).

Le défi principal lié au traitement aux poudres est fréquemment lié à la densification du compact de poudre gradué. Les taux de frittage différent avec la position et le rétrécissement inégal peut conduire à la déformation et à la fissuration, à moins que des techniques sophistiquées de frittage soient utilisées.

Une technique largement utilisée pour les matériaux gradués en céramique/céramique elle consiste à la coulée en barbotine séquentielle où de glissades de différentes compositions moulées l'une au-dessus de l'autre (Requenna, J., Moya, J.S., Pena, P., (1993)). En utilisant un système pré mélange, la composition en jet peut être faite sans interruption (Chu, J et al (1993)).

Dans un processus appelé la pulvérisation humide (Schindler, J et al (1998)), des suspensions en deux poudres sont créées, mélangées et pulvérisées sous control informatique sur un substrat chauffé. Après la formation, le corps vert est enlevé du substrat, pour les feuilles en FGM.

Un excellent gradient de composition suivant l'épaisseur peut être créée en contrôlant la proportion de deux poudres dans la suspension mélangée. La Coulée par centrifugation (Watanabe, Y., Yamanaka, N., Fukui, Y., (1998)) est une autre méthode de consolidation du FGM en utilisant le mélange de suspensions pour réaliser le gradient. Quand les suspensions des deux poudres de densités différentes ou de grosseurs de grains différents sont mélangées

et injectées dans la cavité cylindrique, qui tourne à la grande vitesse, les forces centrifuges causent un gradient compositionnel ou de porosité dans le compact de poudre croissant dans la direction radiale. Avant d'arrêter la rotation, la cire est injectée dans le système pour lier les poudres afin d'augmenter la force verte pour le façonnage du corps. Les FGM poreux avec une distribution graduelle de la porosité peuvent être utilisés comme préforme pour des filtres, ou pour les membranes en céramique. Un processus similaire à la coulée par centrifugation est la sédimentation gravitationnelle (Bernhardt, R et al (1999)). La coulée par centrifugation, peut seulement être utilisée pour les pièces de forme cylindrique, tandis que la sédimentation gravitationnelle convient aux plaques en FGM.

Parmi les différentes techniques de traitement colloïdales, la méthode électro phorétiques de dépôt (EPD) est une méthode très prometteuse (Anné, G., Vanmeensel, K., Vleugels, J., (2004)) parce que c'est un processus assez rapide qui ne coûte pas cher pour la fabrication des couches en céramique, des monolithes, des composites et des matériaux fonctionnellement gradués variant selon l'épaisseur de quelques nanomètres à quelques centimètres. Le dépôt électro phorétique est un processus en deux étapes (**figure. I.13**). Dans la première étape, des particules ayant acquis une charge électrique dans le liquide dans lequel elles sont suspendues sont forcées de se déplacer vers l'une des électrodes par l'application de champ électrique à la suspension (électrophorèse). Dans la deuxième étape (dépôt), les particules se rassemblent à l'une des électrodes et forment un dépôt cohérent. Le dépôt prend la forme imposée par cette électrode. Après séchage et enlèvement de la matière de l'électrode, une forme de corps en céramique vert est obtenue. La cuisson de ce corps vert donne un composé en céramique. Des matériaux graduels peuvent être obtenus puisque la composition de la prochaine couche de poudre déposée est déterminée par la composition de la suspension en ce moment (**fig. I.14**).

L'adaptation Judicieuse de la concentration de la poudre dans la suspension permet de générer un profil gradué bien contrôlé dans une étape de mise en forme continue.

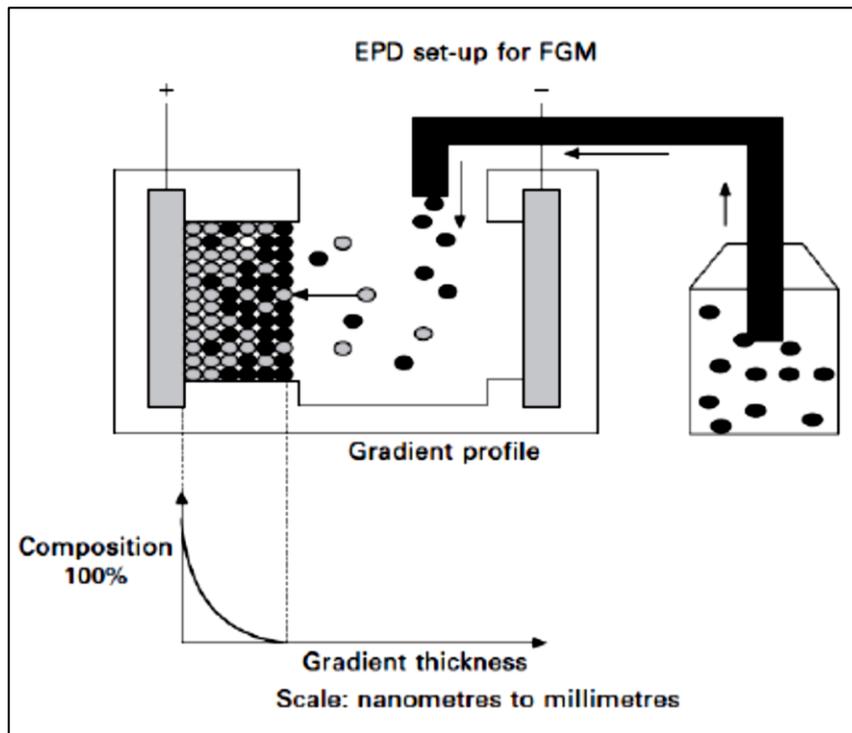


Figure. I.14 : Procédé électro phorétique de dépôt pour des matériaux de FGM (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)).

Le processus n'est pas spécifiquement matériel, puisqu'une large variété de matériaux a été déjà déposée, comme les poudres en métal, en céramique, en verres, et en polymères (Van der Biest, O., Vandeperre, L, (1999)). Généralement la seule limitation de forme est la faisabilité d'enlever le dépôt de l'électrode après la déposition. Les matériaux gradués dans le système $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$, ZrO_2/WC , et WC/Co ont déjà été exploré au moyen du processus EPD (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)). Réquisit une pré réquisition d'une production réussie des matériaux en FGM au moyen d'EPD s'avère le meilleur moyen de contrôle de la cinétique du processus. Des modèles cinétiques ont été donc développés pour traiter les FGM dans un système à plusieurs éléments au moyen d'EPD (Put, S et al (2003)). Comme exemple, en présente une composition d'un profil (**figure. I.15**) et sa microstructure (**figure. I.16**) ; c'est un disque en FGM $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ (Vleugels, J et al (2003)) avec un noyau homogène (75% volume d' Al_2O_3), une couche Al_2O_3 extérieure pure d'un côté et un composé homogène (90%volume d' Al_2O_3) sur l'autre face, et des couches symétriquement graduées à profilées intermédiaire.

Comme montré dans le graph, un profil convexe gradué en alumine est suggéré pour donner un effort de compression plus élevé aux couches externes d'alumine et les plus basses

contraintes de traction au noyau du disque. Les phases ZrO_2 (blanc) et Al_2O_3 (grises) peuvent être clairement différenciées dans la microstructure. La phase ZrO_2 est bien dispersée dans la matrice Al_2O_3 dans les parties graduées et dans le noyau du FGM.

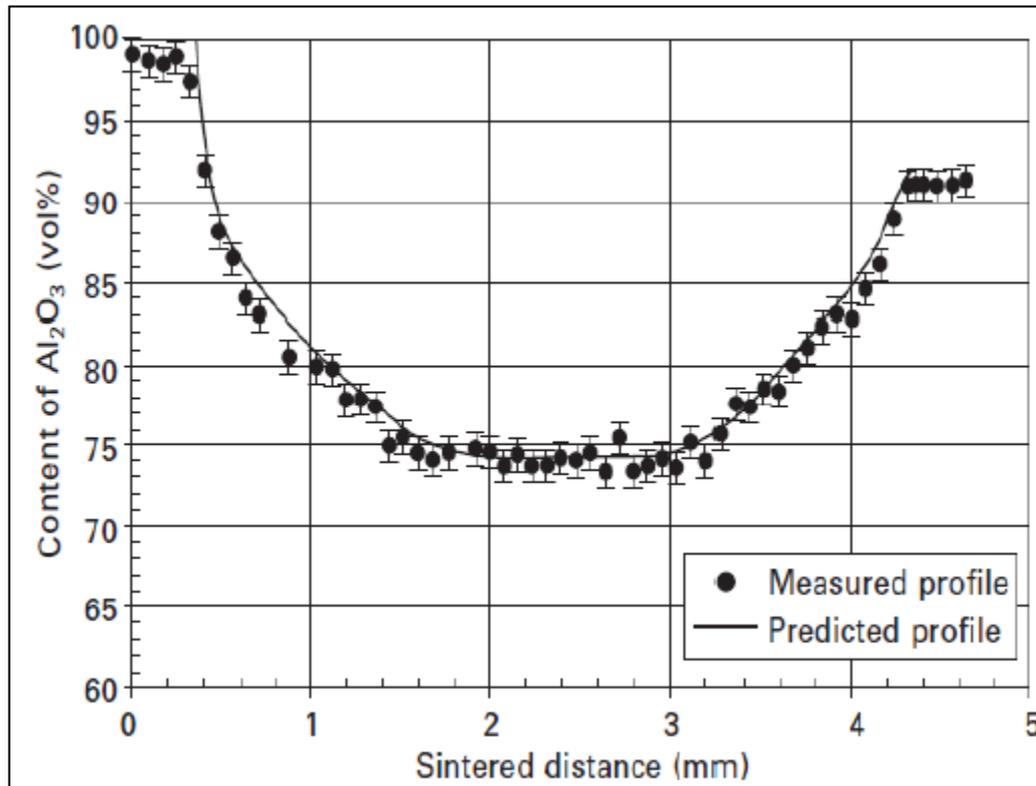


Figure.I.15 : Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque (Al_2O_3/ZrO_2) (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006))

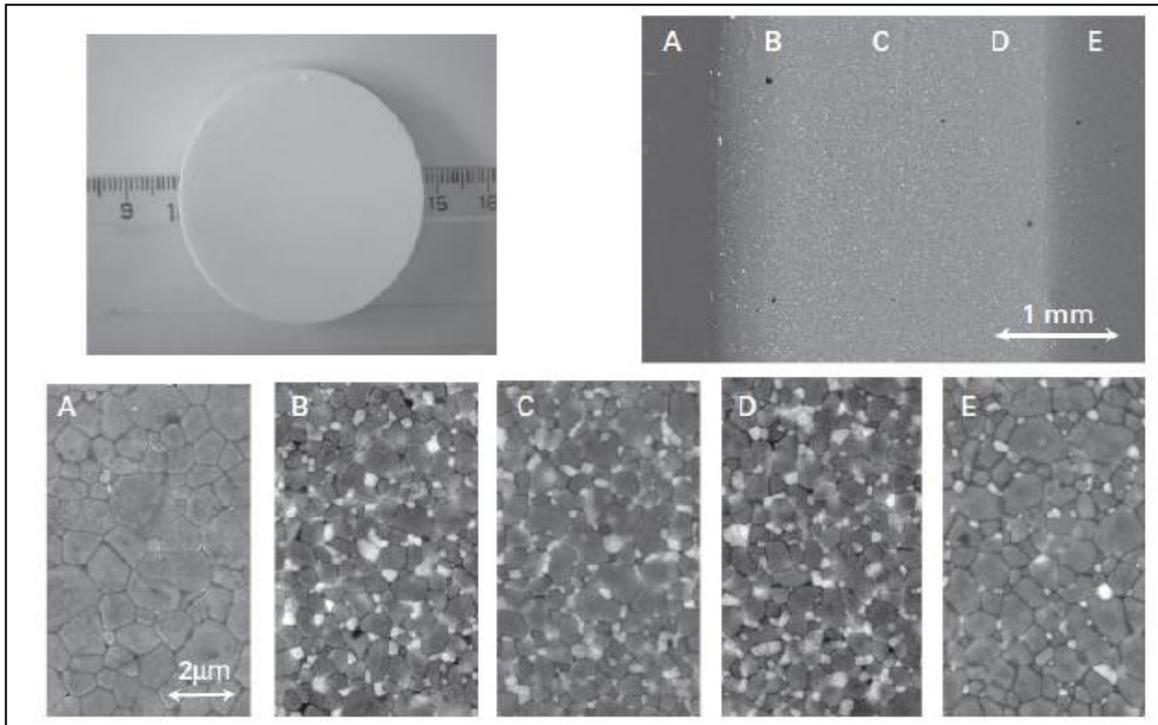


Figure.I.16 : Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)).

