

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN-KHALDOUN DE TIARET

FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Sciences & Technologie

Filière : Génie Mécanique

Parcours : Master Professionnel

Spécialité : Production Automatique

THÈME

**Modélisation et simulation d'une plaque d'alliage
d'aluminium 2024 T3 présentant deux entailles
latérales opposées**

Préparé par :

AZZOUZ Ahmed

BENDJEDDOU Abdelmonaim

Devant le Jury :

Nom et prénoms

Grade

Lieu d'exercice

Qualité

Atmani Houari

MAA

Président

Debbih Senouci

MAA

Examinateur

Moulgada Abdelmadjid

MCB

Encadreur

Promotion 2016 /2017

REMERCIEMENT

Nous remercions d'abord ALLAH le tout puissant de nous avoir donné la force, la patience et la volonté pour achever ce travail.

Nous tenons à exprimer en premier lieu, mes remerciements notre Encadreur Mr. Moulgada Abdelmadjid pour avoir accepté de diriger notre Travail, pour ses précieux conseils.

Nous remercions également tous les professeurs du département génie mécanique et production(CICP)

Nous remercions également tous les professeurs du département génie mécanique de l'Université IBN-KHALDOUN.

Que toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail accepte nos grands et sincères remerciements.

AZZOUZ Ahmed

BENDJEDDOU ABDELMONAIM



DEDICACE

Je dédie ce mémoire :

*À ma très chère mère qui a été la lumière de ma vie
À la mémoire de mon père qui m'a toujours soutenu et
m'a motivé dans mes études.*

*À ma petite famille Anis, Aya, Abderrahmane, Meriem
À toute la promotion de productique de 2016-2017*

AZZOUZ Ahmed



DEDICACE

Je dédie ce mémoire :

À ma très chère mère qui a été la lumière de ma vie

À mon père qui a été d'un apport très appréciable durant

A mes frères et Ames très chères sœurs

A tout ma famille

*Tous les amis a Ouargla(Bachir ,Idris Med,
Boudjema, Hachmi, Youcef, A.errzake, Aerrahim, Hamza,
Boubeker, A.karim)*

*Tous les amis l'Université IBN-KHALDOUN (Khediar
Med, Abdelghani, Achref, Azzouz
Ahmed, Slimane, Tayeb, Karim, A.elwahed. Elarbi, Yahia,
Boudjema Lahcen, Khaled)*

BENDJEDDOU Abdelmonaim

SOMMAIRE

Remerciements	
Dedicace A	
Dedicace B	
Sommaire	I
Liste des figures	III
Liste des tableaux	V
Liste des symboles	VI
Introduction générale	1

Chapitre I :EFFETS D'ENTAILLE EN RUPTURE ET EN FATIGUE

I.1 Introduction	2
I.2 EFFETS D'ENTAILLE EN RUPTURE	2
I.2.1 Définition de l'effet en rupture	2
I.2.2 Facteur de concentration de contrainte élastique	5
I.2.3 Facteur de concentration de contrainte élastoplastique	6
I.2.4 Critère de rupture pour une rupture émanant d'une entaille	7
I.3 EFET D'ENTAILLE EN FATIGUE	9
I.3.1 Mise en évidence expérimentale de l'effet d'entaille en fatigue	9
I.3.2 Rôle de l'amplitude de la contrainte locale maximale sur le processus de fatigue	10
I.3.3 Approche "point chaud"	11
I.3.4 Méthode volumétrique	12
I.4 CONCLUSION	14

Chapitre II :Modélisation par éléments finis et description du logiciel

I.1 Introduction	15
II.2 Méthode des éléments finis	15
II. 3 Eléments à une dimension	15
II. 4 Eléments à deux dimensions	15
II. 5 Eléments de références	16
II. 5.1 Eléments rectangulaires	16
II.5.2 Eléments triangulaires	18
II.6 Méthode des éléments finis en élasticité linéaire	19
II.7 formulation des éléments finis en elastoplasticite	21



II.8 Principaux critères utilisés	22
II.8.1 Critère de Tresca	22
II.8.2 Critère de Von Mises	23
II.9 Représentation matricielle	24
Conclusion	27

Chapitre III : Résultats et interprétations

Introduction	28
III.1 Présentation du logiciel de calcul	28
III.2 Présentation du modèle	29
III.3 Effet des deux fissures sur la taille de la zone plastique en fond d'entaille	31
a) III.3.1 Fissures situées sur un même axe x	31
III.3.1.1. $a=1.27\text{mm}$	31
III.3.1.2. $a=3\text{ mm}$	31
III.3.1.3. $a=5\text{ mm}$	32
III.3.2 Fissures situées sur deux axes différents	33
III.3.2.1. $a=1.27\text{mm}$ et $h=0.5\text{mm}$	33
III.3.2.2. $a=1.27\text{ mm}$ et $h=1\text{mm}$	33
III.3.2.3. $a=1.27\text{mm}$ et $h=2.82\text{mm}$	34
III.3.2.4. $a=1.27\text{mm}$ et $h=5.64\text{mm}$	34
III.3.2.5. $a=3\text{mm}$ et $h=0.5\text{mm}$	35
III.3.2.6. $a=3\text{mm}$ et $h=1\text{mm}$	36
III.3.2.7. $a=3\text{mm}$ et $h=2.82\text{mm}$	36
III.3.2.8. $a=3\text{mm}$ et $h=5.64\text{mm}$	37
III.3.2.9. $a=5\text{mm}$ et $h=0.5\text{mm}$	37
III.3.2.10. $a=5\text{mm}$ et $h=1\text{mm}$	38
III.3.2.11. $a=5\text{mm}$ et $h=2.82\text{mm}$	38
III.3.2.12. $a=5\text{mm}$ et $h=5.64\text{mm}$	39
Conclusion	40
Conclusion générale	41

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Résumé



Liste des figures

Chapitre I : EFFETS D'ENTAILLE EN RUPTURE ET EN FATIGUE

Figure I.1: Définition des contraintes maximale, globale et nominale ; déviation des lignes de force due à la présence d'une entaille

Figure I.2: Diagramme de Feddersen indiquant que le critère de rupture sous entaille est situé entre les critères produit de la racine carrée de la taille du défaut par la contrainte globale critique égal à une constante et contrainte nominale critique égale contrainte ultime. Définition quantitative de l'effet d'entaille

Figure I.3: distribution de contrainte en fond d'entaille entaillée soumise à un moment fléchissant. (Acier E 360)

Figure I.4: Evolution du facteur de concentration de contrainte élastique k_t et des facteurs de concentration de contrainte et de déformation élastoplastique k_σ et k_ϵ en fonction de la contrainte maximale

Figure I.5 : Comparaison du critère de rupture contrainte nominale égale contrainte de rupture et le critère du point chaud avec les résultats expérimentaux ; Eprouvettes SENT en acier E550

Figure I.6: Effet d'entaille en fatigue (Acier E 360 ; barres cylindriques lisses et entaillées soumises à un moment fléchissant)

Figure I. 7 : Amplitude de contrainte maximale en fonction du nombre de cycles en fatigue (acier E 360; barres cylindriques lisses et entaillées soumises à un moment fléchissant), comparaison avec la courbe de référence en fatigue

Figure I.8 : définition de la contrainte effective

Figure I.9: Définition de la contrainte effective selon la méthode volumétrique [1.5]

Chapitre II :Modélisation par éléments finis et description du logiciel

Figure II-1 : Eléments unidimensionnels

Figure II -2 : Eléments triangulaires

Figure II-3 : Eléments quadrilatéraux

Figure II-4 : Elément rectangulaire linéaire

Figure II-5 : Elément rectangulaire quadratique

Figure II-6 : Elément triangulaire linéaire

Figure II-7 : Elément triangulaire quadratique

Figure II.8 : Représentation géométrique du critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales

Figure II.9 : Représentation géométrique du critère de Von Mises dans l'espace des contraintes principales

Chapitre III : Résultats et interprétations

Figure III.1 : Représentation schématique d'une plaque sollicitée en traction.

Figure III.2 : Le maillage adapté dans la plaque

Figure III.3 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.4 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.5 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises



Figure III.6 : Variation de la contrainte de Von Mises en fonction de la longueur de fissure

Figure III.7 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.8 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.9 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.10 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.11 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.12 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.13 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.14 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.15 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.16 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.17 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.18 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Figure III.19 : Variations des contraintes de Von Mises en fonction de la hauteur entre les deux fissures

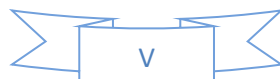
Liste des tableaux

Tableau II-1 : Valeur de ξ η pour un élément quadratique iso paramétrique à 4 nœuds

Tableau II-2 : Valeur de ζ et η pour l'élément à 8 nœuds.

Tableau II-3 : Fonction de formes et valeurs de ξ et η pour l'élément triangulaire à 3 nœuds

Tableau II-4 : Formation de formes et valeurs de ξ et η pour l'élément triangulaire à 6 nœuds



LISTE DE SYMBOLE

symbole	Signification
$\{\alpha\}$	Vecteur de coefficients
a	Longueur d'entaille
$[A]$	Matrice de coordonnées nodales.
b	L'exposant de la loi de Basquin
b	Distance entre les deux têtes de fissures par rapport axe x (chapitre 3)
B	Ligament sous entaille
D	Diamètre de l'arbre
D_T	Matrice élastique tangente
$[D]$	Matrice d'élasticité
e	Epaisseur
F	Forces nodales
$f(x,y,z)$	Fonction de déplacement
H	Hauteur
h	L'épaisseur de l'élément de volume dv
h	Distance entre les deux fissures par rapport axe y
$[J]$	Matrice jacobienne
k	Paramètre d'écrouissage gouvernant la fonction d'écoulement
k_t	Facteur de concentration de contrainte élastique
k_σ et k_ϵ	Contrainte et de déformation élastoplastique
$[K]$	Matrice de rigidité
l	Longuerie
n	Nombre de nœuds par éléments
$N(\xi, \eta, \zeta)$	Coordonnées locales
NE	Varie de 0 (pas d'effet) à 0.2- 0.3 en pratique.
N_i	Fonction de forme.
N_R	Le nombre de cycles à rupture
ρ	Rayon
Re	Limite d'élasticité
Rm	Contrainte ultime
τ_0	Scission limite
τ_{\max}	Scission maximum

U	Vecteur Déplacement
$U(x, y, z)$	Vecteur de déplacement nodale
u_i	Vecteur des déplacements nodaux pour un élément particulier
$\{u^e\}$	Déplacement élémentaire.
W	Largeur
w_{int}	Travail interne
w_{ext}	Travail externe
$X_{ef.}$	Distance effective
(x, y, z)	Coordonnées cartésienne
ε	Déformation
ε_{max}	Contrainte et déformation maximales
ε_N	Contrainte et déformation nominal
σ	Contrainte
σ_{ef}	Contrainte effective
σ_e	Contrainte élastique
σ_f	Contrainte de rupture du matériau
σ_g	Contraintes globale
σ_g^c	Contraintes globale critique
σ_{max}	Contraintes maximale
σ_N	Contraintes nominale
$\{\sigma\}$	Vecteur de composantes de contraintes
$\Delta\sigma$	L'amplitude de contrainte
$\Delta\sigma_{ef}$	Contrainte maximale jusqu'à une valeur effective
σ_0	Contraintes principales
T	Tangente
$\xi ; \eta$	Valeur de élément nœuds
(ξ, η, ζ)	Coordonnées locales
Ψ	L'angle d'entaille

Introduction générale

Introduction générale

La mécanique de la rupture a pour objet essentiel l'étude des fissures durant le chargement et de prévoir leur évolution jusqu'à la rupture de la structure. En fonction du chargement et du matériau considérés, si le milieu est globalement plastique ou viscoplastique, l'étude est du ressort de la mécanique non linéaire de la rupture, ou encore de l'approche locale, dans laquelle il est fait une description aussi précise que possible de l'état de contrainte et de déformation en pointe de fissure à l'aide de modèles de comportement non linéaire. Si au contraire la plasticité est absente ou reste confinée, les théories qui permettent de traiter le problème considèrent le matériau comme élastique partout : c'est la mécanique linéaire de la rupture (MLR), qui va être considérée dans cette partie. En effet la (MLR) considère les matériaux parfaitement élastiques, homogènes et isotropes. Elle permet de caractériser le comportement d'un matériau vis-à-vis d'une sollicitation, en présence d'une fissure. D'autre part, elle est une étude consistant à la définition des critères de rupture en déterminant les relations entre les paramètres du matériau et les sollicitations extérieures nécessaires pour amorcer puis propager une fissure. Le rappel qui va suivre résume deux approches permettant d'élaborer des critères de rupture, le premier de Griffith basé sur une approche énergétique, et le second d'Irwin basé sur les contraintes présentes en front de fissure.

Les nouveaux concepts de la mécanique de la rupture furent ensuite utilisés pour montrer que la plupart des ruptures dans les fuselages d'avions étaient dues à des fissures de fatigue qui atteignaient une taille critique. Ces fissures prenaient naissance près des hublots dans les coins qui constituent des zones de forte concentration des contraintes. Les ruptures qui se produisaient dans les essieux d'engins roulants ou encore dans les rotors des turbines à vapeur furent aussi expliquées grâce à l'application de ces nouveaux concepts. Le concept de FIC fut également utilisé par Paris pour décrire la propagation des fissures de fatigue et progressivement les courbes de propagation des fissures de fatigue proposées par ces auteurs remplacèrent les courbes d'endurance pour une meilleure prédiction des durées de vie des structures.

Notre mémoire est répartie en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré sur une étude sur les effets d'entaille en rupture et en fatigue.

Le second chapitre traite la modélisation par éléments finis et description du logiciel de simulation.

Le troisième chapitre porte sur la simulation numérique avec le logiciel Abaqus 6.11 avec résultats et des interprétations des différentes fissures sollicitées par un chargement de traction.

Et enfin une conclusion générale illustrant notre travail.

A decorative scroll frame with a black outline and rounded corners. The top-left and top-right corners feature a grey scroll-like element. The text is centered within the frame.

Chapitre I

EFFETS D'ENTAILLE EN RUPTURE ET EN FATIGUE

I.1 Introduction

De nombreux matériaux présentent des hétérogénéités microstructurales importantes telles que les inclusions, les cavités et les microfissures, etc. Le comportement élastique des matériaux est très affecté par la présence de défauts qui peuvent entraîner l'affaiblissement de la structure et provoquer sa destruction. Dans les zones à fortes concentrations de contraintes dues aux effets géométriques ou métallurgiques, des microfissures apparaissent ; ces microfissures se développent et coalescent les unes avec les autres jusqu'à ce qu'elles forment une fissure de taille macroscopique qui se propage jusqu'à la ruine de la structure.

L'amorçage de la rupture ductile des matériaux s'effectue par décohésion de la matrice autour des inclusions ou par fragmentation de celles-ci, avec formation de micro cavités ; ces cavités croissent et changent de forme sous l'effet de sollicitations mécaniques de la micro cavité. Les inclusions sont généralement l'origine des concentrations de contraintes dans les matériaux et peuvent être une source d'amorçage et de propagation de fissures. De nombreux auteurs [1–6] se sont penchés sur l'étude de la présence d'inclusions ; de même que plusieurs études [7–14] ont porté sur l'influence de l'effet d'entaille sur le comportement des matériaux.