I.4.2. Densification des poudres compactes pour FGM :

Le défi le plus important est la densification des poudres compactes graduées. Le traitement des matériaux en FGM par des méthodes métallurgiques des poudres induit des flèches de déformation excessives et indésirables du composant après frittage. À cause de ces contraintes thermiques résiduelles excessives, des fissures et d'autres défauts peuvent souvent

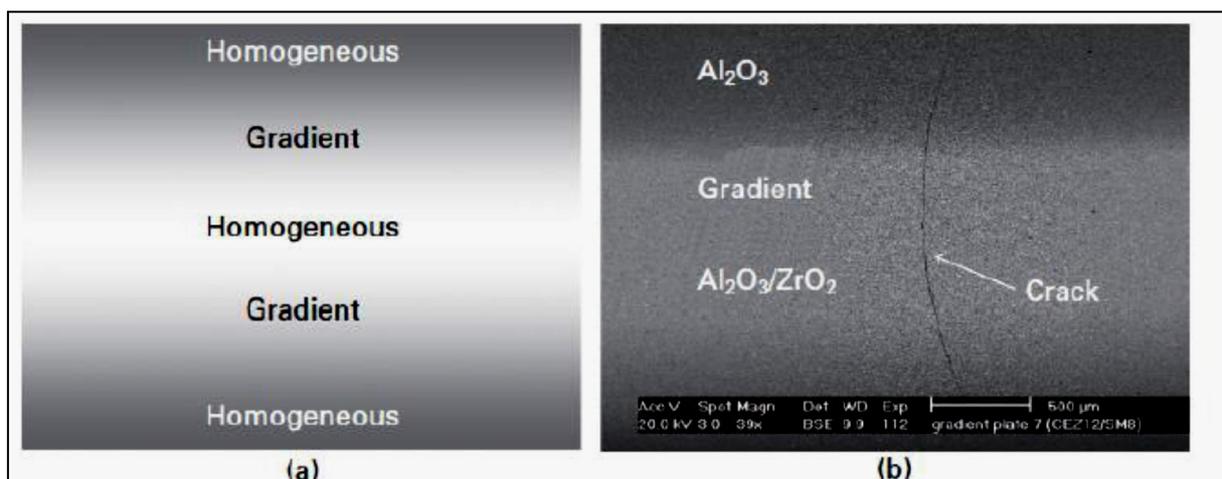


Figure.I.17 : (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)).

La **figure. I.18** montre des fissures typiques observées dans les disques symétriquement gradués en $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$, formés par les dépôts électrophorétiques et densifiés par frittage à basse pression. À partir de la figure, il est à voir que des fissures transversales apparaissent dans le noyau riche en ZrO_2 d'un disque symétrique fritté en TZP/ Al_2O_3 . Cependant, La propagation des fissures s'est arrêtée dans la couche externe Al_2O_3 , indiquant que la contrainte de traction plane est située au centre des disques, qui devraient être abaissés. Hillman (1996) à observer des défauts similaires dans des stratifiés symétriques avec des couches $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ sur les surfaces et une couche médiane en ZrO_2 . Ces défauts sont les plus susceptibles aux contraintes résiduelles de traction pendant le refroidissement du noyau, dû au coefficient de dilatation thermique élevé de zircon. Ces régions de plus faible densité (pores) doivent être formées comme conséquence de la contrainte de traction qui se développe pendant le rétrécissement différentiel durant la densification entre les couches Al_2O_3 et $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$. Les pores agissent alors en tant que pailles préexistantes pour la génération de la dilatation thermique inadéquate des fissures pendant le refroidissement par l'intermédiaire du lien des pores et des défauts cavitationnels.

L'élimination des fissures transversales peut être accomplie en diminuant le retrait de tous les composés. Ceci se fait seulement en diminuant le grand écart compositionnel entre les différentes couches (Cai, P.Z et al (1997a), Cai, P.Z et al (1997b)) ou en ajustant la densité verte des différentes couches (S., Beraniè, S., (2005)). Une autre possibilité est de diminuer le taux de chauffage et de refroidissement Pendant le frittage (Cai, P.Z et al (1997b)). Les forces résiduelles pendant Le cycle de chauffage sont diminuées par nature visqueuse du FGM à la Température de frittage. La force de frittage résiduelle est proportionnelle au taux de frittage résiduel. La rupture est réduite sous un refroidissement lent ; ceci est probablement dû à La relaxation des tensions résiduelles pendant la période initiale de refroidissement.

Presque tous les volumes FGM en matériaux céramique/céramique sont frittés par un frittage conventionnel à basse pression ou par un pressage à chaud, selon les propriétés de frittage des deux composants (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)). Dans un FGM métal/céramique avec une phase continue en métal et une phase en céramique discontinue, les taux de frittage sont contrôlés par la densification de la phase métallique et un tel FGM peut être densifié par des méthodes de frittage conventionnelles (Hirai T. and Chen L. (1999), Chan

S.H. (2001), Uemura S. (2003)). Cependant, dans la plupart des FGM où une phase céramique élevée est envisagée quelques approches spéciales doivent être considérées pour la densification entière.

En plus du frittage conventionnel, le traitement réactif en poudre, également appelé synthèse de combustion ou la synthèse à hautes températures (SHS), peut être utilisée si les composés voulus sont synthétisés d'un premier mélange de poudre. Ce processus comporte une réaction chimique rapide et exothermique pour synthétiser simultanément quelques ou toutes les phases des constituants dans le FGM et puis densifier le composant.

Une technique plus avancée, telle que le frittage de plasma en étincelle (SPS) ou le frittage par courant électrique pulsé, est également utilisé pour la fabrication de FGM (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)). C'est une méthode de frittage à pression assistée dans laquelle un haut courant est pulsé à travers une installation matrice/poinçon/échantillon, qui peut être comparée à ceux du cas de pressage conventionnel à chaud. Les grandes impulsions de courant produisent des plasmas d'étincelle, une pression d'impact d'étincelle et une énergie de chauffage en Joule.

Le mécanisme de frittage et les propriétés mécaniques des compacts frittés montrent des caractéristiques différentes des processus de frittage conventionnels aux pressions assistés. Cette technique offre des avantages significatifs pour différentes sortes de nouveaux matériaux et produit toujours un compact dense dans un petit temps de frittage et avec une dimension du grain plus fins que des méthodes conventionnelles. Le frittage de plasma en étincelle des FGM utilise un gradient de température dans le système, qui permet une densification homogène des FGM en Correspondant le gradient de température au gradient de taux de retrait du compact. Avec un système de plasma d'étincelle, une grande masse FGM (céramique/métal) (~100 millimètres sa section) peut être homogènement densifié en peu de temps avec des temps de chauffage et d'entreposage à moins d'une heure. Parmi les systèmes de frittage de plasma en étincelle rapportés on site des matériaux à base de WC (WC/Co, WC/Co/steel, WC/Mo), des composés à base de ZrO_2 (ZrO_2 /acier, ZrO_2 /TiAl, ZrO_2 /Ni), Al_2O_3 /TiAl, ... etc. (Anné G, J Vleugels et O Van der biest (2006)).

Le frittage à la micro-onde est une autre technique prometteuse pour les FGM en céramique/métal pour remédier à la difficulté de l'inégalité du taux de rétrécissement. Comme une nouvelle technique de frittage, le frittage aux micro-ondes utilise des micro-ondes et des

radiations pour chauffer la céramique ou un compacte composite à base de céramique (Zhao, C et al (2000)). Le mécanisme de chauffage par micro-ondes est basé sur la perte diélectrique des phases céramiques injectées, ayant obtenue par une technique volumétrique de chauffage dans laquelle la chaleur est produite par le compacte lui-même.

I.5. L'intérêt d'utilisation des FGM :

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. À nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

I.6. Méthodes d'élaboration des FGM :

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention a tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux a gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

I.6.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (**figure. I.18**). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité .Les liants (Plastifiants et dé flocculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

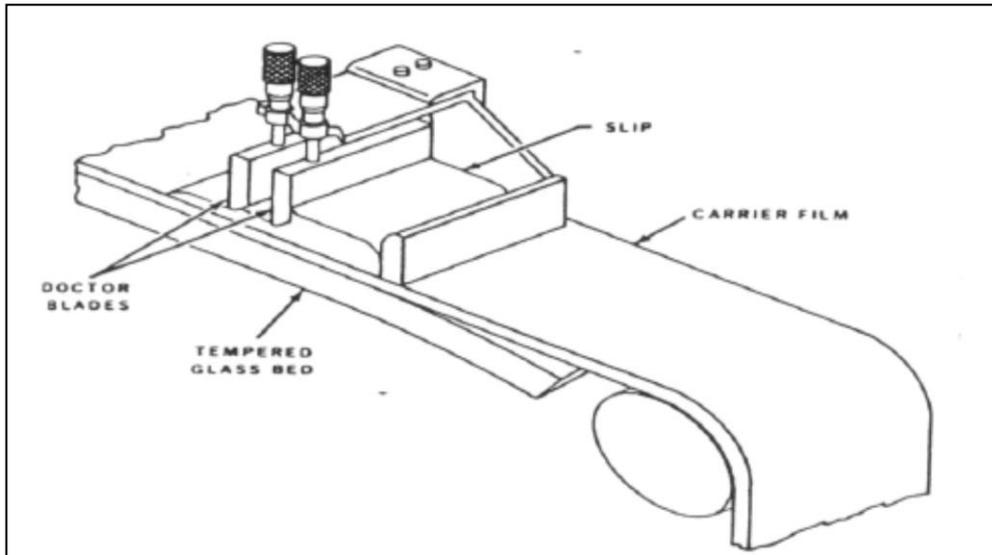


Figure. I.18 : Principe de la méthode coulage en bande.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et al. En 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés (Boch. P Chartier. Huttepain. M (1986)). Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$. On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ($BaTiO_3$ principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par Mistler (1973).
- Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermocompression (Boch. P Chartier. Huttepain. M (1986)).

I.6.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tessou (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se effectué en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ;
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.6.3. Compaction Sèche des Poudres :

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop, a et al (1993)). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.6.4. Dépôt par Électrophorèse :

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh H (1997)).

I.6.5. Projection Plasma :

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur

important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffes.H.D. DvorakM.Wewel. (1990)).

I.6.6. C. V. D. et P. V. D :

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

I.6.7. Frittage et Infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.6.8. Frittage Laser Différentiel :

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour

élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La **figure I.19** montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

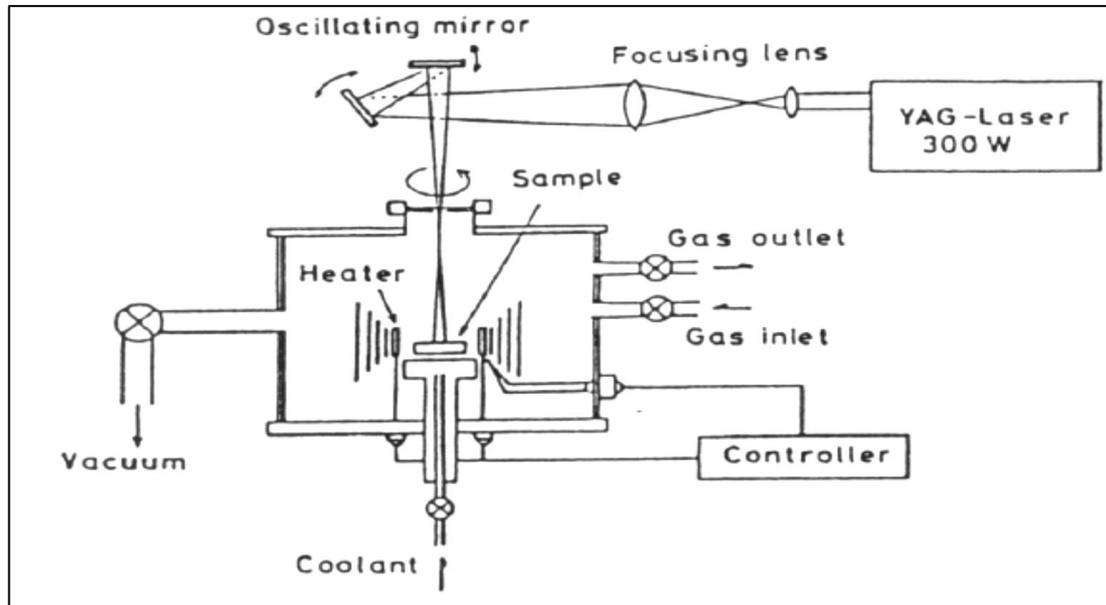


Figure I.19 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.

I.6.9. Implantation Ionique :

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh H (1997)).