Le but de cette étude est de déterminer l'effet d'interaction entre le fond d'entaille et

Un micro défaut dans le cas d'un matériau élastoplastique, ce travail consiste à analyser par la méthode des éléments finis l'effet du micro défaut sur la taille et la forme de la zone plastique en fond d'entaille dans le cas d'une plasticité confinée.

Le choix du critère (plasticité confinée) est décidé par le fait que l'effet du micro défaut n'est pas significatif pour le cas d'une zone plastique de taille importante.

I.2 EFFETS D'ENTAILLE EN RUPTURE

I.2.1 Définition de l'effet en rupture

L'effet d'entaille résulte dans la modification du flux de force dû à la présence d'une discontinuité géométrique (Figure 1.1). Près du fond d'une entaille, les lignes de force sont relativement proches et cela conduit à une concentration du champ de contraintes local avec un maximum en fond d'entaille.

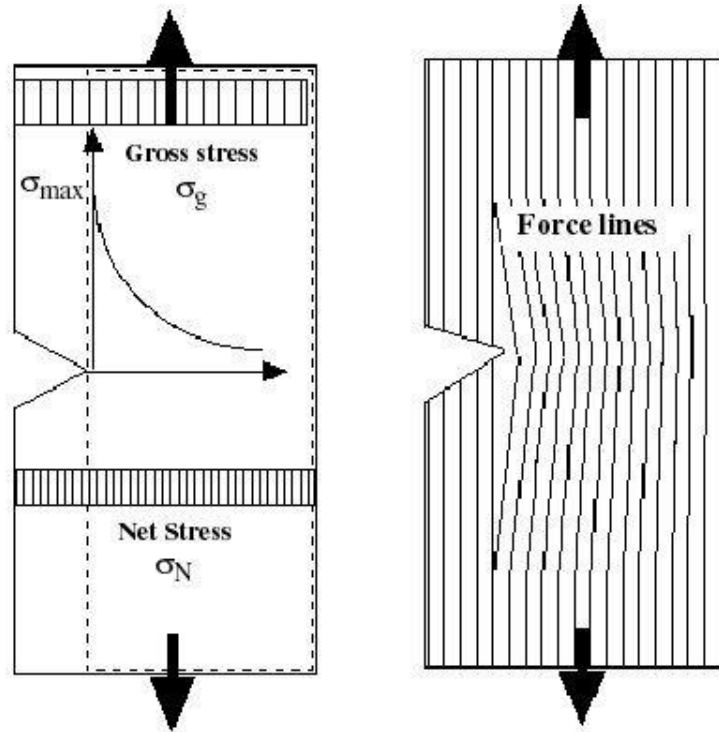


Figure I.1: Définition des contraintes maximale, globale et nominale ; déviation des lignes de force due à la présence d'une entaille.

La distribution locale des contraintes présente un gradient sévère tandis que la contrainte globale σ_g présente une distribution uniforme dans la figure 1.1. L'introduction d'une entaille est néfaste et ne correspond pas uniquement à la réduction de section comme le montre l'inégalité :

$$\sigma_{max} > \sigma_N > \sigma_g \tag{1.1}$$

L'effet d'entaille en rupture peut être représenté graphiquement par le diagramme de Feddersen's [1.1] où la contrainte globale critique est reportée en fonction de la taille de défaut non dimensionnel. Ce diagramme est reporté dans la figure 1.2 pour le cas d'une simple plaque présentant un trou central de longueur $2a$.

Dans le cas d'une ruine plastique, la capacité de supporter une charge du ligament est égal à la

$$\sigma_g^c = R_m \cdot \left(1 - \frac{a}{W}\right) \tag{1.2}$$

contrainte ultime du matériau. La contrainte globale critique varie selon la relation :

(a longueur d'entaille, R_m contrainte ultime et W largeur). En présence d'une entaille, la contrainte globale critique varie en fonction de la profondeur d'entaille avec une valeur moindre que celle prédite par l'équation (1) excepté pour les petits et très grands défauts. La différence entre les valeurs

expérimentales de la contrainte globale critique et celles prédites par l'équation (1) caractérise l'effet d'entaille.

L'effet d'entaille dépend non seulement des dimensions de l'entaille mais aussi de l'angle d'entaille Ψ et surtout son rayon. ρ . Ces deux paramètres conduisent à la classification suivante

- Fissure : $\rho = 0$ et $\Psi = 0$,
- Entaille infiniment aiguë : $\rho = 0$ et $\Psi \neq 0$,
- Simple entaille : $\rho \neq 0$ et $\Psi \neq 0$

La fissure est la forme la plus dangereuse d'entaille.

contrainte globale critique (MPa)

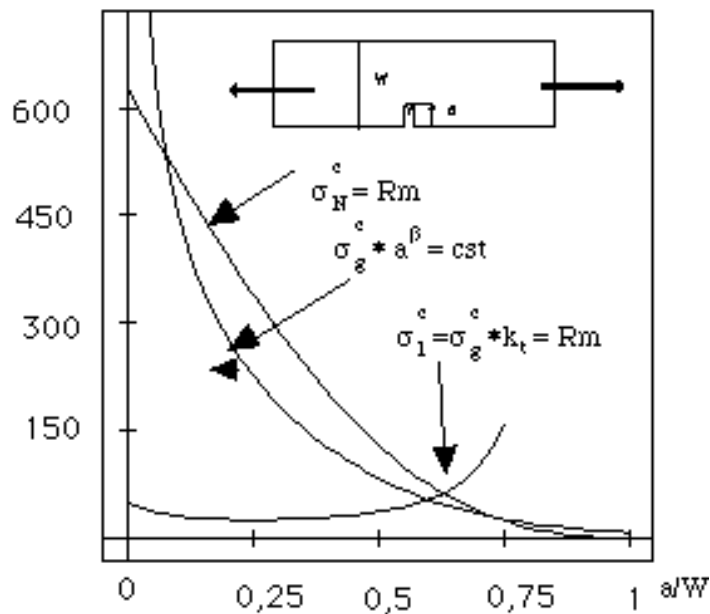


Figure I.2: Diagramme de Feddersen indiquant que le critère de rupture sous entaille est situé entre les critères produit de la racine carrée de la taille du défaut par la contrainte globale critique égal à une constante et contrainte nominale critique égale contrainte ultime. Définition quantitative de l'effet d'entaille.

Dans le diagramme de Feddersen, on peut reporter trois critères de rupture :

- Ruine plastique (contrainte nominale critique égale contrainte ultime),
- Pour la rupture fragile la mécanique de la rupture, (MLR) montre que le produit de la racine carrée de la taille du défaut par la contrainte globale critique est égal à une constante [1.2]

$$\sigma_g^c \sqrt{a} = C_1 \tag{1.3}$$

- Critère de type Griffith pour une encoche (stress brut critique et profondeur d'entaille du produit à Un certain pouvoir égal à constant).

La sévérité d'une simple entaille est moindre que celle d'une fissure. La relation (1.2)

$$\sigma_g^c a^\beta = C_1 \quad (1.4)$$

est modifiée selon :

où β est une constante.

Quantitativement l'effet d'entaille (NE) est défini comme la différence relative entre la simple réduction du ligament et la présence d'une entaille en termes de contrainte globale critique

Si la contrainte globale critique après réduction de section est égale à σ_g^{c*} , cette définition peut

$$NE = \frac{\sigma_g^{c*} - \sigma_g^c}{\sigma_g^{c*}} \quad (1.5)$$

s'écrire:

Avec $\sigma_g^{c*} = R_m \cdot (1 - b/W)$, b est le ligament sous entaille. NE varie de 0 (pas d'effet) à 0.2- 0.3 en pratique.

I.2.2 Facteur de concentration de contrainte élastique

Un exemple de distribution de contrainte en fond d'entaille est donné dans la figure 1.3. Cette figure est relative à une barre cylindrique entaillée soumise à un moment fléchissant. Le matériau constitutive est supposé demeurer élastique.

La distribution présente un maximum σ_{\max} en relation avec la contrainte globale σ_g selon la relation suivante :

$$\sigma_{\max} = k_t \sigma_g \quad (1.6)$$

où k_t est le facteur de concentration de contrainte élastique selon Neuber [1.3].

Pour d'autres auteurs, le facteur de concentration de contrainte élastique est relié à la contrainte nominale σ_N :

$$\sigma_{\max} = k_t \sigma_N \quad (1.7)$$

σ_{max} est le plus souvent déterminée selon l'équation 1.5

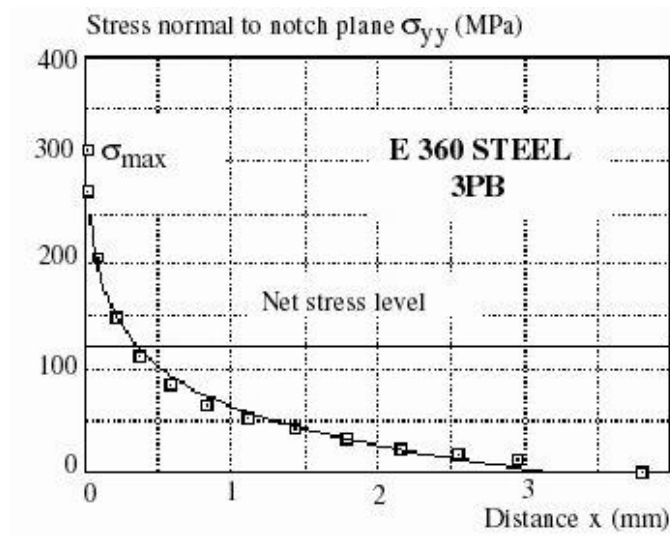


Figure I.3: distribution de contrainte en fond d'entaille entaillée soumise à un moment fléchissant.
(Acier E 360).

Le facteur de concentration de contrainte élastique. Est calculé selon la formule de Roark [1.4].

ρ est le rayon d'entaille et D le diamètre de l'arbre.

$$(1.8)$$

$$k_t = f\left(\frac{a}{D}, \frac{a}{\rho}\right)$$

I.2.3 Facteur de concentration de contrainte élastoplastique

Quand la concentration de contrainte est élevée, la contrainte maximale est généralement plastique. Une relaxation de contrainte se produit en fond d'entaille et on définit dans ce cas les facteurs de concentration de contrainte et de déformation élastoplastique k_σ et k_ϵ selon les formules suivantes:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_N} \quad k_\epsilon = \frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_N} \quad (1.9)$$

σ_{max} et ϵ_{max} sont respectivement les contrainte et déformation maximales, σ_N et ϵ_N sont respectivement les contrainte et déformation nominales. Plusieurs relations existent entre le facteur de concentration de contrainte élastique k_t et les facteurs de concentration de contrainte et de déformation élastoplastique k_σ et k_ϵ .

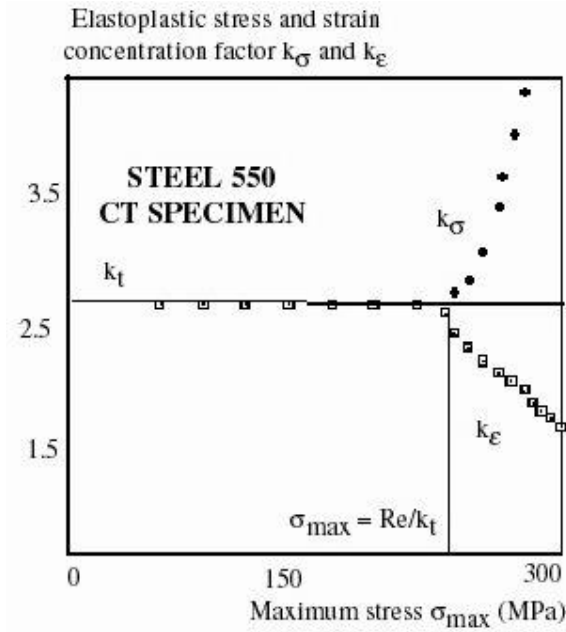


Figure I.4: Evolution du facteur de concentration de contrainte élastique k_t et des facteurs de concentration de contrainte et de déformation élastoplastique k_{σ} et k_{ϵ} en fonction de la contrainte maximale.

Les valeurs du facteur de concentration de contrainte élastique k_t et des facteurs de concentration de contrainte et de déformation élastoplastique k_{σ} et k_{ϵ} ont été obtenues numériquement pour un éprouvette CT avec une entaille de profondeur 40 mm et un rayon d'entaille de 1 mm sur un acier dont la limite d'élasticité est 550 MPa et la résistance ultime de 565 MPa.

Les résultats sont présentés dans la figure I.4.

Si la contrainte maximale est inférieure à la limite d'élasticité on a :

$$k_t = k_{\sigma} = k_{\epsilon} \Leftrightarrow \sigma_{\max} < Re \tag{1.10}$$

Si la contrainte maximale dépasse la limite d'élasticité on trouve :

$$k_t \geq k_{\sigma} \geq k_{\epsilon} \Leftrightarrow \sigma_{\max} > Re \tag{1.11}$$

I.2.4 Critère de rupture pour une rupture émanant d'une entaille

Un simple critère de rupture pour une rupture émanant d'une entaille peut être obtenu en prenant comme hypothèse que la rupture se produit quand la contrainte maximale atteint la contrainte de rupture du matériau σ_f en un point (généralement le fond d'entaille).

$$\sigma_{max} = \sigma_f \tag{1.12}$$

Ce type de critère est appelé « l'approche de type point chaud ».

Dans la figure 1.5, ce type de critère est présenté et comparé avec le critère de rupture contrainte nominale égale contrainte de rupture.

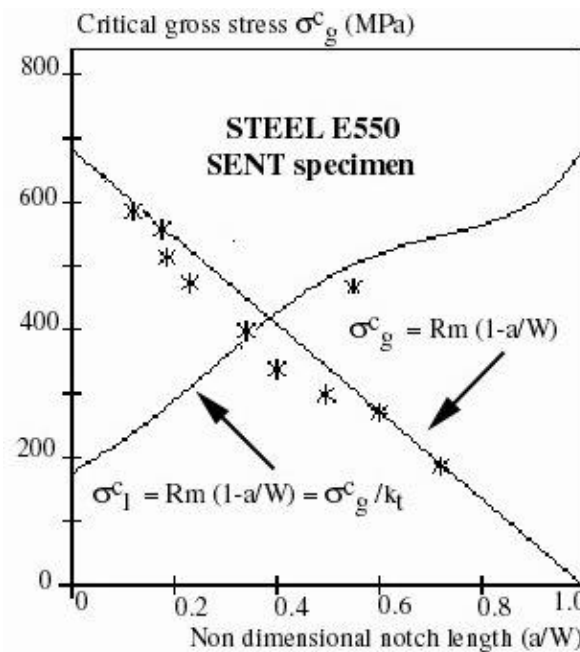


Figure I.5 : Comparaison du critère de rupture contrainte nominale égale contrainte de rupture et le critère du point chaud avec les résultats expérimentaux ; Eprouvettes SENT en acier E550.