I.6.10. Dépôt par Centrifugation :

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (**figure. I.20**) (Abdizadeh H (1997)).

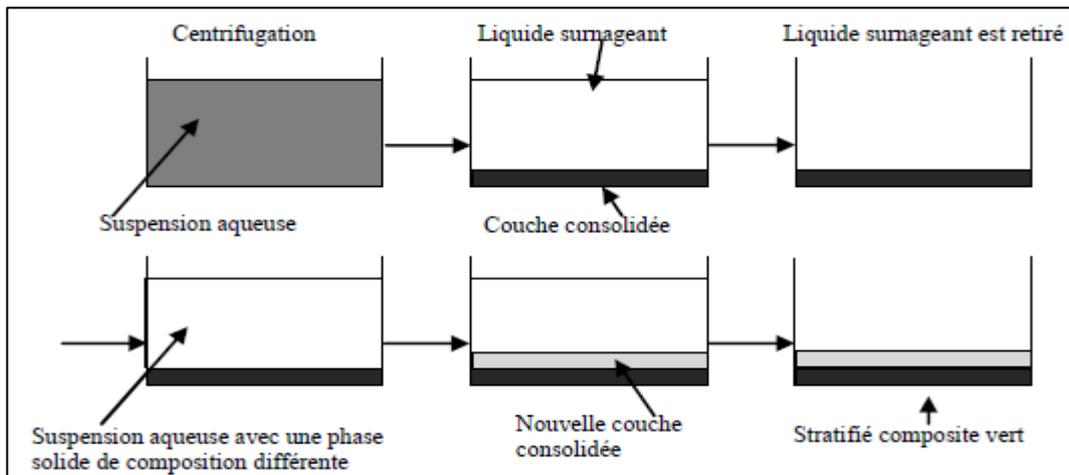


Figure I.20 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh H (1997)).

I.7. Propriétés physiques et mécaniques des FGM :

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Al/Al_2O_3 (Métal)-Céramique).

I.7.1. Propriétés physiques du métal :

Définition : L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

- **Propriétés physiques :** L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660° . Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m^3 . L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.
- **Propriétés mécaniques :** Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :
 - Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :
 - Résistance à la traction.
 - Résistance à la pénétration (dureté).
 - Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mises en feuilles).
 - La ductilité (mise en fils).
- **Propriétés des alliages d'aluminium** : L'Aluminium a pour propriétés une :
- Température de travail élevée.
 - Très bonne résistance à la corrosion.
 - Légèreté.
 - Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
 - Bon rapport force/poids.
 - Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
 - Bonne conductivité thermique.
 - Conductivité électrique élevée.
 - Bonnes caractéristiques de finition.
 - Entièrement recyclable.
- **Résistance à la corrosion** : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqures, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

I.7.2. Propriétés physiques de la céramique :

- **Définition** : La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute

température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

- **Propriétés physiques** : La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de **3800 kg/m³**. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.
- **Propriétés mécaniques** : Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :
 - Matières première employées.
 - Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.
- **Propriétés des céramiques** : Les propriétés de la céramique sont :
 - Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
 - Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
 - Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = **200 MPa**).

I.8. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (**figure. I.21a**).
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (**figure. I.21b**), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).

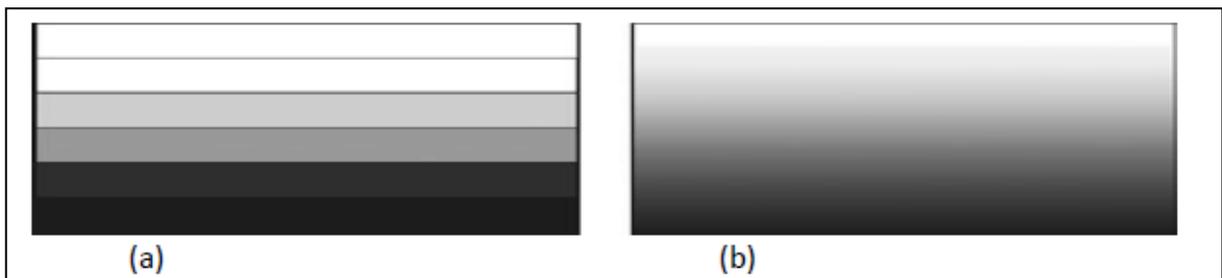


Figure.I.21 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

I.9. revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM

Considérant une plaque élastique rectangulaire (**figure I.22**). Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z lancé sur la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés matérielles, module de Young, densité et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieure et inférieure sont différents mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Cependant, le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z), $E = E(z)$, $\rho = \rho(z)$, $\nu = \nu(z)$. Delale et Erdogan (1983) ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Donc, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque F.G.M est constant dans tout point de la plaque ; d'ailleurs cette propriété est sensiblement là même pour

les matériaux avec lesquels on va travailler. Alors, le module de Young et la densité changent dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), ou une fonction sigmoïde (S-FGM).

Notant que S représente la propriété mécanique qui varie selon l'épaisseur ; donc elle peut être le module de Young $E(z)$ ou la densité $\rho = \rho(z)$.

I.9.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$S(z) = g(z).S_1 + [1 - g(z)].S_2 \quad (\text{I.2})$$

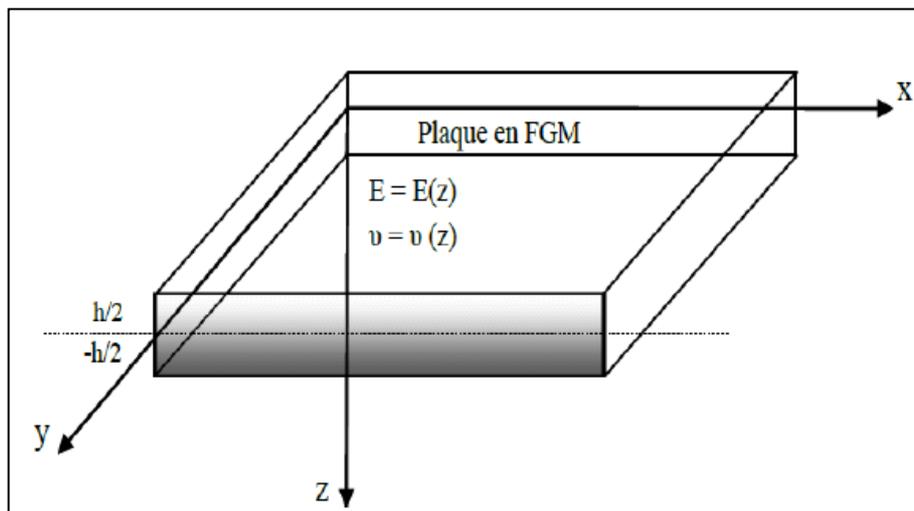


Figure I.22 : Les dimensions de la plaque FGM.

Où S_1 et S_2 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = h/2$) et de la surface supérieure ($z = -h/2$) de la plaque FGM. La

variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la **figure I.23**, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

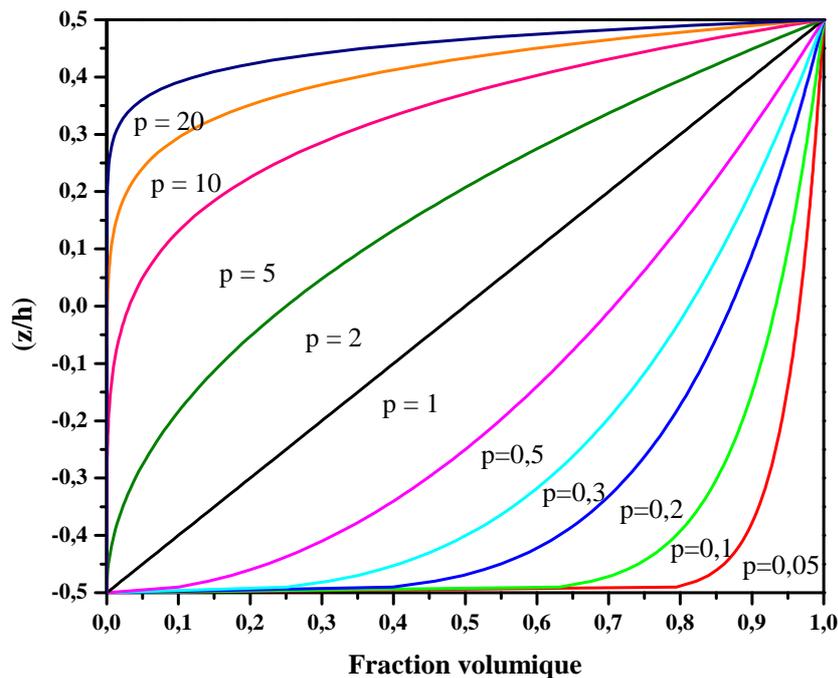


Figure I.23 : La variation de la fraction volumique pour une plaque P-FGM.

Comme il est présenté sur la **figure I.23**, le changement de la valeur de P produit un nombre infini de distributions de composition. Afin de modéliser exactement les propriétés matérielles de FGM, les propriétés doivent avoir une dépendance entre la température et la position. Ceci est réalisé par une loi simple de mélange des matériaux composites (modèle de Voigt). Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, comme le module de Young E , et la densité ρ et le coefficient de poisson ν peut alors être exprimé comme suit :

$$S = \sum_{j=1} S_j \cdot g_j \quad (I.3)$$

Là où S_j et g_j sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche jj (**Figure.I.21. a**), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{j=1} g_j = 1 \quad (\text{I.4})$$

I.9.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Si l'on rajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5.a})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$S(z) = g_1(z).S_1 + [1 - g_1(z)].S_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.6.a})$$

$$S(z) = g_2(z).S_1 + [1 - g_2(z)].S_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.6.b})$$

La **figure I.24** montre que la variation de la fraction volumique selon les équations (I.5.a) et (I.5.b) avec des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée (Plaque S-FGM).

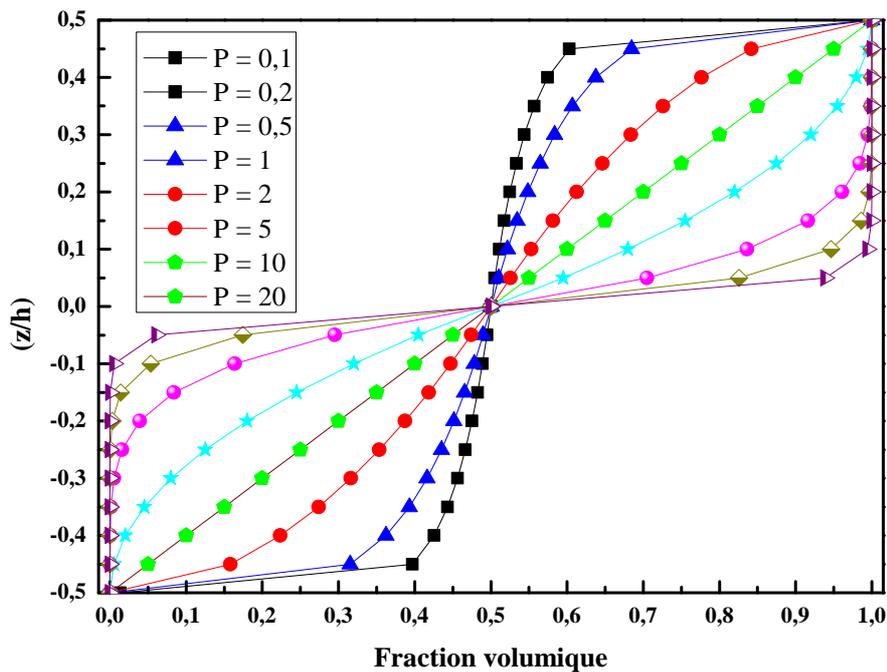


Figure I. 24 : La variation de la fraction volumique pour une plaque S-FGM.

I.9.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par Delale et Erdogan (1983) :

$$S(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \quad (\text{I.7.a})$$

Avec

$$A = S_2 \text{ Et } B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \quad (\text{I.7.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la **figure I.25**.