L'approche de type pont chaud conduit à une contrainte globale critique qui croît avec le rapport a/W . en raison de l'évolution du facteur de concentration de contrainte élastique avec a/W . Si on prend en compte la perte de confinement due à la réduction du ligament, l'évolution of k_t avec a/W va dans la direction opposée des résultats expérimentaux.

Le fait que le critère " contrainte locale maximale égale résistance ultime " ne permet pas de représenter les points expérimentaux montre que l'approche de type point chaud ne convient pas ni aux simples entailles ni aux fissures (dans ce cas la contrainte maximale est infinie dans le cas d'un comportement linéaire élastique).

Le phénomène de rupture doit être en effet considéré dans sa dimension physique. Il nécessite un certain volume d'élaboration appelé volume effectif V_{ef} [1.5].

Dans ce volume la contrainte, la déformation ou la densité d'énergie de déformation moyennes doivent être suffisamment élevées (mais inférieures à la valeur maximale) pour provoquer la rupture.

Cette approche locale des critères de rupture est vraie pour les simples entailles comme pour les fissures qui sont une forme particulière d'entaille. Elle sera examinée dans cette présentation.

Toutefois, il est souvent plus commode notamment pour le dimensionnement des constructions de présenter un critère de rupture en termes de grandeur globale (contrainte globale critique, déformation globale critique ou travail de rupture) et nous examinerons les possibilités offertes dans ce domaine par la mécanique de la rupture sous entaille.

Il n'en demeure pas moins que la présence d'une entaille dans une construction est un facteur fragilisant au même titre que la diminution de la température en service ou l'augmentation de la vitesse de déformation. En modifiant l'acuité d'entaille, nous pouvons créer les conditions d'un passage d'une rupture fragile à une rupture ductile et mettre ainsi en évidence une véritable transition de ténacité.

I.3 EFFET D'ENTAILLE EN FATIGUE

I.3.1 Mise en évidence expérimentale de l'effet d'entaille en fatigue

L'amorçage en est sensible à l'effet d'entaille comme on peut le voir dans la figure 1.6 où la courbe de Wöhler obtenue sur éprouvettes lisses est comparée à celle obtenue sur éprouvettes entaillées.

Pour cela, des essais de fatigue tests ont été réalisés sur des barres cylindriques entaillées soumises à un moment fléchissant. Le matériau est un acier E 360 avec une limite d'élasticité $R_e = 355$ MPa et une résistance ultime $R_m = 522$ MPa. Pour le même nombre de cycles en fatigue, l'amplitude de contrainte est réduite de façon importante qui caractérise l'effet d'entaille en fatigue.

La courbe de Wöhler obtenue sur éprouvettes lisses peut être considérée comme une courbe de référence en fatigue pour une géométrie et un mode de chargement donné.

Elle est représentée par la loi de Basquin :

$$\Delta\sigma = \sigma' f (N_R)^{b'} \quad (1.13)$$

Où $\Delta\sigma$ est l'amplitude de contrainte, la résistance en fatigue, b' l'exposant de la loi de Basquin et N_R le nombre de cycles à rupture.

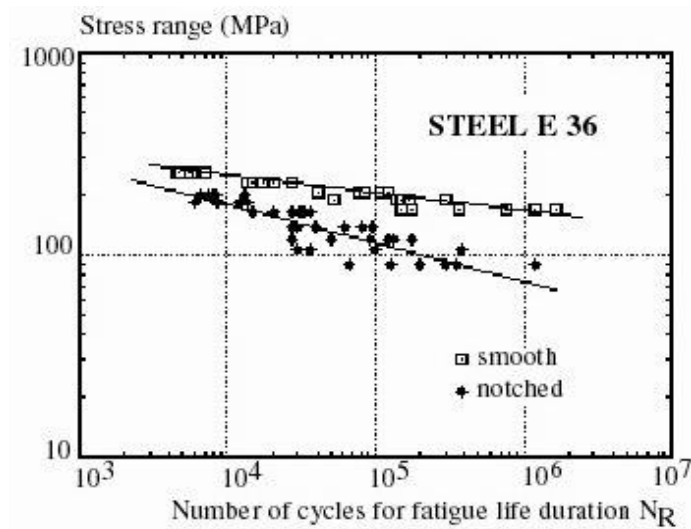


Figure I.6: Effet d'entaille en fatigue (Acier E 360 ; barres cylindriques lisses et entaillées soumises à un moment fléchissant).

I.3.2 Rôle de l'amplitude de la contrainte locale maximale sur le processus de fatigue

A partir des résultats expérimentaux précédents, le calcul de l'amplitude de la contrainte locale maximale a été calculé par la méthode des éléments finis.

La contrainte locale maximale est reportée en fonction du nombre de cycles à rupture et comparée à la courbe de référence en fatigue obtenue sur éprouvettes lisses. On peut voir que la courbe $\Delta\sigma_{\max,e} = f(N_R)$ est au-dessus la courbe de référence en fatigue (figure 1.7). Pour obtenir la coïncidence de ces deux courbes, il est nécessaire de réduire la valeur de l'amplitude de la contrainte maximale jusqu'à une valeur effective $\Delta\sigma_{ef}$. Ceci peut être obtenu par deux méthodes : l'approche "point chaud" et la méthode volumétrique.

Dans l'approche "point chaud", on fait l'hypothèse que l'amplitude de contrainte à l'endroit de l'amorçage est l'amplitude de contrainte maximale. On peut faire remarquer que si la distribution des contraintes est élastoplastique, le lieu de l'amplitude maximale n'est pas situé au fond d'entaille mais à une petite distance derrière celui-ci.

Dans la méthode volumétrique, on fait l'hypothèse que le processus de fatigue nécessite un certain volume physique et que la contrainte effective est une valeur moyenne des amplitudes de contrainte dans ce volume.

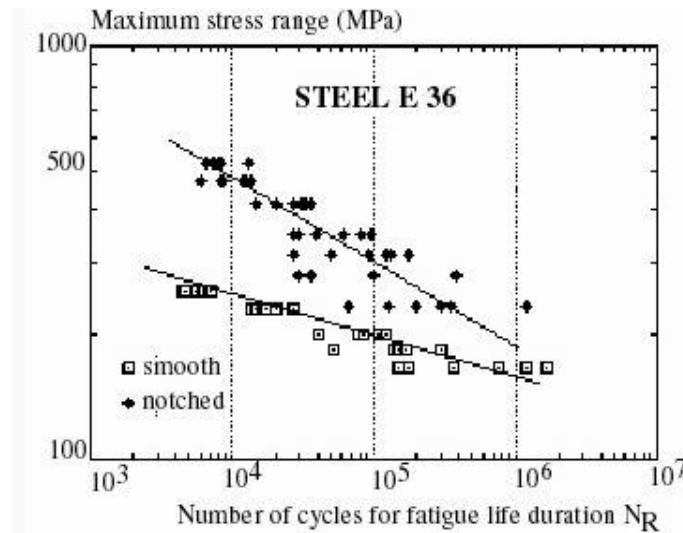
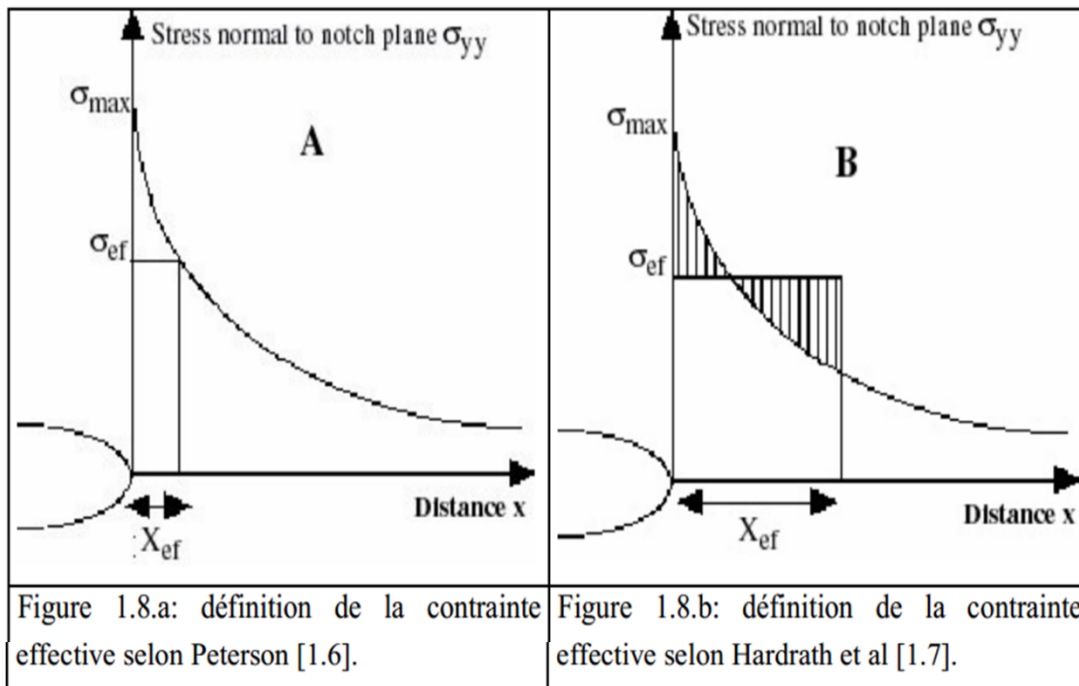


Figure I. 7 : Amplitude de contrainte maximale en fonction du nombre de cycles en fatigue (acier E 360; barres cylindriques lisses et entaillées soumises à un moment fléchissant), comparaison avec la courbe de référence en fatigue.

I.3.3 Approche “point chaud”

Pour réduire l’amplitude de la contrainte maximale afin d’assurer une meilleure prédiction, plusieurs méthodes selon l’approche “point chaud” ont été proposées.



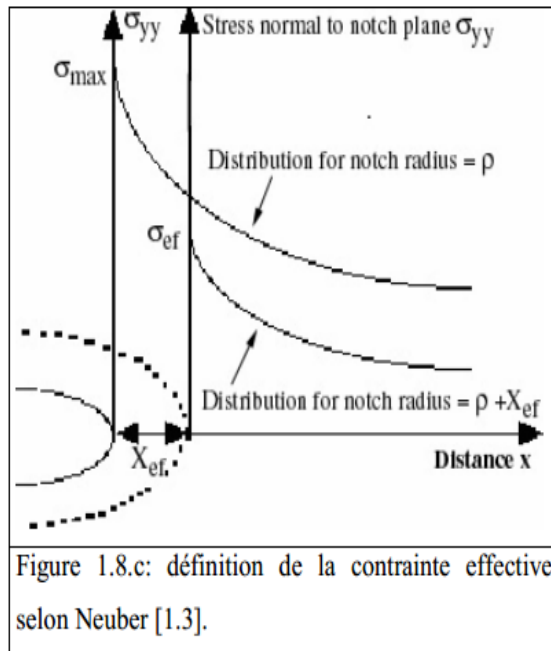


Figure I.8 : Définition de la contrainte effective.

Peterson [1.6] a proposé de prendre la valeur obtenue sur la courbe de distribution à la distance X_{ef} appelée la distance effective (Figure 1.8.a). Hardrath et al [1.7] ont proposé une valeur moyenne sur la distance (effective Figure 1.8.b). Neuber [1.3] a proposé d'augmenter fictivement le rayon d'entaille qui devient égal à X_{ef} . En conséquence, l'amplitude de contrainte maximale diminue (Figure 1.8.c).

Pour ces auteurs, la distance effective est une constante empirique sans signification physique qui dépend du matériau.

I.3.4 Méthode volumétrique

Les mécanismes d'amorçage des fissures de fatigue ont été largement décrits. Ils consistent en la formation d'intrusions et d'extrusions dans le cas des métaux ductiles ou à l'empilement de dislocations sur des inclusions, des décohésions de la matrice pour aboutir finalement à l'amorçage des fissures.

Deux éléments majeurs indiquent que le mécanisme de fatigue nécessite un certain volume physique pour se développer :

- Les essais de fatigue sont généralement entachés d'une importante dispersion.

Une description de cette dispersion par l'approche de Weibull est pertinente. Cela conduit à l'hypothèse que la probabilité d'un amorçage en fatigue est proportionnelle au volume d'élaboration du

processus de fatigue où la probabilité de trouver un site d'amorçage est supposé uniforme (c.a.d. une inclusion métallique).

- la résistance en fatigue est influence par la taille de l'éprouvette et le gradient relative. (C.a.d. le gradient de contrainte divisé par la valeur de la contrainte) qui est un paramètre non dimensionnel On constate que la résistance en fatigue décroît avec le volume d'élaboration du processus de rupture qui contient la distribution dans l'intervalle tresses [100-90] % de la contrainte maximale.

Ces arguments conduisent à la conclusion que le mécanisme de fatigue nécessite un certain volume physique pour prendre place. Dans ce volume, la contrainte moyenne est suffisamment élevée pour promouvoir l'amorçage en fatigue, le gradient de contrainte relatif est lui aussi élevé sur tous les points de ce volume, appelé le « volume effective volume ».

Le rôle du gradient de contrainte relative sur le processus de fatigue a été déjà mentionné par Buch [1.8] et Brandt [1.9].

L'approche volumétrique permet de surmonter l'approche « point critique ». En outre, elle ne nécessite pas de relations empiriques entre les facteurs de concentration de contrainte élastique et en fatigue. La loi de comportement cyclique du matériau, la courbe de résistance intrinsèque en fatigue et le calcul de la distribution de contrainte élastoplastique sont les éléments nécessaires pour la prédiction de la durée de vie en fatigue à grand nombre de cycles. Cette approche conduit à un critère d'amorçage en fatigue à deux paramètres : la contrainte et la distance effectives.

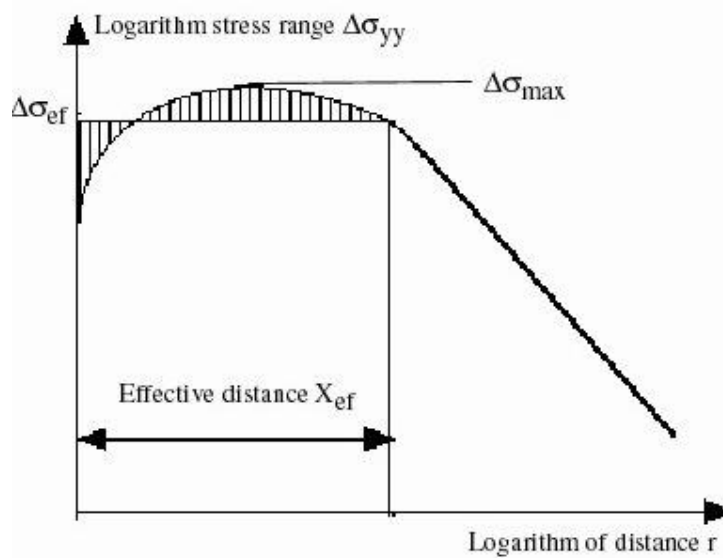


Figure I.9: Définition de la contrainte effective selon la méthode volumétrique [1.5].

La distance effective est associée avec un point particulier de la distribution élastoplastique des contraintes présentées dans un graphe bi logarithmique. La contrainte effective correspond à la valeur moyenne sur cette distance de la distribution des contraintes pondérée par le gradient relatif des contraintes (figure 1.9).

I.4 Conclusion

La rupture fragile à partir d'une entaille nécessite comme dans le cas d'une fissure un certain volume pour l'élaboration du processus de rupture. Dans ce volume la contrainte moyenne doit rester supérieure à une valeur critique caractéristique du matériau mais éventuellement aussi fonction de la géométrie de l'entaille, de la structure et du mode de chargement.

Ce critère de rupture peut être traduit par le concept de facteur d'intensité de contraintes critique d'entaille.

Ce paramètre est intéressant à utiliser pour la détermination des matériaux très fragiles pour lesquels si la réalisation d'éprouvettes pré fissurées est pratiquement impossible. Toutefois, en raison de la nature complexe du gradient de contraintes cette ténacité s'exprime en MPa $m\alpha$ où α est un nombre fractionnaire inférieur à 0,5.

C'est cette forme particulière du gradient de contrainte qui conditionne l'amorçage des fissures en fatigue et la valeur du facteur de sensibilité à l'entaille.

La mécanique des ruptures sous entaille peut être vue comme une généralisation de la mécanique de la rupture, la fissure étant une entaille particulière d'acuité infinie et d'angle d'entaille nul.

Chapitre II

Modélisation par éléments finis et description du logiciel

I.1 Introduction

L'avenir est à l'outil numérique et à la réalité virtuelle; la simulation et l'analyse numérique se sont développées ces dernières années dans la recherche industrielle privée ou publique (constructeurs automobile, aéronautique, spatial...) améliorant ainsi la productivité des industriels et la vie de tous les consommateurs.

La solution d'analyse par éléments finis optimise le prototypage virtuel et la simulation numérique pour l'entreprise en utilisant les hypothèses de la mécanique de la rupture en élasticité et de la dynamique. Ainsi elle simule et améliore les performances des composants, des matériaux et des produits sujets à de fortes exigences opérationnelles (sécurité, endommagement...).

II.2 Méthode des éléments finis

L'utilisation de la méthode des éléments finis sur un domaine donné pour déterminer une fonction inconnue (contrainte, déplacement ...) nécessite la description du domaine considéré en un nombre fini de sous domaines appelés éléments finis, et le système continu sera remplacé par un système discrétisé équivalent. Elle fait appel aussi à des connaissances en mécanique des milieux continus et les lois de comportement en analyse numérique, et en informatique. Les éléments utilisés pour la discrétisation, peuvent être unidimensionnels (de forme linéaire), bidimensionnels (rectangulaire ou quadrilatérale), tridimensionnels (de forme tétraédrique ou hexagonale). Ces éléments sont liés les uns aux autres en un nombre fini de points appelés nœuds.

II. 3 Eléments à une dimension

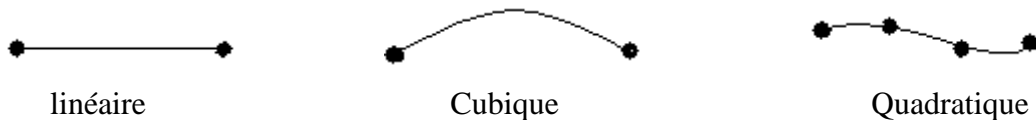


Figure II-1 : Eléments unidimensionnels.

II. 4 Eléments à deux dimensions

a- Eléments triangulaires

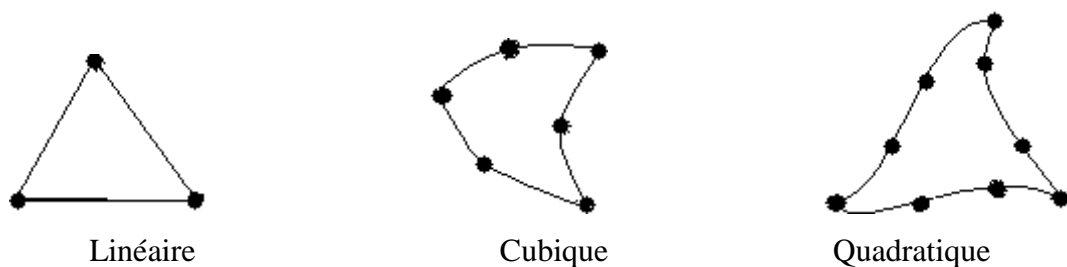


Figure II -2 : Eléments triangulaires

b- Eléments quadrilatéraux

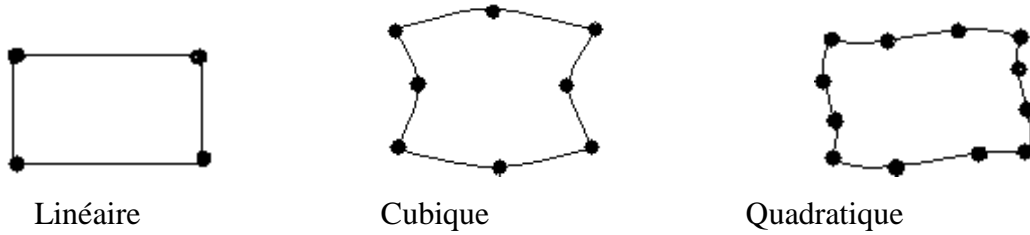


Figure II-3 : Eléments quadrilatéraux.

II. 5 Eléments de références

Un élément de référence est un élément de forme simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel. Les éléments uni, bi ou tridimensionnels seront transformés de coordonnées cartésiennes en élément curviligne c’est-à-dire que les relations de transformation peuvent s’écrire sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \tag{II-1}$$

II. 5.1 Eléments rectangulaires

a- Eléments quadratiques à 4 nœuds

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \tag{II-2}$$

Les valeurs de ξ et η sont données dans le tableau II-(1) pour chaque nœud.

Numéro du nœud	ξ	η
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

Tableau II-1 : Valeur de ξ η pour un élément quadratique iso paramétrique à 4 nœuds.

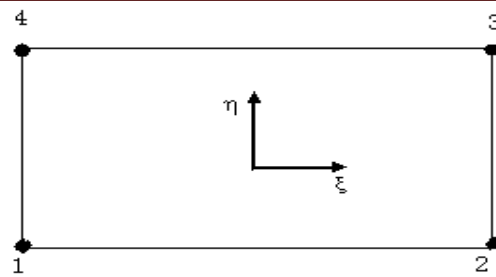


Figure II-4 : Elément rectangulaire linéaire

b Éléments quadratiques à 8 nœuds

Pour les nœuds au sommet :

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1); i = 1,3,5,7. \quad (II-3)$$

Nœuds au milieu :

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2} (1 + \xi \xi_i)(1 - \eta \eta_i) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \eta \eta_i)(1 - \xi \xi_i); i = 2,4,6,8. \quad (II-4)$$

Les valeurs de ξ et η pour l'élément à 8 nœuds sont données par le tableau II-2 pour un chaque nœud.

Numéro du nœud	ξ	η
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	-1
4	1	0
5	1	1
6	0	1
7	-1	1
8	-1	0

Tableau II-2 : Valeur de ξ et η pour l'élément à 8 nœuds.

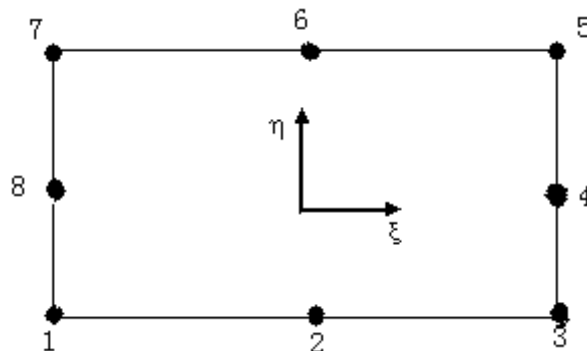


Figure II-5 : Elément rectangulaire quadratique.

II.5.2 Eléments triangulaires

a- Eléments triangulaires à 3 nœuds

Pour cet élément les fonctions de formes ainsi que les valeurs de ξ et η sont données par le **tableau II- 3**.

Numéro du nœud	N	ξ	η
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	ξ	1	0
3	η	0	1

Tableau II-3 : Fonction de formes et valeurs de ξ et η pour l'élément triangulaire à 3 nœuds

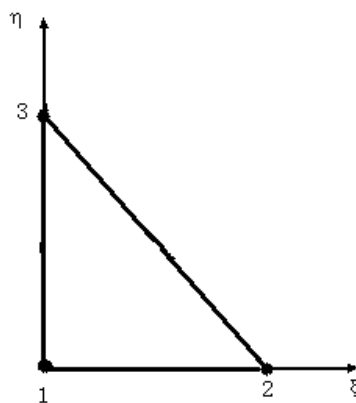


Figure II-6 : Elément triangulaire linéaire

b- Elément triangulaire à 6 nœuds

Pour cet élément les fonctions de formes ainsi que les valeurs de ξ et η sont données par le **tableau II. (4)** avec : $\lambda = 1 - \xi - \eta$

Numéro du nœud	N	ξ	η
1	$-\lambda (1-2 \lambda)$	0	0
2	$4 \xi \lambda$	$\frac{1}{2}$	0
3	$-\xi (1-2 \zeta)$	1	0
4	$4 \xi \eta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5	$-\eta (1-2 \eta)$	0	1
6	$4\eta\lambda$	0	$\frac{1}{2}$

Tableau II-4 : Formation de formes et valeurs de ξ et η pour l'élément triangulaire à 6 nœuds .

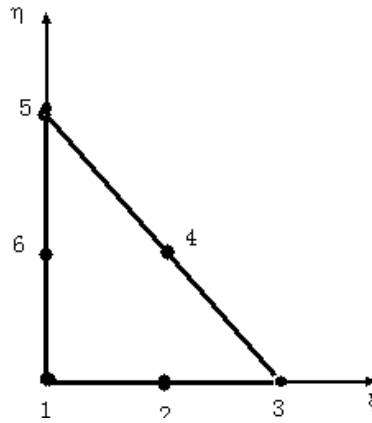


Figure II-7 : Elément triangulaire quadratique .

II.6 Méthode des éléments finis en élasticité linéaire

L'objectif de la méthode des éléments finis est d'obtenir la relation liant les déplacements {u} aux forces nodales {F}, tel que :

$$\{F\} = [K] \cdot \{u\} \tag{II-5}$$

[K] est la matrice de rigidité.

La première étape dans l'analyse est de choisir une fonction de déplacement [f(x, y, z)] qui définit l'état de déplacement de tous les points de l'élément. Cette fonction est sous forme de polynôme facile à dériver ou à intégrer. La relation de la fonction de déplacement s'écrit comme suit :

$$\{u(x, y, z)\} = [f(x, y, z)] \cdot \{\alpha\} \tag{II-6}$$

avec :

f(x,y,z) : est la fonction de déplacement ;

U(x, y, z) : Vecteur de déplacement nodale ;

{α} : vecteur de coefficients inconnus.

Ayant choisi le polynôme de déplacement, l'étape suivante consiste à relier l'état de déplacement à ses déplacements nodaux après avoir trouvé le vecteur de coefficient {α} d'après la relation :

$$\{\alpha\} = [A^{-1}] \cdot \{u^e\} \tag{II-7}$$

Avec :

{u^e} : Déplacement élémentaire.

[A] : Matrice de coordonnées nodales.

En remplaçant l'équation (II-7) dans l'équation (II-6), on aura :

$$\{u(x, y, z)\} = [f(x, y, z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{u^e\} \tag{II-8}$$

Le produit [f(x, y, z)]. [A⁻¹] nous donne les fonctions de forme [N], qui sont données par les coordonnées locales N=N(ξ, η, ζ)

L'équation (II-8) s'écrit :

$$u = \sum_{i=1}^n N_i \cdot u_i \quad \text{et} \quad \delta u = \sum_{i=1}^n N_i \cdot \delta u_i \quad (\text{II-9})$$

Où la transformation est définie en fonction des coordonnées des nœuds selon :

$$x = \sum N_i x_i \quad ; \quad y = \sum N_i y_i \quad ; \quad z = \sum N_i z_i \quad (\text{II-10})$$

Avec : $\sum N_i = 1$

Où :

n : est le nombre de nœuds par éléments ;

u_i : est le vecteur des déplacements nodaux pour un élément particulier ;

N_i : fonction de forme.

Les déformations sont reliées aux déplacements par :

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\alpha\} \quad (\text{II-11})$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot [A^{-1}] \cdot \{u^e\} \quad (\text{II-12})$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Les composantes des contraintes dans l'élément sont reliées à celles des déformations par la relation :

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad (\text{II-13})$$

Où :

$\{\sigma\}$: vecteur de composantes de contraintes ; $[D]$: la matrice d'élasticité

En remplaçant l'expression (II-12) dans (II-13) on obtient :

$$\{\sigma\} = [D]. [A^{-1}] \{u^e\} \tag{II-14}$$

En contraintes planes :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

L'équilibre d'une structure soumise a un chargement extérieur, est assuré si le travail interne dû à la variation de l'énergie de déformation est égal au travail externe dû à un déplacement virtuel.

Soit :

$$W_{int} = W_{ext} \tag{II-15}$$

Avec : $W_{int} = \int \{d\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv$ et $W_{ext} = \{du\}^T \{F\}$

On aura finalement :

$$\{F\} = [A^{-1}]^T \int_v [B]^T [D][B][A^{-1}] \{u\} dv \tag{II-16}$$

Ainsi la matrice de rigidité [K] s'écrit :

$$[K] = \int_v [B]^T [D][B] dv \tag{II-17}$$

En fonction de ξ et η la matrice de rigidité s'exprime par :

$$[K] = h \int_v [B]^T [D][B] \det J d\xi d\eta \tag{II-18}$$

Où : h est l'épaisseur de l'élément de volume dv ; [J] est la matrice jacobienne défini par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{II-19}$$

II.7 formulation des éléments finis en élastoplasticité

L'objectif de la théorie mathématique de la plasticité est de définir une relation analytique entre les contraintes et les déformations pour un matériau à comportement élastoplastique. Caractérisé par des déformations permanentes irréversibles.

Les premières études expérimentales concernant le phénomène de plasticité ont été menées par Tresca. C'est vers 1970 que Saint Venant et Levy publient la théorie mathématique de la plasticité. A partir de ce moment interviennent des noms très connus dans le domaine de la plasticité comme : Prandtl, Von Mises, Hencky, etc....

II.8 Principaux critères utilisés

II.8.1 Critère de Tresca

Historiquement, il semble que ce soit le premier critère de plasticité qui a été proposé au siècle dernier, en mécanique des sols.