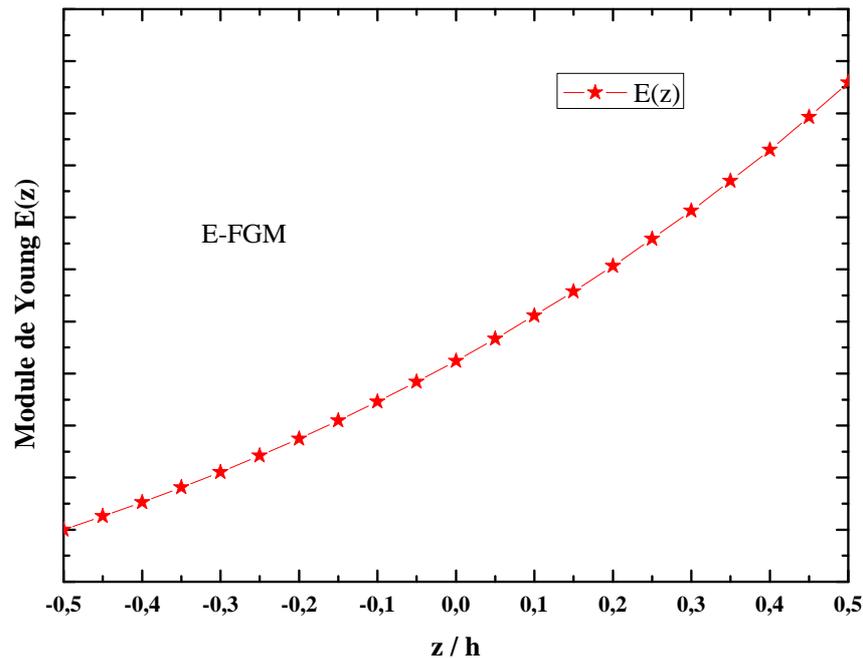


Figure I. 25 : La variation du module de Young de la plaque E-FGM.

I.10. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion d'un matériau FGM. Dans un premier temps, nous avons présenté l'historique de la fabrication des FGM dont les premiers pas de la naissance du FGM. Et puis en est passé à décrire les différentes méthodes modernes d'usinage à savoir la méthode d'injection des poudres. Après nous avons cités les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM, et à la fin nous avons terminés par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde.

II.1. Introduction :

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans (A. K. Noor & W. S. Burton (1989), R. K. Kapania & S. Raciti (1989), T. Kant & K. Swaminathan (2000), E. Carrera (2000)) des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque. L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple (N.J. Pagano (1969)), (N.J. Pagano (1970)), (S. Srinivas & A. K. Rao (1970)), (S. Srinivas & A. K. Rao (1973)). Là encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée . . .) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite se sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couche.
- Approche développement asymptotique.

II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles :

II.2.1. Approche monocouche équivalente :

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT) :

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (E. Reissner & Y. Stavsky (1961)). L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff (G. Kirchhoff (1850)) des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure. II.1).

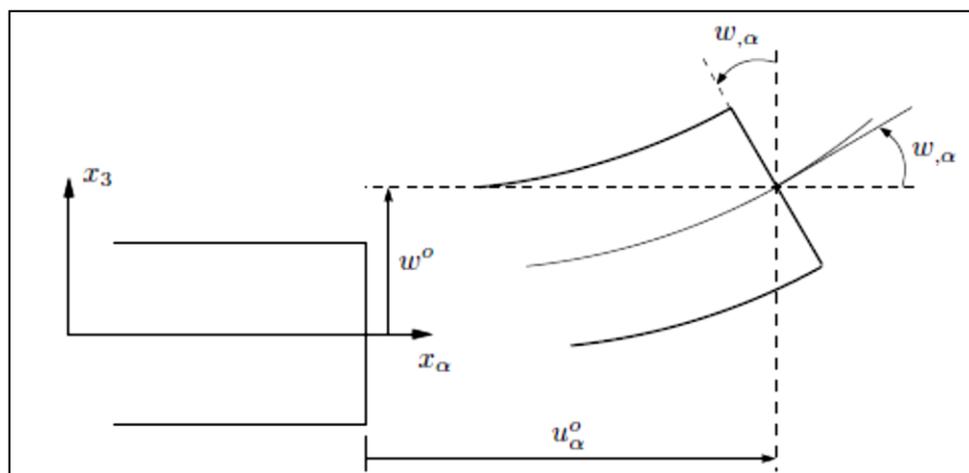


Figure. II. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, \alpha = 1, 2 \quad (\text{II.1})$$

Avec :

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α .

w : La flèche de la plaque.

$w_{,\alpha}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT) :

Le cisaillement transverse ne peut être négligé, sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (**Fig.II.2**). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z \phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec,

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

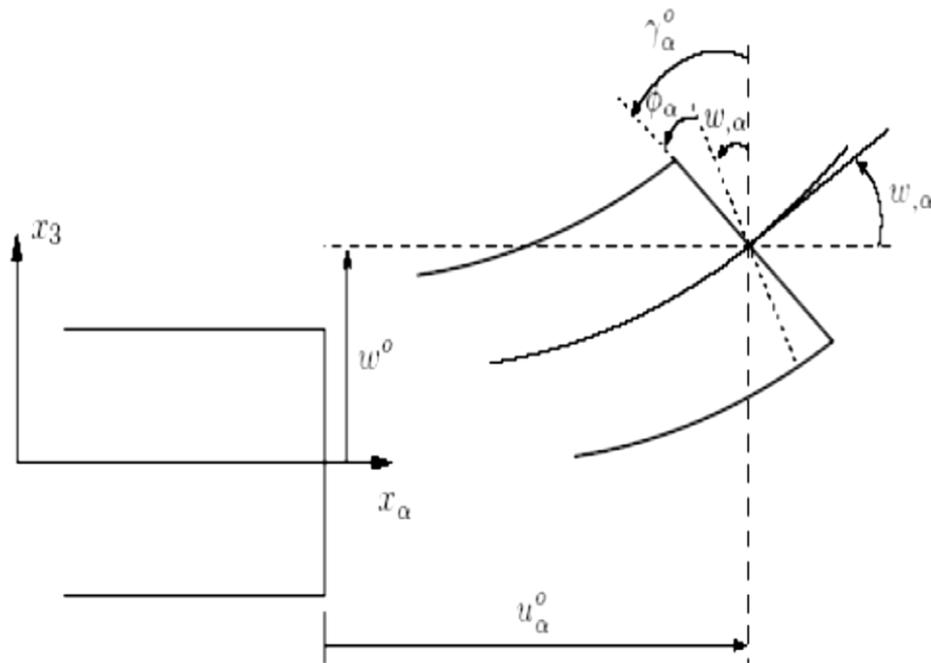


Figure. II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_α^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (J.M. Whitney (1973)). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La **figure. II.3** montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il y a une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

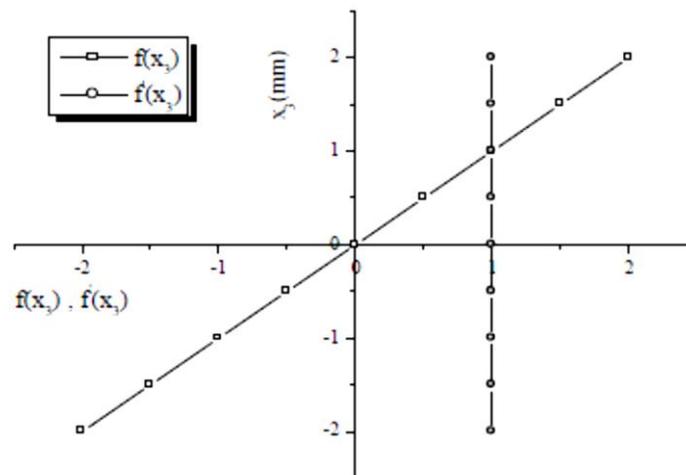


Figure. II.3: Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

II.2.1.3. Les modèles d'ordre supérieur :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.4) (L. Liberscu (1967), J.M. Whitney (1973), M. Touratier (1991), Viet.Tung. Nguyen (2004)). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_i^{0(j)} = 0$ pour $j = 2, 3, 4$ et $\phi_3^{0(1)} = 0$.

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0$, $\phi_i^{o(3)}, \alpha = \{1,2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - z w_{,\alpha} + f(z) \gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

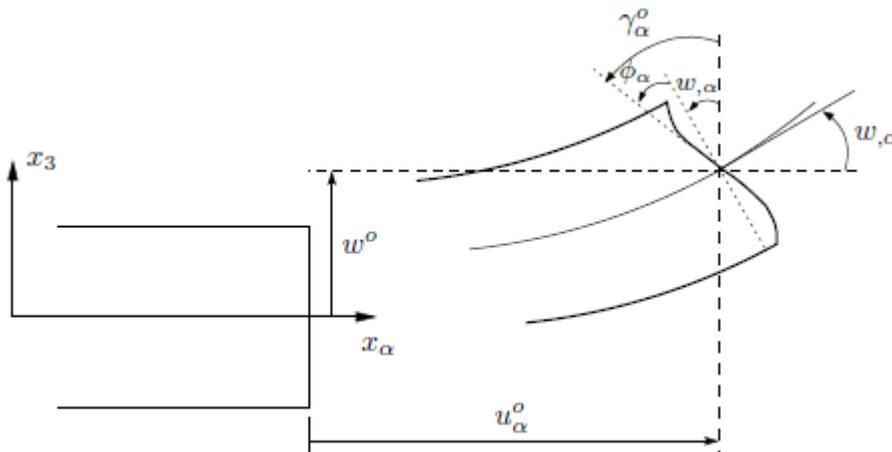


Figure II.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan (1945) avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

- L'approche de Reissner (1945) :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

➤ L'approche de Reddy (1987) avec :

$$➤ f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de Reddy (1987), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

➤ L'approche de Touratier (1991) avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} = z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \quad (\text{II.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (J.N. Reddy (1984)).

Récemment, Afaq et al. (2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

➤ L'approche de Aydogdu (2005) avec ;

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .). Mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II.2.2. Approche par couche :

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La **figure. II.20.a** et les équations (II.3) et (II.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (A. Chabot (1997), E. Carrera (2000), K.S. Afaq (2003), J.N. Reddy (1984), M. Di Sciuva (1987)). Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zig-zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. II.5 et II.6).

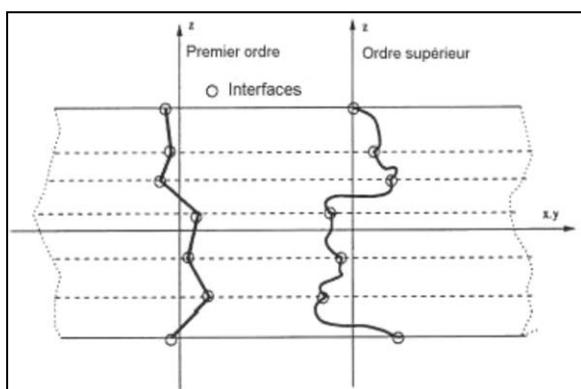


Figure. II.5 : Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. Viet.Tung. Nguyen (2004)

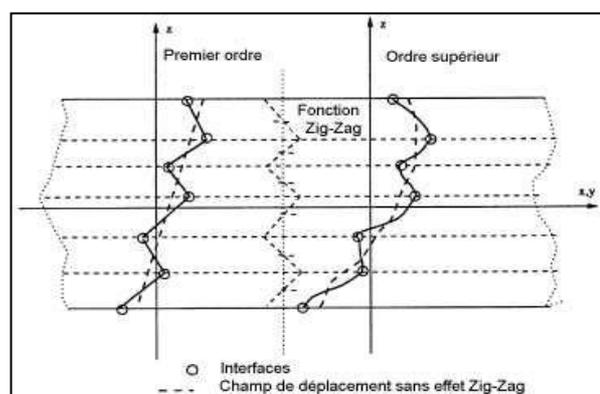


Figure. II.6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. Viet.Tung. Nguyen (2004)

II.2.2.1. Les modèles zig-zag :

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre M. Di Sciuva (1987). Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. II.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

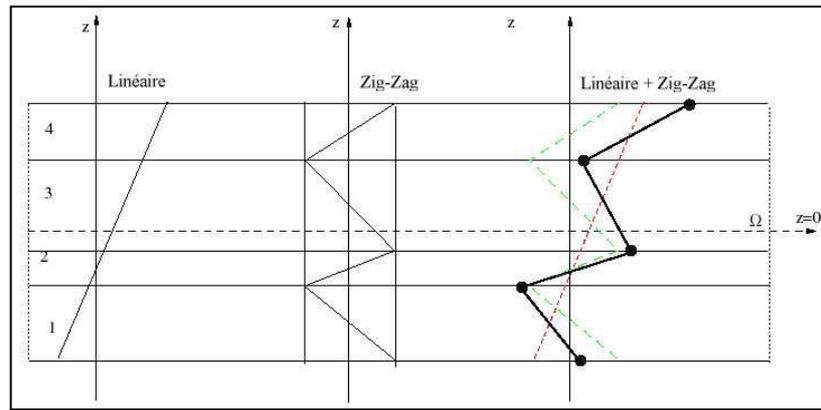


Figure. II.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. Viet.Tung. Nguyen (2004).