Tresca a postulé que le critère de plasticité fait intervenir la scission maximum τ_{\max} et s'écrit donc :

$$f = 2(\tau_{\max} - \tau_0) \quad (\text{II-20})$$

Où : τ_0 est la scission limite, caractéristique du matériau considéré.

Nous n'admettons ici que l'équation (II-20) est équivalente à [..]

$$f = \max_{i,j_0} (\sigma_I - \sigma_{II}) - \sigma_0 \quad (\text{II-21})$$

Ou bien :

$$f = \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_I - \sigma_{II}| - \sigma_0 \\ ou \\ |\sigma_I - \sigma_{III}| - \sigma_0 \\ ou \\ |\sigma_{III} - \sigma_I| - \sigma_0 \end{array} \right. \quad (\text{II-22})$$

Pour un état de traction uniaxiale où

$$\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0, \text{ on a : } f = \sigma_I - \sigma_0$$

On constate que la contrainte d'écoulement est σ_0 . Le critère de Tresca signifie que la plastification se produit quand le cisaillement maximum atteint une valeur critique $S = \frac{\sigma_0}{2}$. Ce critère peut donc se mettre sous la forme :

$$f = \max_{i,j} (\sigma_i - \sigma_j) - 2S \tag{II-23}$$

Dans l'espace des contraintes principales, la surface d'écoulement du critère de Tresca est un hexagone régulier défini dans le plan perpendiculaire à l'axe $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, et de coté $\frac{2}{\sqrt{3}} = \sigma_0$.

La représentation graphique de ce critère est donnée sur la figure (II-8).

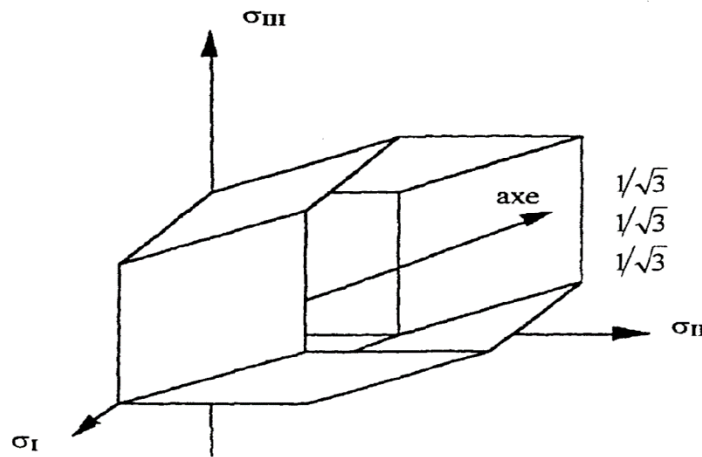


Figure II.8 : Représentation géométrique du critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales

II.8.2 Critère de Von Mises

C'est le critère le plus utilisé, il est applicable à des corps plastiques isotropes tels que les alliages métalliques il est courant d'utiliser ce critère.

Il semble que Von Mises ait eu le projet de construire un critère de plasticité en partant du critère de Tresca et en recherchant une forme analytique plus manipulable. il eut l'idée de construire le cylindre de révolution circonscrit au cylindre à base hexagonale de Tresca. Le seuil de plasticité ici est lié à l'énergie du cisaillement élastique

L'équation de Von Mises est l'équation d'un cylindre à base circulaire axé sur le trisectrice du Repère $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ et de rayon $R = \sigma_0$:

$$f = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 - 2\sigma^2_0 \tag{II-24}$$

Dont la représentation graphique est donnée sur la figure (II-9):

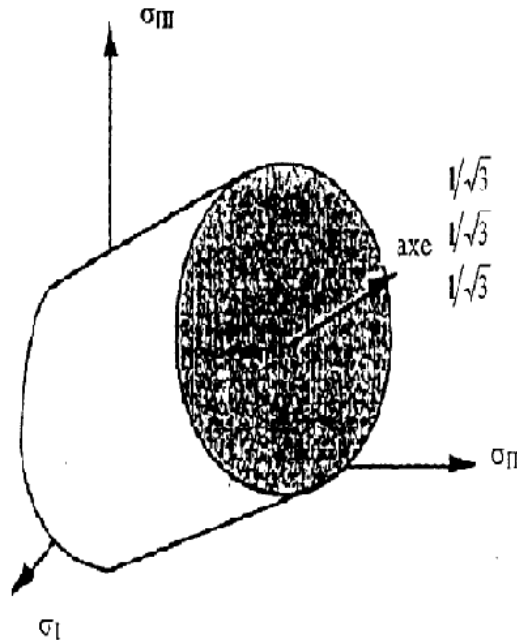


Figure II.9 : Représentation géométrique du critère de Von Mises dans l'espace des contraintes principales

II.9 Représentation matricielle

Dans un régime élasto-plastique, le tenseur de déformation et le tenseur de l'incrément de déformation peuvent être décomposés en composantes de déformations élastiques et plastiques, soit:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \tag{II-25}$$

Et :

$$d\epsilon_{ij} = (d\epsilon_{ij})^e + (d\epsilon_{ij})^p \tag{II-26}$$

Sachant que :

$$(d\epsilon_{ij})^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} \tag{II-27}$$

En substituant l'équation (II-26) à l'équation (II-27), on obtient :

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} + (d\varepsilon_{ij})^p \quad (\text{II-28})$$

Afin de déterminer les déformations totales à partir de l'équation il restera à déterminer les composantes de la déformation plastique.

La modélisation du comportement élasto-plastique nécessite l'introduction d'une fonction d'écoulement définie par une équation de la forme :

$$f(\sigma, k) = f(\sigma) - f(k) = 0 \quad (\text{II-29})$$

Où: σ est le vecteur des contraintes,

k est le paramètre d'écrouissage gouvernant la fonction d'écoulement.

En différenciant l'équation (II-29), on aura :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (\text{II-30})$$

Ou bien :

$$df = a^t d\sigma - Ad\lambda = 0 \quad (\text{II-31})$$

D'où :

$$a^t d\sigma = Ad\lambda \quad (\text{II-32})$$

Avec :

$$a^T = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \right] \quad (\text{II-33})$$

Et :

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial k} dk \quad (\text{II-34})$$

De l'équation (II-32) on peut écrire

$$d\varepsilon = [D]^{-1} d\sigma + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{II-35})$$

Où : D est la matrice usuelle des constants élastiques.

Multiplions l'équation (II-35) par a^T . D , ainsi on aura :

$$a^T . D . d\varepsilon = a^T d\sigma + a^T . D . d\lambda . a \quad (\text{II-36})$$

En substituant l'équation (II-32) dans (II-36), on obtient :

$$d\lambda = \frac{a^T . D . a}{A + a^T . D . a} . d\varepsilon \quad (\text{II-37})$$

Si on pose : $a^T . D . = dD^T$ tel que $dD = D . a$

L'expression (II-37) devient :

$$d\lambda = \frac{dD^T}{A + dD^T . a} . d\varepsilon \quad (\text{II-38})$$

Si l'équation (II-38) est substituée dans (II-35) on aura:

$$d\varepsilon = [D]^{-1} . d\sigma + \frac{a . dD^T}{A + dD^T . a} d\varepsilon \quad (\text{II-39})$$

En élasto-plasticité la relation contrainte déformations est de la forme

$$d\sigma = D_T . d\varepsilon \quad (\text{II-40})$$

Où :

D_T est la matrice élastique tangente.

De l'équation (II-39), on a

$$[D]^{-1} . d\sigma = \left[1 - \frac{a . dD^T}{A + dD^T . a} \right] d\varepsilon \quad (\text{II-41})$$

Ou bien:

$$d\sigma = \left[D - \frac{dD . dD^T}{A + dD^T . a} \right] d\varepsilon \quad (\text{II-42})$$

Par conséquent D_T est identifié par:

$$D_T = D - \frac{dD . dD^T}{A + dD^T . a} \quad (\text{II-43})$$

Dans le cas d'un matériau a comportement élastoplastique, les composantes des contraintes et des déformations sont linéaires reliées par l'expression :

$$\{\sigma\} = [D]_T \cdot \{\varepsilon\} \quad (\text{II-44})$$

La matrice de rigidité $[K]_{;T}$ tangente est déterminée par :

$$[K]^e = \int_V [B]^T [D]_T [B] dv \quad (\text{II-45})$$

Conclusion

Le calcul d'une structure par la méthode des éléments finis exige, pour être efficace, d'accorder le plus grand soin à la phase de modélisation. La précision des résultats dépend de la qualité du modèle, mais également du maillage réalisé.

Aussi, il est recommandé d'effectuer une étude de convergence à partir de la comparaison des résultats issus de maillages plus ou moins affinés.

Enfin, la validation des résultats passe par une analyse des déplacements et des contraintes attestant que les hypothèses de départ (petitesse des déplacements et linéarité de comportement du matériau) ne sont pas mises en défaut.

Chapitre III

Résultats et interprétations

Introduction :

Le but de notre recherche est de faire une analyse par la méthode des éléments Finis l'effet des propagations des fissures sur la taille et la forme de la zone plastique en fond d'entaille dans le cas d'une plasticité confinée.

L'emplacement des fissures ou des entailles latérales sur un même axe ou sur une même direction avec différentes longueurs de fissures peut être qu'il n'a pas les mêmes effets sur la taille et la forme de la zone plastique (plasticité confinée) comparativement à d'autres dans des axes décalés ou sur des directions différentes, cela est l'objet de notre étude et voir tous les cas possibles des fissures dans différentes position (horizontales ou obliques), en négligeant la fissure verticale car son effet est négligeable et tend vers zéro, car sa direction est parallèle au chargement imposé sur notre plaque.

III.1 Présentation du logiciel de calcul

Abaqus 6.11 emploie une technologie de résolution idéale pour les évènements dynamiques lents et statiques, qui exigent des solutions de traitement des contraintes d'une extrême précision. Abaqus est pris en charge dans l'environnement de modélisation pour tous les besoins communs.

Le logiciel Abaqus permet de modéliser les structures par différents types d'éléments bidimensionnels, triangulaires à trois et six nœuds, et quadratiques à quatre nœuds et quadratique à huit nœuds.

Nous trouvons une variété de types de chargements notamment des charges concentrées, des charges uniformément et linéairement réparties ; des chargements dynamiques et des chargements thermiques.

Les résultats pris à tout point d'une exécution peuvent être utilisés comme conditions de départ pour la suite de l'analyse. La flexibilité offerte par cette intégration permet d'appliquer aux parties de l'analyse adaptées à une technique de résolution implicite, comme les analyses de transport statique, dynamique lente ou stationnaire.

III.2 Présentation du model

Notre étude se fait sur une plaque mince d'alliage

D'aluminium 2024 T3, soumise à un effort de traction (figure III.1).

Les propriétés mécaniques de cet alliage sont :

le module de Young $E = 72800 \text{ MPa}$

la contrainte élastique $\sigma_e = 350 \text{ MPa}$

le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$

On a traité le cas d'une plaque entaillée latéralement

par deux entailles, de hauteur $H = 254 \text{ mm}$,

de largeur $W = 127 \text{ mm}$ soit $(H/W = 2)$ et

D'épaisseur $e = 2 \text{ mm}$;

a : la longueur de la fissure est variable.

b : la distance entre les deux têtes de fissures par rapport axe x.

h : la distance entre les deux fissures par rapport axe y.

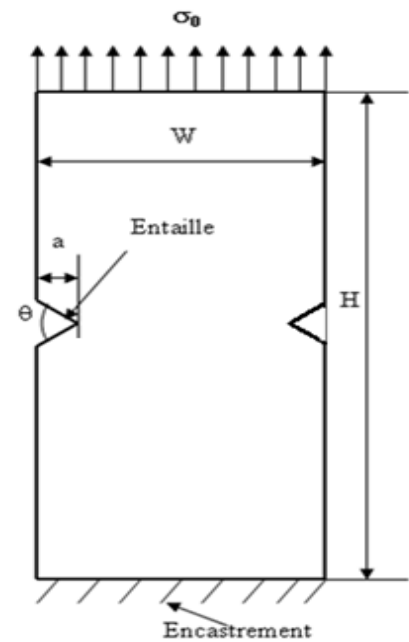
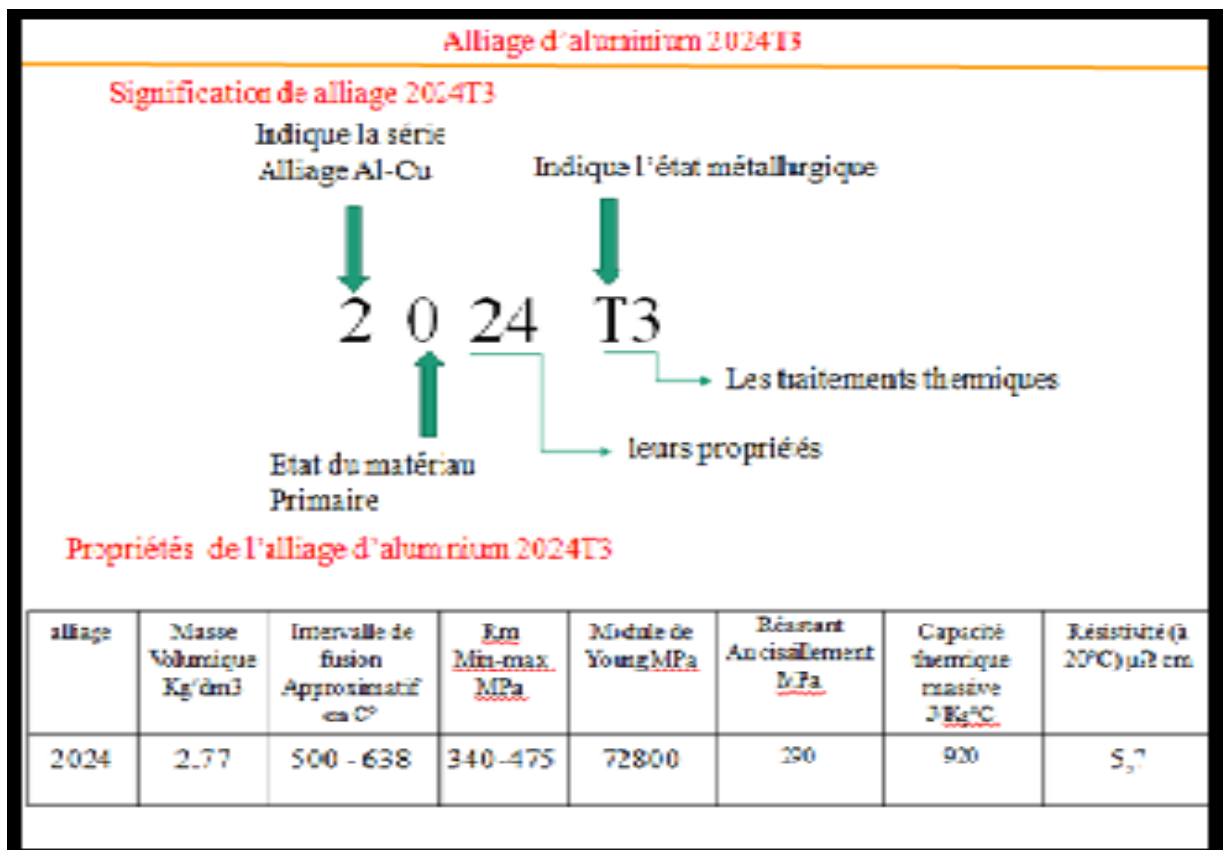


Figure III.1 : Représentation schématique d'une plaque sollicitée en traction.