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de M. Di Sciuva (1984), plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag Viet.Tung. Nguyen (2004). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.II.8). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

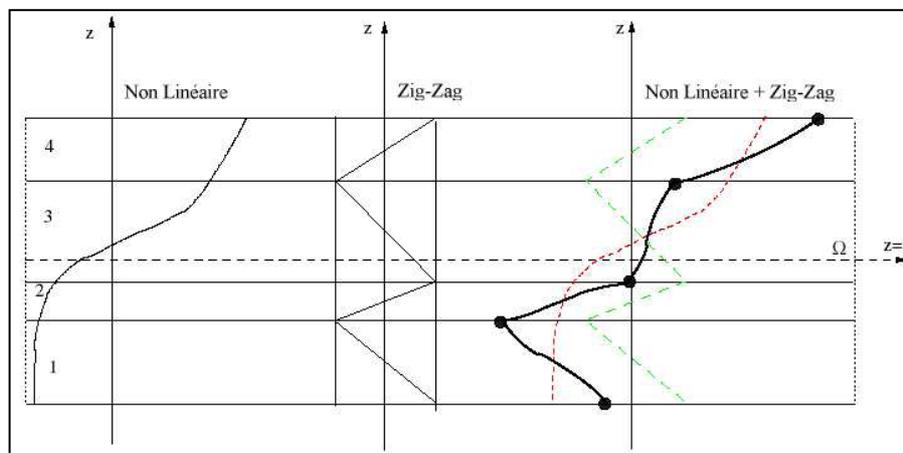


Figure. II.8 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. Viet.Tung. Nguyen (2004).

Dans les travaux de (M. Karama (1998), C. Ossadzew & M. Touratier (2001)), la fonction sinus de (M. Touratier (1991)) est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al. (2003) combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue U. Icardi (2001). Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C^1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

II.2.2.2. Les modèles couches discrètes :

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. II.5). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de (S. Srinivas & A.K. Rao (1973), J.N. Reddy (1987), M. Tahani & A. Nosier (2003)), on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de (J.G. Ren (1986), C. Kassapoglou (1987), W.L. Yin (1994)) utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi J.G. Ren (1986) utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont

considères cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans (C. Kassapoglou & P.A. Lagace (1987)), le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans (W.L. Yin (1994)), les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans (N.J Pagano (1978)). Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x ; y)$, n 'étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité Viet.Tung. Nguyen (2004).

II.3. Conclusion :

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

III.1 Introduction :

Dans ce chapitre une théorie de déformation en cisaillement de premier ordre est présentée pour les plaques fonctionnellement graduées et développer pour étudier la réponse vis-à-vis la flexion et la vibration libre des plaques simplement appuyées en matériau FGM. Ce model prend en compte les effets de cisaillement transversal et oblige d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Le nombre d'inconnus et en régissant des équations de la théorie actuelle est réduit, la rendant de ce fait simple pour employer. En outre, l'utilisation du facteur de correction de cisaillement est nécessaire dans la théorie.

III.2 Formulation théorique :**1) Cinématique :**

Dans cette étude, des hypothèses simplifiant sont apportées à la Théorie conventionnelle de la déformation du cisaillement de premier ordre de sorte que le nombre des inconnus est réduit. Le champ de déplacement de la présente théorie de la déformation en cisaillement de premier ordre est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1(x, y, z) = \mathbf{u}(x, y) + z\varphi_x \\ \mathbf{u}_2(x, y, z) = \mathbf{u}(x, y) + z\varphi_y \\ \mathbf{u}_3(x, y, z) = \mathbf{w}(x, y) \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

Où u , v , w , φ_x et φ_y sont cinq fonctions de déplacement inconnues du plan médian de la plaque, et h est l'épaisseur de la plaque.

Par devisions le déplacement transversal w en parties flexion et cisaillement (c'est-à-dire $w = w_b + w_s$) et faire d'autres hypothèses données par, $\varphi_x = -\partial w_b / \partial x$ et $\varphi_y = -\partial w_b / \partial y$ la théorie du nouveau champ de déplacement peut être réécrite sous une forme plus simple que :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1(x, y, z) = \mathbf{u}(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} \\ \mathbf{u}_2(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} \\ \mathbf{u}_3(x, y, z) = \mathbf{w}_b(x, y) + \mathbf{w}_s(x, y) \end{cases} \quad (\text{III-2})$$

De toute évidence, le champ de déplacement dans l'équation (III.2) contient seulement quatre inconnus (u , v , w_b , w_s). En fait, l'idée de partitionner la transversale Les déplacements dans les composants de flexion et de cisaillement sont d'abord proposés Par Huffington [20], plus tard adopté par Krishna Murty [21], Senthilnathan Et al. [22], Shimpi [23], et récemment par Thai et son Collègues [24-41].

Les contraintes non nulles associées au champ de déplacement dans Eq. (III.2) sont:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \quad (\text{III. 3a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \quad (\text{III. 3b})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \quad (\text{III. 3c})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III. 3d})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III. 3e})$$

2) Equations de mouvement :

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver des équations de mouvement. Le principe peut être énoncé sous une forme analytique comme

$$\int_0^T (\delta U + \delta V + \delta K) dt = 0 \quad (\text{III. 4})$$

Où δU , δV , et δK sont les variations de l'énergie de déformation, le travail effectué, et l'énergie cinétique, respectivement. La variation de l'énergie de déformation est calculé par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\ &= \int_A \left[N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} \right. \\ &\quad + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} + Q_x \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \\ &\quad \left. + Q_y \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right] dA \end{aligned} \quad (\text{III. 5})$$

Où N , M et Q sont les résolutions du stress définies par

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \quad (\text{III. 6a})$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \quad (\text{III. 6b})$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (\text{III. 6c})$$

La variation du travail effectué par des forces extérieures peut être exprimée comme

$$\delta V = - \int_A q \delta(w_b + w_s) dA \quad (\text{III. 7})$$

Où :

q : est la charge transversale.

La variation de l'énergie cinétique peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) \rho(z) dAd \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s)] \right. \\ &\quad \left. - I_1 \left(\dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u} + \dot{v} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v} \right) \right. \\ &\quad \left. + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{III. 8})$$

Où la convention point indique la différenciation avec respect de la variable temporelle t .

$\rho(z)$ est la densité de masse.

(I_0, I_1, I_2) Sont des inerties de masse définies par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{III. 9})$$

En remplaçant les expressions pour δU , δV , et δK par les équations. (III.5), (III.7), Et (III.8) dans l'équation (III.4) et l'intégration par parties, et la collecte des coefficients de δu , δv , δw_b , et δw_s les équations de mouvement suivantes sont obtenu:

$$\delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \quad (\text{III. 10a})$$

$$\delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \quad (\text{III. 10b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q \\ = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \end{aligned} \quad (\text{III. 10c})$$

$$\delta w_s : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \quad (\text{III. 10d})$$

Où :

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Est l'opérateur Laplacien en deux dimensions système de coordonnées cartésiennes.

Les conditions limites naturelles sont de la forme :

$$\delta u : N_x n_x + N_{xy} n_y \quad (\text{III. 11a})$$

$$\delta v : N_{xy} n_x + N_y n_y \quad (\text{III. 11b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - I_1 \ddot{u} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \right) n_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - I_1 \ddot{v} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \right) n_y \\ + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \end{aligned} \quad (\text{III. 11c})$$

$$\delta w_s : Q_x n_x + Q_y n_y \quad (\text{III. 11d})$$

$$\frac{\partial \delta w_b}{\partial n} : M_n \quad (\text{III. 11c})$$

Où :

$$M_{ns} = (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) \quad (\text{III. 12a})$$

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y \quad (\text{III. 12b})$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = n_x \frac{\partial}{\partial y} - n_y \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{III. 12c})$$

Avec n_x et n_y étant la direction cosinus de l'unité normale à la limite du plan moyen. De toute évidence, lorsque la déformation par cisaillement Les effets sont négligés ($w_s = 0$), la théorie actuelle récupère le CPT.

Les conditions limites ci-dessus peuvent être réécrites d'une manière explicite se forment

Bord encasté :

$$u = v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = 0, \quad \text{at } x = 0, a \quad (\text{III. 13a})$$

$$u = v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = 0, \quad \text{at } y = 0, b \quad (\text{III. 13b})$$

Bord simplement soutenu :

$$N_x = v = w_b = w_s = M_x = 0, \quad \text{at } x = 0, a \quad (\text{III. 14a})$$

$$u = N_y = w_b = w_s = M_y = 0, \quad \text{at } y = 0, b \quad (\text{III. 14b})$$

Bord libre :

$$N_x = N_{xy} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - I_1 \ddot{u} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} = Q_x = M_x = 0, \text{ at } x = 0, a \quad (\text{III. 15a})$$

$$N_{xy} = N_y = 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - I_1 \ddot{v} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} = Q_y = M_y = 0, \text{ at } y = 0, b \quad (\text{III. 15b})$$

4) Equations constitutives:

Considérons les plaques FG à partir d'un mélange de deux phases matérielles, Par exemple un métal et une céramique comme le montre la **figure. 1**. Le coefficient de Poisson ν est supposé être constant, alors que le module de Young E et la densité de masse ρ est supposée varier de manière continue à travers l'épaisseur.

Le module de Young $\mathbf{E}(\mathbf{z})$ et la densité de masse $\rho(\mathbf{z})$ sont donnés par :

$$E(\mathbf{z}) = E_m + (E_c - E_m)V_c \quad (\text{III. 16a})$$

$$\rho(\mathbf{z}) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)V_c \quad (\text{III. 16b})$$

Où :

Les indices m et c représentent les métaux et la céramique constituants, respectivement.

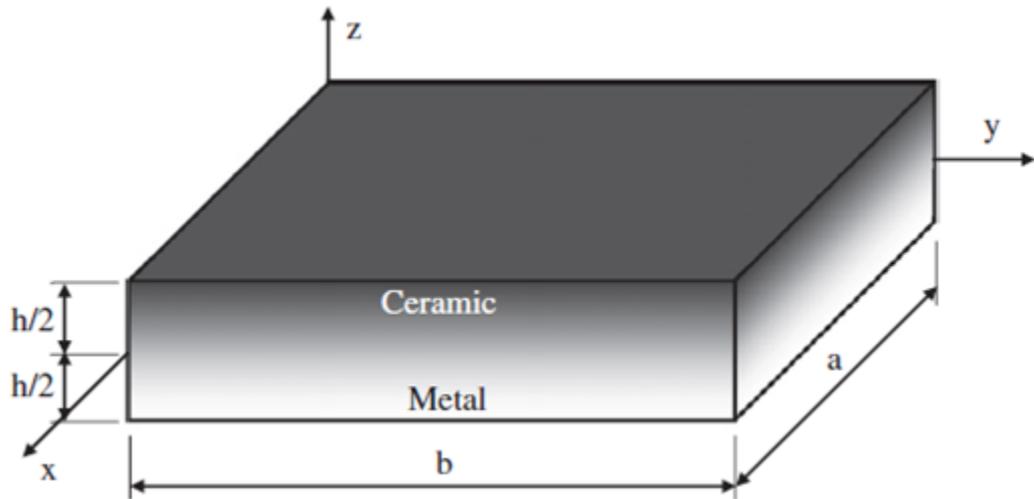


Figure. III.1 : géométrie et les coordonnées d'une plaque isotrope en FG.

$V_c = (0.5 + z/h)^P$ Est la fraction volumique de la céramique; Et P est l'indice de la loi de puissance. La valeur de P égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique, alors que la P infinie indique une plaque riche en métal. La variation de la combinaison de la céramique et du métal est linéaire pour $P = 1$.

Selon le schéma de Mori-Tanaka, le module de masse $K(z)$ est Donné par [42]

$$k(z) = k_m + (k_c - k_m) = \frac{V_c}{1 + V_m \frac{k_c - k_m}{k_m + \left(\frac{4}{3}\right) G_m}} \quad (\text{III. 17})$$

Où :

$$V_m = 1 - V_c$$

G : est le module de cisaillement.

Rappelons que le module K et le module de cisaillement G sont liés au module de Young E et le coefficient de Poisson ν par :

$K = E/3(1 - 2\nu)$ et $G = E/2(1 + \nu)$. Ainsi, le Le module Young effective E (z) peut être obtenu en réécrivant l'équation (II.14) En termes de E et ν

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) = \frac{V_c}{1 + V_m \left(\frac{E_c}{E_m} - 1 \right) \frac{1 + \nu}{3 - 3\nu}} \quad (\text{III. 18})$$

Les relations constitutives linéaires d'une plaque FG peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 19})$$

En remplaçant l'équation (III.3) dans l'équation (III.19) et les résultats ultérieurs dans l'éq. (6), les résultats de la contrainte sont obtenus en termes de déplacements (u, v, w_b, w_s) comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 20a})$$

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} \\
& = B \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \\
& + D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 20b})
\end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = A^s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 20c})$$

Où :

(A, A^s, B, D) sont les coefficients de rigidité définis par :

$$(A, B, D) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \frac{E(z)}{1-\nu^2} dz \quad (\text{III. 21a})$$

$$A^s = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1-\nu)} dz \quad (\text{III. 21b})$$

Avec :

k : étant un facteur de correction de cisaillement.

5) Equations de mouvement en termes de déplacements:

En remplaçant l'équation (III.20) dans l'équation (III.10), les équations du mouvement Peut être exprimé en termes de déplacements (u, v, w_b, w_s) comme :

$$A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - B \nabla^2 \frac{\partial w_b}{\partial x} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \quad (\text{III. 22a})$$

$$A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - B \nabla^2 \frac{\partial w_b}{\partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \quad (\text{III. 22b})$$

$$\begin{aligned}
B\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - D\nabla^4 w_b + q \\
= I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{V}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b
\end{aligned} \tag{III. 22c}$$

$$A^s \nabla^2 w_s + q = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \tag{III. 22d}$$

$$\underline{\text{Où :}} \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

III.3 Solutions analytiques :

Considérons une plaque rectangulaire simplement soutenue avec une longueur a et la largeur b sous la charge transversale q comme le montre la Fig. III.1. Basé sur L'approche de Navier, les solutions sont supposées :

$$\left\{ \begin{aligned}
U(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \\
V(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \\
W_b(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \\
W_s(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y
\end{aligned} \right. \tag{III. 23}$$

Où :

$i = \sqrt{-1}$, $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$, $(U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn})$ Sont des coefficients, et ω est la fréquence des vibrations libres. La charge transversale q est également étendue dans la série des sinus à double Fourier comme

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \tag{III. 24}$$

Les coefficients Q_{mn} sont donnés ci-dessous pour certaines charges typiques:

$$\begin{aligned}
Q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y \, dx dy \\
&= \begin{cases} q_0 & \text{pour une charge sinusoidale} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{pour une charge uniforme} \end{cases} \quad (\text{III. 25})
\end{aligned}$$

En remplaçant les équations (III.23) et (III.24) dans l'équation (III.22), les solutions analytiques peut être obtenu à partir de :

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ Q_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{III. 26})
\end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{cases} S_{11} = A\alpha^2 + \frac{1-\nu}{2}A\beta^2, S_{12} = \frac{1-\nu}{2}A\beta, S_{13} = \beta\alpha(\alpha^2 + \beta^2) \\ S_{22} = \frac{1-\nu}{2}A\alpha^2 + A\beta^2 \\ S_{23} = B\beta(\alpha^2 + \beta^2), S_{33} = D(\alpha^2 + \beta^2)^2, S_{44} = A^s(\alpha^2 + \beta^2)^2 \\ m_{11} = m_{22} = m_{34} = m_{44} = I_0, m_{13} = \alpha I_1, m_{23} = \beta I_1 \\ m_{33} = I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2) \end{cases} \quad (\text{III. 27})$$

III.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, L'étude de la flexion et la vibration libre des plaques simplement appuyées en matériau fonctionnellement graduées (FGM) sont examinées par un nouveau model de cisaillement de premier ordre des plaques. Ce model prend en compte les effets de cisaillement transversal et nécessite d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Le module de Young est supposé varie dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM en fonction d'une simple loi de puissance. Les équations de mouvement ont été trouvées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant la solution de Navier, et les fréquences fondamentales de vibration sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres. Une validation des résultats de ce model de déformation en cisaillement de premier ordre ainsi qu'une étude paramétrique serons fait dans le chapitre suivant.

, ,

IV.1 Introduction :

Dans ce chapitre les solutions analytiques obtenues dans le chapitre précédent pour le comportement statique et dynamique ont été obtenues par la solution de Navier. Les résultats numériques obtenus par cette théorie de déformation en cisaillement de premier ordre sont présentés, et comparés à ceux disponibles dans la littérature pour voir l'influence de la géométrie et de la variation matérielle sur le comportement statique et dynamique de ce type des plaques isotrope en FGM.

IV.2 Résultats numériques :

Dans ce chapitre, différents exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle dans la prévision de la flexion et des réponses de vibration libres des plaques FG simplement supportées. Deux types de plaques FG d'Al / Al₂O₃ et Al / ZrO₂ sont utilisés dans cette étude. Les propriétés des matériaux des plaques FG sont listées dans le **tableau IV.1**. Le module de Young et la densité de masse des plaques FG, sauf mention contraire, sont évalués à l'aide de la loi des mélanges. Aux fins de la vérification, les résultats obtenus sont comparés aux solutions 3D et quasi 3D exactes et à celles prédites par d'autres théories des plaques. Pour tous les calculs, la valeur du facteur de correction de cisaillement est prise en 5/6. Pour plus de commodité, les paramètres sans dimension suivantes sont utilisés:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right), \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 a} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right), \bar{\sigma}_y = \frac{h}{q_0 a} \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right), \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xy}(0,0,z), \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, z \right), \bar{\sigma}_{yz} = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, z \right) \\ \bar{\beta} &= \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}, \hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}, \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c} \end{aligned} \quad (IV-01)$$

IV.2.1 Analyse de flexion :

Exemple 01: Le premier exemple est effectué pour des plaques carrées Al/Al₂O₃ isotropes fines et épaisses sous des charges sinusoïdales. Trois valeurs différentes de l'indice de la loi de puissance P = 1, 4 et 10 sont considérées. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions quasi 3D fournies par Neves et al. [11, 18,19] et Carrera et al. [43,44] dans le **tableau IV.2**. Il convient de noter que les travaux de Neves et al. [11, 18,19] et Carrera et al. [43,44] sont mis en œuvre en utilisant la formulation unifiée de Carrera. Cependant, les solutions quasi 3D de

Neves et al. Sont dérivés de variations sinusoïdales [18], hyperboliques [19] et cubiques [11] pour les déplacements dans le plan et une variation parabolique pour le déplacement transversal, tandis que les solutions quasi 3D 3D analytiques [43] et les éléments finis [44] Carrera et al. Sont obtenus en fonction de variations de quatrième ordre pour les déplacements dans le plan et transversal ($N = 4$). De plus, les solutions quasi-3D représentent un effet d'étirement d'épaisseur (c.-à-d. $\varepsilon_z \neq 0$), qui n'est pas inclus dans les solutions présentes. En général, la théorie actuelle donne une bonne prédiction du déplacement et du contrainte, même dans les plaques épaisses ($a/h = 4$) où les effets de la déformation du cisaillement sont significatifs. Enfin, il est important de noter que la théorie actuelle ne comporte que quatre inconnus contre onze dans le cas de la quasi-3D [11, 18,19].

Tableau IV.1 : Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG.

Propriétés	Métal		Céramique	
	Aluminium	Alumine	Zircone	
E(GPa)	70	380	200	
ν	0.3	0.3	0.3	
ρ (Kg/m ³)	2703	3800	5700	

Pour illustrer davantage la précision de la théorie actuelle pour un large éventail d'indice de loi de puissance P et le rapport d'épaisseur a/h , les variations de la flèche adimensionnelle \bar{w} par rapport à l'indice P de puissance et le rapport d'épaisseur a/h sont illustrées sur les **Figure IV.1** et **IV.2**, respectivement.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés par Thai et Vo [27] en utilisant CPT et TSDT. En général, les résultats de la théorie actuelle et du TSDT sont presque identiques, sauf dans le cas d'un indice élevé de l'indice de puissance ($P > 2$) où une petite divergence entre la théorie actuelle et TSDT est visible (voir la **figure IV.1**). Cela peut être dû à l'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement constant pour toutes les valeurs de l'indice de la loi de puissance P . Étant donné que le CPT néglige les effets de déformation du cisaillement, il sous-estime la déformation de la plaque épaisse (voir la **figure IV.1**).

Tableau IV.2 : Contrainte et déformation adimensionnelles des plaques carrées isotropes Al / Al₂O₃ sous des charges sinusoïdales.

P	Méthode	$\bar{\sigma}_x (h/3)$			\bar{w}		
		a/h=4	a/h=10	a/h=100	a/h=4	a/h=10	a/h=100
1	Quasi-3D [11]	0.5911	1.4917	14.9450	0.7020	0.5868	0.5647
	Quasi-3D [18]	0.5925	1.4945	14.9690	0.6997	0.5845	0.5624
	Quasi-3D [19]	0.5910	1.4917	14.9440	0.7020	0.5868	0.5648
	Quasi-3D [43]	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
	Quasi-3D [44]	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
	Présente	0.5987	1.4968	14.9683	0.7291	0.5890	0.5625
4	Quasi-3D [11]	0.4330	1.1588	11.7370	1.1108	0.8700	0.8240
	Quasi-3D [18]	0.4404	1.1783	11.9320	1.1178	0.8750	0.8286
	Quasi-3D [19]	0.4340	1.1593	11.7380	1.1095	0.8698	0.8241
	Quasi-3D [43]	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
	Quasi-3D [44]	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
	Présente	0.4769	1.1922	11.9222	1.1125	0.8736	0.8286
10	Quasi-3D [11]	0.3097	0.8462	8.6010	1.3334	0.9888	0.9227
	Quasi-3D [18]	0.3227	1.1783	11.9320	1.3490	0.8750	0.8286
	Quasi-3D [19]	0.3108	0.8467	8.6013	1.3327	0.9886	0.9228
	Quasi-3D [43]	0.3695	0.8965	8.6077	1.3745	1.0072	0.9361
	Quasi-3D [44]	0.3695	0.8965	8.6077	1.3745	1.0072	0.9361
	Présente	0.3563	0.8907	8.9072	1.3178	0.9966	0.9361

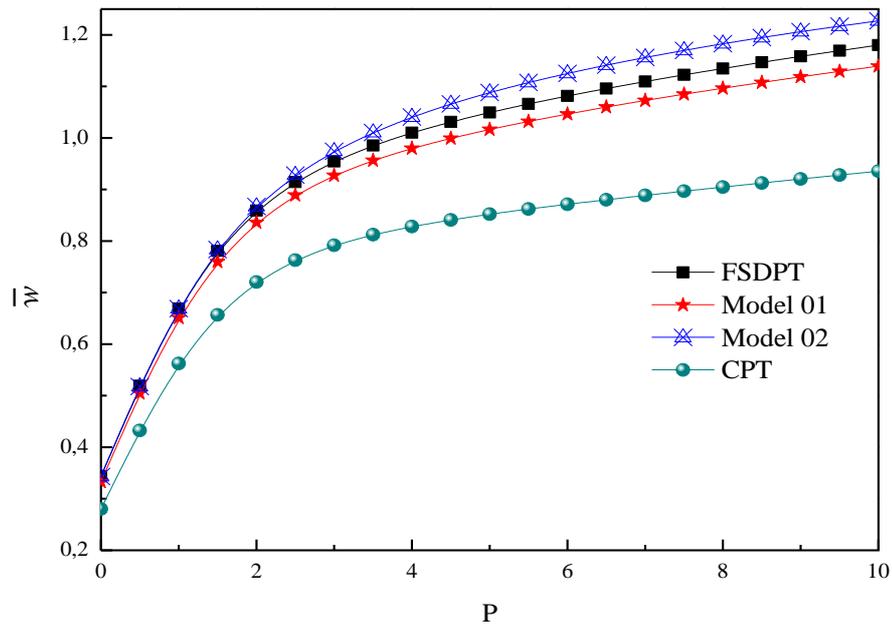


Figure IV.1 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque carrée isotrope en AL/Al_2O_3 sous une charge sinusoïdale par rapport à l'indice de la loi de puissance P ($a = 5 h$).