Maillage triangulaire quadratique à 10noeuds avec 14030 éléments par notre logiciel de calcul Abaqus 6.11

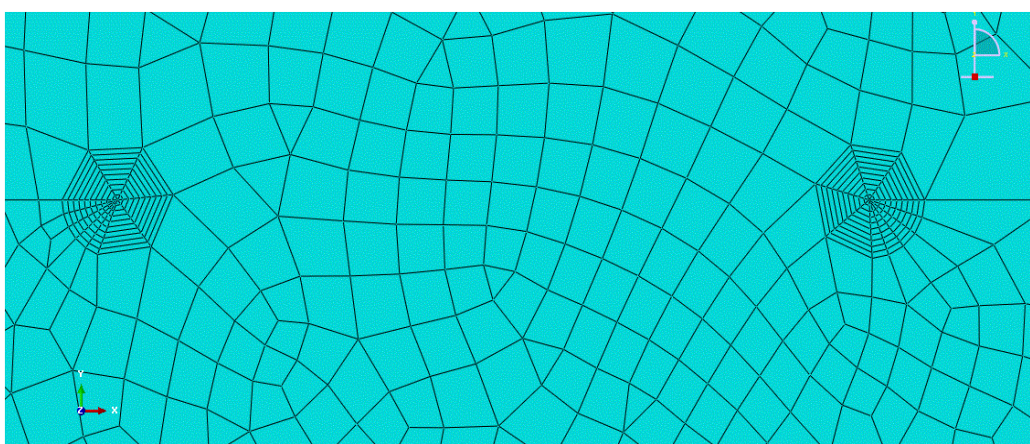


Figure III.2 : Le maillage adapté dans la plaque

III.3 Effet des deux fissures sur la taille de la zone plastique en fond d'entaille

III.3.1 Fissures situées sur un même axe x

La longueur des deux fissures : $a=1.27\text{mm}$

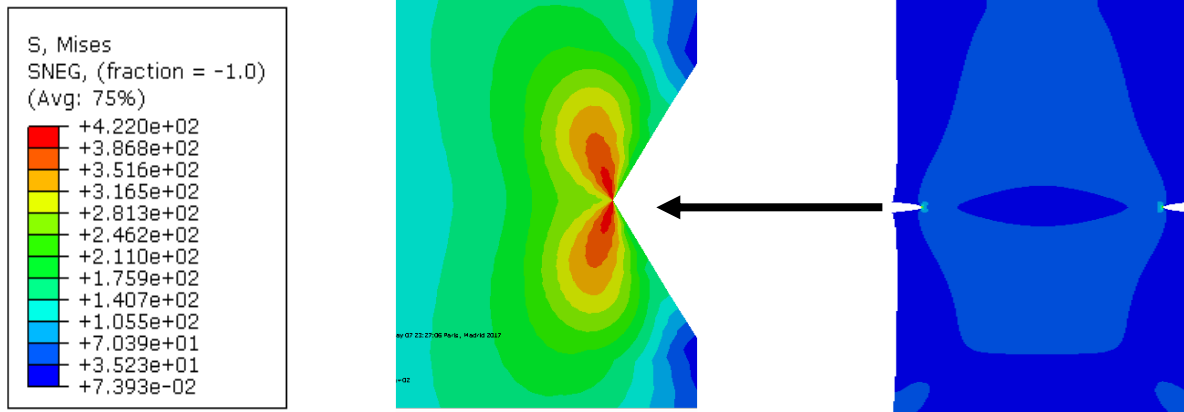


Figure III.3 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

La figure III.3.représente le répartition des contraintes de Von Mises pour les deux fissures situées sur la même direction causées par l'effort de traction sur le partie supérieure, et avec un encastrement sur sa partie inférieure, ces contraintes sont très importantes en tête de fissure qui atteignent environs $4,22.10^2\text{MPa}$ comme contrainte maximale, et commencent à décroître en s'éloignant des têtes de fissures, et la zone affectée est légère vue la longueur de la fissure qui est de l'ordre de 1.27mm.

Pour $a=3\text{mm}$

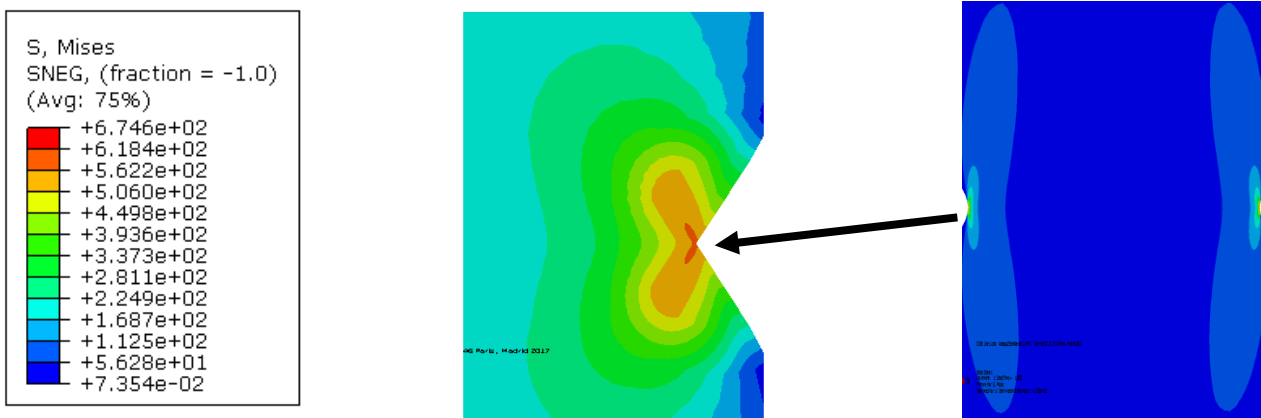


Figure III.4 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

L'effort de traction permet d'ouvrir les lèvres des deux fissures provoquant des zones plastiques confinées en tête de fissure entrainant des contraintes de Von Mises assez importantes par rapport

au cas précédant, cela est dû la longueur des deux fissure qu' est de l'ordre de 3mm, ces deux zones connaissent un élargissement en hauteur, et puisque nous travaillons dans le domaine élastique, ces zone confinées ne causent aucun endommagement si on relâche l'effort de traction , car ces fissures reviennent à leurs état initiales et peuvent être fermées.

Pour $a = 5\text{mm}$

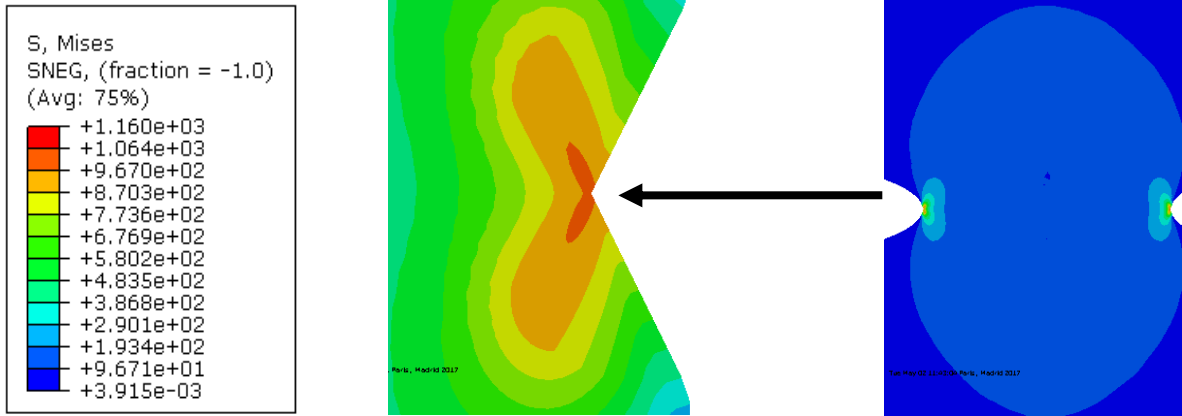


Figure III.5 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

On remarque bien que pour cette longueur de fissure qui est assez importante, que les deux zones plastiques (confinées) sont un peu large et connaissent une certaine propagation dans le sens horizontal, et ces dernières créés sous forme d'un fuseau a contraintes moins importante le long de la hauteur de plaque, cela est dû à l'effet d'intersection des deux zones de contraintes qui ont été sollicitées par ce chargement et par la longueur des deux fissures entrainant une contrainte de Von Mises maximale qui atteint $1.16 \cdot 10^3 \text{MPa}$.

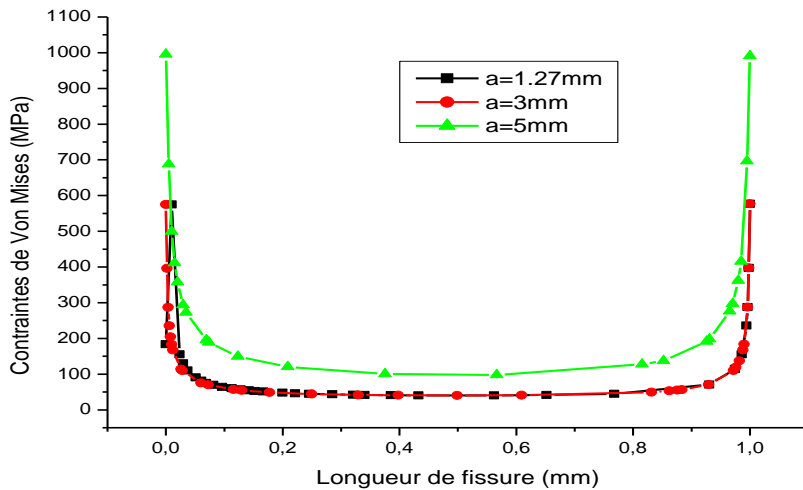


Figure III.6 : Variation de la contrainte de Von Mises en fonction de la longueur de fissure.

La figure III-6 montre la variation de la contrainte de Von misses en fonction de la longueur de fissure pour le cas des fissures situées dans le même axe, dans la partie interne de la plaque, on remarque qu' au fur et à mesure la longueur de l'entaille augmente, automatiquement la contrainte de Von misses en tête de fissure augmente et en s'éloignant de cette dernière jusqu'à l'autre tête de fissure ,d'où elle reconnait une augmentation similaire à la première entaille ,d'où on conclu ,que en

tête du fissure ,toutes les contraintes proches du chargement , qui fait solliciter l'entaille la plus proche atteignent des valeurs optimales .

III.3.2 Fissures situées sur deux axes différents

Pour **a=1.27mm** et **h=0.5mm**

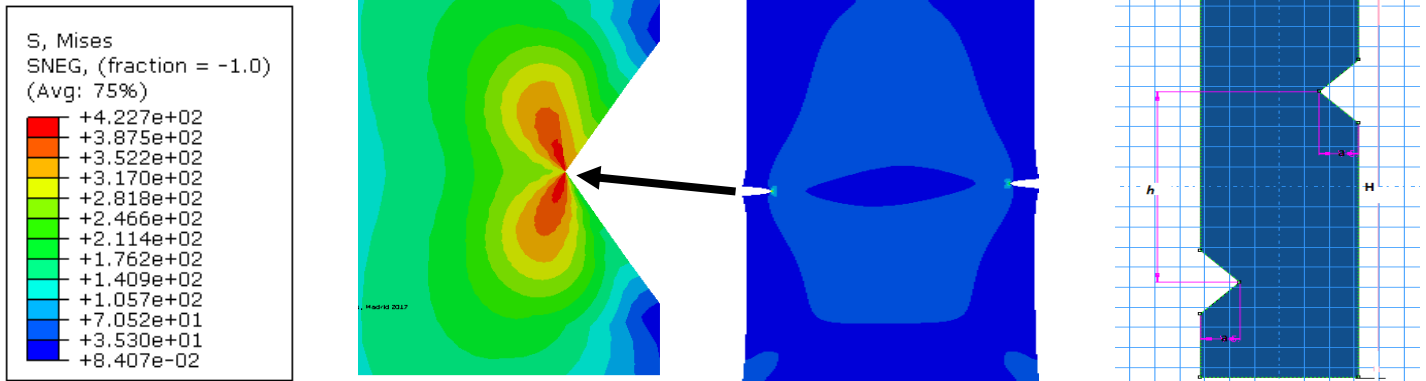


Figure III.7 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

L'effet des deux zones affectées pour ces deux fissures décalées de h=0.5mm, est peu remarquable comparativement à ces deux fissures dans le même direction, vue la contrainte maximale des deux cas qui sont à-peu-près égales 4,22. 10² MPa pour le premier cas, et 4,227. 10²MPa pour ce cas), cela s'explique par le décalage qui n'est assez important et par la longueur des deux fissures qui est éventuellement faible

Pour **a=1.27 mm** et **h=1mm**

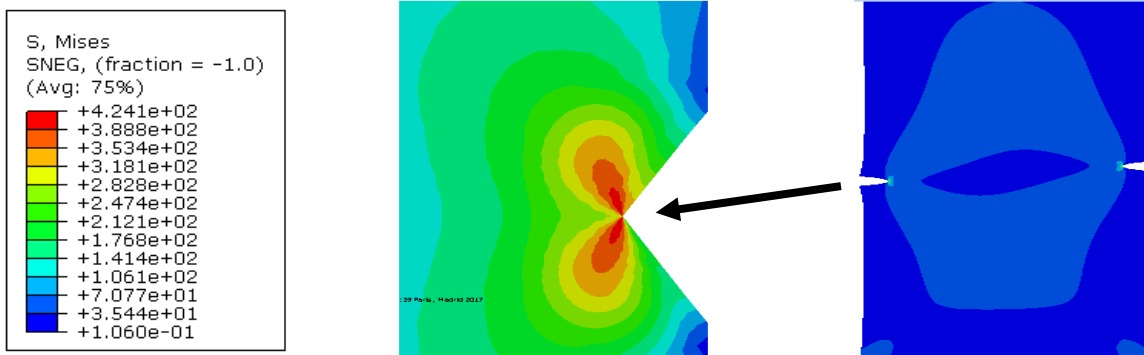


Figure III.8 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

L'ouverture des lèvres de la fissure supérieur est assez remarquable par rapporte à celle située à gauche, cela est dû au rapprochement de la fissure supérieure au chargement de traction selon la loi de HOOKE : $\sigma=E.\epsilon$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{d' où} \quad \Delta l = \frac{\sigma.l}{E}$$

On remarque bien que cette ouverture est en fonction de la longueur ou l'emplacement de la fissure par rapport à l'effort de traction dans un domaine bien sûr élastique la contrainte maximale connaît un peu d'élévation et atteint environ $4,241.10^2$ MPa.

La création d'un fuseau de champs de faibles contraintes et une zone au milieu qui connaît des contraintes nulles.