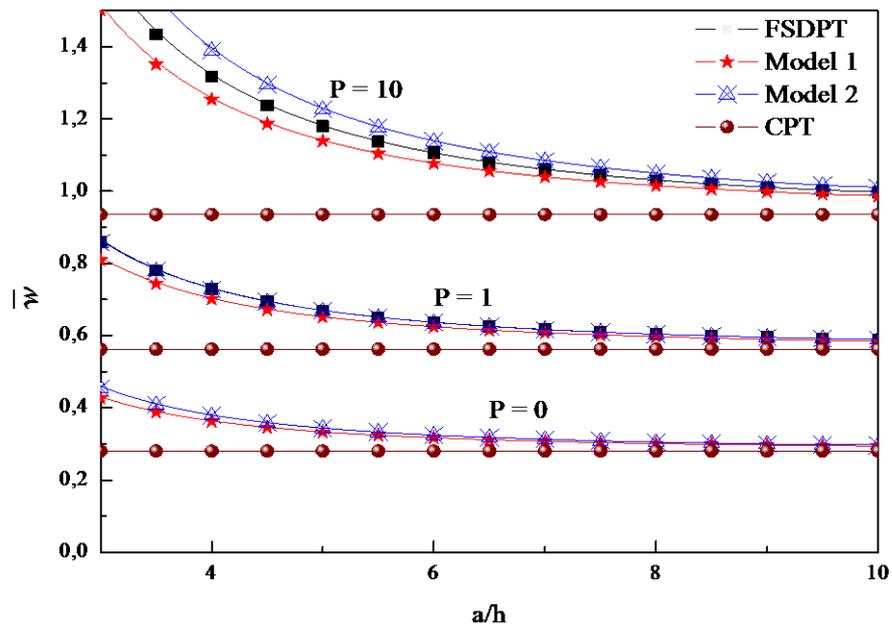


Figure IV.2 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque carrée isotrope en AL/Al_2O_3 sous une charge sinusoïdale versus rapport d'épaisseur a/h .

Exemple 2 : On examine une plaque carrée isotrope Al/Al₂O₃ moyennement épaisse sous des charges uniformes ($a/h=10$). Le **tableau IV.3** contient des flèches et contraintes sans dimension pour différentes valeurs de l'indice de la loi de puissance P. La variation de l'épaisseur de l'épaisseur des contraintes est également présentée dans la **Figure IV.3** pour le cas de $P = 2$. Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par **Zenkour [12]** en fonction de la théorie de la déformation du cisaillement sinusoïdal (SSDT). En général, un bon accord entre les résultats est obtenu, à l'exception du cas des contraintes de cisaillement transversales σ_{xz} et σ_{yz} où une différence entre la théorie actuelle et SSDT est observée. Ceci est dû au fait que la théorie actuelle vérifie les conditions aux limites des contraintes sur les surfaces de la plaque (voir la **figure IV.3c**). Ainsi, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire.

IV.2.2 Analyse de vibration libre :

Exemple 3. Dans cette vérification, une plaque carrée isotrope Al/ZrO₂ est considérée. L'objectif de cet exemple est de vérifier les résultats obtenus avec les solutions 3D exactes de vel et de Ben [45] et de solutions quasi 3D de Neves et coll. [11, 18, 19]. Le module efficace du jeune de la plaque est estimé à l'aide du système Mori-Tanaka. La fréquence fondamentale sans dimension $\bar{\beta}$ est présentée dans le **tableau IV.4** pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur a/h et de l'indice de la loi de puissance P. On peut voir que les résultats de la théorie actuelle conviennent bien avec les solutions 3D et quasi-3D exactes pour les plaques minces et épaisses avec diverses valeurs de l'indice de loi de puissance P.

Exemple 4 : L'exemple suivant est effectué pour une plaque carrée isotrope AL/Al₂O₃ avec un rapport d'épaisseur a/h varié de 2 à 10. Cet exemple vise à vérifier l'exactitude de la théorie actuelle pour les plaques de FG très épaisses. Le **tableau IV.5** montre les deux premières fréquences sans dimension $\hat{\omega}$ pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur a/h et de l'indice de la loi de puissance P. Il convient de noter que les solutions quasi 3D données par Matsunaga [46] sont obtenues en fonction de variations d'ordre supérieur pour les déplacements en plans et transversaux. Encore une fois, les résultats obtenus se trouvent en excellent accord avec les solutions quasi-3D [46] pour tous les modes de vibration, même dans les plaques très épaisses ($a = 2 h$).

Tableau IV.3 : flèche et contrainte adimensionnelle des plaques carrées isotropes Al/Al₂O₃ sous charges uniformes (m, n = 50 séries de termes, a/h=10).

P	Méthode	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x (h/2)$	$\bar{\sigma}_y (h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy} (-h/3)$	$\bar{\sigma}_{yz} (h/6)$	$\bar{\sigma}_{xz} (0)$
0	SSDPT [12]	0.4665	2.8932	1.9103	1.2850	0.4429	0.5114
	Présente	0.4666	2.8732	1.9155	1.2990	0.4004	0.4004
1	SSDT [12]	0.9287	4.4745	2.1692	1.1143	0.5446	0.5114
	Présente	0.9288	4.4407	2.1767	1.1218	0.4923	0.4004
2	SSDT [12]	1.1940	5.2296	2.0338	0.9907	0.5734	0.4700
	Présente	1.1909	5.1853	2.0441	0.9998	0.4799	0.3407
3	SSDT [12]	1.3200	5.6108	1.8593	1.0047	0.5629	0.4367
	Présente	1.3123	5.5576	1.8719	1.0160	0.4393	0.2952
4	SSDT [12]	1.3890	5.8915	1.7197	1.0298	0.5346	0.4204
	Présente	1.3770	5.8316	1.7338	1.0427	0.3981	0.2711
5	SSDT [12]	1.4356	6.1504	1.6104	1.0451	0.5031	0.4177
	Présente	1.4205	6.0857	1.6252	1.0591	0.3647	0.2622
6	SSDT [12]	1.4727	6.4043	1.5214	1.0536	0.4755	0.4227
	Présente	1.4555	6.3364	1.5364	1.0683	0.3406	0.2622
7	SSDT [12]	1.5049	6.6547	1.4467	1.0589	0.4543	0.4310
	Présente	1.4867	6.5847	1.4615	1.0740	0.3245	0.2666
8	SSDT [12]	1.5343	6.8999	1.3829	1.0628	0.4392	0.4399
	Présente	1.5158	6.8287	1.3973	1.0782	0.3147	0.2730
9	SSDT [12]	1.5617	7.1383	1.3283	1.0662	0.4291	0.4481
	Présente	1.5433	7.0663	1.3422	1.0819	0.3095	0.2799
10	SSDT [12]	1.5876	7.3689	1.2820	1.0694	0.4227	0.4552
	Présente	1.5697	7.2963	1.2953	1.0853	0.3074	0.2867
Métal	SSDT [12]	2.5327	2.8932	1.9103	1.2850	0.4429	0.5114
	Présente	2.5329	2.8732	1.9155	1.2990	0.4004	0.4004

Exemple 5 : Le dernier exemple est effectué pour une plaque rectangulaire isotrope $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ ($b=2a$) avec un rapport d'épaisseur varié de 5 à 20 et l'indice de loi de puissance a varié de 0 à 10. Le but de cet exemple est de vérifier avec le plus haut Modes d'ordre. Les quatre fréquences sans dimension les plus basses $\bar{\omega}$ sont données dans le **tableau IV.6**. Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés par Thai et al. [40] basé sur HSDT et Hosseini-Hashemi et al. [47] en fonction de la FSDT. Un excellent accord entre les résultats est visible pour tous les modes de vibration. En général, le FSDT actuel et le FSDT existant dans la littérature donnent des résultats presque identiques.

Cela peut être observé à partir des **Figure IV.4** et **IV.5**, où les solutions actuelles sont comparées avec deux modèles d'ordre élevé plus récente basé sur une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique. Il convient de noter que la FSDT proposée contient moins de nombre d'inconnues que la FSDT existante dans la littérature.

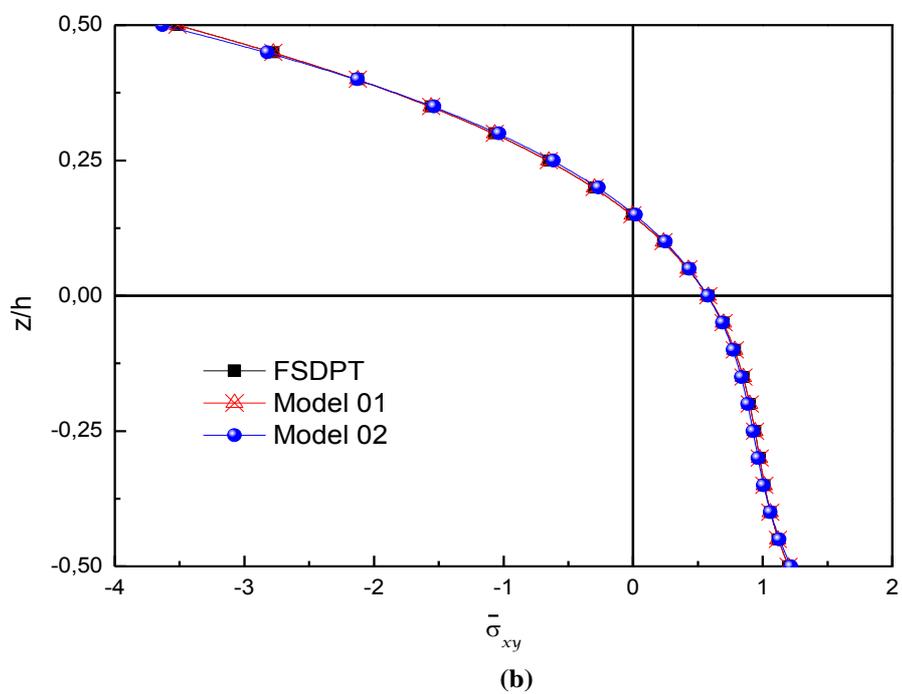
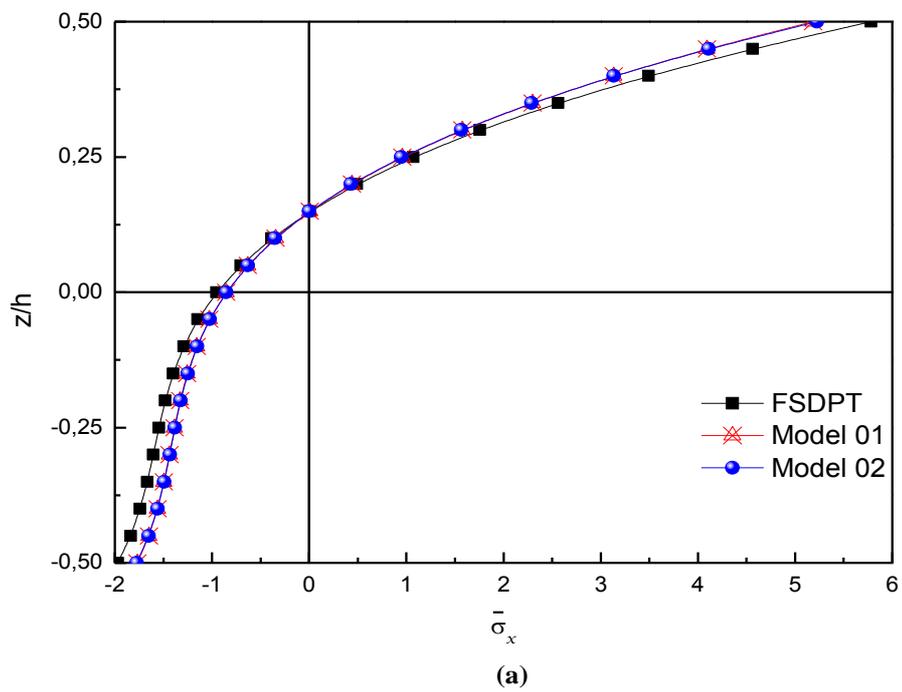
On peut conclure que la FSDT actuelle donne non seulement des résultats comparables avec la FSDT existante dans la littérature, mais aussi plus simple en raison d'un nombre d'inconnus, à savoir quatre contre cinq. Cela indique que la partition du déplacement transversal dans les parties de flexion et de cisaillement (c.-à-d $w = w_b + w_s$) et l'utilisation d'autres hypothèses données par $\varphi_x = -\partial w_b / \partial x$ et $\varphi_y = -\partial w_b / \partial y$ ont Un effet minimal sur la précision des résultats, mais il peut améliorer le coût de calcul en raison de la réduction du nombre d'inconnus ainsi que des équations régissant le mouvement.

Tableau IV.4 : Fréquence fondamentale sans dimension $\bar{\beta}$ de plaques carrées isotropes Al/ZrO₂.

Méthode	P=0		P=1			a/h=5		
	a/h =√10	a/h =10	a/h =5	a/h =10	a/h =20	P =2	P =3	P =5
3D [45]	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
Quasi-3D [18]	–	–	0.2193	0.0596	0.0153	0.2198	0.2212	0.2225
Quasi-3D [19]	–	–	0.2193	0.0596	0.0153	0.2201	0.2216	0.2230
Quasi-3D [11]	–	–	0.2193	–	–	0.2200	0.2215	0.2230
Présente	0.4618	0.0577	0.2173	0.0592	0.0152	0.2189	0.2207	0.2222

Tableau IV.5 : Les deux premières fréquences additionnelles $\hat{\omega}$ des plaques carrées isotropes Al/Al₂O₃.

Mode	a/h	Méthode	Indice de la loi de puissance P				
			0	0.5	1	4	10
1	2	Quasi-3D [46]	0.9400	0.8233	0.7477	0.5997	0.5460
		Présente	0.9265	0.8062	0.7333	0.6116	0.5644
	5	Quasi-3D [46]	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
		Présente	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
	10	Quasi-3D [46]	0.0578	0.0492	0.0443	0.0381	0.0364
		Présente	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
2	2	Quasi-3D [46]	1.7406	1.5425	1.4078	1.1040	0.9847
		Présente	1.7045	1.4991	1.3706	1.1285	1.0254
	5	Quasi-3D [46]	0.4658	0.4040	0.3644	0.3000	0.2790
		Présente	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
	10	Quasi-3D [46]	0.1381	0.1180	0.1063	0.0905	0.0859
		Présente	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867



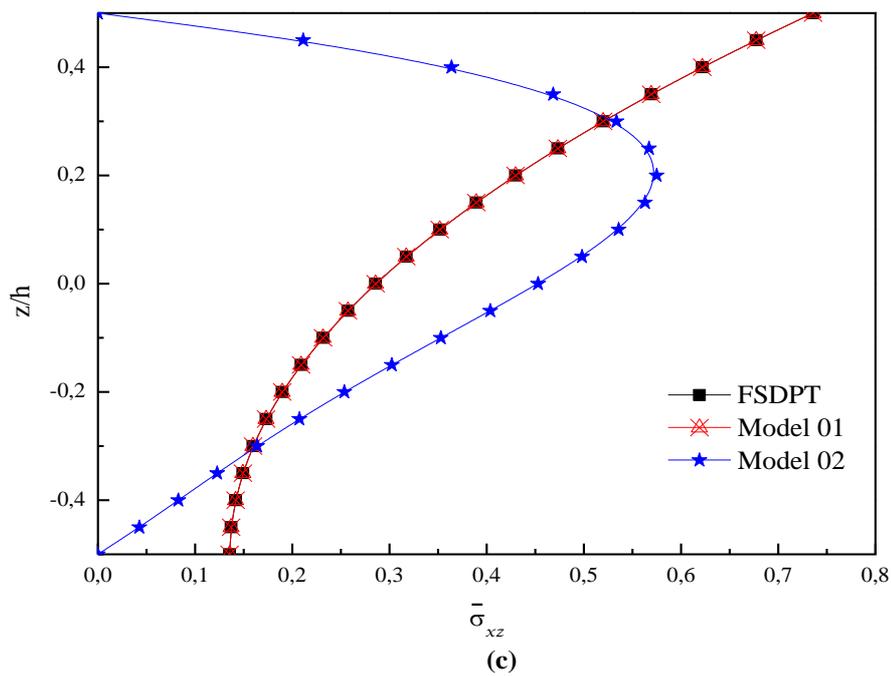


Figure. IV.3 : Variation des contraintes adimensionnel à travers l'épaisseur d'une plaque carrée isotrope Al/Al₂O₃ sous chargement uniforme ($a=b=10h$, $P=2$).

Tableau IV.6 : Fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ des plaques rectangulaires isotropes Al/Al₂O₃ (b=2a).

a/h	Mode	Méthode	Indice de la loi de puissance P						
			0	0.5	1	2	5	8	10
5	1 (1, 1)	HSDT [40]	3.4412	2.9347	2.6475	2.3949	2.2272	2.1697	2.1407
		FSDT [47]	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		Présente	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
	2 (1, 2)	HSDT [40]	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2964	3.2514
		FSDT [47]	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
		Présente	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
	3 (1, 3)	HSDT [40]	8.0749	6.9366	6.2663	5.6390	5.1425	4.9758	4.9055
		FSDT [47]	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		Présente	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
	4 (2, 1)	HSDT [40]	10.1164	8.7138	7.8762	7.0751	6.4074	6.1846	6.0954
		FSDT [47]	9.7416	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518
		Présente	10.1089	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	6.3708	6.2683
10	1 (1, 1)	HSDT [40]	3.6518	3.0990	2.7937	2.5364	2.3916	2.3411	2.3110
		FSDT [47]	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
		Présente	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
	2 (1, 2)	HSDT [40]	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6846	3.6368
		FSDT [47]	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580
		Présente	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7071	3.6580
	3 (1, 3)	HSDT [40]	9.1880	7.8189	7.0515	6.3886	5.9765	5.8341	5.7575
		FSDT [47]	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
		Présente	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
	4 (2, 1)	HSDT [40]	11.8315	10.0810	9.0933	8.2309	7.6731	7.4813	7.3821
		FSDT [47]	11.8310	10.0740	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
		Présente	11.8307	10.0737	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
20	1 (1, 1)	HSDT [40]	3.7123	3.1458	2.8352	2.5771	2.4403	2.3923	2.3619
		FSDT [47]	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642
		Présente	3.7123	3.1456	2.8352	2.5777	2.4425	2.3948	2.3642
	2 (1, 2)	HSDT [40]	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.8107	3.7622
		FSDT [47]	5.9198	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681
		Présente	5.9199	5.0175	4.5228	4.1115	3.8939	3.8170	3.7681
	3 (1, 3)	HSDT [40]	9.5669	8.1133	7.3132	6.6433	6.2760	6.1476	6.0690
		FSDT [47]	9.5668	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
		Présente	9.5669	8.1121	7.3132	6.6471	6.2903	6.1639	6.0843
	4 (2, 1)	HSDT [40]	12.4562	10.5677	9.5261	8.6509	8.1636	7.9934	7.8909
		FSDT [47]	12.4560	10.5660	9.5261	8.6572	8.1875	8.0207	7.9166
		Présente	12.4562	10.5657	9.5261	8.6572	8.1875	8.0207	7.9165

IV.3 Conclusion :

Une théorie de déformation de cisaillement de premier ordre est développée pour la flexion et la vibration libre des plaques FG. L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse de la flèche et la vibration libre des plaques en FGM en utilisant une théorie de déformation en cisaillement de premier ordre.

Un FSDT simple a été présenté pour la flexion et la vibration libre Analyse des plaques FG. Equations de mouvement et conditions aux limites sont dérivées du principe de Hamilton. Des solutions analytiques sont obtenues pour les plaques simplement supporté.

Le nombre des inconnues pour la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation en cisaillement.

La théorie présentée exige d'utiliser un facteur de correction de cisaillement, dans notre cas on à utiliser la valeur de (5/6) comme un facteur correcteur.

Conclusion générale

Une théorie de déformation cisaillement de premier ordre (FSDT) simple a été présentée pour l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques FG. Les équations de mouvement et les conditions aux limites sont dérivées du principe de Hamilton. Des solutions analytiques sont obtenues pour les plaques simplement supportées. En simplifiant davantage les hypothèses à la FSDT conventionnelle, le nombre d'inconnues et les équations gouvernantes de la présente FSDT sont réduits d'une unité, ce qui rend la nouvelle théorie simple et efficace à utiliser. Des études de vérification montrent que ces hypothèses simplificatrices ont un effet minimal sur la précision des résultats pour le problème considéré. Par conséquent, on peut conclure que la présente FSDT est non seulement précise mais également simple pour prédire les réponses de flexion et de vibration des plaques FG.

Références

- [**Abdi 1997**] ABDIZADEH, H, Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex : (Composites Laminaires Tri-Couches à Base D'Alumine), Thèse de Doctorat d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon France, 212p.
- [**Aldo 2002**] Aldo R. Boccaccini, O. Vander Biest, Jan B. Talbot, Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications: Proceedings of the International Symposium, Electrochemical Society, Electrodeposition Division, United Engineering Foundation (U.S.),2002.
- [**Boch 1986**] Boch. P Chertier. Huttepain. M Tapa casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated composites, 1986.
- [**Boch 1987**] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated composites, J. Am. Ceram. Soc; 69 (8): 191-192, 1987.
- [**Carrera 2000**] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. Composite structures, vol.50, pages 183,198,2000.
- [**Delaleet Erdogan 1983**] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics; 50(3):609-614, 1983.
- [**Di Sciuva 1984**] M. Di Sciuva. A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. Atti. Accad. Sci. Torino, vol. 118, pages 279/295, 1984.
- [**He 1994**], L.H. He. A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces. Int J Solids Structures, vol.31,no. 5, pages 613-627, 1994.
- [**J.M. Whitney (1973)**] Whitney, J.M. et Sun, C.T., "A higher-order theory for extensional motion of laminated composites", Journal of Sound and Vibration,(1973),85-97.
- [**Kieback 2003**]. Kieback B., Neubrand A., Riedel H., Processing techniques for functionally graded materials, Materials Science and Engineering, A362 (2003) 81-105.
- [**Melenk 1996**]. J.M.Melenk, I.Babuska. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. Computer Meth ApplMechEngng 1996; 139:289-314.
- [**Mindlin1951**] R.D Middling. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38, 1951.

- [**Mistler 1973**] R. E. Mistler, High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull.*; 52 (11): 850-854, 1973.
- [**Miyamoto 1999**] Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G., *Functionally graded materials: design, processing and applications*, Materials Technology Series, Vol. 5-1999.
- [**Nguyen 2004**] Viet. Tung. Nguyen. Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.
- [**Noor 1989**] A. K. Noor & W. S. Burton. Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *ApplMech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1, 12, 1989.
- [**Omori et al 1998**] Omori M., Kakita T., Okubo A., and Hirai T., *J. Jpn. Inst.Met*,62(1998)986-991.
- [**Pagano 1969**] N. J. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending *J. Comp. Mat.*, vol. 3, pages 398-411, 1969
- [**Pagano 1970**] N.J. Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. *J. Comp. Mat.*, vol. 4, pages 20-35, 1970.
- [**Reissner 1945**] Reissner. E. The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates.*J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77, 1945.
- [**Reissner 1961**] E. Reissner& Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of heterogeneousaelotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.
- [**Reissner 1975**] E. Reissner, on transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5): 495-502, 1975.
- [**Srinivas 1970**] S. Srinivas & A. K. Rao. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int J Solids Structures*, vol. 6, pages 1463{1481, 1970}.
- [**Srinivas 1973**] S. Srinivas & A.K. Rao. Flexure of thick plates. *ASME*, pages 298-299, 1973.
- [**Takahashi 1990**] Takahashi M., Itoh Y, Kashiwaya H., Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai-Japan, 1990,129 34.
- [**Yang 1966**] P. C. Yang, C.H.Norris&Y.Starsky. Elastic wave propagation in heterogeneous plat. *J. Solide Structures*. Vol.2, pages 665-684, 1966.

- [**Neves AMA**], Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Compos Part B: Eng* 2013;44(1):657–74.
- [**Zenkour AM**]. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2006;30(1):67–84.
- [**Neves AMA**], Ferreira AJM, Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN, et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Part B: Eng* 2012;43(2):711–25.
- [**Neves AMA**], Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2012;94(5):1814–25.
- [**Huffington NJ**]. Response of elastic columns to axial pulse loading. *AIAAJ* 1963;1(9):2099104.
- [**Krishna Murty AV**]. Flexure of composite plates. *Compos Struct* 1987;7(3):161–77.
- [**Senthilnathan NR**], Chow ST, Lee KH, Lim SP. Buckling of shear-deformable plates. *AIAA J* 1987;25(9):1268–71.
- [**Shimpi RP**]. Refined plate theory and its variants. *AIAA J* 2002;40(1):137–46.
- [**Kim SE, Thai HT, Lee J**]. Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory. *Thin-Walled Struct* 2009;47(4):455–62.
- [**Thai HT, Park T, Choi DH**]. An efficient shear deformation theory for vibration of functionally graded plates. *Arch Appl Mech* 2013;83(1):137–49.
- [**Thai HT, Kim SE**]. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Compos Struct* 2013;99:172–80.
- [**Mori T, Tanaka K**]. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall* 1973;21(5):571–4.
- [**Carrera E, Brischetto S, Robaldo A**]. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. *AIAA J* 2008;46(1):194–203.
- [**Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M**]. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Compos Part B: Eng* 2011;42(2):123–33.
- [**Vel SS, Batra RC**]. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *J Sound Vib* 2004;272(3–5):703–30.
- [**Matsunaga H**]. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Compos Struct* 2008;82(4):499–512.

[Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR]. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int J Mech Sci* 2011;53(1):11–22.

[H.-T. Thai, D.-H]. *Choi / Composite Structures* 101 (2013) 332–340

[Thai HT, Vo TP A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2013;37(5):3269–81.