Pour $a=1.27\text{mm}$ et $h=2.82\text{mm}$

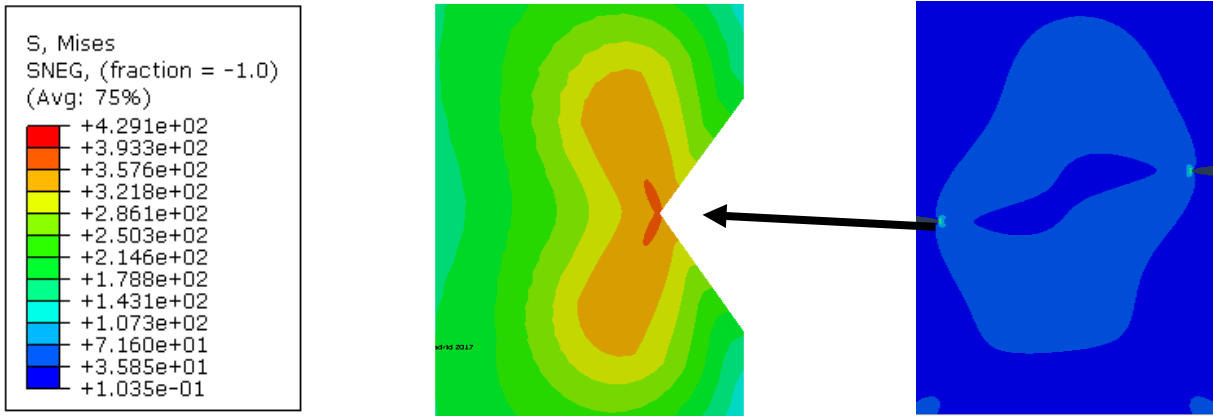


Figure III.9 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Le décalage des deux fissures est assez remarquable vu le changement de la forme du fuseau intermédiaire causé par la coalition des deux petites zones de contraintes, qui tend à s'incliner, causant une zone au milieu sous forme d'un (S) à très faibles contraintes, cela est dû à l'effort de fraction qui tend à ouvrir les lèvres des deux fissures et les sollicite progressivement, et provoque des contraintes maximales de Von Mises qui atteignent environ $4,29.10^2$ MPa en tête de fissure, et en s'éloignant de cette dernière, ces contraintes connaissent une réduction en intensité.

Pour $a=1.27\text{mm}$ et $h=5.64\text{mm}$

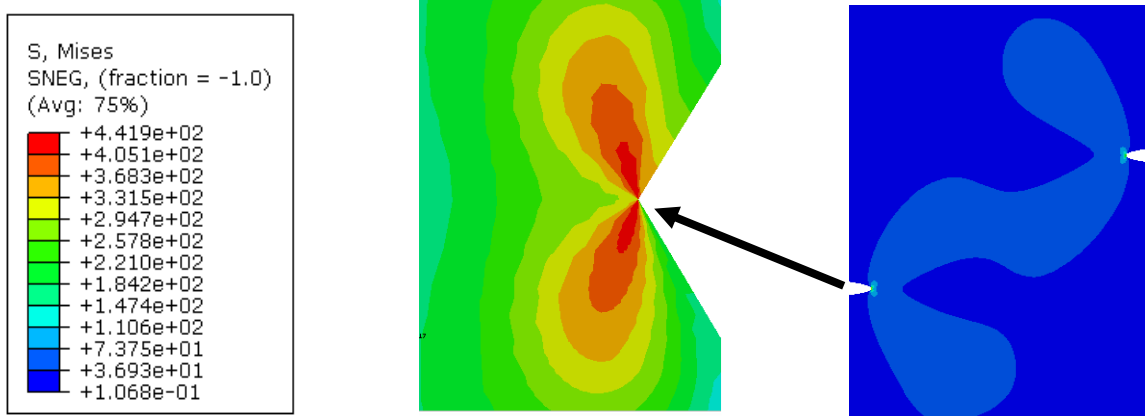


Figure III.10 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

La distinction des deux zones plastiques affectées en têtes des deux fissures est assez claire, cela est dû au décalage des deux fissures, ces zones puis qu'elles sont sous des ailes des papillons,

connaissent un contact léger, pour la fissure supérieure dans sa partie inférieure, et la fissure inférieure dans son flanc supérieure, n’entraînant aucun danger à la propagation de fissures, on remarque aussi que la fissure supérieure est beaucoup plus sollicitée par l’effort de traction, vue sa position très proche à l’effort et la contrainte maximale atteint environ $4,42.10^2\text{MPa}$, en tête de fissure.

Remarque :

pour ces trois cas pour une longueur de fissure $a=1.27\text{mm}$, les contraintes maximales de Von Mises connaissent une élévation d’intensité en approchant de l’effort de traction, cela montre l’application de la loi de Hooke : $\sigma=E.\epsilon$ et par conséquent, au fur et à mesure que la fissure s’approche de l’effort, l’ouverture de ses lèvres est assez importante et la contrainte de Von Mises augmente aussi.

Pour $a=3\text{mm}$ et $h=0.5\text{mm}$

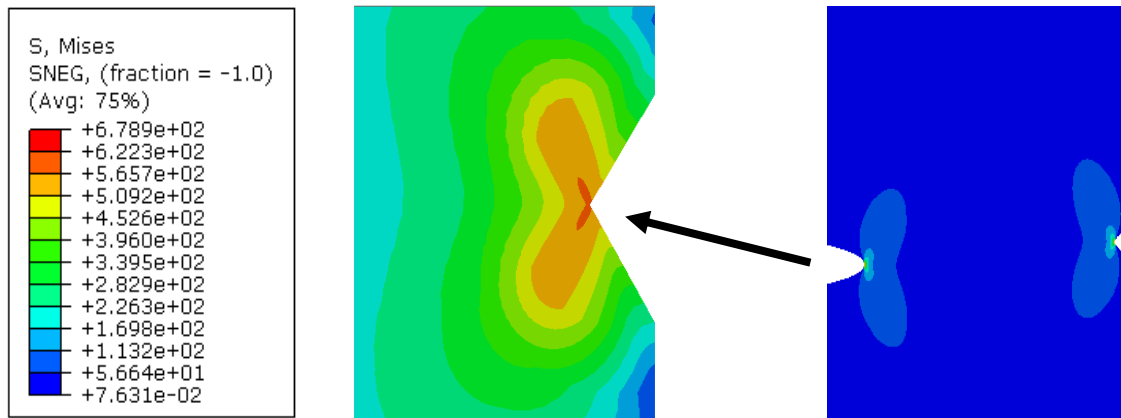


Figure III.11 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

La première constatation est que la contrainte maximale est assez importante qui est de l’ordre de $6,79. 10^2\text{MPa}$, cela s’explique par la longueur de la fissure qui assez important, et aussi par l’ouverture des lèvres des deux fissures qui plus important relativement aux cas précédents, donc l’amorçage des fissures crée un champs de contraintes très élevées au voisinage des têtes des fissures et peut aussi entrainer la propagation de fissure si on peut aller au domaine élasto plastique, qui n’est pas notre cas, car nous travaillons dans le domaine élastique qui régit à la loi de Hooke, ces zones-là n’ont pas de grande influence d’endommagement pour notre cas, mais elles le sont au-delà du domaine élastique.

Pour $a=3\text{mm}$ et $h=1\text{mm}$

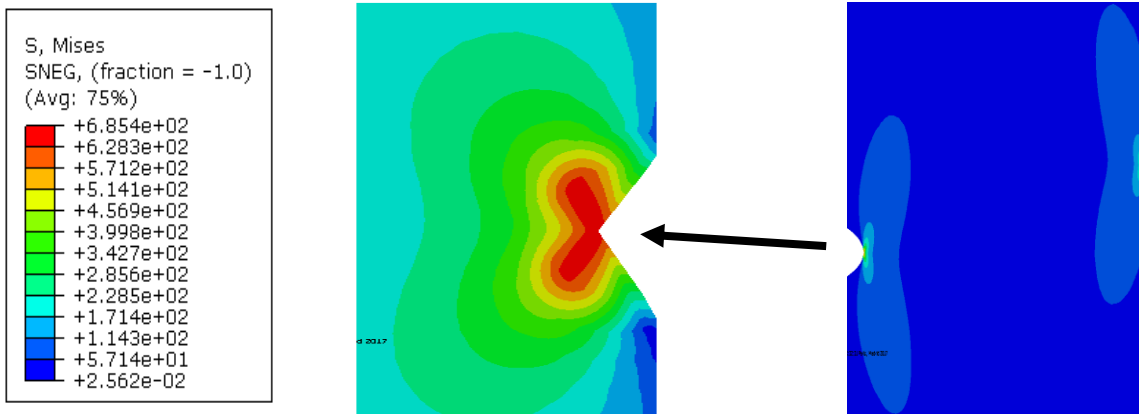


Figure III.12 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Les deux zones de contraintes de Von Mises connaissent un élargissement en hauteur, vu la longueur des fissures assez importantes, et surtout pour la fissure ou l'entaille supérieure qui est proche de l'effort de traction, cette fissure ou entaille est sollicitée par une contrainte maximale de Von Mises de l'ordre de $6.85 \cdot 10^2 \text{MPa}$ comparativement à celle de la fissure importante, car le chargement de traction pourra être mieux important sur la fissure supérieure que pour celle qui est inférieure, cela s'explique par sa position très proche et sur tout en ajoutant la longueur de la fissure assez importante.

Pour $a=3\text{mm}$ et $h=2.82\text{mm}$

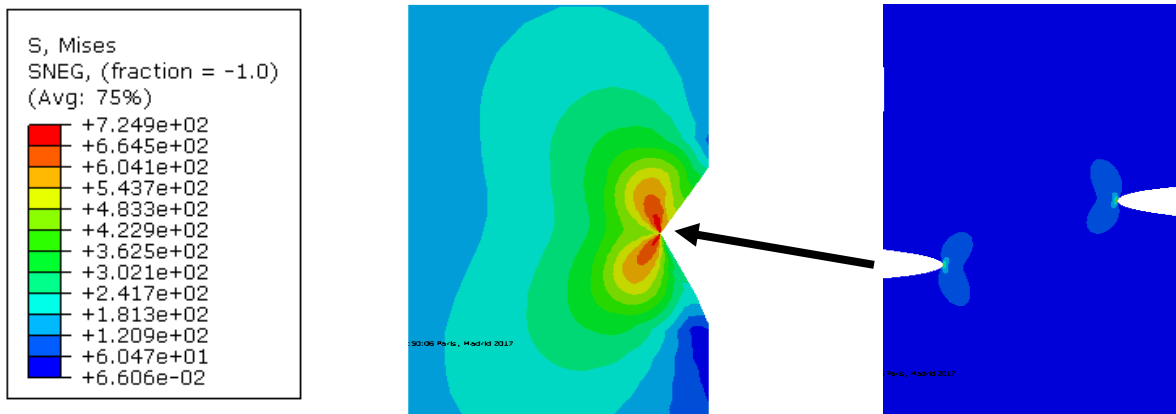


Figure III.13 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

Dans ce cas les zones affectées sont séparées due à l'écart de positionnement, et connaissent leurs formes naturelles (papillons), l'influence d'une entaille par rapport à l'autre est vraiment négligeable, mais la contrainte de Von Mises maximale atteint $6.24 \cdot 10^2 \text{MPa}$ en tête de fissure.

Pour $a=3\text{mm}$ et $h=5.64\text{mm}$

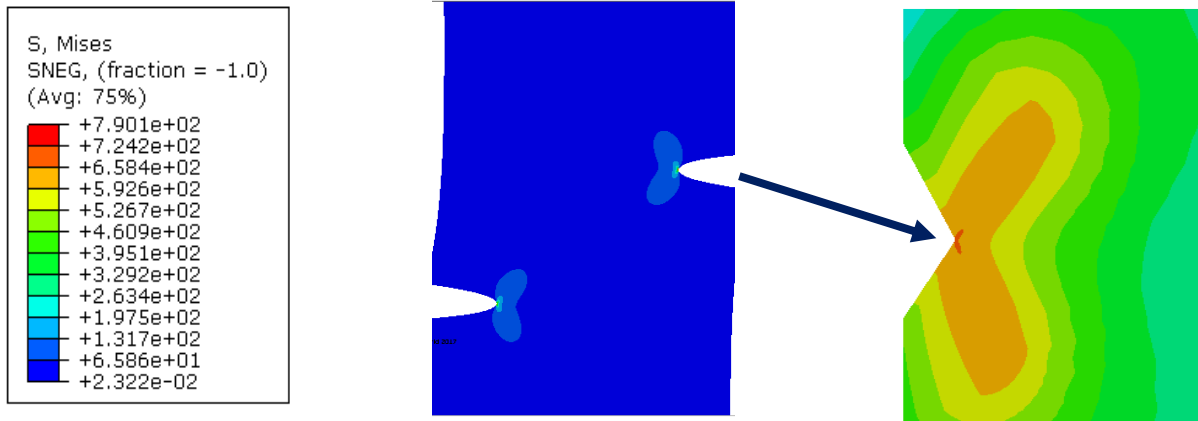


Figure III.14 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

La figure suivante nous montre que l’ouverture des deux fissures sont assez remarquable, et la contrainte maximale est de l’ordre $7,901.10^2\text{MPa}$ qui est assez importante plus qu’ elle est localisée en tête de fissure supérieure, qui est d’une position plus proche à l’effort de traction, et l’amorçage de ces deux fissure est assez important, sur tout pour la fissure supérieure, pour des sollicitations assez importantes, supérieures la limite élastique pour cet alliage d’aluminium 2024T3 qui est de l’ordre de $\sigma_e=350\text{MPa}$

Pour $a=5\text{mm}$ et $h=0.5\text{mm}$

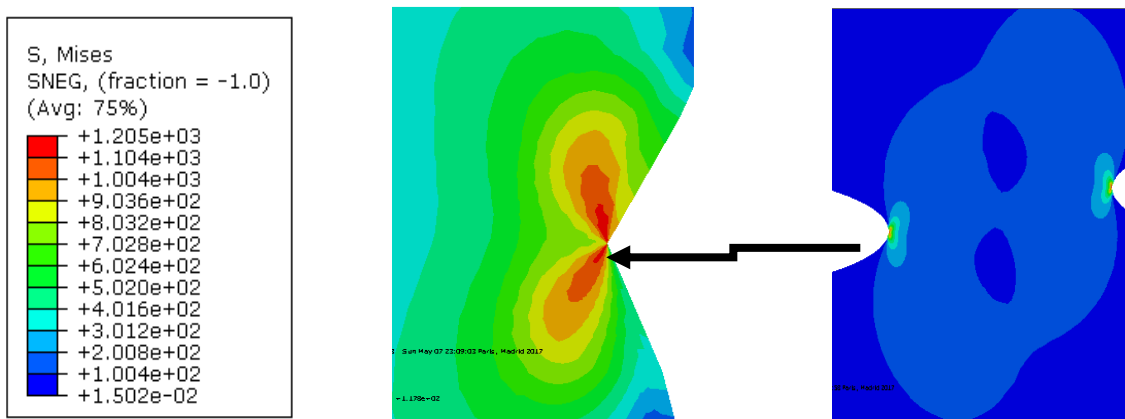


Figure III.15 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

L’effet de la longueur de fissure est assez remarquable ,vue la coalition des deux zones de contraintes pour les deux entailles et vue le décalage qui est moins important , donc ces deux zones forment une zone intermédiaire a faibles intensités de contraintes qui est un peu spéciale ou on remarque , al intérieure de cette zone de contraintes intermédiaire ,,deux autres zones a contrainte

maximale connaît une évolution d'ordre $1,205.10^3$ MPa ,surtout pour la fissure supérieure qui est très sollicitée par rapport à la fissure intérieure

Pour a=5mm et h=1mm

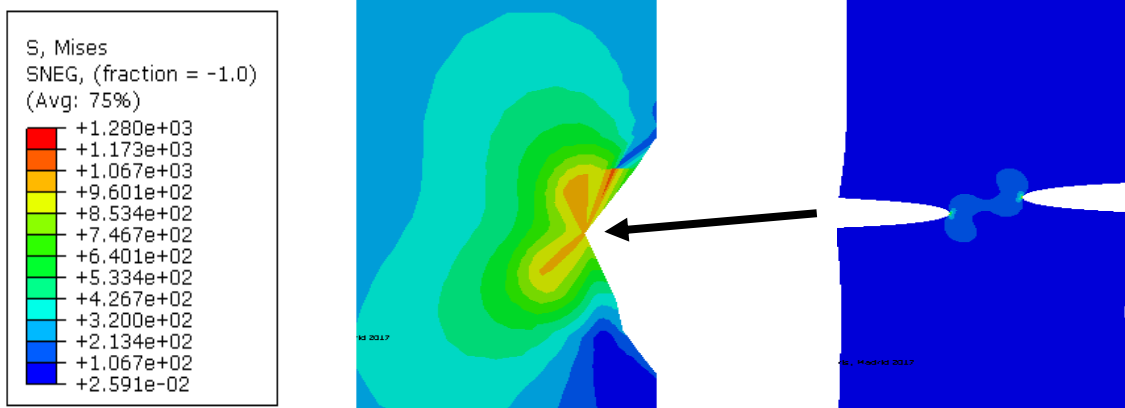


Figure III.16 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises
 Dans ce cas, on remarque qu'il y a un contact léger entre les deux zones plastiques, vue la longueur importante des bleus fissures qui présente un champ de contraintes très élevée en tête de fissure qui est présente par une contrainte maximale de Von Mises qui peut excéder les $1,280.10^3$ MPa qui peuvent amorcer les fissures d'où la présence d'un risque pour les deux fissures.

Pour a=5mm et h=2.82mm

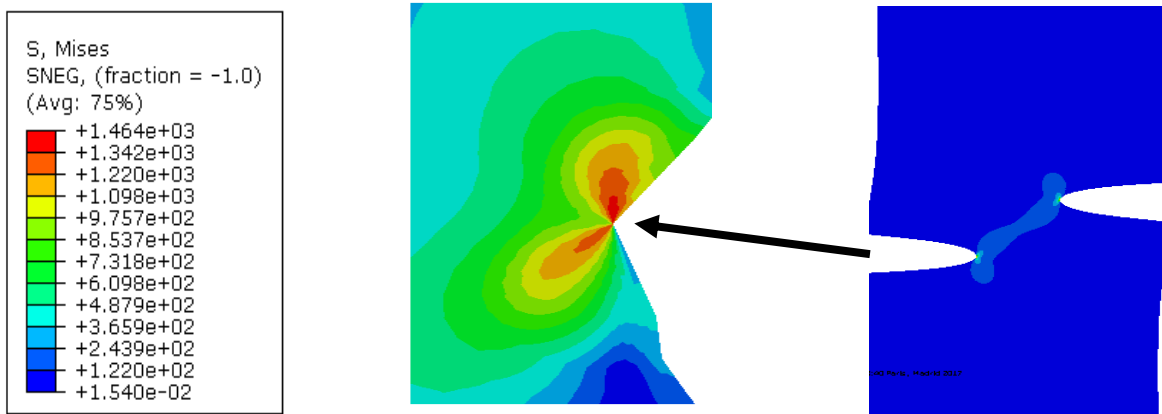


Figure III.17 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

La première constatation est que les deux zones plastiques présentent une distinction remarquable mais avec un léger contact des deux zones dans leurs régions à faible contraintes car le champ des contraintes importante est situé au niveau des fonds de fissure en taille et ce contact est loin de celui n'entraînant aucun risque de coalition des deux entailles mais chaque fissure peut avoir une propagation vue sa longueur qui est un peu importante et surtout pour entaille supérieure qui est proche au chargement de traction qui a connue à sa tête de fissure une contrainte de $1,464.10^3$ MPa

Pour $a=5\text{mm}$ et $h=5.64\text{mm}$

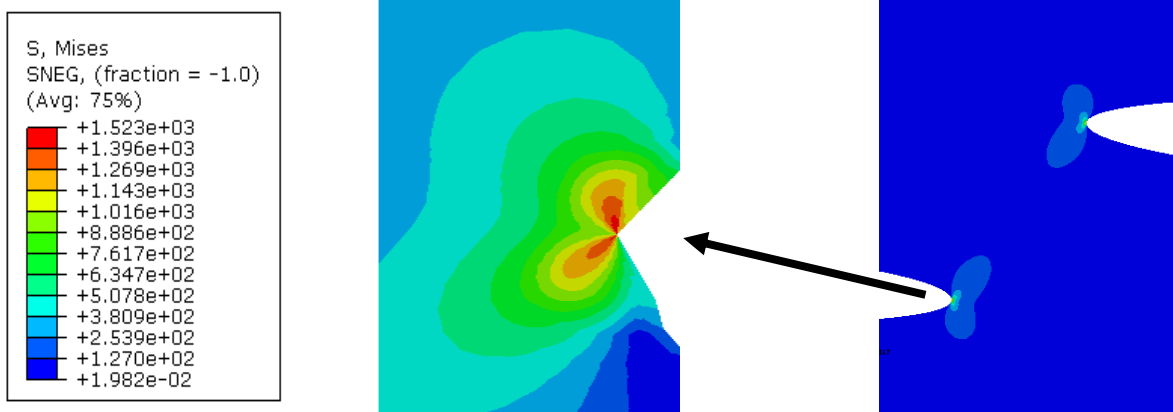


Figure III.18 : Configuration de la zone plastique avec répartition des contraintes de Von Mises

La fissure supérieure connaît une ouverture assez large de ses lèvres, en dépit de sa position qui est très proche par rapport au chargement de traction et en dépit de sa longueur assez importante qui est trop sollicitée causant des contraintes de Von Mises très élevées en tête de fissure de l'ordre de $1.52 \cdot 10^3$ MPa, mais pour les deux zones plastiques sont distinctes de part et d'autre et connaissent un allongement du sens du chargement de traction.

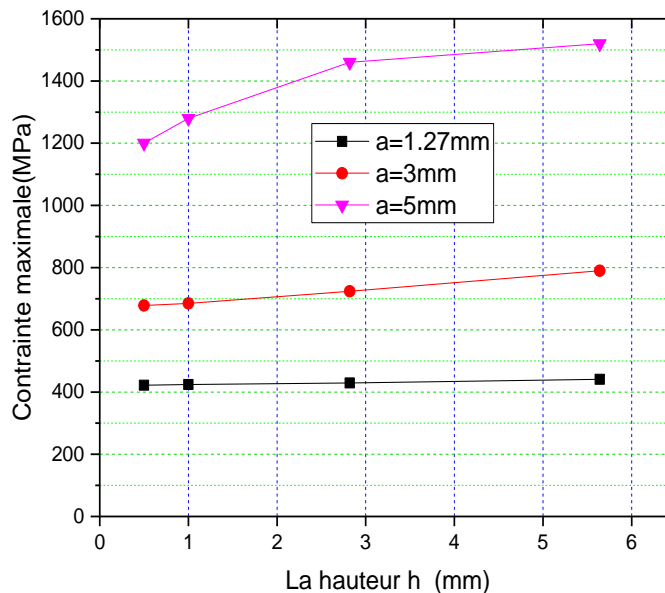


Figure III.19 : Variations des contraintes de Von Mises en fonction de la hauteur entre les deux fissures

La figure III-19 montre la variations des contraintes de Von Mises en fonction de la hauteur entre les deux fissures pour deux fissures décalées ,on constate pour une longueur de fissure de

$a=1.27\text{mm}$, et quel que soit la hauteur du décalage entre les fissures, la contrainte maximale induite en fond d'entaille est presque constante, dépassant les 400MPa , tandis que pour une longueur $a=3\text{mm}$, on distingue une légère évolution de la contrainte maximale de Von Mises en allant vers la hauteur progressive jusqu'à $h=5.64\text{ mm}$ cela est dû à la présence de la fissure près du chargement de traction sur la partie supérieure de la plaque.

Conclusion

Pour les fissures placées sur un même axe, il n'y a pas de risque de rupture de la plaque vue la longueur de fissure assez minimale et vue notre travail dans le domaine élasto-plastique.

Pour les fissures décalées, pour des tailles de fissures minimales, nous n'avons pas aucun risque d'amorçage de fissure, mais pour des fissures assez importantes, nous constatons que le danger vient de la fissure plus proche du chargement surtout pour une longueur de fissure assez importante

Conclusion générale

Conclusion générale

Notre travail a été réalisé sur une plaque présentant deux fissures latérales ou entailles situées dans la même direction et pour deux axes différents avec différentes longueurs afin de voir l'effet de la position et de la taille des fissures sur la forme et la taille de la zone plastique confinée en fond d'entaille et de pouvoir éviter le risque d'amorçage de fissure et la concentration de contraintes .

On peut conclure que :

Pour des fissures situées sur un même axe, L'effort de traction permet d'ouvrir les lèvres des deux fissures provoquant des zones plastiques confinées en tête de fissure entraînant des contraintes de Von Mises assez importantes par rapport au cas précédant, cela est dû la longueur des deux fissures, on remarque qu' au fur et à mesure la longueur de l'entaille augmente, automatiquement la contrainte de Von mises en tête de fissure augmente et en s'éloignant de cette dernière jusqu'à l'autre tête de fissure ,d'où elle reconstruit une augmentation similaire à la première entaille ,d'où on conclut ,que en tête de fissure ,toutes les contraintes proches du chargement , qui fait solliciter l'entaille la plus proche atteignent des valeurs optimales .

Pour des fissures situées dans deux axes deux axes différents, la distinction des deux zones plastiques affectées en têtes des deux fissures est assez claire, cela est dû au décalage des deux fissures, ces zones puis qu' elles sont sous des ailes des papillons, connaissent un contact léger, pour la fissure supérieure dans sa partie inférieure, et la fissure inférieure dans son flanc supérieure, n'entraînant aucun danger à la propagation de fissures, on remarque aussi que la fissure supérieure est beaucoup plus sollicitée par l'effort de traction, vue sa position très proche à l'effort et la contrainte maximale.

La fissure supérieure connaît une ouverture assez large de ses lèvres, en dépit de sa position qui est très proche par rapport au chargement de traction et en dépit de sa longueur assez importante qui est trop sollicitée causant des contraintes de Von Mises très élevées en tête de fissure, mais pour les deux zones plastiques sont distinctes de part et d'autre et connaissant un allongement du sens chargement de traction.

En perspective, ces fissures peuvent être absorbées par l'effet de réparation par le collage par patch pour pouvoir diminuer les concentrations de contraintes en fond d'entaille ou de créer un trou ou une inclusion devant chaque entaille pour pouvoir arrêter la propagation de fissure et éviter le phénomène d'amorçage de fissure.



REFERENCES

REFERENCES

- 1.1 Feddersen. C.E. " Evaluation and prediction of residual strength of center cracked tension panels". ASTM STP 486, p 50 , (1970).
- 1.2 Griffith .A.A Phil Trans. Roy. Soc. London, A.221, pp163-198, (1920).
- 1.3 Neuber H ; "Kerbspannungs lehre Springer, Berlin, (1958), "(in German).
- 1.4 Roark, R.J ; "Roark's Formulas for stress and strain".
6th Edition MacGraw-Hill International Editions, (1989).
- 1.5 Boukharouba. T, Tamine .T, Nui.L, Chehimi.C .Pluvinage G ;
"The use of notch stress intensity factor as a fatigue crack initiation parameter".
Engng. Fract. Mech, Vol N°. 3, pp 503-512, (1995).
- 1.6 . Peterson.R.E ;
"Notch Sensitivity" . Metal Fatigue, (Edited by G.Sines & J.L. Waisman), MacGraw Hill,
New-York, (1959).
- 1.7 Hardrath. H.F and Ohman .L ;
" A study of elastic and plastic stress concentration factors due to notches and cracks on flat
plates". NACA-Report 1117, (1953).
- 1.8 A. Buch.,
"Analytical approach to size and notch size effects in fatigue of material specimens".
Materials Science and Engineering, Vol. 15, pp 75-85, (1974).
- 1.9 Brandt A; " Calcul des pièces à la fatigue par la méthode du gradient ".Editeur CETIM,
(1980).
- 1.10 Heywood.R. B ; " Designing by photo-elasticity". Chapman and Hall, London,(1952).

Résumé

Le but de notre recherche est de faire une analyse par la méthode des éléments finis l'effet des propagations des fissures sur la taille et la forme de la zone plastique en fond d'entaille dans le cas d'une plasticité confinée.

L'emplacement des fissures ou des entailles latérales sur un même axe ou sur une même direction avec différentes longueurs de fissures peut être qu'il n'a pas les mêmes effets sur la taille et la forme de la zone plastique (plasticité confinée) comparativement à d'autres dans des axes décalés ou sur des directions différentes, cela est l'objet de notre étude et voir tous les cas possibles des fissures dans différentes position (horizontales ou obliques), en négligeant la fissure verticale car son effet est négligeable et tend vers zéro, car sa direction est parallèle au chargement imposé sur notre plaque.

والهدف من بحثنا هو إجراء تحليل باستخدام طريقة العناصر المحدودة تأثير انتشار الشقوق على حجم وشكل المنطقة من البلاستيك في الجزء السفلي من الشق في حالة اللدونة المحصورة.

موقع الشقوق أو الفتحات الجانبية على نفس المحور أو على نفس الاتجاه مع أطوال مختلفة من الشقوق يمكن أن يكون أن لا يكون له نفس التأثير على حجم وشكل المنطقة البلاستيك (تقتصر اللدونة) مقارنة البعض في محاور تعويض أو اتجاهات مختلفة، ذلك هو موضوع دراستنا ومعرفة جميع الحالات الممكنة من الشقوق في موضع آخر (أفقي أو مائل)، لكنها تتجاهل صدع رأسي لأن تأثيرها لا يكاد يذكر و يميل إلى الصفر، لأن اتجاهه هو مواز للتحميل المفروضة على لوحة لدينا.